บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อให้ได้มาซึ่งค่าของความปลอดภัยและตัวคูณน้ำหนักบรรทุกนั้น แบ่งออกเป็น 3 ส่วนใหญ่ ๆ คือ ทฤษฎีทางสถิติศาสตร์ ทฤษฎีความน่าจะเป็น และทฤษฎีความน่าเชื่อถือทางโครงสร้าง ซึ่งแยกกล่าวรายละเอียด ดังต่อไปนี้

3.1 ทฤษฎีทางสถิติศาสตร์

ทฤษฎีที่ 1 ถ้ามีข้อมูลขนาด n ข้อมูล คือ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ จะสามารถหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลขนาด n ข้อมูลได้ คือ

$$\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3.1)$$

และมีค่าความแปรปรวน

$$s^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (3.2)$$

สมการ (3.2) นั้น คำนึงถึงความเอนเอียง (Bias) ของข้อมูลด้วย ถ้าไม่คำนึงถึงความเอนเอียง จะได้ค่าความแปรปรวน

$$s^2 = 1/n \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (3.3)$$

และค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน

$$\delta = s/\bar{x} \qquad (3.4)$$

3.2 ทฤษฎีความน่าจะเป็น

เนื่องจากงานในด้านวิศวกรรมนั้น จะต้องยุ่งอยู่กับจำนวนตัวเลขและสูตรต่าง ๆ มากมาย ซึ่งการที่จะได้ตัวเลขและสูตรต่าง ๆ เหล่านั้นจะต้องมีการเก็บข้อมูล ศึกษา ทดลอง จากตัวอย่างจำนวนมาก แล้วจึงสรุปออกมาเป็นแบบจำลองต่าง ๆ เพื่อจะใช้แทนพฤติกรรมจนกระทั่งออกมาเป็นสูตรที่ใช้ในการคำนวณ แต่การได้มาซึ่งข้อมูลต่าง ๆ ตลอดจนการทดลองนั้นจะประกอบไปด้วยความไม่แน่นอนและความไม่สมบูรณ์ (Uncertainty & Imperfection) ต่าง ๆ มากมาย ซึ่งจะส่งผลให้ความเชื่อถือในข้อมูลหรือในสูตรไม่เป็นไปอย่างเต็มที่ แต่จะอยู่ในรูปของความน่าจะเป็นไปได้ ดังนั้นการคำนวณและการออกแบบในทางวิศวกรรม จึงควรที่จะมีพื้นฐานจากความน่าจะเป็น

3.2.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)

คือฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งถูกกำหนดขึ้นโดยแต่ละสมาชิกที่อยู่ในกลุ่มตัวอย่าง เช่น X = 0, 1, 2 เมื่อ X เป็นจำนวนครั้งที่เกิดหัว จากการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง เป็นต้น นิยมเขียนตัวแปรสุ่มด้วยอักษรตัวใหญ่ และค่าของตัวแปรสุ่มด้วยอักษรตัวเล็ก

3.2.1.1 ตัวแปรสุ่มตัวเดียว

ก. การกระจายความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มตัวเดียว

ถ้าให้ x เป็นตัวแปรสุ่ม การกระจายความน่าจะเป็นสามารถอธิบาย โดยใช้ฟังก์ชันการกระจายสะสม (Cumulative Distribution Function, CDF) คือ

$$F_x(x) \equiv P(X \leqslant x) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } x \qquad (3.5)$$

$P(X \leqslant x)$ คือ ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

แต่ตัวแปรสุ่มอาจเป็นได้ทั้งแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องอย่างเดียว หรือไม่ต่อเนื่องอย่างเดียว หรือเป็นทั้งชนิดต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่องรวมกัน ดังรูปที่ 3.1

ถ้าตัวแปรสุ่ม X เป็นชนิดไม่ต่อเนื่อง การกระจายความน่าจะเป็นสามารถอธิบายอยู่ในรูปของฟังก์ชันมวลของความน่าจะเป็น (Probability Mass Function, PMF) ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันแบบง่าย ๆ คือ P(X=x) สำหรับทุกค่าของ x และจะได้ฟังก์ชันของการกระจายสะสมคือ

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{\text{all } x_i \leqslant x} P(X = x_i) = \sum_{\text{all } x_i \leqslant x} p_X(x_i) \qquad (3.6)$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม X เป็นชนิดต่อเนื่อง การกระจายความน่าจะเป็นจะสามารถอธิบายอยู่ในรูปของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density Function, PDF) ให้ $f_X(x)$ คือ PDF ของ X ความน่าจะเป็นของ X ในช่วง (a,b] คือ

$$P(a < X \leqslant b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \qquad (3.7)$$

และฟังก์ชันของการกระจายสะสมคือ

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx \qquad (3.8)$$

ซึ่งฟังก์ชันใด ๆ ก็ตามที่จะใช้แทนการกระจายความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มได้ต้องเป็นไปตามกฎเกณฑ์ของความน่าจะเป็นคือ สำหรับทุก ๆ เหตุการณ์ (E) ในเหตุการณ์ที่พิจารณา (S) จะได้

ก) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ E ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0

