พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ

นายสราวุธ สะสม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

PHASE-ORDERING DYNAMICS UNDER INFLUENCE OF OSCILLATORY SHEAR

Mr. Srawut Sasom

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Physics
Department of Physics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

หัวข้อวิทยานิพนธ์	พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ
โดย	นายสราวุธ สะสม
สาขาวิชา	ฟิสิกส์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรากร เฮ้งปัญญา

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.พลกฤษณ์ แสงวณิช)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ หลิมกำเนิด)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วรากร เฮ้งปัญญา)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปัจฉา ฉัตราภรณ์)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุธี บุญช่วย)

สราวุธ สะสม : พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ. (PHASE-ORDERING DYNAMICS UNDER INFLUENCE OF OSCILLATORY SHEAR) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ผศ. ดร.วรากร เฮ้งปัญญา

ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราศึกษาเกี่ยวกับพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ โดยแบ่งศึกษาเป็น 2 กรณี ได้แก่ 1.กรณีที่ไม่คำนึงถึงผลการรบกวนทางความร้อน และ 2.กรณีที่คำนึงถึงผลการรบกวนทางความร้อน โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเน้นการหาฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน ฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันและกฎการเติบโตของพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบในแบบจำลองเอที่นิยามโดยฮัลเพอรินและโฮเฮนเบิร์ก

เราพบว่าเมื่อเวลาผ่านไปนาน การผันผวนทางความร้อนไม่มีผลต่อการสเกลเชิงพลวัตของระบบและพฤติกรรมของระบบถูกกำหนดด้วยความถี่และเฟสเริ่มต้นของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ นอกจากนี้ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ตั้งสมมติฐานว่า ระบบที่อธิบายได้ด้วยพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบและแบบจำลองไอซิงจัดอยู่ในกลุ่มความเป็นสากลเดียวกัน ดังนั้นเพื่อเป็นการยืนยันความถูกต้องของผลการคำนวณ จึงทำการจำลองพฤติกรรมของแบบจำลองไอซิงภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับเพื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ พบว่าผลลัพธ์ของแบบจำลองและการคำนวณสอดคล้องกันดี

สาขาวิชา	ฟิสิกส์	ลายมือชื่อนิสิต ....
ปีการศึกษา	2561	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก ....

6072002823 : MAJOR PHYSICS

KEYWORD:

Srawut Sasom : PHASE-ORDERING DYNAMICS UNDER INFLUENCE OF OSCILLATORY SHEAR. Advisor: Asst. Prof. VARAGORN HENGPUNYA, Ph.D.

In this thesis, we study phase-ordering dynamics under influence of oscillatory shear in two cases separately - excluding thermal noise and including thermal noise. We focus on finding equal-time correlation functions, equal-time structure functions and growth laws of non-conserved n-component order-parameter (the large-n limit) in model A which was defined by Halperin and Hohenberg.

We find that at late times thermal fluctuation does not affect dynamical scaling of the system. Furthermore, initial phases and frequencies of oscillatory shear determine the behaviour of the system. In addition, we conjecture that non-conserved n-component order-parameter system and Ising model are in the same universality class. Therefore, to ensure the result, we do the simulation of 2D Ising model under influence of oscillatory shear to compare with the analytical result. We find that the simulation also obeys our analytical prediction.

Field of Study:	Physics	Student's Signature ....
Academic Year:	2018	Advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอขอบคุณ ผศ.ดร.วรากร เฮ้งปัญญา อาจารย์ที่ปรึกษางานวิจัยเป็นอย่างสูงที่ได้ให้คำปรึกษา แนะนำแนวทาง ตลอดจนช่วยตรวจสอบ และแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆอีกทั้งยังให้ความรู้แก่ข้าพเจ้า ทำให้งานวิจัยฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ นอกจากนี้ข้าพเจ้าขอขอบคุณ รศ. ดร. สุรเชษฐ์ หลิมกำเนิด ผศ.ดร.ปัจฉา ฉัตราภรณ์ และรศ. ดร. สุธี บุญช่วย ที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบ กรรมการสอบ และกรรมการสอบภายนอกวิทยานิพนธ์ รวมถึงได้ให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

สราวุธ สะสม

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูปภาพ

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

M ย่อมาจาก Magnetization

TDGL ย่อมาจาก Time-dependent Ginzburg-Landau

MCS ย่อมาจาก Monte Carlo step

ETCF ย่อมาจาก Equal-time correlation function

TU ย่อมาจาก Time unit

$P(a,t)$ คือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของระบบที่สถานะ a ณ เวลาเท่ากับ t

$\mu(a \rightarrow b)$ คือ ความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน จากสถานะ a ไป b

T คือ อุณหภูมิ

t คือ เวลา

$\vec{\phi}(\vec{r},t)$ คือ พารามิเตอร์การจัดระเบียบ

Γ คือ สัมประสิทธิ์จลน์ของระบบ

$H[\vec{\phi}]$ คือ ฟังก์ชันนอลกินซ์เบิร์ก-ลันเดาพลังงานอิสระ

$V(\vec{\phi})$ คือ พลังงานศักย์ของระบบ

$\vec{\zeta}(\vec{r},t)$ คือ การรบกวนทางความร้อน

$\langle \ldots \rangle_0$ คือ ค่าเฉลี่ยอองซอมเบิล

$\langle \ldots \rangle_\zeta$ คือ ค่าเฉลี่ยอองซอมเบิลของการรบกวนทางความร้อน

$\delta_{\alpha\beta}$ คือ เดลตาโครเนกเกอร์

$\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ คือ ฟังก์ชันดิแรกเดลตา

k_B คือ ค่าคงที่บ็อลทซ์มัน

$\vec{V}$ คือ ความเร็วของของไหล

$C(\vec{r},t)$ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน

$S(\vec{k},t)$ คือ ฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน

V_3 คือ ปริมาตรทั้งหมดของปริภูมิพื้นที่

$L(t)$ คือ กฎการเติบโตของระบบ

J คือ อันตรกิริยาระหว่างสอง“สปิน”ที่อยู่ใกล้กัน

Ω คือ เซตทั้งหมดของ σ

σ คือ การจัดเรียงตัวของ “สปิน” ใดๆ

σ_t คือ การจัดเรียงตัวของ “สปิน” แบบหนึ่ง ณ เวลา t

$\sigma_{x,y}$ คือ ค่าของ “สปิน” ที่ตำแหน่ง (x,y)

γ คือ อัตราการเฉือน

ℓ คือ ความกว้างและยาวของระบบ

ω คือ ความถี่ของการเฉือน

θ คือ เฟสเริ่มต้นของการเฉือน

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

หลายศตวรรษที่ผ่านมานักฟิสิกส์พยายามศึกษาอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics) และกลศาสตร์สถิติแบบสมดุล (Equilibrium statistical mechanics) เพื่ออธิบายระบบต่างๆที่อยู่ในสภาวะสมดุล จนถึงเวลานี้เรามีเครื่องมือทางฟิสิกส์และคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายหลายระบบที่อยู่ในสภาวะสมดุลได้เป็นอย่างดี เป็นเหตุผลทำให้ในช่วงไม่กี่ทศวรรษที่ผ่านมา นักฟิสิกส์เริ่มให้ความสนใจในการศึกษากลศาสตร์สถิติแบบไม่สมดุล (Non-equilibrium statistical mechanics) มากขึ้น เพื่อศึกษาทำความเข้าใจพลวัต (Dynamics) ของระบบที่ไม่อยู่ในสภาวะสมดุล หนึ่งในหัวข้อทางกลศาสตร์สถิติแบบไม่สมดุลที่ได้รับความสนใจคือ พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส (Phase-ordering dynamics)

ในการศึกษาพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสจะศึกษาผ่านพารามิเตอร์ที่ชื่อว่า พารามิเตอร์การจัดระเบียบ (Order parameter) โดยแต่ละระบบจะมีพารามิเตอร์การจัดระเบียบที่เหมาะสมแตกต่างกัน แบบจำลองไอซิง (Ising model) เป็นแบบจำลองพื้นฐานที่ใช้อธิบายการจัดระเบียบเฟสของระบบต่างๆ เช่น ความเป็นแม่เหล็กของระบบ (Magnetism) ระบบอัลลอยแบบ 2 ชนิด (Binary alloy) ก๊าซเชิงแลตทิซ (Lattice gas) สปินกลาส (Spin glass) โครงข่ายของระบบประสาท และแผ่นน้ำแข็งในทะเล เป็นต้น โดยที่แบบจำลองไอซิงจะมีพารามิเตอร์การจัดระเบียบเป็นปริมาณสเกลาร์ แต่จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่า บางระบบมีพารามิเตอร์การจัดระเบียบที่เหมาะสมเป็นปริมาณเวกเตอร์หรือเทนเซอร์ได้เช่นกัน

ในบางระบบผลรวมของค่าพารามิเตอร์การจัดระเบียบจะต้องมีค่าคงที่ เราเรียกพารามิเตอร์การจัดระเบียบของระบบเช่นนั้นว่า พารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบอนุรักษ์ แต่สำหรับระบบที่มีผลรวมของค่าพารามิเตอร์การจัดระเบียบไม่คงที่ เราเรียกพารามิเตอร์การจัดระเบียบของระบบเช่นนั้นว่า พารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์

แบบจำลองเอ็กซ์วาย (XY model) เป็นแบบจำลองพื้นฐานสำหรับระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบที่เป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มี 2 องค์ประกอบ ($n = 2$) ตัวอย่างระบบที่สามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลองเอ็กซ์วาย เช่น ระบบตัวนำยิ่งยวด ระบบของไหลยิ่งยวด และผลึกเหลว (Liquid crystals) เป็นต้น สำหรับแบบจำลองพื้นฐานที่ใช้อธิบายระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มี 3 องค์ประกอบ ($n = 3$) มีชื่อว่า แบบจำลองไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg model) เป็นแบบจำลองที่สามารถใช้อธิบายการจัดระเบียบเฟสของเอกภพในช่วงแรกเริ่มและผลึกเหลว

เช่นกัน ดังนั้นเป็นไปได้ว่ามีระบบในธรรมชาติที่สามารถอธิบายได้ด้วยพารามิเตอร์การจัดระเบียบที่เป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีองค์ประกอบมากกว่า 3 ($n > 3$)

จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่ามีเพียงบางแบบจำลอง (รวมถึงแบบจำลองอื่นที่ไม่ได้กล่าวไว้ในข้างต้น) ที่มีผลเฉลยแม่นตรง แต่โดยส่วนใหญ่เป็นผลเฉลยของแบบจำลองที่แตกต่างจากระบบที่มีอยู่ในธรรมชาติ อย่างไรก็ตามสมบัติบางประการของแบบจำลองเหล่านั้นยังคงมีความสอดคล้องกับการทดลอง [1] โดยเฉพาะสมบัติในปรากฏการณ์การสเกล (Scaling phenomena) ซึ่งปรากฏการณ์การสเกลเป็นหนึ่งในปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่มีความสำคัญ เพราะเราสามารถอธิบายพฤติกรรมบางอย่างของระบบที่แตกต่างกันได้ด้วยกฎการสเกล (Scaling law) เดียวกัน

ในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดระเบียบเฟสของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบ (large-n limit) ซึ่งแตกต่างจากระบบที่เราพบในธรรมชาติ แต่เราสามารถใช้ระบบดังกล่าวเป็นการประมาณของระบบที่เราไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้และการศึกษาสมบัติที่พบในปรากฏการณ์การสเกลของระบบดังกล่าวยังคงให้มุมมองเชิงคุณภาพของระบบในธรรมชาติแก่เรา

ในบทความวิชาการของเบรย์ [1] ได้กล่าวถึงการศึกษาการจัดระเบียบเฟสของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบ ที่ถูกลดอุณหภูมิให้ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติอย่างทันทีทันใด ณ เวลาเริ่มต้น เบรย์ตั้งสมมติฐานว่าเมื่อเวลาผ่านไปนานจากเวลาเริ่มต้น เราสามารถอธิบายระบบนั้นได้ด้วยสมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลา

$$\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial t} = -\frac{\delta H[\vec{\phi}]}{\delta \phi^{\alpha}}$$

เมื่อ ϕ^{α} คือ องค์ประกอบที่ α ของพารามิเตอร์การจัดระเบียบ

$H[\vec{\phi}] = \int \frac{1}{2}(\nabla\vec{\phi})^2 + V(\vec{\phi}) d^3r$ คือ ฟังก์ชันนอลกินซ์เบิร์ก-ลันเดาพลังงานอิสระ

$V(\vec{\phi})$ คือ พลังงานศักย์ของระบบ

ในบทความกล่าวถึงการหาผลเฉลยแบบแม่นตรง โดยอาศัยการแปลงฟูเรียร์ในการเปลี่ยนให้สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นข้างต้น ให้เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นที่สามารถหาผลเฉลยแบบแม่นตรงได้ด้วยวิธีมาตราฐาน หลังจากนั้นเมื่อเรานำผลเฉลยที่ได้ไปคำนวณหาค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน (Equal-time correlation function)

$$C(r,t) = exp(-\frac{r^2}{8t})$$

เมื่อ $C(r,t)$ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน และ r คือ ระยะห่างจากจุดใดๆที่สนใจ เราจะพบว่ามีปรากฏการณ์การสเกลเกิดขึ้นในระบบนี้ กล่าวคือ หากเราพิจารณาฟังก์ชันสหสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $r^* = \frac{r}{\sqrt{t}}$ เราจะได้ว่า ที่เวลาต่างๆระบบจะมีฟังก์ชันสหสัมพันธ์ในรูปแบบเดียวกันคือ $C(r^*) = \exp(-\frac{r^*}{8})$ ซึ่ง $\sqrt{t}$ มีบทบาทสำคัญในการอธิบายปรากฏการณ์การสเกลนี้และมีความเชื่อมโยงกับขนาดของ"โดเมน"ของระบบ ดังนั้นเราจึงเรียกค่า $\sqrt{t}$ นี้ว่า กฎการเติบโต (Growth law) โดยจะแทนสัญลักษณ์เป็น $L(t)$ ซึ่งในบทความของเบรย์จะเขียนไว้ว่า $L(t) \sim \sqrt{t}$

ต่อมาวรากร [2] ได้พัฒนางานต่อจากเบรย์ โดยในงานวิจัยของเขาได้ศึกษาการจัดระเบียบเฟสของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ และเนื่องจากในงานวิจัยของเบรย์ไม่ได้คำนึงถึงผลการรบกวนทางความร้อน กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ระบบที่เบรย์ศึกษาคือระบบที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 0 K ซึ่งไม่มีอยู่จริงในธรรมชาติ แต่ในงานวิจัยดังกล่าวได้ศึกษาผลการรบกวนทางความร้อนที่มีผลต่อระบบ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ การศึกษาระบบที่มีอุณหภูมิสูงกว่า 0 K ซึ่งเป็นระบบที่พบได้ในธรรมชาติ โดยสมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลาที่ใช้ในงานวิจัยดังกล่าวจะมีพจน์ของการเฉือนและการรบกวนทางความร้อนเพิ่มเข้ามา ดังแสดงในสมการข้างล่าง

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\phi^\alpha) = -\Gamma \frac{\delta H[\vec{\phi}]}{\delta \phi^\alpha} + \zeta^\alpha$$

เมื่อ	$\vec{V}$	คือ	ความเร็วของของไหล
	Γ	คือ	สัมประสิทธิ์จลน์ของระบบ
	ζ^α	คือ	องค์ประกอบที่ α ของการรบกวนทางความร้อน

ในงานวิจัยดังกล่าวสนใจผลเฉลยแม่นตรงของพารามิเตอร์การจัดระเบียบและกฎการเติบโตผ่านฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันเช่นกัน โดยฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันของงานวิจัยดังกล่าวคือ

$$C(\vec{r},t) = C_0 \exp(-\frac{1}{8\Gamma t}[12\left(\frac{x}{\gamma t} - \frac{y}{2}\right)^2 + y^2 + z^2])$$

เมื่อ C_0 คือ ค่าคงที่ และ γ คือ อัตราการเฉือน จะสังเกตได้ว่าเนื่องจากในงานวิจัยดังกล่าวมีข้อแตกต่างกับงานวิจัยของเบรย์ตรงที่ ระบบไม่มีสมมาตรทรงกลม เนื่องจากในแกน x ของระบบมีการเฉือนเกิดขึ้น แต่ในทิศอื่นไม่มีการเฉือน จึงทำให้กฎการเติบโตในทิศของแกน x แตกต่างจากทิศอื่น

$$L_x(t) \sim t^{3/2}\,,\ L_x(t) \sim t^{1/2}\,,\ L_y(t) \sim t^{1/2}$$

เมื่อ $L_x(t)$ คือ กฎการเติบโตในทิศของแกน x

$L_x(t)$ คือ กฎการเติบโตในทิศของแกน y

$L_y(t)$ คือ กฎการเติบโตในทิศของแกน z

และนอกจากนี้ในงานวิจัยดังกล่าวยังพบว่าการสเกลเชิงพลวัต (Dynamical scaling) ของระบบที่มีการรบกวนทางความร้อนและระบบที่ไม่มีการรบกวนทางความร้อนไม่มีความแตกต่างกันเมื่อพิจารณาจากกฎการเติบโตของทั้ง 2 ระบบ