ข) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่แน่นอน S มีค่าเท่ากับ 1

ค) สำหรับเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ซึ่งแยกจากกัน จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ 1 หรือเหตุการณ์ 2 มีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ 1 รวมกับความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ 2

ดังนั้นฟังก์ชันที่พิจารณาจึงต้องไม่เป็นค่าลบ และความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมดต้องรวมกันเป็น 1 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้า $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันของการกระจายสะสมของ X จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

ก) $F_X(-\infty) = 0$ และ $F_X(+\infty) = 1$

ข) $F_X(x) > 0$ และมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มากขึ้น

ค) ฟังก์ชันจะต่อเนื่องกันทุกค่าของ x

จากสมการ (3.7) สามารถเขียนเป็น

$$P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$

ถ้า X ไม่ต่อเนื่องจะได้

$$P(a < X \leq b) = \sum_{\text{all } x \leq b} p_X(x_i) - \sum_{\text{all } x \leq a} p_X(x_i)$$

และจากสมการ (3.6) และ (3.8) จะได้

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \qquad (3.9)$$

ข. <u>ตัวแปรหลักของตัวแปรสุ่มตัวเดียว</u>

ลักษณะของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มจะถูกอธิบายได้อย่างสมบูรณ์ ถ้าทราบรูปแบบการกระจายของฟังก์ชัน และตัวแปรหลักของตัวแปรสุ่มนั้น แต่ในทางปฏิบัติบางครั้งรูปแบบการกระจายของฟังก์ชันไม่อาจทราบได้ จึงต้องอาศัยเพียงตัวแปรหลักของตัวแปรสุ่มประมาณลักษณะความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแทน และถ้าทราบรูปแบบการกระจายของฟังก์ชัน ตัวแปรหลักเหล่านี้ก็จะสามารถบอกได้ถึงคุณสมบัติของตัวแปรสุ่มของฟังก์ชันนั้นได้ด้วย

<u>ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวัง</u> (Mean or Expected Value)

เนื่องจากค่าของตัวแปรสุ่มนั้นเป็นกลุ่มของค่าหลาย ๆ ค่าหรือเป็นช่วง ดังนั้นจึงควรสนใจค่ากลางบางค่าแทน เช่น ค่าเฉลี่ย และเนื่องจากค่าที่แตกต่างกันของตัวแปรสุ่มมีค่าความน่าจะเป็นที่ต่างกันด้วย จึงต้องคำนึงถึงค่าเฉลี่ยโดยน้ำหนัก

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมี PMF = $P_X(x_i)$ เป็นค่าเฉลี่ยโดยน้ำหนักจะได้ค่าเฉลี่ย คือ

$$\mu_x \equiv E(X) = \sum_{\text{all } x_i} x_i p_X(x_i) \qquad (3.10)$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมี PDF = $f_X(x)$ เป็นค่าเฉลี่ยโดยน้ำหนัก จะได้ค่าเฉลี่ย คือ

$$\mu_x \equiv E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\, dx \tag{3.11}$$

<u>ค่าความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน</u> (Variance and Standard Deviation)

ใช้วัดการกระจายของตัวแปรสุ่มเมื่อเทียบกับค่ากลางว่าตัวแปรสุ่มเหล่านั้นมีค่ามากหรือน้อยกว่าค่ากลางเพียงใด

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมี PMF = $P_x(x_i)$ จะได้ค่าความแปรปรวนของ X คือ

$$Var(X) = E[(X - \mu_x)^2] = \sum_{all\ x_i} (x_i - \mu_x)^2 p_x(x_i) \tag{3.12}$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมี PDF = $f_x(x)$ ค่าความแปรปรวนของ X คือ

$$Var(X) = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x)\, dx \tag{3.13}$$

$$= E(X^2) - \mu_x^2 \tag{3.14}$$

$E(X^2)$ คือ ค่าเฉลี่ยกำลังสอง

เพื่อให้การวัดการกระจายสะดวกขึ้น จึงใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ซึ่งมีค่าเท่ากับกรณ์ที่ 2 ของค่าความแปรปรวน คือ

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)} \tag{3.15}$$

แต่อาจจะเป็นสิ่งยากที่จะบอกว่าการกระจายของตัวแปรสุ่มนั้นมีค่ามากหรือน้อย ถ้าอาศัยเพียงค่าความแปรปรวนหรือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ทั้งนี้เพราะค่ากลางที่ไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงควรวัดการกระจายโดยคำนึงถึงค่ากลางด้วย ซึ่งเรียกว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน (Coefficient of Variation, δ)

$$\delta_x = \sigma_x/\mu_x \tag{3.16}$$

3.2.1.2 ตัวแปรสุ่มตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

ก. การกระจายความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

โดยอาศัยพื้นฐานจากตัวแปรสุ่มตัวเดียวและการกระจายความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มตัวเดียว จะสามารถขยายออกเป็นการกระจายของตัวแปรสุ่มตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม 2 ตัว $(X = x, Y = y)$ และ $(X \leqslant x, Y \leqslant y)$ จะเป็นเหตุการณ์ร่วมที่ถูกกำหนดโดยค่าของตัวแปรสุ่มในระนาบ 3 มิติ (xy-space) และจะได้

$$F_{X,Y}(x,y) \quad = \quad P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{3.17}$$

ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นสะสมของการเกิดขึ้นร่วมกับของเหตุการณ์ $X \leqslant x$ และ $Y \leqslant y$ โดยต้องมีเงื่อนไข คือ

1. $0 \leqslant F_{X,Y}(x,y) \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x และ y
2. $F_{X,Y}(x,y)$ จะต่อเนื่องใน x และ y และเพิ่มขึ้นตาม x และหรือ y

สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ฟังก์ชันการกระจายความน่าจะเป็นร่วม อาจอธิบายด้วย PDF ร่วมคือ

$$f_{X,Y}(x,y) \quad = \quad \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \text{ถ้าหาอนุพันธ์ได้} \tag{3.18}$$

ความน่าจะเป็นสะสมร่วม คือ

$$F_{X,Y}(x,y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dydx \tag{3.19}$$

และ

$$P(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) \quad = \quad \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f_{X,Y}(x,y)\, dyxy \tag{3.20}$$

สมการ (3.20) ก็คือปริมาตรภายใต้พื้นผิว f(x,y)

ถ้า x, y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชั่นการกระจายความน่าจะเป็นร่วม อาจอธิบายด้วย PMF ร่วมคือ

$$p_{X,Y}(x,y) \quad = \quad P(X = x, Y = y) \tag{3.21}$$

ความน่าจะเป็นสะสมร่วม คือ

$$F_{X,Y}(x,y) \quad = \sum_{(x_i \leq x,\, y_i \leq y)} p_{X,Y}(x_i,y_i) \tag{3.22}$$

แต่ความน่าจะเป็นที่ X = x อาจขึ้นอยู่กับค่าของ Y หรือในทางกลับกัน จากทฤษฎีความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข [7] สำหรับตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง จะได้ PMF แบบมีเงื่อนไข คือ

$$p_{X|Y}(x|y) \quad \equiv \quad P(X = x|Y = y) \quad = \quad \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \tag{3.23a}$$

โดยที่ $P_Y(y) \neq 0$ และเช่นเดียวกันจะได้

$$p_{Y|X}(y|x) \quad = \quad \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \tag{3.23b}$$

โดยที่ $P_X(x) \neq 0$

และ $p_Y(y) = \sum_{\text{all } x_i} p_{X,Y}(x_i,y)$ $\quad p_X(x) = \sum_{\text{all } y_i} p_{X,Y}(x,y_i)$ เป็นมาร์จิแนล PMF ของ Y และ X ตามลำดับ

สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะได้ PDF แบบมีเงื่อนไข คือ

$$f_{X|Y}(x|y) \quad = \quad \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{3.24a}$$

โดยที่ $f_Y(y) \neq 0$

$$f_{Y|X}(y|x) \quad = \quad \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \tag{3.24b}$$

และ $f_X(x) \neq 0$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ และ $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ เป็นมาร์จิแนล PDF ของ Y และ X ตามลำดับ

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน (Statistically Independent) จะได้

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \tag{3.25a}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y) \tag{3.25b}$$

ข. <u>ตัวแปรหลักของตัวแปรสุ่มตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป</u>

<u>ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนและความสัมพันธ์ร่วมกัน</u> (Mean, Covariance and Correlation)

สำหรับตัวแปรสุ่ม 2 ตัว คือ X และ Y จะมีค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวัง คือ

ถ้าเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะได้

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \tag{3.26a}$$

ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง จะได้

$$E(XY) = \sum_{\text{all } x_i, \text{all } y_j} x_i y_j p_{X,Y}(x_i, y_j) \tag{3.26b}$$

และถ้า X, Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$E(XY) = E(X)\cdot E(Y) \tag{3.27}$$

มีค่าความแปรปรวนร่วมคือ

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= E(XY) - E(X)\cdot E(Y) \end{aligned} \tag{3.28}$$

และค่าสัมประสิทธิ์ของความสัมพันธ์ร่วม คือ

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{3.29}$$

ค่าของ $\rho_{X,Y}$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ +1 นั่นคือ $-1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1$

แต่ถ้า X, Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้ $Cov(X,Y) = 0$ และ $\rho_{X,Y} = 0$

3.2.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม

สูตรต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณทางวิศวกรรมนั้นส่วนใหญ่จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัวซึ่งการที่จะหาการกระจายของฟังก์ชันที่ประกอบไปด้วยตัวแปรหลาย ๆ ตัวนั้นค่อนข้างซับซ้อนและยากต่อการคำนวณมาก [7] จึงจำเป็นต้องอธิบายลักษณะความน่าจะเป็นของฟังก์ชันอยู่ในรูปของตัวแปรหลักต่าง ๆ แต่กระนั้นก็ตามค่าตัวแปรหลักเหล่านี้ก็คำนวณหาได้ค่อนข้างยาก ถ้าฟังก์ชันไม่อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น ซึ่งจะต้องใช้วิธีประมาณแทน

ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน คือ $g(X)$ ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของ $g(X) = E[g(X)]$ ซึ่งหาได้จากสมการ (3.11) เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx \tag{3.30}$$