ในสถานการณ์ความเป็นจริงระบบที่เราสนใจอาจจะอยู่ภายใต้การเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ เช่น ในงานประยุกต์ของของไหลยิ่งยวดหรือผลึกเหลวที่ต้องอยู่ภายใต้การเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ หรือการศึกษาสมบัติของวัสดุด้วยวิธีการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับที่มีอำพนขนาดใหญ่ [3] เป็นต้น เราสามารถศึกษาปรากฏการณ์การสเกลในเชิงคุณภาพของระบบเหล่านั้นได้ ผ่านการศึกษาพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบภายใต้การเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ จึงเป็นหัวข้อหลักในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และเนื่องจากในทางปฏิบัติเราไม่สามารถทำให้อุณหภูมิของระบบมีค่าเท่ากับ 0 K ได้ ดังนั้นการศึกษาระบบที่มีอุณหภูมิสูงกว่า 0 K หรือการศึกษาผลการรบกวนทางความร้อน จึงเป็นอีกหนึ่งในหัวข้อที่เราให้ความสนใจ และเนื่องจากเรารู้ว่าการรบกวนทางความร้อนไม่มีผลต่อการสเกลเชิงพลวัตของระบบที่ถูกเฉือนแบบสม่ำเสมอ เราจึงตั้งสมมติฐานว่า การสเกลเชิงพลวัตของการจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับจะไม่ได้รับผลกระทบจากการรบกวนทางความร้อนเช่นกัน เมื่อพิจารณาจากกฎการเติบโต โดยที่เราจะพิสูจน์สมมติฐานดังกล่าวโดยแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ไม่คำนึงถึงผลการรบกวนทางความร้อน และกรณีที่คำนึงถึงผลการรบกวนทางความร้อน และนำกฎการเติบโตของทั้ง 2 กรณีมาเปรียบเทียบกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาการสเกลเชิงพลวัตของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ ผ่านสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต รวมถึงศึกษาผลการรบกวนทางความร้อนที่มีผลต่อระบบ

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาพลศาสตร์ของการจัดระเบียบเฟสของระบบภายใต้การเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับโดยที่แบ่งการศึกษาออกเป็น กรณีที่ไม่คำนึงถึงการรบกวนทางความร้อนและกรณีที่คำนึงถึงการรบกวนทางความร้อน โดยเน้นการหา ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน ฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน และ

กฎการเติบโตของพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบ พร้อมเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการจำลองทางคอมพิวเตอร์

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

เริ่มต้นค้นคว้าเอกสารและข้อมูลพื้นฐาน เพื่อเป็นพื้นฐานสำหรับการแก้สมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลาของระบบที่กำลังศึกษาให้ได้มาซึ่งฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน ฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน และกฎการเติบโต ซึ่งแนวทางในการแก้สมการดังกล่าวคือการใช้จาโคเบียนของการแปลง การแปลงฟูเรียร์ การแปลงลาปลาซ การวิเคราะห์ตัวแปรเชิงซ้อน เงื่อนไขเริ่มต้นและลิมิตเวลาที่เหมาะสม หลังจากได้ผลการคำนวณ นำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ แล้วจึงวิเคราะห์ข้อมูลทั้งหมดและสรุปผล

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ความรู้ใหม่และขยายขอบเขตการศึกษาพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส ซึ่งคาดว่าจะเป็นประโยชน์กับงานวิจัยที่เกี่ยวกับการศึกษาสมบัติของของไหลยิ่งยวด ผลึกเหลว และวัสดุอื่นที่มีความเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนเฟสและการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ

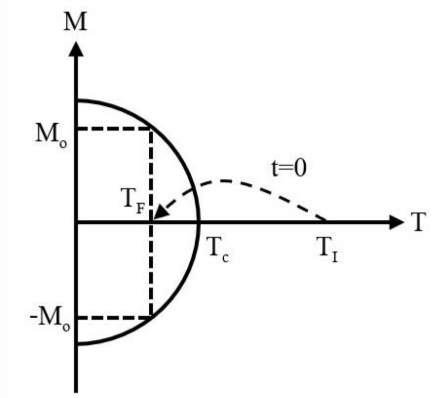
1.6 ภาพรวม

ในบทถัดไป จะกล่าวถึงแนวคิดและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งได้แก่ ความหมายของพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส กระบวนการสโตคาสติก สมการควบคุมหลัก สมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลา ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน ฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน สมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต และกฎการเติบโต ตามลำดับ ในบทที่ 3 จะเป็นการศึกษาพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบ โดยที่ไม่คำนึงถึงผลการรบกวนทางความร้อน ส่วนการศึกษาผลการรบกวนทางความร้อนที่มีต่อระบบจะกล่าวถึงในบทที่ 4 และเพื่อเป็นการยืนยันผลการคำนวน เราจึงทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณจากบทที่ 3 และ 4 กับการจำลองทางคอมพิวเตอร์ของแบบจำลองไอซิงที่จะกล่าวถึงในบทที่ 5 ผ่านสมมติฐานที่ว่า ระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบจะอยู่ในกลุ่มความเป็นสากลเดียวกัน (Universality class) กับแบบจำลองไอซิง และบทสุดท้ายคือบทที่ 6 จะกล่าวถึงข้อสรุปและข้อเสนอแนะของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

บทที่ 2
แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสเป็นหัวข้อหนึ่งที่ประยุกต์ความรู้จากกลศาสตร์เชิงสถิติแบบไม่สมดุลและอุณหพลศาสตร์ เพื่ออธิบายพลวัตของการจัดระเบียบเฟสของระบบ ซึ่งถือว่าเป็นกระบวนการสโตคาสติก (Stochastic process) ประเภทหนึ่ง โดยเราอธิบายพลวัตของระบบผ่านตัวแปรสุ่มที่เรียกว่า พารามิเตอร์การจัดระเบียบ โดยใช้สมการที่สามารถพิสูจน์ได้จากสมการควบคุมหลัก (Master equation) [4] คือ สมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลา (Time-dependent Ginzburg-Landau equation) แต่เนื่องจากเราไม่สามารถอธิบายการขึ้นกับเวลาและตำแหน่งของพารามิเตอร์การจัดระเบียบเชิงกำหนด (Deterministically) ได้ เราจึงต้องอธิบายผ่านฟังก์ชันทางสถิติ เช่น ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันหรือฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน (Equal-time structure function) เป็นต้น จากการศึกษาระบบอย่างง่าย [1] ทำให้เราได้มาซึ่งสมมติฐานที่สำคัญ คือ สมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต (Dynamical scaling hypothesis) ที่เชื่อมโยงระหว่าง ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและกฎการเติบโตที่สามารถใช้ประมาณขนาดของ“โดเมน”ได้และในการศึกษาครั้งนี้ได้ตั้งสมมติฐานว่า ระบบที่อธิบายได้ด้วยพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบและแบบจำลองไอซิงจัดอยู่ในกลุ่มความเป็นสากลเดียวกัน และเนื่องจากแบบจำลองไอซิงสามารถจำลองได้ด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อเป็นการยืนยันผลการคำนวณในการศึกษาครั้งนี้ เราจึงสร้างแบบจำลองมอนติคาร์โล (Monte Carlo) ของแบบจำลองไอซิงเพื่อเทียบผลการคำนวณ

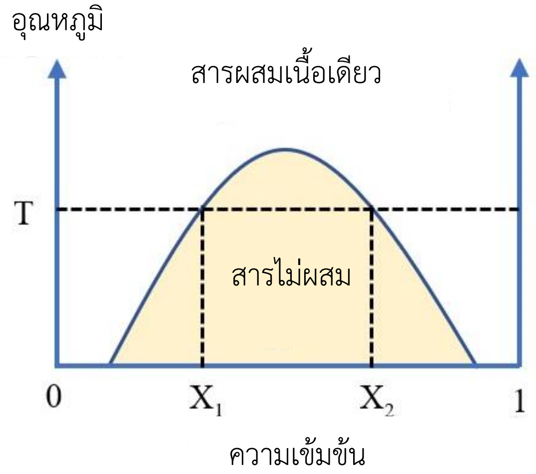
2.1 พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส



รูปที่ 1 แสดงแผนภาพการเปลี่ยนอุณหภูมิของระบบจาก อุณหภูมิสูง T_I ไปยังอุณหภูมิ T_F ที่ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ T_C พร้อมกับแสดงค่าแมกนิไตเซชัน (M) ของระบบที่อุณหภูมิต่างๆ

พลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส คือ การศึกษาเกี่ยวกับพลวัตการจัดระเบียบองค์ประกอบระดับจุลภาคของระบบที่ถูกลดอุณหภูมิลงอย่างทันทีทันใด จากสถานะที่ระบบมีภาวะเอกพันธ์และอุณหภูมิสูง ไปยังสถานะที่ระบบมีภาวะวิวิธพันธ์และอุณหภูมิที่ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ

ตัวอย่างระบบที่อธิบายด้วยพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส เช่น ระบบแม่เหล็กเฟอโรที่อะตอมมีค่าโมเมนต์ของขั้วคู่แม่เหล็ก (Magnetic dipole moment) ได้เพียง 2 ค่า โดยจะเรียกว่า “สปินอัพ” และ “สปินดาวน์” หรืออีกชื่อหนึ่งก็คือ ระบบแม่เหล็กเฟอโรเชิงแบบจำลองไอซิง (Ferromagnetic system) เมื่ออุณหภูมิสูงระบบจะมีความเอกพันธ์ กล่าวคือ ที่บริเวณต่างๆของเนื้อสาร โมเมนต์ของขั้วคู่แม่เหล็กของอะตอมจะมีค่าสุ่มจึงทำให้ค่าแมกนิไตเซชันของระบบมีค่าเป็นศูนย์ แต่เมื่อระบบถูกลดอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ ระบบจะพยายามจัดเรียงโมเมนต์ของขั้วคู่แม่เหล็กให้เป็นระเบียบมากขึ้น ทำให้แมกนิไตเซชันของระบบมีค่าไม่เป็นศูนย์ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 2 แสดงแผนภาพเฟสของระบบอัลลอยแบบ 2 ชนิดที่ความเข้มข้นและอุณหภูมิต่างๆ

ระบบอัลลอยแบบ 2 ชนิด (Binary alloy) เมื่ออุณหภูมิสูงโลหะสองชนิดจะผสมเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogenous mixture) แต่เมื่อลดอุณหภูมิต่ำลงทำให้บางบริเวณจะมีความหนาแน่นของโลหะชนิดเดียวกันมากกว่าโลหะอีกชนิดหนึ่ง (Two-phase region) กล่าวได้ว่าระบบมีการจัดเรียงตัวที่เป็นระเบียบมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2

เนื่องจากในการศึกษาพลวัตการจัดระเบียบเฟสของระบบใดๆ จะศึกษาผ่านตัวแปรที่เรียกว่า พารามิเตอร์การจัดระเบียบ ซึ่งเป็นตัวแปรที่ใช้วัดความเป็นระเบียบขององค์ประกอบระดับจุลภาคที่ประกอบเป็นระบบมหภาค [5] เช่น ในระบบแม่เหล็กเฟอโร จะใช้โมเมนต์ของขั้วคู่แม่เหล็กของอะตอมหรือบางครั้งจะใช้คำว่า “สปิน” เป็นพารามิเตอร์การจัดระเบียบ ส่วนในระบบอัลลอยแบบ 2 ชนิด จะใช้ความหนาแน่นของโลหะเป็นพารามิเตอร์การจัดระเบียบ ซึ่งจาก

ตัวอย่างที่ผ่านมาจะพบว่าพารามิเตอร์การจัดระเบียบมีลักษณะเป็นปริมาณสเกลาร์ แต่โดยทั่วไปพารามิเตอร์การจัดระเบียบ สามารถเป็นปริมาณเวกเตอร์หรือเทนเซอร์ได้เช่นกัน นอกจากนี้ยังสามารถแบ่งแยก พารามิเตอร์การจัดระเบียบเป็นปริมาณที่อนุรักษ์หรือไม่อนุรักษ์ได้ เช่น ในระบบแม่เหล็กเฟอโรที่ “สปิน” เป็นพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ เพราะจำนวนของอะตอมที่มี “สปินอัพ” และ “สปินดาวน์” (สมมติในกรณีที่ “สปิน” เป็นไปได้แค่สองค่า) ไม่จำเป็นต้องมีค่าคงที่ แต่สำหรับระบบอัล-ลอยแบบ 2 ชนิด ที่ความหนาแน่นของระบบเป็นพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบอนุรักษ์ เนื่องจากจำนวนอนุภาคโลหะในระบบมีจำนวนคงที่

โดยทั่วไปแล้วพลวัตของพารามิเตอร์การจัดระเบียบจะไม่สามารถอธิบายเชิงกำหนดได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ พลวัตของพารามิเตอร์การจัดระเบียบเป็นกระบวนการสโตคาสติก ซึ่งในหัวข้อถัดไปจากกล่าวถึงความหมายของ กระบวนการสโตคาสติก และเนื่องจากระบบที่เราสนใจในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือ ระบบที่สามารถอธิบายพลวัตของระบบนั้นได้ด้วยสมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลา โดยสมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลา เป็นสมการที่สามารถพิสูจน์ได้จากสมการควบคุมหลัก ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไปเช่นกัน

2.2 กระบวนการสโตคาสติกและสมการควบคุมหลัก

กระบวนการสโตคาสติกคือปรากฏการณ์สุ่มที่เกิดขึ้นผ่านกระบวนการบางอย่างที่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา ซึ่งอธิบายได้ด้วยทฤษฎีความน่าจะเป็น ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่แบบบราวน์ การเติบโตของประชากรแบคทีเรีย ความผันผวนของกระแสไฟฟ้าในวงจร เป็นต้น

ในพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส กระบวนการที่พารามิเตอร์การจัดระเบียบเปลี่ยนแปลงไปกับเวลา มีลักษณะเป็นกระบวนการสโตคาสติก ซึ่งหมายความว่าเราไม่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์การจัดระเบียบกับตำแหน่งและเวลาที่ผ่านไปเชิงกำหนดได้ แต่เราสามารถอธิบายค่าเชิงสถิติของพารามิเตอร์การจัดระเบียบได้ เช่น ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันหรือฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน เป็นต้น

สมการควบคุมหลัก คือ สมการที่ใช้บรรยายการเปลี่ยนแปลงไปกับเวลาของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของระบบที่มีลักษณะเป็นกระบวนการมาร์คอฟ (Markov process)

$$P(a,t+\Delta t)-P(a,t)=-\sum_{b(\neq a)}\mu(a\to b)P(a,t)\Delta t+\sum_{b(\neq a)}\mu(b\to a)P(b,t)\Delta t$$

โดย $P(a,t)$ คือ ความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ในสถานะ a ที่เวลา t

$\mu(a \to b)\Delta t$ เรียกว่า ความน่าจะเป็นของการส่งผ่าน คือ ความน่าจะเป็นที่ระบบจะเปลี่ยนสถานะจาก a ไป b ในช่วงเวลา Δt

ในการพิสูจน์สมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลาจากสมการควบคุมหลัก เริ่มต้นจากพิจารณาระบบแบบจำลองไอซิง (อธิบายในบทที่ 5) ที่มีสมการควบคุมหลักเป็น

$$\frac{dP(\{S_i\},t)}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} \mu\big(S_1,\dots,S_j,\dots,S_N \big| S_1,\dots,-S_j,\dots,S_N\big) P(\{S_i\},t) + \sum_{j=1}^{N} \mu(S_1,\dots,-S_j,\dots,S_N | S_1,\dots,S_j,\dots,S_N) P(\{S_i'\},t)$$

เมื่อ S_i คือค่าของ“สปิน” ณ ตำแหน่ง i และ $\{S_i\}$ คือเซตของค่า“สปิน”ทั้งหมดในการจัดเรียงตัวใดๆ และใช้ค่าเฉลี่ยของ“สปิน” $\langle S_k \rangle$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาเป็นพารามิเตอร์การจัดระเบียบ

$$\langle S_k \rangle = \sum_{\{S_i\}} S_k P(\{S_i\},t)$$

หลังจากนั้นทำการหาค่าอนุพันธ์ของ $\langle S_k \rangle$ เทียบกับเวลาโดยอาศัยสมการควบคุมหลัก และเนื่องจากในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสของระบบที่ถูกลดอุณหภูมิให้ต่ำกว่าค่าอุณหภูมิวิกฤติ ดังนั้นเราสามารถใช้การประมาณสนามเฉลี่ย (Mean-field approximation) กับค่าเฉลี่ยของพารามิเตอร์การจัดระเบียบได้ กล่าวคือ เราสามารถแทนค่าเฉลี่ยของผลคูณ“สปิน” ได้ด้วยค่าผลคูณของค่าเฉลี่ย“สปิน”

$$\langle S_i S_j \rangle \approx \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

จากนั้นเราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\langle S_k \rangle$ เทียบกับเวลา แต่เนื่องจากระบบแบบจำลองไอซิงเป็นระบบที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete system) แต่ในมุมมองมหภาค เราสามารถประมาณระบบที่ไม่ต่อเนื่องให้กลายเป็นระบบที่ต่อเนื่องได้ (Coarse-graining)

$$\langle S_k \rangle \to \phi(\vec{r},t)$$

ท้ายที่สุดเราจะได้ สมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลาของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณสเกลาร์

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta H[\phi]}{\delta \phi} + \zeta \qquad (1)$$

เมื่อ $H[\phi] = \int \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) d^3r$ คือ ฟังก์ชันนอลกินซ์เบิร์ก-ลันเดาพลังงานอิสระ

$V(\phi)$ คือ พลังงานศักย์ของระบบ

ϕ คือ พารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณสเกลาร์

แต่เนื่องจากสมการที่ (1) เป็นสมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลาของระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณสเกลาร์ แต่ระบบที่สนใจในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบ ซึ่งจากงานของฮัลเพอรินและโฮเฮนเบิร์ก [6] เราสามารถทำให้สมการที่ (1) อยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังแสดงอยู่ในหัวข้อถัดไป

2.3 สมการกินซ์เบิร์ก-ลันเดาที่ขึ้นกับเวลา

ดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อก่อนหน้า เราสามารถอธิบายระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบ ด้วยสมการรูปทั่วไปของสมการที่ (1) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta H[\vec{\phi}]}{\delta \phi^\alpha} + \zeta^\alpha \tag{2}$$

เมื่อ ϕ^α คือ องค์ประกอบที่ α ของพารามิเตอร์การจัดระเบียบ

t คือ เวลา

Γ คือ สัมประสิทธิ์จลน์ของระบบ

ζ^α คือ องค์ประกอบที่ α ของการรบกวนทางความร้อน

โดยทั่วไปจะพิจารณาระบบตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. พลังงานศักย์ของระบบจะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อระบบถูกหมุน ดังนั้น $V \equiv V(\vec{\phi}^2)$
2. ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน ที่เวลาเริ่มต้นของระบบ ซึ่งอยู่ในสถานะที่มีอุณหภูมิสูง จะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อเปรียบเทียบจุดที่ต่างกัน 2 จุด หรือองค์ประกอบที่ต่างกัน ดังสมการที่ (3)

$$\left\langle \phi^\alpha(\vec{r},0)\phi^\beta(\vec{r}',0)\right\rangle_0 = \Delta\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{3}$$

เมื่อ Δ คือจำนวนจริง และ $\langle\ldots\rangle_0$ แทนค่าเฉลี่ยอองซอมเบิล (Ensemble average) บนสถานะเริ่มต้นที่เป็นไปได้ทั้งหมด

3. การรบกวนทางความร้อนจะมีสมบัติเป็นรบกวนเกาส์เซียนสีขาว กล่าวคือค่าเฉลี่ยของการรบกวนจะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ และค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อเปรียบเทียบจุด 2 จุดที่ต่างกัน เวลาต่างกันหรือองค์ประกอบที่ต่างกัน สรุปได้ดังสมการที่ (4)

$$\begin{gathered}\langle \zeta^{\alpha}(\vec{r},t)\rangle_{\zeta} = 0 \\ \left\langle \zeta^{\alpha}(\vec{r},t)\zeta^{\beta}(\vec{r}',t')\right\rangle_{\zeta} = D\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')\end{gathered} \tag{4}$$

เมื่อ $D = 2\Gamma k_B T$ โดยที่ k_B คือค่าคงที่บ็อลทซ์มัน T คืออุณหภูมิ และ $\langle \dots \rangle_{\zeta}$ แทนค่าเฉลี่ยอองซอม-เบิลของการรบกวนทางความร้อน $\vec{\zeta}$

แต่เนื่องจากในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน ดังนั้นสมการ TDGL ต้องเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการเฉือน ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{V}\phi^{\alpha}\right) = -\Gamma \frac{\delta H\left[\vec{\phi}\right]}{\delta \phi^{\alpha}} + \zeta^{\alpha} \tag{5}$$

โดยที่ $\vec{V}$ คือ ความเร็วของของไหล

แต่เนื่องจากพลวัตของพารามิเตอร์การจัดระเบียบเป็นกระบวนการสโตคาสติก เราจึงไม่สามารถหาค่าของพารามิเตอร์การจัดระเบียบที่ตำแหน่งและเวลาต่างๆเชิงกำหนดได้ แต่เราสามารถหาฟังก์ชันทางสถิติของพารามิเตอร์การจัดระเบียบได้ โดยฟังก์ชันทางสถิติที่สำคัญสำหรับการศึกษาทางกลศาสตร์สถิติ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

2.4 ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน

ในทางสถิติหากต้องการรู้ว่าตัวแปรสุ่ม 2 ตัวใดๆสัมพันธ์กันหรือไม่ จะพิจารณาผ่านค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปรนั้น หากค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของ 2 ตัวแปรมีค่าเป็นศูนย์มีความหมายว่าทั้ง 2 ตัวแปรไม่สัมพันธ์กันหรือเป็นอิสระต่อกัน ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันแทนด้วย $C(\vec{r},t)$ โดยมีนิยามดังนี้

$$C(\vec{r},t) \equiv \langle \phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x}+\vec{r},t)\rangle_0 \tag{6}$$

สำหรับกลศาสตร์เชิงสถิติฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันเป็นฟังก์ชันที่สำคัญเพราะสามารถใช้ศึกษาปริมาณที่สำคัญต่างๆของระบบได้ เช่น ศึกษาการสเกลเชิงพลวัต [1, 2] (Dynamical scaling) ศึกษาสเปกตรัมของพลังงาน [7] หรือการคำนวณหาค่าสภาพรับไว้ได้ (Susceptibility) [5] เป็นต้น ส่วนฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันคือการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน

$$S(\vec{k},t) \equiv V_3 \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} C(\vec{r},t) d^3r \tag{7}$$

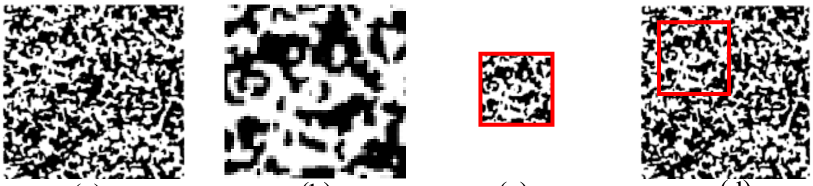
เมื่อ V_3 คือปริมาตรทั้งหมดของปริภูมิพื้นที่ สาเหตุที่สนใจค่าฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน เพราะหลายครั้ง การคำนวณหาค่าฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันจะสะดวกกว่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันยังให้มุมมองบางอย่างทางฟิสิกส์ที่ไม่มีในฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากัน เพราะฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันพิจารณาในปริภูมิพื้นที่ แต่ฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันพิจารณาในปริภูมิโมเมนตัม (Momentum space)

ปรากฎการณ์การสเกลเป็นปรากฎการณ์หนึ่งที่สำคัญในทางกลศาสตร์สถิติ เพราะเราสามารถอธิบายพฤติกรรมบางอย่างของระบบที่แตกต่างกันได้ด้วยกฎหรือสมมติฐานข้อเดียวกัน ซึ่งในหลายการทดลองและการจำลองทางคอมพิวเตอร์เกี่ยวกับพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟสที่เกิดปรากฎการณ์การสเกลเกิดขึ้น มักพบว่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน มีรูปแบบเดียวกัน นักฟิสิกส์จึงนำพฤติกรรมที่พบบ่อยนั้นมาตั้งเป็นสมมติฐานในการศึกษาระบบที่เกี่ยวข้องกับปรากฎการณ์การสเกลของพลศาสตร์การจัดระเบียบเฟส และเรียกสมมติฐานนั้นว่า สมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต

2.5 สมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตและกฎการเติบโต

สมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต คือ หนึ่งในสมมติฐานที่สำคัญของปรากฎการณ์การสเกล โดยสมมติฐานนี้กล่าวไว้ว่า เมื่อเวลาผ่านไปนาน จะมีสเกลความยาวลักษณะเฉพาะ (Characteristic length scale) $L(t)$ สเกลเดียวที่ทำให้ โครงสร้าง“โดเมน”ของระบบมีลักษณะไม่ขึ้นกับเวลาในเชิงสถิติ เมื่อทำการสเกลขนาดของระบบด้วย $L(t)$

ตัวอย่างสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตกับแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ภาพ (a) ในรูปที่ 3 คือภาพของระบบเมื่อเวลาผ่านไปนาน T_a และภาพ (b) คือภาพของระบบเมื่อเวลาผ่านไป T_b โดย $T_b > T_a$ จะเห็นว่าขนาดของ“สปินโดเมน”มีขนาดใหญ่ขึ้น แต่ถ้าหากเราสเกลระบบด้วยค่าความยาวลักษณะเฉพาะ $L(t)$ ภาพ (b) จะเล็กลงกลายเป็นภาพ (c) จะเห็นได้ว่าโครงสร้าง“โดเมน”ของภาพ (a) และภาพ (c) ไม่ได้ต่างกัน ดังที่แสดงในภาพ (d)



รูปที่ 3 แสดงภาพประกอบคำอธิบายของสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต(ในภาพนี้ใช้ภาพประกอบที่เกินความจริงเพื่อความเข้าใจ)

การขึ้นกับเวลาของความยาวลักษณะเฉพาะ $L(t)$ ของระบบนั้นๆเรียกว่า กฎการเติบโต จากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัต จึงคาดการณ์ว่า ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันของระบบในปริภูมิพื้นที่ 3 มิติควรจะอยู่ในรูปแบบ $C(\vec{r},t) = f\left(\frac{x}{L_x},\frac{y}{L_y},\frac{z}{L_z}\right)$ และ $S(\vec{k},t) = L_xL_yL_zg\big(L_xk_x,L_yk_y,L_zk_z\big)$ ซึ่งโดยปกติฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแบบลด ดังนั้นเราสามารถกล่าวได้ว่า ความยาวลักษณะเฉพาะ $L(t)$ แสดงขนาดประมาณของ"โดเมน"ของระบบและโดยทั่วไปกฎการเติบโตจะอยู่ในรูปแบบ $L(t) \sim t^{\alpha}$ โดย $\alpha \in \mathbb{R}$

สำหรับแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 3 มิติ ที่ไม่ได้อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน จะมีกฎการเติบโตเป็น $L_x(t) \sim L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ สำหรับระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบหลายองค์ประกอบแบบไม่อนุรักษ์และไม่ได้อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน จะมีกฎการเติบโตเป็น $L_x(t) \sim L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ เช่นกัน [1] แต่สำหรับระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบหลายองค์ประกอบแบบไม่อนุรักษ์ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ จะมีกฎการเติบโตเป็น $L_x(t) \sim t^{\frac{3}{2}},\ L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ [2] โดยระบบมีการเฉือนเฉพาะในทิศของแกน x เท่านั้น จะสังเกตได้ว่าในทิศของการเฉือน กฎการเติบโตของระบบจะมีค่ามากกว่าในทิศที่ตั้งฉาก

บทที่ 3
การจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ
โดยไม่คำนึงถึงผลของการรบกวนทางความร้อน

ในกรณีที่ไม่คำนึงถึงผลของการรบกวนทางความร้อน พจน์สุดท้ายขวามือของสมการที่ (5) จะมีค่าเป็นศูนย์ และได้สมการใหม่เป็น

$$\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\vec{V}\phi^{\alpha}\right) = -\Gamma \frac{\delta H[\vec{\phi}]}{\delta \phi^{\alpha}} \tag{8}$$

เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขข้อที่ 1 ที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2.3 จะกำหนดให้พจน์ของพลังงานศักย์ $V(\vec{\phi}) = \left(\frac{C}{2} - \sqrt{\frac{u_0}{4n}}\vec{\phi}^2\right)^2$ ในฟังก์ชันนอลกินซ์เบิร์ก-ลันเดาพลังงานอิสระ $H[\vec{\phi}]$ โดยที่ C และ u_0 เป็นจำนวนจริงบวก n เป็นจำนวนองค์ประกอบของพารามิเตอร์การจัดระเบียบและเพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณา จะกำหนดให้ทิศทางการเฉือนอยู่ในแกน x เพียงแกนเดียวและกำหนดความเร็วของของไหลเป็น $\vec{V} = \gamma y cos(\omega t + \theta)\hat{x}$ เมื่อ γ คือ อัตราการเฉือน แทนค่าเหล่านี้ในสมการที่ (8) จะได้สมการในรูปแบบใหม่เป็น

$$\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial t} + \gamma y cos(\omega t + \theta)\frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial x} = -\Gamma\left(-\nabla^2\phi^{\alpha} + r_0\phi^{\alpha} + u_0\frac{\vec{\phi}^2}{n}\phi^{\alpha}\right) \tag{9}$$

เมื่อ $r_0 \equiv -C\sqrt{\frac{u_0}{n}}$ และตั้งสมมติฐานว่าพจน์ $\frac{\vec{\phi}^2}{n}$ และ $\langle(\phi^{\alpha}(\vec{r},t))^2\rangle \equiv \frac{1}{V_3}\int\langle(\phi^{\alpha}(\vec{r},t))^2\rangle_0 d^3r$ เท่ากันเมื่อพิจารณาที่ n มีค่ามาก สาเหตุเพราะ $\frac{\vec{\phi}^2}{n}$ เป็นค่าเฉลี่ยของทุกองค์ประกอบของพารามิเตอร์การจัดระเบียบยกกำลังสอง เมื่อ n มีค่ามาก $\frac{\vec{\phi}^2}{n}$ จะมีค่าน้อยมาก ดังนั้นค่าเฉลี่ยของทุกองค์ประกอบของพารามิเตอร์การจัดระเบียบยกกำลังสอง $\frac{\vec{\phi}^2}{n}$ สามารถแทนได้ด้วยค่าเฉลี่ยขององค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งยกกำลังสอง $\langle(\phi^{\alpha}(\vec{r},t))^2\rangle$ และจากสมมติฐานนี้จะได้ว่าแต่ละองค์ประกอบของพารามิเตอร์การจัดระเบียบเป็นอิสระต่อกันและมีพฤติกรรมในแบบเดียวกัน ดังนั้นหลังจากนี้จะแทน ϕ^{α} ด้วย ϕ ทำให้เขียนสมการ (9) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma y cos(\omega t + \theta)\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\Gamma\left(-\nabla^2 - a(t)\right)\phi \tag{10}$$

$$\text{เมื่อ} \quad a(t) \equiv -\left(r_0 + u_0\langle\vec{\phi}^2(\vec{r},t)\rangle\right) \tag{11}$$

สิ่งหนึ่งที่ควรสังเกตคือ ระบบจะมีพลังงานศักย์ต่ำสุดเมื่อ $\frac{\vec{\phi}^2}{n} = \langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = -\frac{r_0}{u_0}$ ดังนั้นเราอาจจะกล่าวได้ว่า $-\frac{r_0}{u_0}$ คือค่าเฉลี่ยของ ϕ^2 ที่สมดุล $\langle\phi^2(\vec{r},t \to \infty)\rangle$ และ $\frac{a(t)}{u_0}$ คือผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของ ϕ^2 ที่สมดุลกับค่าเฉลี่ยของ ϕ^2 ที่เวลา t ใดๆ

เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์นี้ จะทำการแปลงฟูเรียร์สมการนี้ ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบใหม่เป็น

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} - \gamma k_x\, cos(\omega t + \theta)\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial k_y} = -\Gamma\left(k^2 - a(t)\right)\tilde{\phi} \tag{12}$$

เนื่องจากในสมการที่ (12) มีพจน์ที่ k_x คูณอยู่กับอนุพันธ์ของ $\tilde{\phi}$ เทียบกับ k_y ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยด้วยวิธีมาตราฐานได้ ต้องอาศัยการแปลงตัวแปรเป็นตัวแปรใหม่ที่สัมพันธ์กับเส้นโค้งลักษณะเฉพาะของสมการที่ (12) โดยเส้นโค้งลักษณะเฉพาะหาได้จากสมการ $\frac{dk_y}{dt} = -\gamma k_x cos(\omega t + \theta)$ ซึ่งจะได้สมการของเส้นโค้งลักษณะเฉพาะเป็น

$$k_y = -\gamma\frac{k_x}{\omega}\left(sin(\omega t + \theta) - sin\,\theta\right) + \text{ค่าคงที่} \tag{13}$$

จากสมการที่ (13) จะได้ความสัมพันธ์ของตัวแปรและฟังก์ชันที่ต้องการแปลงดังนี้

$$\begin{gathered} q_x = k_x, q_y = k_y + \gamma\frac{k_x}{\omega}\left(sin(\omega t + \theta) - sin(\theta)\right), q_z = k_z, \tau = t \\ k_x = q_x, k_y = q_y - \gamma\frac{q_x}{\omega}\left(sin(\omega\tau + \theta) - sin(\theta)\right), k_z = q_z, t = \tau \\ \tilde{\phi}(\vec{k},t) \to \varphi(\vec{q},\tau) \text{ และ } \vec{k}^2 \to Q^2(\vec{q},\tau) \end{gathered} \tag{14}$$

หลังจากนั้นทำการแปลงตัวแปรเป็นตัวแปรชุดใหม่ผ่านความสัมพันธ์ที่ (14) สมการที่ (12) จะลดรูปเหลือเพียง

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\Gamma\left(Q^2 - a(\tau)\right)\varphi \tag{15}$$

ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยของสมการที่ (15) ได้โดยการอินทิเกรตแบบตรงไปตรงมา

$$\varphi(\vec{q},\tau) = \varphi(\vec{q},0)exp\left(-\Gamma\int_0^{\tau} Q^2 - a(\tau')d\tau'\right) \tag{16}$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะนิยามฟังก์ชันใหม่ขึ้นมา $F(\vec{q},\tau) \equiv \int_0^{\tau} Q^2 d\tau'$ และ $b(\tau) \equiv \int_0^{\tau} a(\tau')d\tau'$ เพราะฟังก์ชัน $F(\vec{q},\tau)$ และ $b(\tau)$ จะถูกใช้ในการคำนวนหาฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันภายหลัง จากนิยามของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันหรือฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน สมการที่ (6) สมการที่ (7) ตามลำดับ และเงื่อนไขที่ 2 ในบทที่ 2.3 สมการที่ (3) จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า (บทพิสูจน์อยู่ในภาคผนวก ก)

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 = \Delta V_3 \tag{17}$$

และสามารถพิสูจน์ต่อไปได้ว่า

$$S(\vec{k},t) = \langle\tilde{\phi}(-\vec{k},t)\tilde{\phi}(\vec{k},t)\rangle_0 = \Delta V_3 e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-b(t)\right)} \tag{18}$$

ซึ่งอันดับแรกในการคำนวณหาฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน คือการอินทิเกรตฟังก์ชัน $F(\vec{q},\tau)$

$$\begin{aligned} F(\vec{q},\tau) = \vec{q}^2\tau + \frac{2q_xq_y\gamma}{\omega^2}[cos(\omega\tau+\theta) - cos\theta + \omega\tau sin\theta] \\ -\left(\frac{\gamma q_x}{\omega}\right)^2\left[\frac{sin(2\omega\tau+2\theta) - 8sin\theta cos(\omega\tau+\theta)}{4\omega}\right] \\ -\left(\frac{\gamma q_x}{\omega}\right)^2\left[\frac{-(4\omega sin^2\theta - 2\omega)\tau - sin2\theta + 8cos\theta sin\theta}{4\omega}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

หลังจากได้ผลการอินทิเกรตแล้วจึงแบ่งพิจารณาฟังก์ชัน $F(\vec{q},\tau)$ ของระบบออกเป็น 2 กรณี คือ (a) กรณีที่ความถี่ต่ำมาก และ (b) กรณีที่ความถี่จำกัดค่าหนึ่ง ตามลำดับ

กรณี (a) พิจารณาที่เวลา t นานแต่ $t\omega \to 0$ สมการที่ (19) จะลดรูปเป็น

$$F(\vec{q},\tau) = \vec{q}^2\tau - q_xq_y\gamma\tau^2cos\theta + \frac{1}{3}\tau^3(\gamma q_x cos\theta)^2 \tag{20}$$

ทำการแปลงตัวแปร $(q_x, q_y, q_z, \tau) \to (k_x, k_y, k_z, t)$ ตามความสัมพันธ์ข้างต้นและจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสองของแต่ละองค์ประกอบของ $\vec{k}$

$$F(\vec{k},t) = \left\{\left(\frac{1}{12}(\gamma t cos\theta)^2 + 1\right)k_x^2 + \left(k_y - \frac{1}{2}k_x\gamma t cos\theta\right)^2 + k_z^2\right\}t \qquad (21)$$

หากพิจารณาเงื่อนไขที่ $\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\gamma = 0$ จะได้ว่า $F(\vec{k},t) = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)t$ ซึ่งหมายความว่าระบบไม่ได้อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน [2] ดังนั้นต่อจากนี้เราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ และ $\gamma \neq 0$ เท่านั้น

(b) พิจารณาที่เวลา t นานและ ω มีค่าจำกัดค่าหนึ่ง สมการที่ (19) จะลดรูปเหลือเพียง

$$F(\vec{q},\tau) = \vec{q}^2\tau + \frac{2q_xq_y\gamma}{\omega}\tau sin\theta + \left(\frac{q_x\gamma}{\omega}\right)^2(\frac{1}{2} + sin^2\theta)\tau \qquad (22)$$

ทำการแปลงตัวแปร $(q_x, q_y, q_z, \tau) \to (k_x, k_y, k_z, t)$ ตามความสัมพันธ์ข้างต้นและจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสองของแต่ละองค์ประกอบของ $\vec{k}$

$$F(\vec{k},t) = \{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)k_x^2 + \left(k_y + \frac{\gamma}{\omega}k_x sin(\omega t + \theta)\right)^2 + k_z^2\}t \qquad (23)$$

สังเกตว่า $F(-\vec{k},t) = F(\vec{k},t)$ ทั้ง 2 กรณี ขั้นตอนถัดไปในการคำนวณหาฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน $S(\vec{k},t)$ ต้องรู้ $b(t)$ เพื่อคำนวณหา $b(t)$ ต้องกลับไปพิจารณาสมการที่ (11) เนื่องจากเมื่อ $t \to \infty$ ระบบจะเข้าสู่สมดุลดังนั้น $a(t) \to 0$ จะได้ว่า

$$\langle\phi^2(\vec{r}, t\to\infty)\rangle = -\frac{r_0}{u_0} \qquad (24)$$

และจากสมการผลเฉลยที่ (16) เมื่อทำการแปลงตัวแปรและฟังก์ชัน $\varphi(\vec{q},\tau) \to \tilde{\phi}(\vec{k},t)$ แล้วอาศัยการแปลงฟูเรียร์ผกผันและเงื่อนไขที่ 2 ในบทที่ 2.3 สมการที่ (3) จะได้ว่า

$$\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}d^3k \qquad (25)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (25) และอาศัยสมบัติการอินทิเกรตของเกาส์เซียนฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกึ่งกลางของฟังก์ชัน

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp(-ak_x^2 - b(k_y + a'k_x)^2 - ck_z^2)dk_x dk_y dk_z = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\sqrt{\frac{\pi}{c}} \quad (26)$$

ในกรณี (a) เมื่อแทน $F(\vec{k},t)$ ของกรณีนี้มีค่าดังสมการที่ (21) ในสมการที่ (25) จะได้ว่า

$$\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{3\pi^3}{2(\Gamma t)^3(\gamma t cos\theta)^2}} \quad (27)$$

และจากเงื่อนไข $t \rightarrow \infty$ สมการที่ (24) จะเท่ากับสมการที่ (27) สามารถจัดรูปสมการเพื่อหา $b(t)$ และ $a(t) = \frac{db(t)}{dt}$ ได้ดังนี้

$$b(t) = \frac{5}{4\Gamma} ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \text{ และ } a(t) = \frac{5}{4\Gamma t}$$
$$\text{เมื่อ } t_0 = \sqrt[5]{\frac{3}{128(\pi\Gamma)^3}\left(\frac{\Delta u_0}{r_0\gamma cos\theta}\right)^2} \quad (28)$$

ในกรณี (b) เมื่อแทน $F(\vec{k},t)$ ของกรณีนี้มีค่าดังสมการที่ (23) ในสมการที่ (25) จะได้ว่า

$$\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1\right)8\Gamma^3 t^3}} \quad (29)$$

และจากเงื่อนไข $t \rightarrow \infty$ สมการที่ (24) จะเท่ากับสมการที่ (29) สามารถจัดรูปสมการเพื่อหา $b(t)$ และ $a(t) = \frac{db(t)}{dt}$ ได้ดังนี้

$$b(t) = \frac{3}{4\Gamma} ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \text{ และ } a(t) = \frac{3}{4\Gamma t}$$
$$\text{เมื่อ } t_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{512(\pi\Gamma)^3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}\left(\frac{\Delta u_0}{r_0}\right)^2} \quad (30)$$

จะสังเกตได้ว่า $a(t)$ ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกับ $a(t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$ และเนื่องจากตอนนี้ทราบค่า $F(\vec{k},t)$ และ $b(t)$ แล้ว สามารถนำผลที่ได้ไปคำนวณหาค่าฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากัน ในสมการที่ (18) ได้ และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันหาได้จากการแปลงฟูเรียร์ผกผันของฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันตามสมการที่ (31)

$$C(\vec{r},t) = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} S(\vec{k},t) d^3k \qquad (31)$$

และอาศัยสมบัติการแปลงฟูเรียร์ของเกาส์เซียนฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-a(x-b)^2} dx = e^{-ikb} e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ และ } \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-a(k-b)^2} dk = e^{ixb} e^{-\frac{x^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (32)$$

ในกรณี (a)

$$\begin{aligned} S(\vec{k},t) = \Delta V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{2}} exp\Bigg(-2\Gamma\Bigg\{\frac{1}{12}(\gamma t^{\frac{3}{2}} k_x cos\theta)^2 + (t^{\frac{1}{2}} k_y \\ - \frac{1}{2}\gamma t^{\frac{3}{2}} k_x cos\theta)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}} k_z\right)^2\Bigg\}\Bigg) \end{aligned} \qquad (33)$$

$$C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(3\left(\frac{2x}{\gamma t cos\theta} + y\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right) \qquad (34)$$

จากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตจะได้ว่ากฎการเติบโตควรจะอยู่ในรูปแบบ

$$L_x(t) \sim (\gamma cos\theta) t^{\frac{3}{2}} \text{ และ } L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \qquad (35)$$

ในกรณี (b)

$$\begin{aligned} S(\vec{k},t) = \Delta V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} exp\Bigg(-2\Gamma\Bigg\{\Big(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1\Big)\left(t^{\frac{1}{2}} k_x\right)^2 \\ + \left(t^{\frac{1}{2}} k_y + \frac{\gamma}{\omega} sin(\omega t + \theta) t^{\frac{1}{2}} k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}} k_z\right)^2\Bigg\}\Bigg) \end{aligned} \qquad (36)$$

$$C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega} y\, sin(\omega t + \theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right) \qquad (37)$$

เมื่อ $\beta = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}$ และจากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตจะได้ว่ากฎการเติบโตควรเป็น

$$L_x(t) \sim L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \qquad (38)$$

บทที่ 4
การจัดระเบียบเฟสภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ โดยคำนึงถึงผลของการรบกวนทางความร้อน

เนื่องจากในบทนี้พิจารณาการรบกวนเชิงความร้อน ต้องเพิ่มพจน์การรบกวนทางความร้อนเข้าไปในสมการที่ (10)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma y \cos(\omega t + \theta) \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\Gamma\left(-\nabla^2 - a(t)\right)\phi + \zeta \tag{39}$$

เช่นเดียวกันกับบทที่ 3 ในการหาผลเฉลยสมการที่ (39) เริ่มต้นที่ทำการแปลงฟูเรียร์สมการนี้แล้วเปลี่ยนตัวแปรตามสมการที่ (14) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เดียวกันกับบทที่ 3 จะได้ว่าสมการที่ (39) ลดรูปเป็น

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\Gamma\left(Q^2 - a(\tau)\right)\varphi + \xi \tag{40}$$

การแปลงฟังก์ชันเพิ่มเติมสำหรับพจน์ที่เกี่ยวกับการรบกวนทางความร้อนคือ $\zeta(\vec{r},t) \to \tilde{\zeta}(\vec{k},t) \to \xi(\vec{q},\tau)$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการที่ (40) คือ

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{q},\tau) = {} & \varphi(\vec{q},0)exp(-\Gamma(F(\vec{q},\tau) - b(\tau))) \\ & + \int_0^{\tau} exp\{\Gamma[(F(\vec{q},\tau') - F(\vec{q},\tau)) - (b(\tau') - b(\tau))]\}\xi(\vec{q},\tau')d\tau'\end{aligned} \tag{41}$$

รูปแบบของ $F(\vec{k},t)$ ยังคงเดิม กล่าวคือ สมการที่ (21) และ สมการที่ (23) แต่รูปแบบของ $b(t)$ จะเปลี่ยนไปเพราะผลของการรบกวนทางความร้อน และเพื่อความสมบูรณ์ของการคำนวณจะต้องรู้ค่า $b(t) - b(t')$ และ $F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$ จากสมการที่ (41) ทำการแปลงฟังก์ชัน $\varphi(\vec{q},\tau) \to \tilde{\phi}(\vec{k},t)$ แล้วแปลงฟูเรียร์ผกผันประกอบกับ เงื่อนไขที่ 2 และ เงื่อนไขที่ 3 ในบทที่ 2.3 สามารถคำนวณหาค่า $\langle \phi^2 \rangle$ และ $S(\vec{k},t)$ ได้ดังนี้ (บทพิสูจน์อยู่ในภาคผนวก ข)

$$\begin{aligned}\langle \phi^2 \rangle = {} & \frac{\Delta}{(2\pi)^3} e^{2\Gamma b(t)} \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k \\ & + \frac{D}{(2\pi)^3} \int_0^t e^{2\Gamma\left(b(t) - b(t')\right)} \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')\right)} d^3k\, dt'\end{aligned} \tag{42}$$

$$S(\vec{k},t) = \Delta V_3 e^{-2\Gamma(F(\vec{k},t) - b(t))} + D V_3 \int_0^t e^{2\Gamma((F(\vec{k},t') - F(\vec{k},t)) - (b(t') - b(t)))} dt' \tag{43}$$

เช่นเดียวกับบทที่ 3 ขั้นตอนแรกในการหาค่า $S(\vec{k},t)$ ต้องทำการหาค่า $F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')$ โดยในหัวข้อนี้จะแบ่งพิจารณา $F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')$ เป็น 2 กรณี คือ (a) กรณีที่ความถี่ต่ำมาก และ (b) กรณีที่ความถี่จำกัดค่าหนึ่ง เช่นกัน

กรณี (a) พิจารณาสมการที่ (21) ที่เวลา t นานมากแต่ค่า $t\omega \to 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t') &= \frac{1}{12}(t-t')^3(\gamma k_x \cos\theta)^2 \\
&\quad +(t-t')\left(k_y-\frac{1}{2}\gamma k_x \cos\theta\,(t+t')\right)^2+(t-t')k_z^2
\end{aligned}
\tag{44}
$$

โดย $\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k = Ag(t-t')$ เมื่อ $A=\sqrt{\frac{3\pi^3}{2\Gamma^3(\gamma\cos\theta)^2}}$ และ $g(t-t')=(t-t')^{-\frac{5}{2}}$ โดยการอินทิเกรตข้างต้นอาศัยสมการที่ (26)

กรณี (b) พิจารณาสมการที่ (23) ที่เวลา t นานมากและ ω มีค่าจำกัดค่าหนึ่งจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&F(\vec{q},\tau)-F(\vec{q},\tau') \\
&\quad = \{\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)q_x^2+\left(q_y+(\frac{\gamma}{\omega}sin\theta)q_x\right)^2+q_z^2\}(\tau-\tau')
\end{aligned}
\tag{45}
$$

โดย $\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k = Ag(t-t')$ เมื่อ $\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\pi^3}{8\Gamma^3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}}$ และ $g(t-t')=(t-t')^{-\frac{3}{2}}$ โดยการอินทิเกรตข้างต้นอาศัยจาโคเบียนของการแปลงตัวแปรจาก $(q_x,q_y,q_z,\tau)\to(k_x,k_y,k_z,t)$ และสมการที่ (26)

ข้อสังเกตสัญลักษณ์ต่างๆในทั้ง 2 กรณีเขียนเหมือนกัน แต่เป็นฟังก์ชันที่แตกต่างกันไปสำหรับแต่ละกรณีและขั้นตอนถัดไปสำหรับการหาค่า $S(\vec{k},t)$ คือการคำนวณหา $b(t)$ โดยกลับไปพิจารณาสมการที่ (11) กำหนดให้ $\eta(t)\equiv e^{-2\Gamma b(t)}$ พร้อมแทนสมการที่ (42) ในสมการที่ (11) แล้วจัดรูปสมการจะได้สมการใหม่เป็น

$$
\frac{d\eta(t)}{dt}=2\Gamma\left(r_0\eta(t)+\frac{\Delta u_0 A g(t)}{(2\pi)^3}+\frac{D u_0 A}{(2\pi)^3}\int_0^t \eta(t')g(t-t')dt'\right)
\tag{46}
$$

หากพิจารณาที่ t มีค่ามากและการแปลงลาปลาซ $\eta(t) \to \bar{\eta}(s)$ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ (46) จะกลายเป็นสมการเชิงเส้น หลังจากนั้นทำการแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่า $\bar{\eta}(s)$ แล้วใช้การแปลงผกผันของ Mellin เพื่อหาการแปลงผกผันของการแปลงลาปลาซ $\bar{\eta}(s) \to \eta(t)$ โดยตั้งสมมติฐานว่าที่เวลานานมากการแปลงลาปลาซของ $g(t)$ จะเป็นไปตามสมการ $\bar{g}(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty g(t+\alpha^2)e^{-st}dt$ โดย α คือจำนวนจริงใดที่ $\alpha^2 \ll 1$

ในกรณี (a) จะได้ว่า $\eta(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{5}{2}}$ หลังจากนั้นนำไปคำนวณหาค่า $b(t)$ และแทนลงในสมการที่ (43) ทำให้ได้ $S(\vec{k},t)$ แล้วทำการแปลงฟูเรียร์ผกผันเพื่อหา $C(\vec{r},t)$ ตามลำดับทำให้ได้ผลลัพธ์เป็น

$$S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right) V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{2}} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} \tag{47}$$

$$C(\vec{r},t) = \frac{\left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right) A}{(2\pi)^3 t_0^{\frac{5}{2}}} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(3\left(\frac{2x}{\gamma t\cos\theta} + y\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right) \tag{48}$$