และถ้าฟังก์ชันประกอบไปด้วยตัวแปรสุ่มหลายตัว เช่น $Z = g(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n)$ จะได้ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน Z คือ

$$E(Z) = E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$$

จากสมการ (3.30) ได้

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \tag{3.31}$$

<u>ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของฟังก์ชันตัวแปรสุ่มเชิงเส้น</u>

ถ้าให้ $$Y = a_1X_1 \pm a_2X_2$$

a_1, a_2 เป็นค่าคงที่

จากสมการ (3.31) จะได้ค่าเฉลี่ย คือ

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (a_1x_1 \pm a_2x_2) f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

จากมาร์จิแนล PDF ของสมการ (3.24) จะได้

$$E(Y) = a_1E(X_1) \pm a_2E(X_2)$$

และจากสมการ (3.13) ค่าความแปรปรวน

$$Var(Y) = E\{[(a_1X_1 \pm a_2X_2) - (a_1\mu_X \pm a_2\mu_X)]^2\}$$

$$= a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) \pm 2a_1a_2Cov(X_1,X_2)$$

ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีตัวแปรสุ่ม n ตัว คือ

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$$

จะได้ค่าเฉลี่ย

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i) \tag{3.32}$$

ค่าความแปรปรวน

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_jCov(X_i,X_j) \tag{3.33a}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_{x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j} \tag{3.33b}$$

โดยที่ $\rho_{ij} = 1$ สำหรับ $i=j$ และ $-1 \leqslant \rho_{ij} \leqslant 1$ สำหรับ $i=j$

และถ้า X_i, X_j เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}(X_i) \tag{3.33c}$$

<u>ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของฟังก์ชันตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นเชิงเส้น</u>

ถ้าให้ $$Y = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$

กระจาย g(....) ออกเป็นอนุกรมเทเลอร์ในรูปของค่าเฉลี่ย จะได้

$$g(X_1, X_2, ..., X_n) = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, ..., \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_{X_i}) \frac{\partial g}{\partial X_i}$$

$$+ 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} + ...$$

ถ้าไม่คำนึงถึงเทอมที่มีอันดับสูง จะได้ค่าประมาณของค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน คือ

$$E(Y) \simeq g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, ..., \mu_{X_n}) \tag{3.34}$$

$$\mathrm{Var}(Y) \simeq \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \, \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \tag{3.35a}$$

โดยที่ $c_i = \frac{\partial g}{\partial X_i}$ และทั้ง g และ X_i อยู่ในรูปของค่าเฉลี่ย

และถ้า X_i, X_j เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$\mathrm{Var}(Y) \simeq \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathrm{Var}(X_i) \tag{3.35b}$$

3.3 ทฤษฎีความน่าเชื่อถือทางโครงสร้าง

เนื่องจากความไม่แน่นอนต่าง ๆ ของข้อมูลตลอดจนความไม่สมบูรณ์ของแบบจำลองและสูตรดังที่กล่าวในหัวข้อ 3.1 ทำให้การคำนวณหาค่าของน้ำหนักบรรทุกและความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกที่แน่นอนเป็นไปไม่ได้ แต่จะสามารถบอกได้เพียงในเชิงของความน่าเชื่อถือหรือความน่าจะเป็นที่ระดับหนึ่ง ๆ ว่า ความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกจะสามารถต้านทานน้ำหนักบรรทุกที่มากที่สุดในช่วงอายุการใช้งานเท่านั้น ดังนั้นเมื่อคำนึงถึงความไม่แน่นอนต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริงแทนน้ำหนักบรรทุกและความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุก ให้อยู่ในรูปของตัวแปรสุ่มซึ่งจะทำให้ความน่าเชื่อถือของโครงสร้างถูกวัดด้วยความน่าจะเป็นไปได้ ดังนี้คือ

ถ้าให้ X = ความสามารถในการรับน้ำหนัก

Y = น้ำหนักบรรทุกที่กระทำ

จะพบว่า การที่ $X>Y$ คือสภาพที่ส่วนของโครงสร้างหรือองค์อาคารนั้นยังคงใช้งานได้ แต่ถ้า $X<Y$ ก็คือสภาพที่ส่วนของโครงสร้างหรือองค์อาคารนั้นไม่สามารถใช้งานได้ต่อไป และถ้าสมมติว่า การกระจายความน่าจะเป็นของ X และ Y สามารถหาค่าได้ จะได้

$$p_F = P(X < Y) = \sum_{\text{all } y} P(X < Y|Y = y)\, P(Y = y) \tag{3.36}$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระแก่กัน จะได้

$$P(X < Y|Y = y) = P(X < Y) \tag{3.37}$$

ถ้า X และ Y เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ความน่าจะเป็นที่เกิดการวิบัติอยู่ในรูปของฟังก์ชันการกระจายความน่าจะเป็น (PDF) ร่วม คือ

$$p_F = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{y} f_{X,Y}(x,y)\, dx\right] dy \tag{3.38}$$