เมื่อ $t_0^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{c_1 c'_3 - c'_1 c_3}{{c'_1}^2}\right)$, $Z = \frac{2\Gamma A u_0}{(2\pi)^3}$

$c_1 = 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\alpha^3}\right)\Delta Z$, $c_2 = -\frac{4}{3\alpha}\Delta Z$, $c_3 = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\Delta Z$

$c'_1 = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\alpha^3}\right)DZ - 2\Gamma r_0$, $c'_2 = 1 + \frac{4}{3\alpha}DZ$ และ $c'_3 = -\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\Delta Z$

จากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตจะได้ว่ากฎการเติบโตควรจะอยู่ในรูปแบบ

$$L_x(t) \sim (\gamma cos\theta)t^{\frac{3}{2}} \text{ และ } L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

ในกรณี (b) จะได้ว่า $\eta(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{3}{2}}$ หลังจากนั้นนำไปคำนวณหาค่า $b(t)$ และแทนลงในสมการที่ (43) ทำให้ได้ $S(\vec{k},t)$ แล้วทำการแปลงฟูเรียร์ผกผันเพื่อหา $C(\vec{r},t)$ ตามลำดับทำให้ได้ผลลัพธ์เป็น

$$S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right) V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} \tag{50}$$

$$C(\vec{r},t) = \frac{\left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right)A}{(2\pi)^3 t_0^{\frac{3}{2}}} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega} y\, sin(\omega t + \theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right) \quad (51)$$

เมื่อ $\beta = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}$, $t_0^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{c_2 c'_1 - c'_2 c_1}{c'^2_1}\right)$, $Z = \frac{2\Gamma A u_0}{(2\pi)^3}$

$c_1 = 1 + \frac{2\Delta Z}{\alpha}$, $c_2 = -2\sqrt{\pi}\Delta Z$

$c'_1 = -\frac{2DZ}{\alpha} - 2\Gamma r_0$ และ $c'_2 = 2\sqrt{\pi} DZ$

จากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตจะได้ว่ากฎการเติบโตควรจะอยู่ในรูปแบบ

$$L_x(t) \sim L_y(t) \sim L_z(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

บทที่ 5
แบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ

เพื่อเป็นการยืนยันผลการคำนวณจากบทที่ 3 และ 4 เราจึงตั้งสมมติฐานต่อไปว่า ระบบที่มีพารามิเตอร์การจัดระเบียบแบบไม่อนุรักษ์ที่เป็นปริมาณเวกเตอร์หลายองค์ประกอบอยู่ในกลุ่มความเป็นสากลเดียวกันกับแบบจำลองไอซิง และเนื่องจากแบบจำลองไอซิงสามารถจำลองได้ด้วยคอมพิวเตอร์ เราจึงสร้างแบบจำลองมอนติคาร์โลของแบบจำลองไอซิงเพื่อเทียบผลการคำนวณ

โดยในบทนี้จะอธิบายถึงหลักการพื้นฐานของการจำลองมอนติคาร์โลของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ โดยที่ในหัวข้อที่ 5.1 จะเป็นการอธิบายถึงแบบจำลองไอซิงที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน ส่วนในหัวข้อที่ 5.2 จะเป็นการนำหลักการในหัวข้อที่ 5.1 มาพัฒนาให้เป็นแบบจำลองไอซิงที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ และในหัวข้อสุดท้ายจะกล่าวถึงเงื่อนไขของการเฉือนที่ใช้ในการจำลอง ผลลัพธ์ของการจำลอง และการนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นเพื่อพิจารณาว่าแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับจะมีพฤติกรรมอย่างไรในเงื่อนไขการเฉือนแบบต่างๆ

ซึ่งงานวิจัยอื่นที่ใช้ในการพิจารณาพฤติกรรมของระบบ ได้แก่ แบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน [8] พบว่าระบบดังกล่าวจะมีกฎการเติบโตเป็น $L_x(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ และ $L_y(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ และแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ [9] พบว่าระบบดังกล่าวจะมีกฎการเติบโตเป็น $L_x(t) \sim t(\ln t)^{\frac{1}{4}}$ และ $L_y(t) \sim (\ln t)^{-\frac{1}{4}}$

5.1 แบบจำลองมอนติคาร์โลของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน

แบบจำลองไอซิง คือแบบจำลองที่สมมติว่าระบบมีลักษณะเป็นแลตทิซจัตุรัส Λ โดยที่อะตอมที่ตำแหน่ง (x,y) มีค่า "สปิน" $\sigma_{x,y}$ ได้ 2 สถานะ เช่น {1,-1} หรือ {1,0} เป็นต้น สำหรับระบบที่มีสถานะเป็น {1,-1} จะมีฮามิลโทเนียนสำหรับการเรียงตัว"สปิน" $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{\ell,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,\ell} & \cdots & \sigma_{\ell,\ell} \end{bmatrix}$ เท่ากับ

$$H_\Lambda(\sigma) = -\sum_{<rr'>} J_{rr'}\sigma_{x,y}\sigma_{x',y'} \qquad (53)$$

โดยที่ $\sum_{<rr'>}$ แทนผลรวมของทุกคู่ของอะตอมในแลตทิซที่เป็นไปได้

$J_{rr'}$ คือ อันตรกิริยาระหว่างคู่อะตอมที่พิจารณาอยู่

สำหรับการจำลองพลวัตของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิตินิยมใช้กระบวนการกลับสปินเดี่ยว (Single-spin flip) ที่ใช้แบบจำลองมอนติคาร์โล โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะอธิบายแบบจำลองมอนติคาร์โลที่ใช้วิธีการแบบเมโทรโพลิส (Metropolis method) [5] กล่าวคือ ความน่าจะเป็นของการส่งผ่านในสมการควบคุมหลักที่ใช้อธิบายระบบมีค่า

$$\mu(a \to b) = \begin{cases} e^{-\beta\left(H(b)-H(a)\right)} & ; H(b) - H(a) \geq 0 \\ 1 & ; H(b) - H(a) < 0 \end{cases} \tag{54}$$

และเพื่อความง่าย ฮามิลโทเนียนจะถูกคำนวณเฉพาะอะตอมที่อยู่ใกล้ที่สุด (Nearest neighbor atoms) และค่า $J_{xy} = J$ เป็นค่าคงที่ เมื่อ $\beta = \frac{1}{k_B T}$ โดยที่ T คืออุณหภูมิ สำหรับแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติจะมีค่าอุณหภูมิวิกฤติอยู่ที่ $T_c \approx \frac{2.269J}{k_B}$ [5]

ขั้นตอนการจำลองพลวัตการจัดระเบียบเฟสของแบบจำลองไอซิงที่ไม่มีการเฉือน มีดังนี้

1. เริ่มต้นระบบที่สุ่มอย่างสม่ำเสมอ โดยแทนการจัดเรียงตัวของ “สปิน” ℓ^2 ตัว ด้วย

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{\ell,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,\ell} & \cdots & \sigma_{\ell,\ell} \end{bmatrix}$$

2. คำนวณหาค่าพลังงานของระบบ $H(\sigma_{x,y})$ แล้วเลือก “สปิน” $\sigma_{x,y}$ ใดๆในระบบแบบสุ่ม

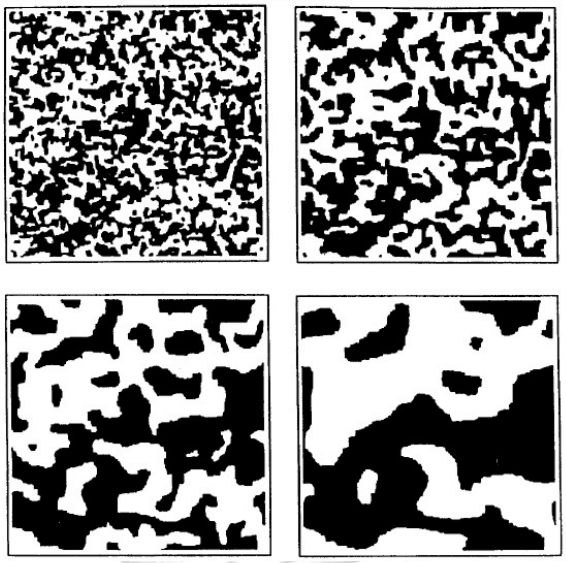
3. กลับสถานะของ “สปิน” $\sigma_{x,y}$ แล้วคำนวณหาค่าพลังงานของระบบ $H(-\sigma_{x,y})$ และผลต่างของพลังงาน $\Delta E = H(-\sigma_{x,y}) - H(\sigma_{x,y})$

4. สร้างการสุ่มแบบสม่ำเสมอของตัวแปร r ที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 ขึ้น เพื่อเทียบกับค่า $\mu(\sigma_{x,y} \to -\sigma_{x,y})$ ถ้า $r \leq \mu(\sigma_{x,y} \to -\sigma_{x,y})$ ให้คงสถานะไว้ แต่ถ้า $r > \mu(\sigma_{x,y} \to -\sigma_{x,y})$ ให้ “สปิน” σ_x กลับไปค่าเดิม

5. คำนวณหาปริมาณทางฟิสิกส์ที่สนใจสำหรับการจัดเรียงตัวปัจจุบันของระบบ

6. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 2 ถึง 5 จนกว่าจะได้จำนวนข้อมูลที่มากพอ โดยถ้าทำซ้ำเป็นจำนวนเท่ากับขนาดของระบบยกกำลังสองครั้ง จะเรียกว่า 1 ขั้นมอนติคาร์โล (Monte Carlo step (MCS))

รูปที่ 4 แสดงตัวอย่างของแบบจำลองมอนติคาร์โลของการเติบโต“โดเมน”ของแบบจำลองมอนติคาร์โลของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน จะสังเกตเห็นว่าเมื่อเวลาผ่านไป“โดเมน”ของระบบจะมีขนาดใหญ่ขึ้น



รูปที่ 4 แสดงแบบจำลองมอนติคาร์โลของการเติบโต"โดเมน"ของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ที่อุณหภูมิเท่ากับ 0 K (จาก Kissner [10]) โดยที่ระบบมีขนาด 256x256 และแต่ละภาพถูกถ่ายเมื่อ MCS เท่ากับ 5 , 15, 60 และ 200 จากซ้ายไปขวา หลังจากที่ระบบถูกลดอุณหภูมิอย่างรวดเร็วจากอุณหภูมิสูง

5.2 แบบจำลองมอนติคาร์โลของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ

การจำลองมอนติคาร์โลพลวัตของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติในงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ดัดแปลงมาจากงานของชิชิลโล โกนเนลลาและซาราคโค [9] ซึ่งคล้ายกับมอนติคาร์โลของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนที่กล่าวไว้ในบทย่อยที่ 5.1 โดยกำหนดให้แบบจำลองมีลักษณะเป็นแลตทิซจัตุรัส Λ ที่มีความยาวแต่ละด้าน ℓ และมีเงื่อนไขขอบแบบคาบสำหรับแกน x กล่าวคือ $\sigma_{\ell+1,y} = \sigma_{1,y}$ แต่มีเงื่อนไขขอบแบบอิสระสำหรับแกน y "สปิน" ของแต่ละจุดในแลตทิซมีค่าได้สองค่า คือ +1 หรือ -1 กำหนดให้ Ω แทนเซตของการจัดเรียงตัวที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแบบจำลอง และ $\sigma_{x,y}$ เป็นค่าของ "สปิน" ณ จุด (x,y) ในการจัดเรียงแบบ σ ฮามิลโทเนียนของแบบจำลองคือ

$$H_\Lambda(\sigma) = -J\sum_{x=1}^{\ell}\sum_{y=1}^{\ell}\sigma_{x,y}\sigma_{x+1,y} - J\sum_{x=1}^{\ell}\sum_{y=1}^{\ell-1}\sigma_{x,y}\sigma_{x,y+1} \tag{55}$$

กำหนดให้ หนึ่งหน่วยเวลา (time unit (TU)) คือ 1 MCS กล่าวคือ ทำตามขั้นที่ 2 - 5 ที่จะกล่าวถัดไปเป็นจำนวน ℓ^2 ครั้ง และกำหนดให้จำนวน τ คือจำนวนที่หาร ℓ^2 ลงตัว

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $t = 0$ และ $i = 0$ และสุ่มค่า “สปิน” ของแต่ละจุดของระบบ โดยให้มีความน่าจะเป็นที่ค่าจะเท่ากับ +1 หรือ -1 เท่ากัน และเรียกการจัดเรียงในขั้นนี้ว่า σ_0

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ $i = i + 1$ แล้วดำเนินตามขั้นตอนที่ 2 – 4 ที่กล่าวไว้ในบทย่อยที่ 5.1

ขั้นที่ 3 ถ้า i มีค่าเป็นจำนวนเท่าของ τ แล้ว λ จะถูกกำหนดให้เท่ากับจำนวนเต็มของ $Acos(\omega(t + \frac{i}{\ell^2}) + \theta)$ เมื่อ A คือ จำนวนจริง ω และ θ คือความถี่และเฟสเริ่มต้นของการเฉือนตามลำดับ ต่อจากนั้นทำการสุ่มแถวของแลตทิซด้วยความน่าจะเป็นสม่ำเสมอ $\frac{1}{\ell}$ และ ถ้า Y คือแถวที่ถูกเลือก แล้ว ทุกแถว y ที่ $y \geq Y$ จะถูกเลื่อนไปด้วยค่า $\boldsymbol{\lambda}$ โดยถ้า λ มีค่าเป็นบวกให้เลื่อนไปทางขวา และถ้า λ มีค่าเป็นลบให้เลื่อนไปทางซ้าย

ขั้นที่ 4 ถ้า $i < \ell^2$ ให้กลับไปทำขั้นที่ 2 ในทางกลับกันถ้า $i = \ell^2$ กำหนดให้ σ_{t+1}

ขั้นที่ 5 กำหนดให้ $t = t + 1$ และ $i = 0$ แล้วเริ่มทำขั้นที่ 2 ใหม่

จากขั้นตอนกล่าวมาข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\gamma = \frac{A\ell}{\tau}$ [9]

5.3 การจำลองแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ภายใต้การเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ

ในการจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับครั้งนี้ได้กำหนดให้ขนาดของระบบ ℓ มีค่า 4,096 และ 2,048 อัตราการเฉือนมีค่า $\gamma = \frac{1}{8}$ ช่วงเวลาที่สังเกตคือ 0 ถึง 2,000 TU และ $\beta J = 2$ เมื่อ $\beta = \frac{1}{k_B T}$ เพราะจากงานวิจัยก่อนหน้าพบว่าจุดวิกฤติของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติมีค่า $\beta J \approx \mathbf{0.44}$ [5] โดยจะทำการจำลองภายใต้การกำหนดค่าเฟสเริ่มต้นและความถี่ของการเฉือนตามตารางข้างล่าง

คาบ $2\pi/\omega$ (TU)	1/64 ℓ =4,096	1/48 ℓ =2,048	1/24 ℓ =2,048	100,000 ℓ =4,096
เฟสเริ่มต้น θ (ดีกรี)	0			
	5			
	10			
	45			
	80			
	85			
	90			

ตารางที่ 1 แสดงเงื่อนไขที่ใช้ในการจำลองระบบ

เมื่อได้ผลลัพธ์จากการจำลองแล้ว ทำการคำนวณค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันโดยแยกพิจารณาเป็นฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในแนวแกน x และฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในแนวแกน y โดยใช้ค่าเฉลี่ยอองซอมเบิลและค่าเฉลี่ยเชิงปริภูมิพื้นที่ (Spatial average) ร่วมกันดังสมการที่แสดงอยู่ข้างล่าง

$$C_x(r,t) = \frac{1}{3\ell^2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{x={\ell}/_{4}+1}^{3\ell/_4}\sum_{y=1}^{\ell}\left\{\sigma_{x,y}^{(k)}(t)\sigma_{x+r,y}^{(k)}(t) + \sigma_{x,y}^{(k)}(t)\sigma_{x-r,y}^{(k)}(t)\right\}$$