จากสมการที่ (3.25a) จะได้

$$p_F = \int_0^\infty \left[\int_0^y f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\right] dy \qquad (3.39)$$

$$p_F = \int_0^\infty F_X(y)\, f_Y(y)\, dy \qquad (3.40)$$

โดยที่ p_F = ความน่าจะเป็นที่เกิดการวิบัติ

$P(X)$ = ความน่าจะเป็นที่จุด X ใด ๆ

$F_X(y)$ = ฟังก์ชันการกระจายสะสมของ X ที่มีค่าน้อยกว่า y

$F_Y(y)$ = ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ Y ที่ค่า y

สมการ (3.40) สามารถแสดงแทนได้ด้วยรูปที่ 3.2

จากรูปที่ 3.2 ส่วนที่ซ้อนกันของกราฟ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ จะสามารถใช้แทนปริมาณของความน่าจะเป็นที่เกิดการวิบัติได้อย่างประมาณ และถ้าพิจารณาในรูปที่ 3.3 และ 3.4 จะพบว่า

ก) ปริมาณส่วนที่ซ้อนกันของกราฟจะขึ้นกับตำแหน่งของ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ ซึ่งอาจวัดได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยของ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ ดังรูปที่ 3.3

ข) ปริมาณส่วนที่ซ้อนกันของกราฟจะขึ้นกับลักษณะการกระจายมากหรือน้อยของ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ ซึ่งลักษณะการกระจายมากหรือน้อย จะสามารถวัดด้วยค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน ดังรูปที่ 3.4

ฉนั้น จะพบว่า

$$p_F \approx g(\mu_X, \mu_Y, \delta_X, \delta_Y)$$

จากสมการที่ (3.39) พบว่าการที่จะหาความน่าจะเป็นที่เกิดการวิบัติได้นั้นต้องทราบลักษณะการกระจายของ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้ว ข้อมูลต่าง ๆ อาจจะไม่เพียงพอที่จะคำนวณหา ได้แต่อาจเพียงพอในการคำนวณเพียงค่าตัวแปรหลักเท่านั้นหรือถึงแม้จะเพียงพอ การคำนวณก็จะทำได้ยากจึงมีผู้ศึกษา ค้นคว้า หาวิธีเพื่อใช้วัดค่าความปลอดภัยของโครงสร้างโดยอาศัยเพียงตัวแปรหลัก และใช้ลักษณะการกระจายแบบปกติสมมูลย์ (Equivalent normal) แทนลักษณะการกระจายที่มิได้เป็นแบบปกติ [8] เรียกวิธีนี้ว่า "วิธีโมเมนต์ที่สอง (Second moment)"

3.3.1 วิธีโมเมนต์ที่สอง (Second-moment)

ถ้าให้

$$g(\tilde{X}) = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{3.41}$$

โดยที่ $\tilde{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรของสมการ (3.41) และเรียก $g(\tilde{X})$ ว่าเป็นฟังก์ชันสภาวะ (State or Performance Function) ซึ่งอาจกำหนดให้ $g(\tilde{X}) = 0$ เป็นฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัด (Limit-state function) ที่ต้องการพิจารณา

ถ้าสมการ (3.41) เป็นฟังก์ชันผลต่างระหว่างความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกกับน้ำหนักบรรทุกที่กระทำ จะได้

$[g(\tilde{X}) > 0]$ คือสภาวะปลอดภัย

และ $[g(\tilde{X}) < 0]$ คือสภาวะวิบัติ

จากฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัดที่ $g(\tilde{X}) = 0$ นั้น จะเป็นลักษณะของพื้นผิวที่มี n มิติและอาจเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็น พื้นผิววิบัติ (Failure Surface) ดังนั้น ถ้าฟังก์ชันการกระจายความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปร $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็น $f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะได้ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการวิบัติ คือ

$$p_F = \int_{g(\tilde{X})<0} f_{\tilde{X}}(\tilde{X})\, d\tilde{X} \tag{3.42}$$

สมการที่ (3.42) จะทำการคำนวณได้ยากดังที่กล่าวมาข้างต้น แต่ถ้าเปลี่ยนตัวแปรจากสมการที่ (3.42) ให้เป็นตัวแปรใหม่ ซึ่งเราเรียกว่า ตัวแปรลด (Reduced Variables) คือ

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \qquad i = 1,2,...,n \qquad (3.43)$$

ก็จะได้ขอบเขตของสภาวะปลอดภัยและสภาวะวิบัติในสภาพของตัวแปรลด ดังรูปที่ 3.5

และได้ฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัด คือ

$$g(\sigma_{X_1}X'_1 + \mu_{X_1},...,\sigma_{X_n}X'_n + \mu_{X_n}) = 0 \qquad (3.44)$$

จากรูปที่ 3.5 จะพบว่า ฟังก์ชันพื้นผิววิบัติหรือฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัด จะสามารถทำให้ขอบเขตสภาวะปลอดภัยและขอบเขตสภาวะวิบัติเปลี่ยนไป ถ้าฟังก์ชันสภาวะขีดจำกัดออกห่างจากจุดตัดของแกนมากขึ้นและในทางกลับกัน ฉะนั้นจึงอาจใช้ระยะระหว่างฟังก์ชันพื้นผิววิบัติกับจุดตัดของแกนเป็นตัวบอกค่าความปลอดภัยได้ และ Shinozuka ,1983 [8] ได้พิสูจน์ให้เห็นว่า "จุดที่อยู่บนพื้นผิววิบัติซึ่งมีระยะสั้นที่สุดจากจุดตัดแกนจะเป็นจุดที่มีความน่าจะเป็นที่จะเกิดการวิบัติมากที่สุด"