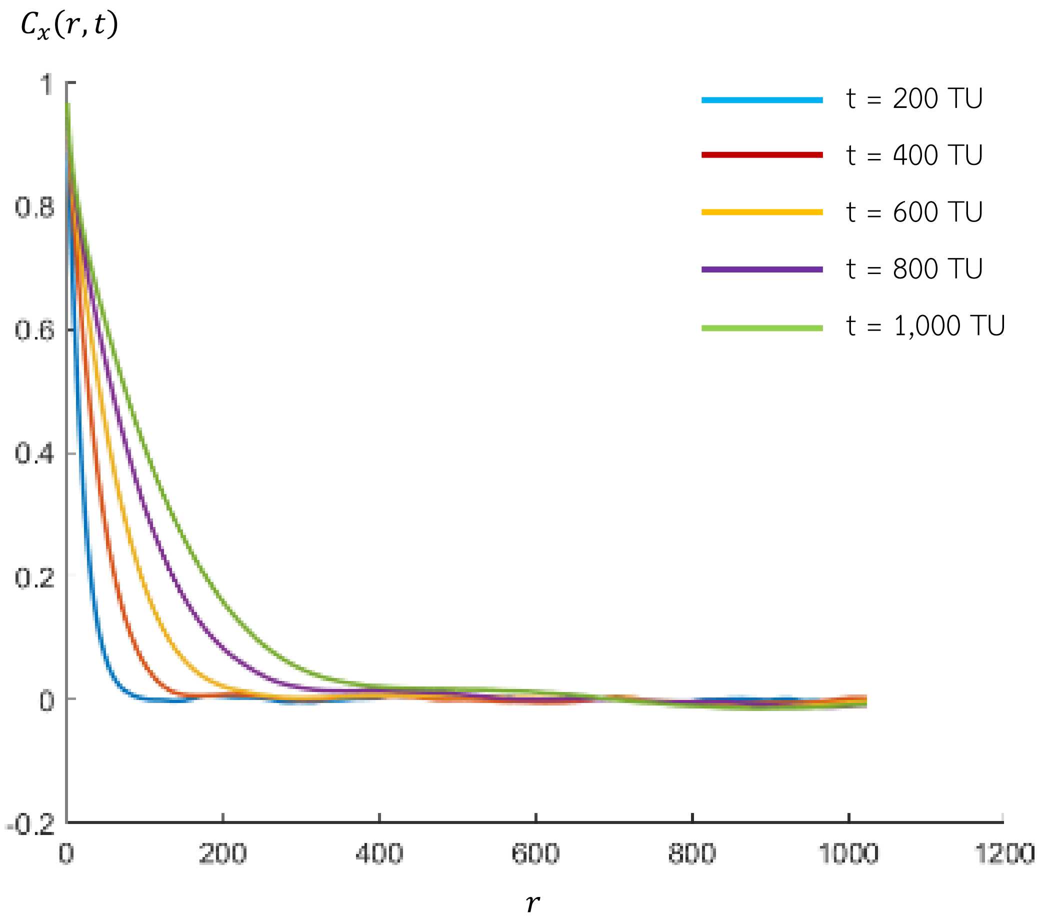
$$C_y(r,t) = \frac{1}{3\ell^2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{x=1}^{\ell}\sum_{y={\ell}/_{4}+1}^{3\ell/_4}\left\{\sigma_{x,y}^{(k)}(t)\sigma_{x,y+r}^{(k)}(t) + \sigma_{x,y}^{(k)}(t)\sigma_{x,y-r}^{(k)}(t)\right\}$$

โดย $0 \leq r \leq {\ell}/_{4}$ และ k คือเลขลำดับที่ของค่าเริ่มต้นของระบบ

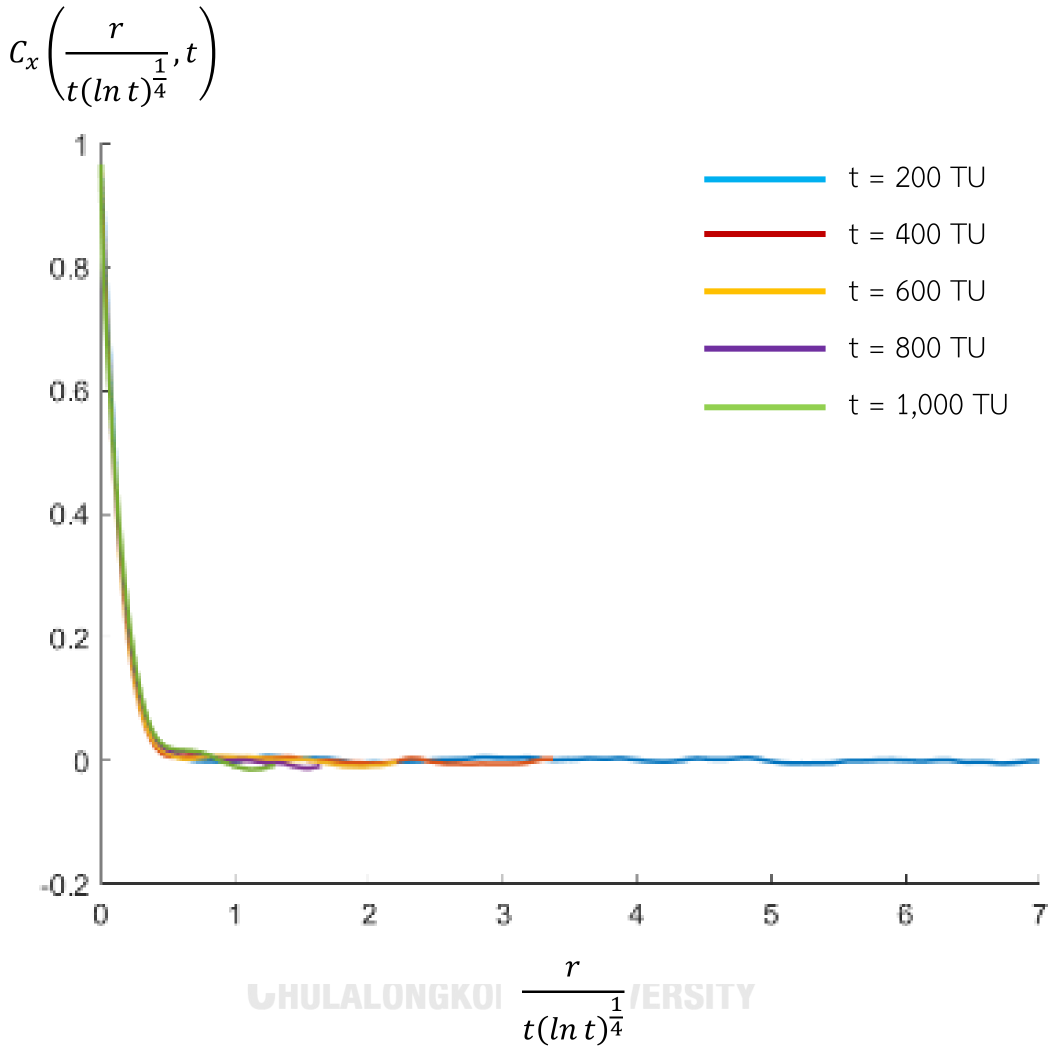
จากการผลการจำลอง เราสามารถสร้างกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันได้ โดยรูปที่ 5 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x โดยความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 โดยกราฟแต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 200 TU รูปที่ 6 แสดงกราฟจากรูปที่ 5 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_x(t) \sim t(ln\,t)^{\frac{1}{4}}$ รูปที่ 7 แสดงกราฟจากรูปที่ 5 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_x(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ และรูปที่ 8 แสดง“สปินโดเมน”ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 ณ เวลา 1,000 TU

จะสังเกตเห็นว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ (รูปที่ 6) จะซ้อนทับสนิทกันมากกว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน (รูปที่ 7) และเมื่อพิจารณาการซ้อนทับสนิทกันของกราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y (ภาคผนวก ค) ภายใต้เงื่อนไขการเฉือนเดียวกัน เราก็จะพบว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_y(t) \sim (ln\,t)^{-\frac{1}{4}}$ จะซ้อนทับกันสนิทกันมากกว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_y(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ ซึ่งสอดคล้องกันกับการพิจารณาในแกน x

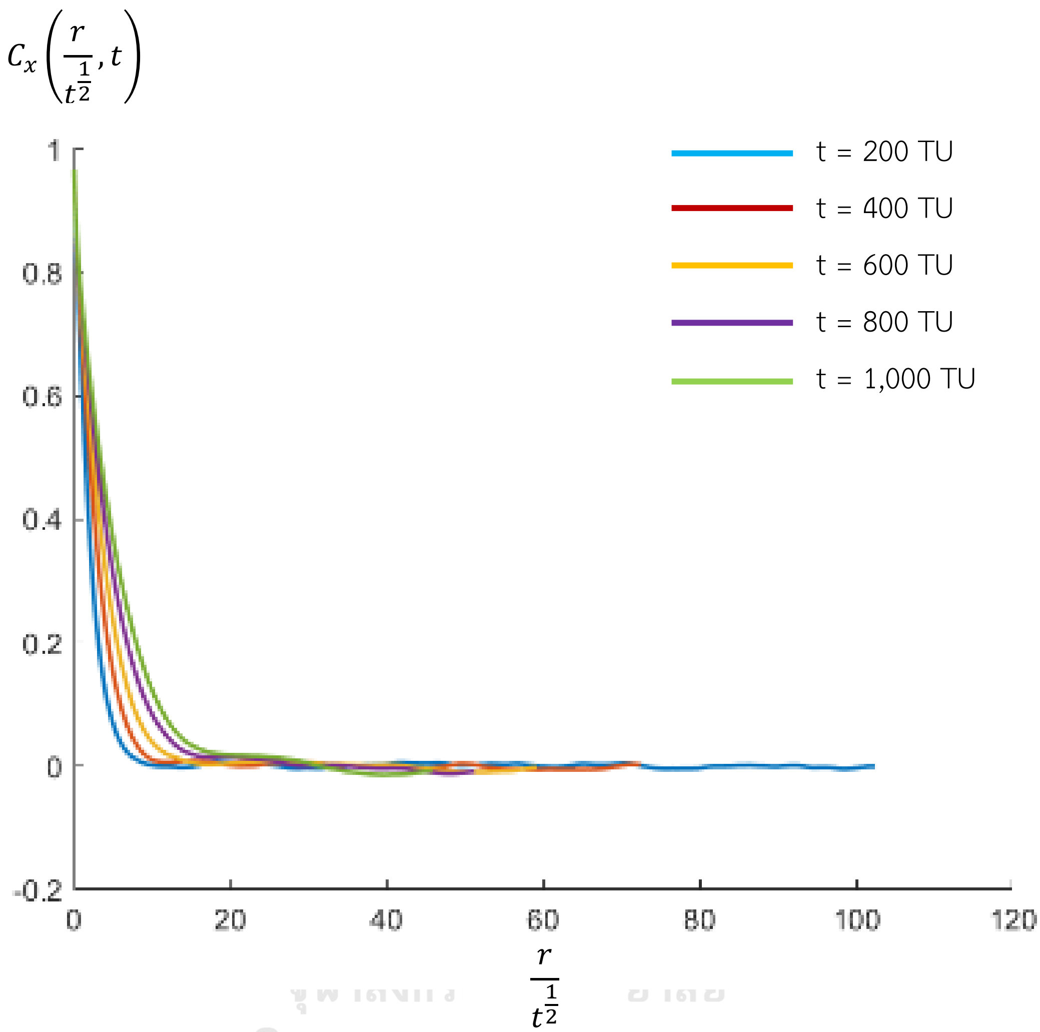
จากข้อความข้างต้นแสดงให้เห็นว่า หากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตเป็นจริง แบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ ที่ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 ในช่วงเวลา 2,000 TU จะประพฤติเสมือนว่าอยู่ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



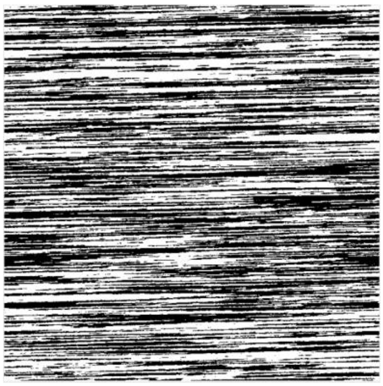
รูปที่ 5 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 โดยกราฟแต่ละเส้นเวลาห่างกัน 200 TU



รูปที่ 6 แสดงกราฟจากรูปที่ 5 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ



รูปที่ 7 แสดงกราฟจากรูปที่ 5 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน

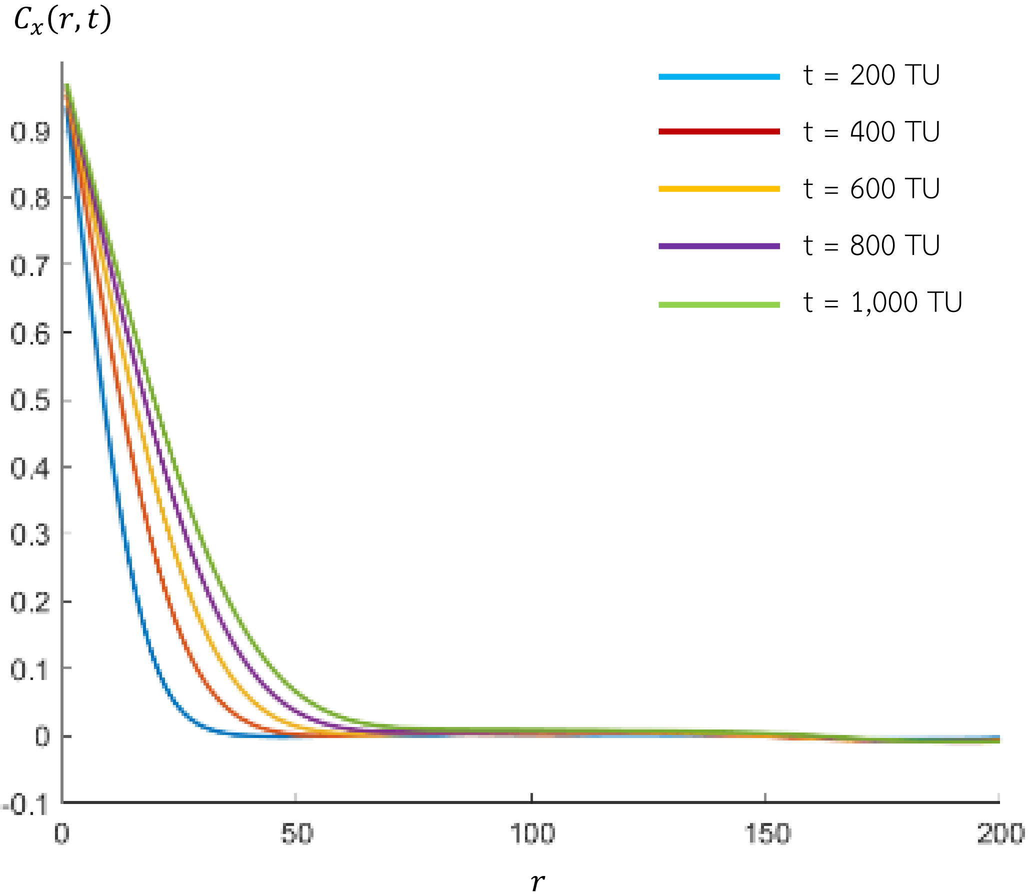


รูปที่ 8 แสดง“สปินโดเมน”ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 ณ เวลา 1,000 TU

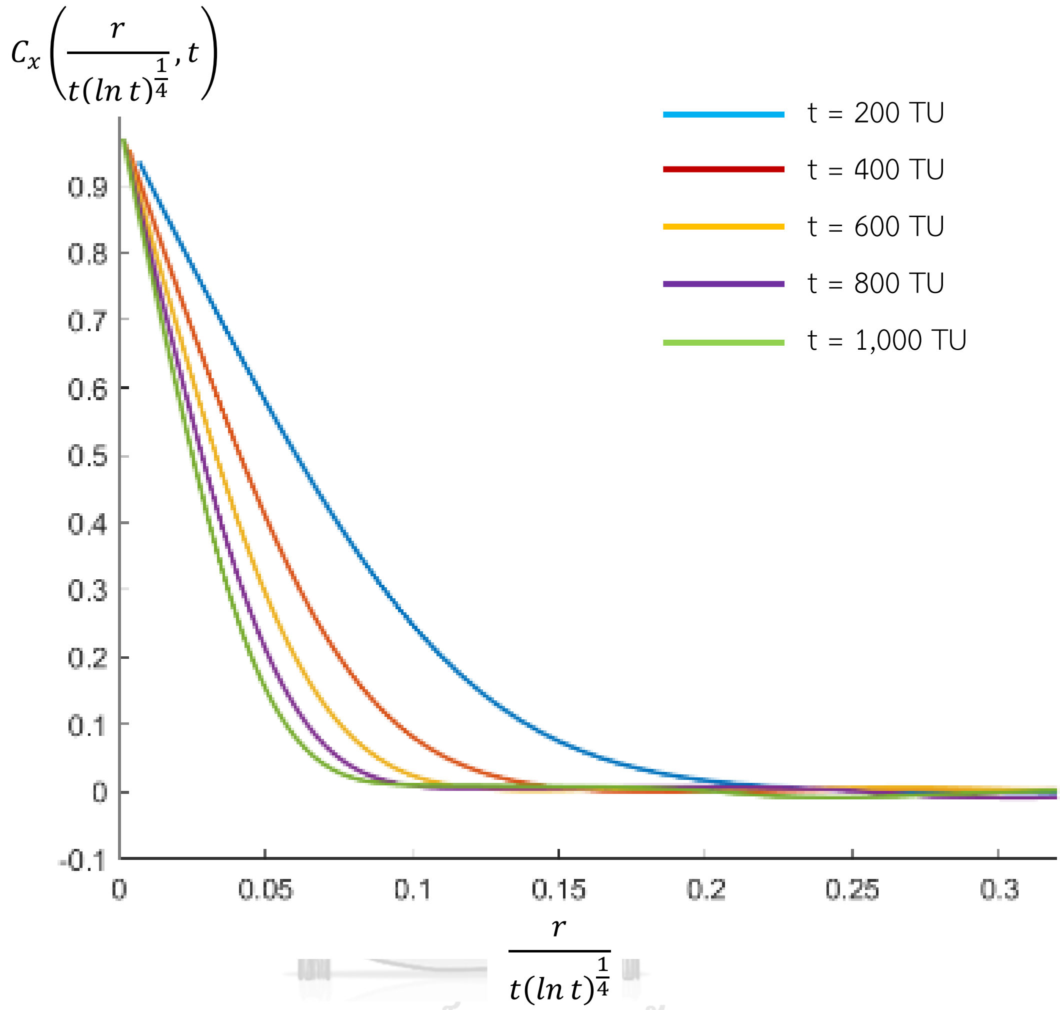
รูปที่ 9 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x โดยความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 0.00001 1/TU และเฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 โดยกราฟแต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 200 TU รูปที่ 10 แสดงกราฟจากรูปที่ 9 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_x(t) \sim t(ln\,t)^{\frac{1}{4}}$ รูปที่ 11 แสดงกราฟจากรูปที่ 9 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_x(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ และรูปที่ 12 แสดง“สปินโดเมน”ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 0.00001 1/TU และเฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 ณ เวลา 1,000 TU