ถ้าให้ $\tilde{X} = (X'_1, X'_2,...,X'_n)$ เป็นจุดอยู่บนพื้นผิววิบัติ ฉนั้นจะได้ระยะจากจุด $\tilde{X}'$ ไปยังจุดตัดแกน คือ

$$D = \sqrt{X_1'^2 + ... + X_n'^2}$$

เขียนเป็นเวคเตอร์ได้ $= (\tilde{X}'^T\tilde{X}')^{1/2}$

สมมติให้ $(x_1'^*,x_2'^*,...,x_n'^*)$ เป็นจุดบนพื้นผิววิบัติที่มีระยะทางไปยังจุดตัดแกนสั้นที่สุดซึ่งจะหาได้โดยการหาระยะทาง,D,ที่สั้นที่สุด โดยมีเงื่อนไข $g(\tilde{X}) = 0$ อาศัยวิธีตัวคูณของลากรานจ์ (Lagrange's Multiplier) จะได้

$$L = D + \lambda g(\tilde{X})$$

หรือ $$L = (\tilde{X}'^T\tilde{X}')^{1/2} + \lambda g(\tilde{X})$$

เขียนในรูปสเกลาร์ จะได้

$$L = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots.. + X_n'^2} + \lambda g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

โดยที่ $X_i = \sigma_{x_i} X_i' + \mu_{x_i}$

หาค่า L ที่น้อยที่สุดโดยหาอนุพันธ์ของ L เทียบกับ X_i' แล้วให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial L}{\partial X_i'} = \frac{X_i'}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots.. + X_n'^2}} + \frac{\lambda \partial g}{\partial X_i'} = 0 \quad ; i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.45)$$

และ $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \qquad (3.46)$$

แต่สมการที่(3.45) และ(3.46) จะได้ค่าของระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดวิบัติไปยังจุดตัดแกน [8] คือ

$$d_{min} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i'^* \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}} = \beta \qquad (3.47)$$

ซึ่ง $\frac{\partial g}{\partial X_i'}$ จะคำนวณที่จุด $(x_1'^*, x_2'^*, \ldots, x_n'^*)$ และได้จุดวิบัติคือ

$$x_i'^* = -\alpha_i^* \beta_i \quad ; i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.48)$$

โดยที่

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}} \qquad (3.49)$$

α_i^* คือ โคซายน์แสดงทิศทางเทียบกับแกน x_i'

แต่ถ้าการกระจายความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่เป็นแบบปกติ จะใช้การกระจายแบบสมมูลย์ปกติแทน ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยใช้แปลงของโรเซนบลัตต์ (Rosenblatt Tranformation) [8] มีหลักการอยู่ว่า ค่าความน่าจะเป็นสะสมและค่าความแปรปรวนของการกระจายแบบสมมูลย์ปกติ ณ จุดที่เกิดการวิบัติ, x_1^* บนพื้นผิววิบัติจะมีค่าเท่ากับค่าความน่าจะเป็นสะสมและค่าความน่าจะเป็นของการกระจายแบบปกติ นั้นคือ

$$\Phi\left(\frac{x_1^* - \mu_{x_1}^N}{\sigma_{x_1}^N}\right) = F_{x_1}(x_1^*) \tag{3.50}$$

โดยที่ μ_x^N , σ_x^N = ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการกระจายแบบสมมูลย์ปกติของ X_1

$F_x(x_1^*)$ = ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ X_1 ที่จุด x_1^*

$\Phi(-)$ = ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการกระจายแบบปกติมาตรฐาน

และ
$$\frac{1}{\sigma_{x_1}^N}\,\phi\left(\frac{x_1^* - \mu_{x_1}^N}{\sigma_{x_1}^N}\right) = f_{x_1}(x_1^*) \tag{3.51}$$

โดยที่ $\phi(-)$ = ฟังก์ชันการกระจายของความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน

จากสมการที่ (3.50) จะได้

$$\mu_{x_1}^N = x_1^* - \sigma_{x_1}^N \Phi^{-1} [F_{x_1}(x_1^*)] \tag{3.52}$$

จากสมการที่ (3.51) จะได้

$$\sigma_{x_1}^N = \frac{\phi \{ \Phi^{-1} [F_{x_1}(x_1^*)] \}}{f_{x_1}(x_1^*)} \tag{3.53}$$

ฉนั้นในกรณีที่การกระจายของตัวแปรสุ่มไม่เป็นแบบปกติจะได้ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของฟังก์ชันการกระจายแบบสมมูลย์ปกติ ดังสมการที่ (3.52) และ (3.53)

วิธี Second-moment ที่กล่าวมานี้ ถ้าเป็นกรณีที่ฟังก์ชัน $g(\tilde{X})$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจะให้ค่าของความปลอดภัย, β ค่อนข้างแน่นอน แต่ถ้าฟังก์ชัน $g(\tilde{X})$ ไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