จะสังเกตเห็นว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน (รูปที่ 11) จะซ้อนทับสนิทกันมากกว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ (รูปที่ 10) และเมื่อพิจารณาการซ้อนทับสนิทกันของกราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y (ภาคผนวก ค) ภายใต้เงื่อนไขการเฉือนเดียวกัน เราก็จะพบว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_y(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ จะซ้อนทับกันสนิทกันมากกว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_y(t) \sim (ln\,t)^{-\frac{1}{4}}$ ซึ่งสอดคล้องกันกับการพิจารณาในแกน x

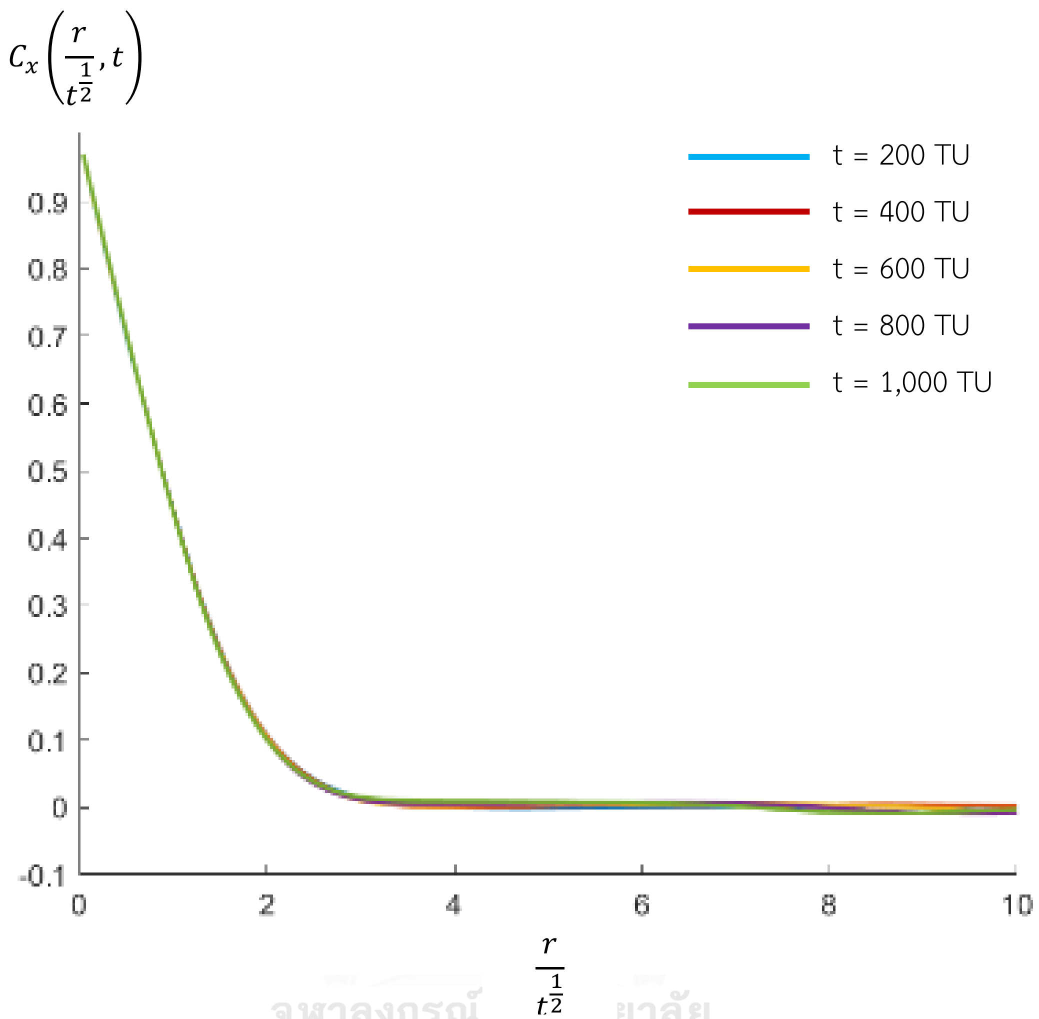
จากข้อความข้างต้นแสดงให้เห็นว่า หากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตเป็นจริง แบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ ที่ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 ในช่วงเวลา 2,000 TU จะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน



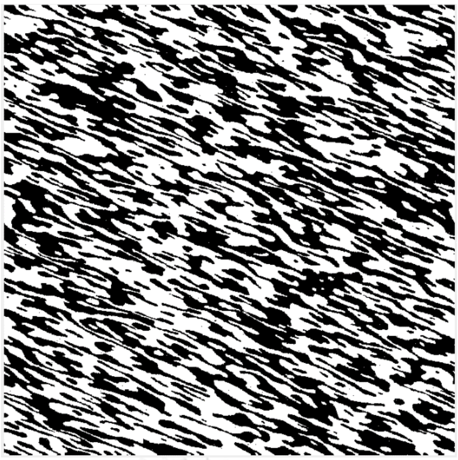
รูปที่ 9 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 โดยกราฟแต่ละเส้นเวลาห่างกัน 200 TU



รูปที่ 10 แสดงกราฟจากรูปที่ 9 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ



รูปที่ 11 แสดงกราฟจากรูปที่ 9 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน

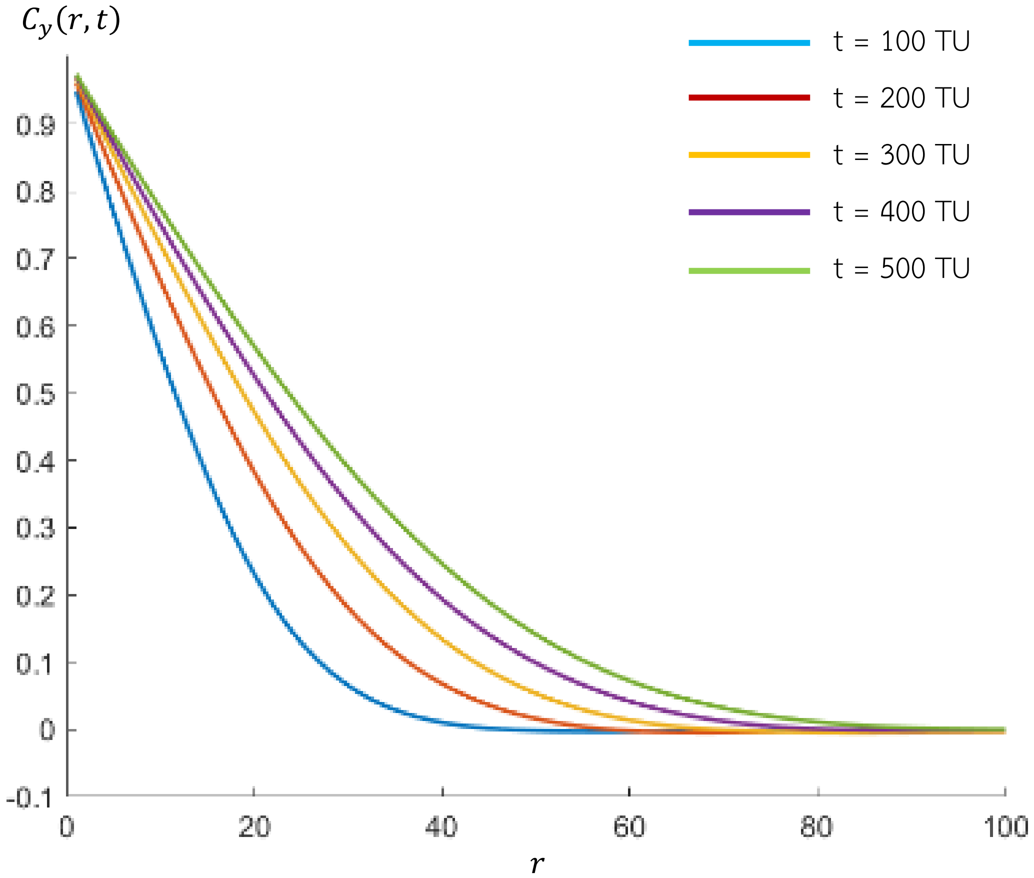


รูปที่ 12 แสดง“สปินโดเมน”ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 0.00001 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 ณ เวลา 1,000 TU

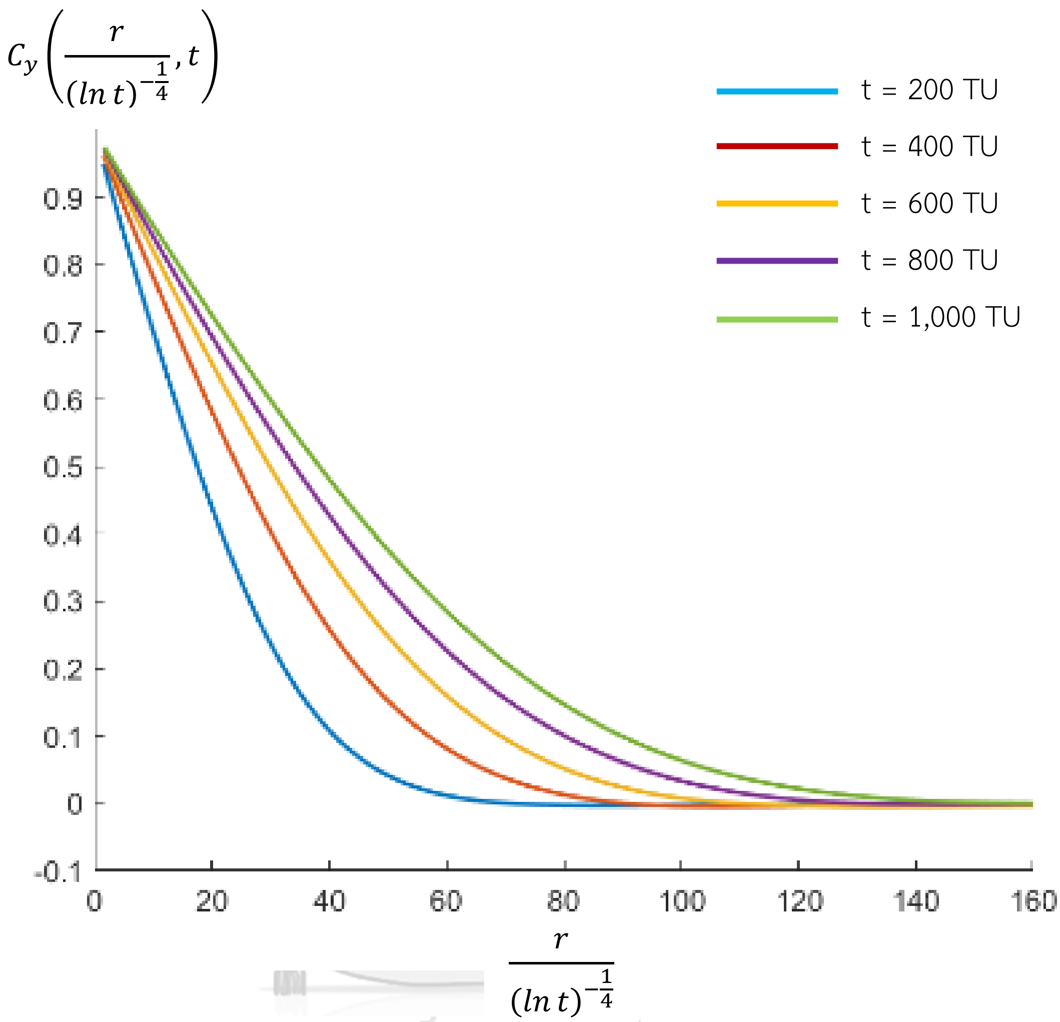
รูปที่ 13 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y โดยความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 โดยกราฟแต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 100 TU รูปที่ 14 แสดงกราฟจากรูปที่ 13 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_y(t) \sim (ln\, t)^{-\frac{1}{4}}$ รูปที่ 15 แสดงกราฟจากรูปที่ 13 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_y(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ และรูปที่ 16 แสดง“สปินโดเมน” ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 ณ เวลา 1,000 TU

จะสังเกตเห็นว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน (รูปที่ 15) จะซ้อนทับสนิทกันมากกว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ (รูปที่ 14) และเมื่อพิจารณาการซ้อนทับสนิทกันของกราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x (ภาคผนวก ค) ภายใต้เงื่อนไขการเฉือนเดียวกัน เราก็จะพบว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_x(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ จะซ้อนทับกันสนิทกันมากกว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_x(t) \sim t(ln\, t)^{\frac{1}{4}}$ ซึ่งสอดคล้องกันกับการพิจารณาในแกน y

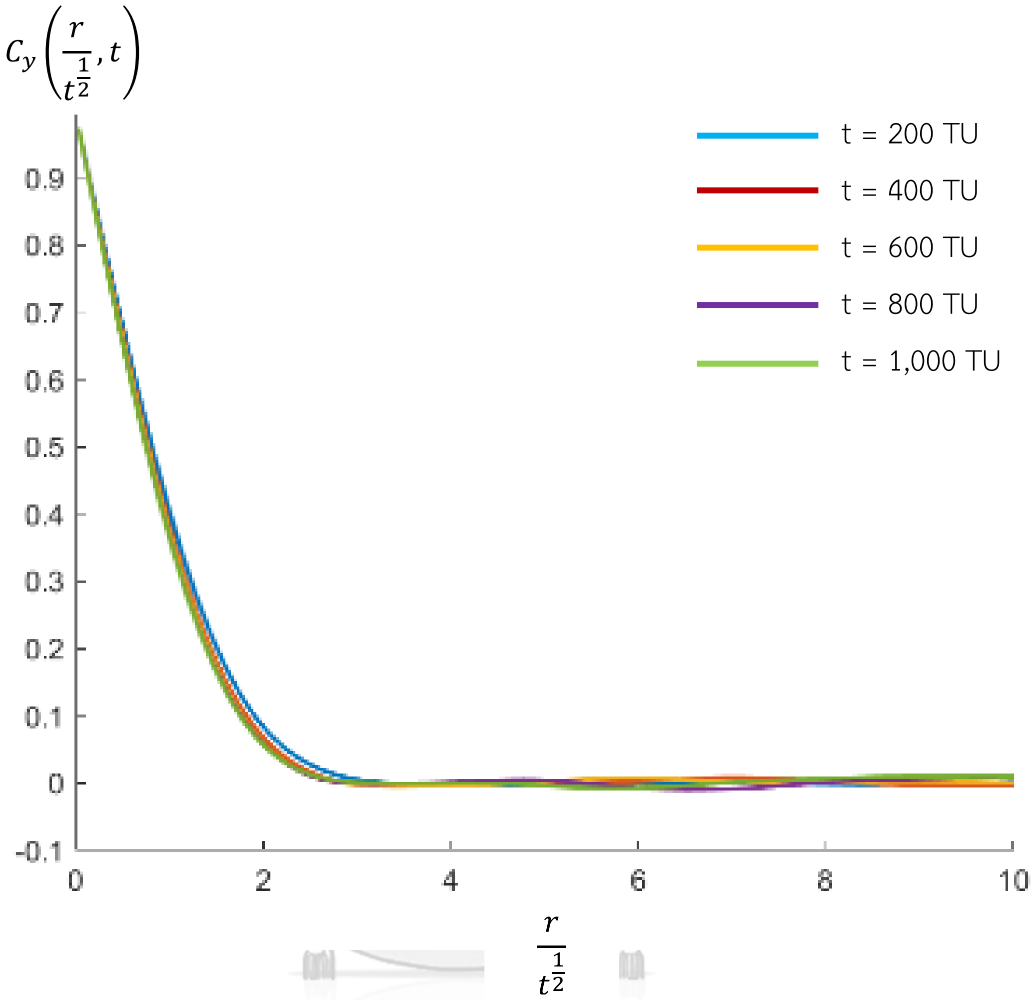
จากข้อความข้างต้นแสดงให้เห็นว่า หากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตเป็นจริง แบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ ที่ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 ในช่วงเวลา 1,000 TU จะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน



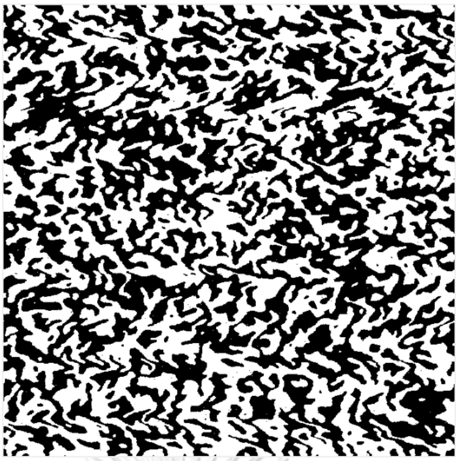
รูปที่ 13 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 โดยกราฟแต่ละเส้นเวลาห่างกัน 100 TU