แล้วค่าของความปลอดภัยจะเป็นเพียงค่าประมาณ ซึ่งได้จากระยะระหว่างจุดตัดแกนกับจุดวิบัติที่อยู่บนระนาบที่สัมผัสกับพื้นผิววิบัติจริง ณ จุดวิบัติ โดยถือว่าระนาบที่สัมผัสนั้นเปรียบเสมือนเป็นพื้นผิววิบัติ ค่าความปลอดภัยที่ได้นั้นจะอยู่บนส่วนที่ให้ผลปลอดภัยหรือไม่ (Safe or Unsafe Side) จะขึ้นอยู่กับลักษณะของพื้นผิววิบัติจริง ดังแสดงในรูปที่ 3.6

แต่ในการออกแบบนั้น สิ่งที่ต้องการศึกษาอาจจะเป็นค่าของตัวคูณสำหรับน้ำหนักบรรทุก ค่าของตัวคูณสำหรับกำลังแทนค่าความปลอดภัย ฉนั้นถ้าพิจารณาจากรูปที่ 3.7 จะพบว่าพื้นผิววิบัติมีได้หลายพื้นผิวขึ้นอยู่กับค่าความปลอดภัยที่ต้องการ และถ้าให้ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ เป็นค่าตัวคูณสำหรับน้ำหนักบรรทุกและสำหรับกำลัง

จากฟังก์ชันพื้นผิววิบัติ $g(X) = 0$ พิจารณาที่จุดวิบัติ จะได้ $g(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = 0$ และอาศัยสมการที่ (3.47) และ (3.48) จะสามารถคำนวณหา $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ ได้ ซึ่งค่าตัวคูณสำหรับน้ำหนักบรรทุกและสำหรับกำลังจะหาได้โดย

$$\gamma_1 = \frac{X_1^*}{X_{1,nominal}} \tag{3.54}$$

3.3.2 <u>วิธีการประมาณอันดับที่หนึ่ง</u> (First Order Approximation) [9]

ถ้าให้ $Z = g(X_1, X_2, \ldots . X_n)$

โดยที่ Z คือฟังก์ชันสภาวะ และพิจารณาเพียงตัวแปร 2 ตัว คือความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกและน้ำหนักบรรทุก ซึ่งให้มีค่าเป็น X และ Y ตามลำดับ จะได้

$$Z = g(X,Y)$$

และสภาวะวิบัติ คือ

$$X = Y$$

$$X/Y = 1$$

$$\ln(X/Y) = 0$$

ถ้าให้ $Z = \ln(X/Y)$

โดยที่ X และ Y เป็นอิสระแก่กัน และอาศัยการประมาณอันดับหนึ่ง จะได้

$$\mu_Z \approx \ln(\mu_X/\mu_Y)$$

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\Omega_X^2 + \Omega_Y^2}$$

และจะได้ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการวิบัติ คือ

$$p_F = \Phi\left(\frac{-\ln(\mu_X/\mu_Y)}{\sqrt{\Omega_X^2 + \Omega_Y^2}}\right)$$

นอกจากนี้ถ้าให้ β = ค่าความปลอดภัย จะสามารถคำนวณหาค่าตัวคูณสำหรับน้ำหนักบรรทุก ซึ่งสมมติให้ไม่มีค่าความเอนเอียง คือ

$$\gamma_{Y_i} = e^{0.75\beta\alpha\Omega_{Y1}}$$

โดยที่ γ_{Y1} = ค่าตัวคูณสำหรับน้ำหนักบรรทุก Y_1

Ω_{Y1} = ค่าความไม่แน่นอนสำหรับน้ำหนักบรรทุก Y_1

α = ค่าคงที่คำนวณได้จาก

$$(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \ldots + \bar{Y}_n)e^{0.75\beta\Omega_Y} = \bar{Y}_1 e^{0.75\beta\alpha\Omega_{Y1}} + \ldots + \bar{Y}_n^{0.75\beta\alpha\Omega_{Yn}}$$

$\bar{Y}_1$ = ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักบรรทุก Y_1

Ω_Y = ค่าความไม่แน่นอนสำหรับน้ำหนักบรรทุกรวม

3.3.3 ความไม่แน่นอนต่าง ๆ

ในการคำนวณเพื่อหาความน่าเชื่อถือนั้นจะประกอบไปด้วยความไม่แน่นอนต่าง ๆ ซึ่งอาจแบ่งได้เป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ

1. ความไม่แน่นอนเนื่องจากแปรผันได้ของข้อมูล (Uncertainty due to Inherent Variability)
2. ความไม่แน่นอนเนื่องจากค่าผิดพลาดในการทำนาย (Uncertainty associated with Prediction Error)

3.3.3.1 ความไม่แน่นอนเนื่องจากข้อมูล

กลุ่มข้อมูลที่เก็บมาได้นั้นจะไม่เท่ากับจำนวนข้อมูลจริง ๆ ที่เกิดขึ้น บางครั้งอาจให้ค่าที่ใกล้เคียงมากน้อย ซึ่งเป็นผลมาจากข้อมูลนั้นเป็นข้อมูลสุ่ม และเนื่องจากในการศึกษาข้อมูลนั้นจะสนใจเพียงบางค่า เช่น ค่าเฉลี่ย ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว จึงทำให้ความไม่แน่นอนเนื่องจากข้อมูลนี้จะอยู่ในรูปของค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน คือ

$$\delta = \frac{\text{ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ย}}$$

โดยที่ δ = ความไม่แน่นอนเนื่องจากข้อมูลมีค่าเท่ากับสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน (Cov.)

3.3.3.2 ความไม่แน่นอนเนื่องจากการทำนาย

ความไม่แน่นอนประเภทนี้จะรวมไปถึงความไม่แน่นอนจากการประมาณค่าความไม่แน่นอน จากสูตรที่ไม่สมบูรณ์ ความไม่แน่นอนจากแบบจำลอง ซึ่งแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ

1. ค่าผิดพลาดส่วนที่เป็นการสุ่ม (Ramdom component or Ramdon errors)
2. ค่าผิดพลาดส่วนที่เป็นระบบ (Systematic component or Systematic errors)

ถ้าสมมติมีข้อมูลอยู่ 10 ข้อมูล (1 ชุด) จะคำนวณได้ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้ สมมติว่าได้ค่าเฉลี่ย = $\bar{x}$ แต่ถ้ามีข้อมูลหลาย ๆ ชุด แต่ละชุดก็จะมีค่าเฉลี่ยที่แตกต่างกัน ถ้าหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มค่าเฉลี่ยแต่ละชุด จะได้เป็นค่าเฉลี่ยใหม่ โดยให้มีค่าเท่ากับ $\bar{x}_G$ และถ้าสมมติให้ $\bar{x}_G$ มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยจริงก็จะได้ค่าความแตกต่างหรืออัตราส่วนระหว่าง $\bar{x}$ กับ $\bar{x}_G$ คือความไม่แน่นอนจากส่วนที่เป็นระบบ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มค่าเฉลี่ยคือ ความไม่แน่นอนจากส่วนที่เป็นการสุ่ม
อาจสรุปได้ว่า

Systematic error ก็คือ ความเอนเอียงเนื่องจากการทำนายหรือประมาณค่าเฉลี่ย

Ramdom error ก็คือ ระดับการกระจายของช่วงความผิดพลาดที่เป็นไปได้ในค่าเฉลี่ย

3.3.4 <u>การวิเคราะห์หาค่าความไม่แน่นอน</u>

ความไม่แน่นอนต่าง ๆ ที่กล่าวมาอาจทำการรวมได้ โดยอาศัยแบบจำลองดังนี้ สมมติค่าจริงคือ X และให้ X คือแบบจำลอง มี N เป็นค่าปรับแก้ ก็จะได้

$$X = N\hat{X} \tag{3.55}$$

ปกติ X ก็คือ ตัวแปรสุ่มซึ่งหาค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ_x) และได้สัมประสิทธิ์ความแปรปรวน, $\delta_x = \sigma_x/\bar{X}$ คือความไม่แน่นอนจากข้อมูล

N ก็อาจเป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีค่าเฉลี่ยและค่าสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน คือ υ และ Δ_x โดยที่ υ แทนความเอนเอียงเนื่องจากการทำนายค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ และ Δ_x แทนระดับการกระจายของช่วงความผิดพลาดที่เป็นไปได้ในค่าเฉลี่ย $\bar{x}$
แต่เนื่องจาก N, $\hat{X}$ เป็นอิสระแก่กัน จากสมการที่ (3.55) จะได้

$$\mu_x = \upsilon\bar{x} \tag{3.56}$$

ความไม่แน่นอนทั้งหมดในการทำนายค่าของ X คือ

$$\Omega_X \simeq \sqrt{\delta_X^2 + \Delta_X^2} \qquad (3.57)$$

แต่ถ้าให้ Y เป็นฟังก์ชันที่มีหลายตัวแปร จะได้

$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

จะมีค่าปรับแก้เนื่องจากฟังก์ชันที่อาจไม่ถูกต้องเกิดขึ้น คือ N_g และจากสมการที่ (3.55) จะได้

$$Y = N_g \hat{g}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad (3.58)$$

ซึ่ง N_g มีค่าเฉลี่ย υ_g และสัมประสิทธิ์ความแปรปรวน = Δ_g จากพื้นฐานของการประมาณโดยใช้ออร์เดอร์ที่ 1 [8] จะได้ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน Y คือ

$$\mu_Y \simeq \upsilon_g \hat{g}(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \ldots, \mu_{X_n}) \qquad (3.59)$$

และสัมประสิทธิ์ความแปรปรวนของฟังก์ชัน Y คือ

$$\Omega_Y^2 \simeq \Delta_g^2 + \frac{1}{\mu_g^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} c_i c_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \qquad (3.60)$$

โดยที่ υ_g = ค่าความเอนเอียงของ g(.....)

$\mu_{X_i} = \upsilon_i \bar{X}_i$

$c_i = \frac{\partial g}{\partial X_i}$, คำนวณที่ค่าเฉลี่ย

ρ_{ij} = สัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ระหว่าง X_i และ X_j