รูปที่ 14 แสดงกราฟจากรูปที่ 13 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ



รูปที่ 15 แสดงกราฟจากรูปที่ 13 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน

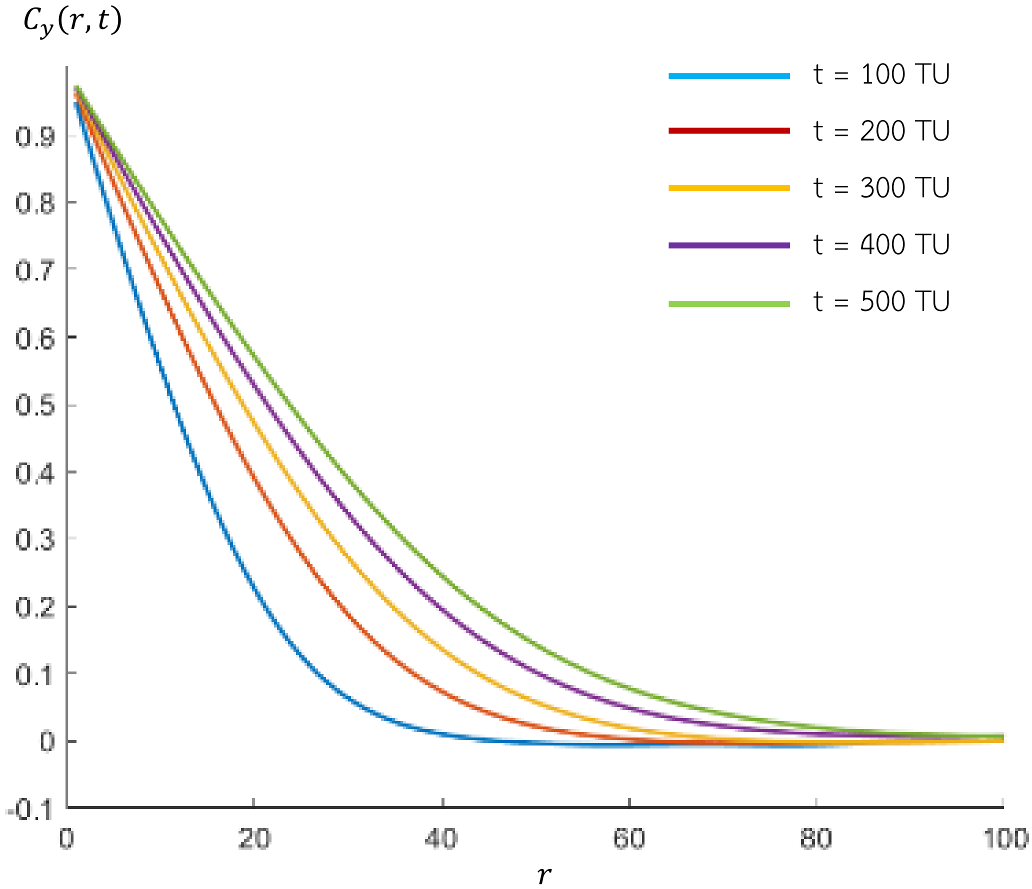


รูปที่ 16 แสดง“สปินโดเมน”ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 0 ณ เวลา 1,000 TU

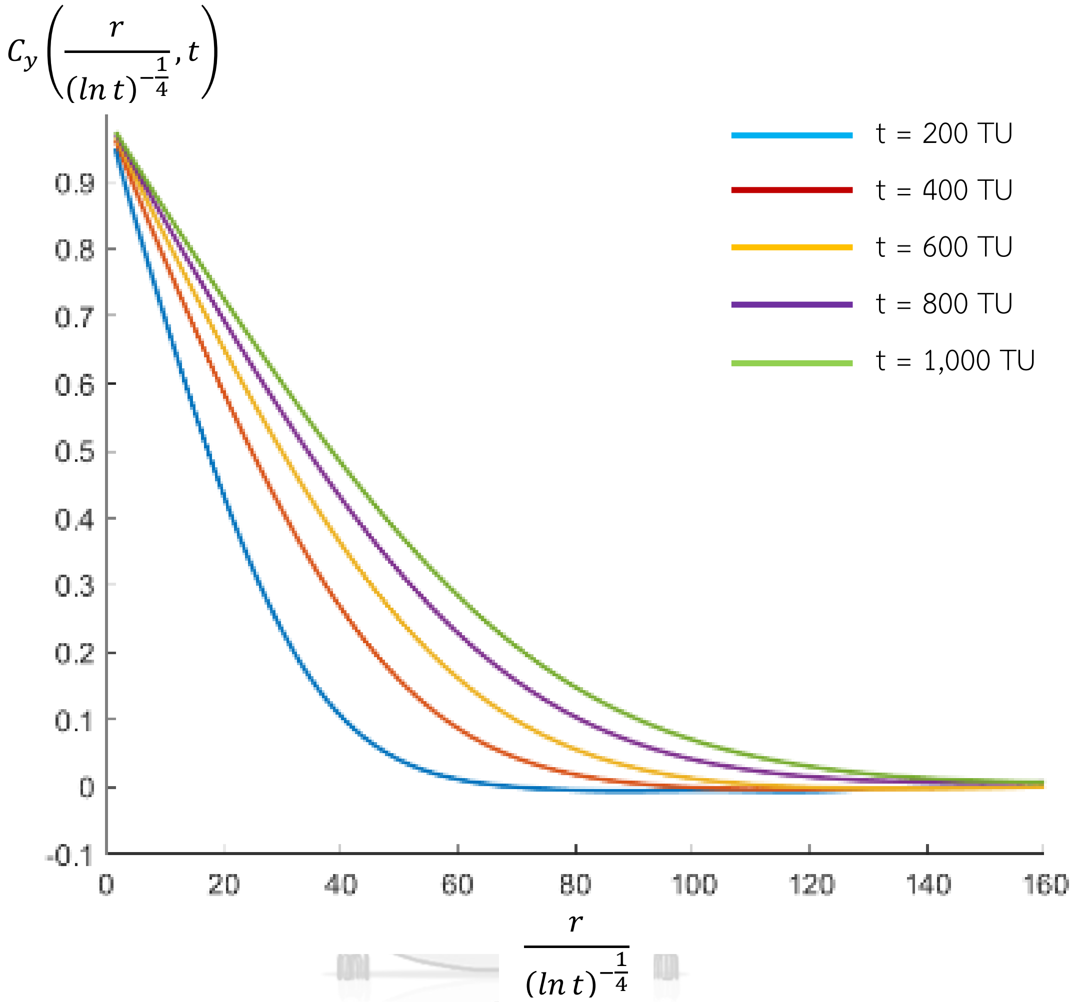
รูปที่ 17 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y โดยความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 โดยกราฟแต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 100 TU รูปที่ 18 แสดงกราฟจากรูปที่ 17 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_y(t) \sim (ln\, t)^{-\frac{1}{4}}$ รูปที่ 19 แสดงกราฟจากรูปที่ 17 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_y(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ และรูปที่ 20 แสดง“สปินโดเมน” ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 ณ เวลา 1,000 TU

จะสังเกตเห็นว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน (รูปที่ 19) จะซ้อนทับสนิทกันมากกว่ากราฟที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ (รูปที่ 18) และเมื่อพิจารณาการซ้อนทับสนิทกันของกราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x (ภาคผนวก ค) ภายใต้เงื่อนไขการเฉือนเดียวกัน เราก็จะพบว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน $L_x(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ จะซ้อนทับกันสนิทกันมากกว่ากราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน x ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ $L_x(t) \sim t(ln\, t)^{\frac{1}{4}}$ ซึ่งสอดคล้องกันกับการพิจารณาในแกน y

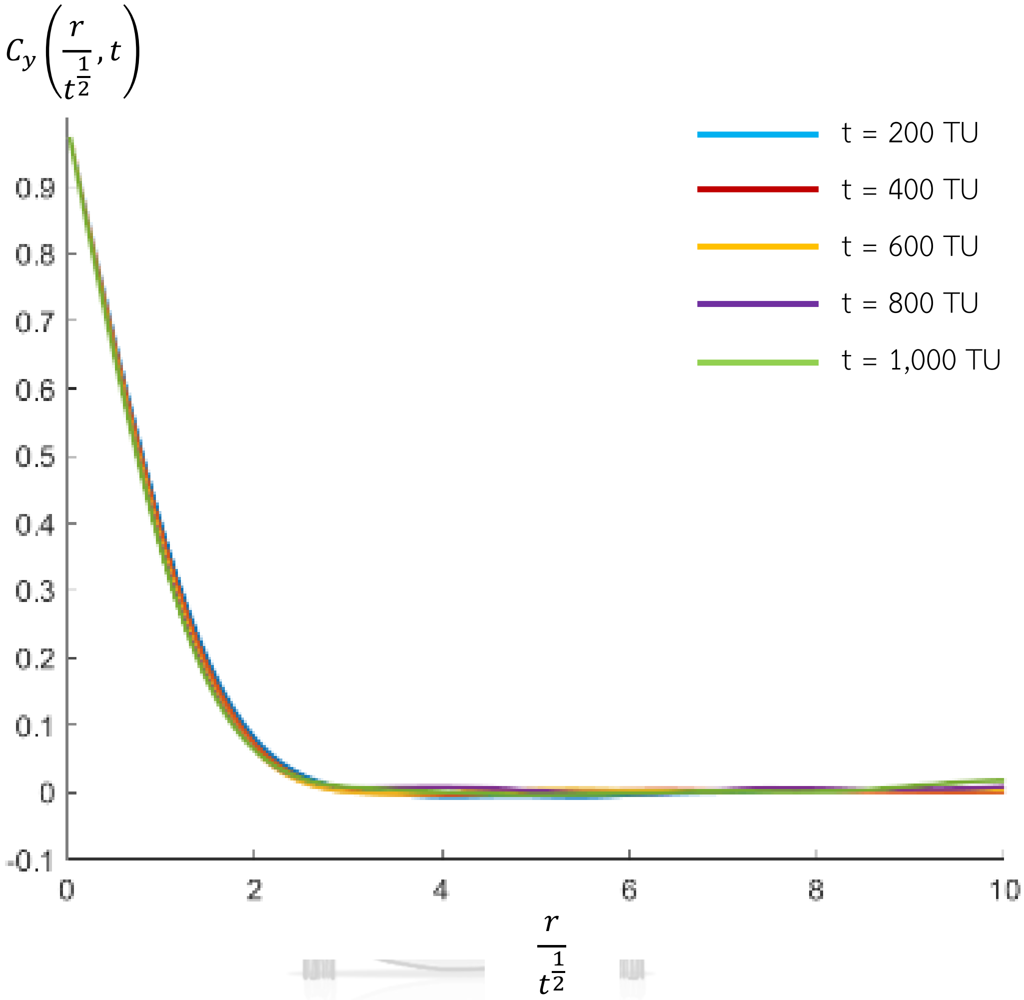
จากข้อความข้างต้นแสดงให้เห็นว่า หากสมมติฐานการสเกลเชิงพลวัตเป็นจริง แบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับ ที่ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 ในช่วงเวลา 1,000 TU จะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน



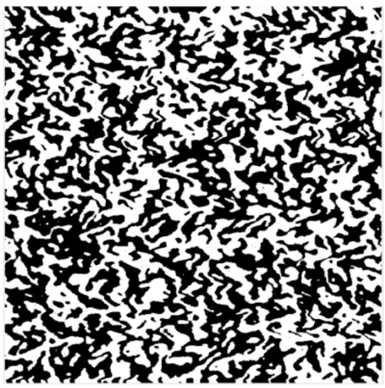
รูปที่ 17 แสดงกราฟของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันในทิศแกน y ความถี่ของการเฉือนมีค่าเท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 โดยกราฟแต่ละเส้นเวลาห่างกัน 100 TU



รูปที่ 18 แสดงกราฟจากรูปที่ 17 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ



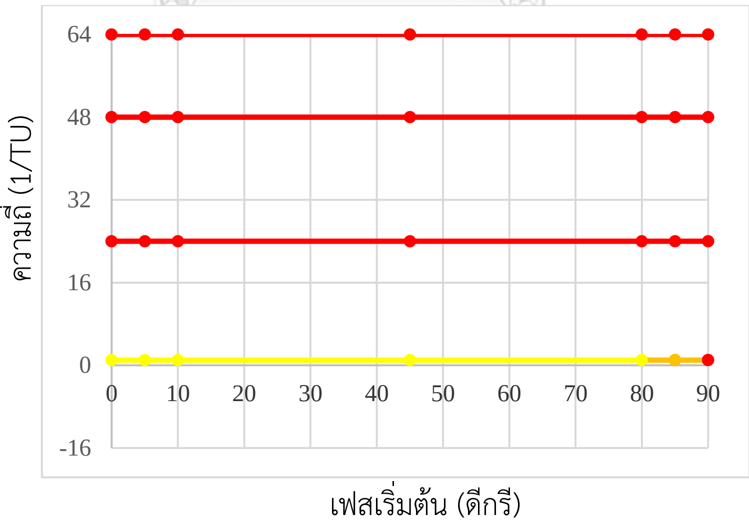
รูปที่ 19 แสดงกราฟจากรูปที่ 17 ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน



รูปที่ 20 แสดง"สปินโดเมน"ของระบบที่มีการเฉือนที่ความถี่เท่ากับ 64 1/TU และ เฟสเริ่มต้นเท่ากับ 90 ณ เวลา 1,000 TU

เมื่อทำการวิเคราะห์การซ้อนทับสนิทกันของกราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตของระบบที่อยู่ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอและกฎการเติบโตของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน ทั้งในแนวแกน x และ แนวแกน y ตามเงื่อนไขของการเฉือนในตารางที่ 1 เราสามารถนำผลการวิเคราะห์ในแต่ละเงื่อนไขของการเฉือนมาสร้างแผนภาพเฟสของแบบจำลองได้ดังแสดงในรูปที่ 21 จากภาพเราจะพบว่าระบบมี 2 พฤติกรรมเช่นเดียวกับระบบที่พิจารณาในบทที่ 3 และ 4 กล่าวคือที่ความถี่จำกัดค่าหนึ่ง (32 , 48 และ 64 1/TU) ระบบจะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนซึ่งแทนด้วยจุดสีแดง ส่วนที่ความถี่ต่ำ (0.00001 1/TU) ระบบจะประพฤติเสมือนว่าอยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอซึ่งแทนด้วยจุดสีเหลือง ส่วนจุดสีส้มคือส่วนที่แตกต่างจากการคำนวณในบทที่ 3 และ 4 แทนสถานะของระบบที่ยังระบุไม่ได้ สาเหตุที่เราไม่สามารถระบุสถานะได้ เป็นเพราะกราฟฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่ถูกสเกลด้วยกฎการเติบโตแบบต่างๆ ไม่มีการซ้อนทับกัน

ข้อจำกัดในการพิจารณาแผนภาพนี้คือ ภาพนี้เป็นเพียงแผนภาพเฟสของแบบจำลองไอซิงในปริภูมิพื้นที่ 2 มิติ ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับที่มีขนาดของระบบที่จำกัด และในช่วงเวลา 0 ถึง 2,000 TU หากทำการจำลองในช่วงความถี่และเฟสเริ่มต้นของการเฉือนในค่าอื่นๆ และช่วงเวลาในการจำลองช่วงอื่นอาจจะได้ผลลัพธ์ที่ไม่สอดคล้องกับการคำนวณในบทที่ 3 และ 4



รูปที่ 21 แสดงแผนภาพเฟสของแบบจำลอง จุดสีเหลืองแทนสถานะของระบบที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ จุดสีแดงแทนสถานะของระบบที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน และจุดสีส้มแทนสถานะของระบบที่ยังระบุไม่ได้

บทที่ 6
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ผลการคำนวณในบทที่ 3 และ 4 ทำให้สรุปได้ว่า ผลการรบกวนทางความร้อนไม่ส่งผลต่อพลวัตของการสเกลของระบบ เพราะทั้ง 2 กรณีมีกฎการเติบโตชุดเดียวกันและมีรูปแบบของ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ที่เวลาเท่ากันและฟังก์ชันโครงสร้างที่เวลาเท่ากันรูปแบบเดียวกัน ต่างกันเพียงค่าสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่กับฟังก์ชันเท่านั้น

หากพิจารณาพฤติกรรมของระบบภายใต้การเฉือนแบบเคลื่อนที่สลับที่ค่าความถี่และเฟสเริ่มต้นต่างๆเมื่อเวลาผ่านไปนาน ผ่านกฎการเติบโตของระบบ จะพบว่าระบบมีพฤติกรรมที่แตกต่างกันอยู่ 2 แบบ ได้แก่ ระบบที่ประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน และระบบที่ประพฤติเสมือนว่าอยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ กล่าวคือ ถ้าความถี่ของการเฉือนมีค่าจำกัดค่าหนึ่ง ระบบจะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน ซึ่งพิจารณาได้จากสมการที่ (38) หรือ สมการที่ (52) ทำให้พลวัตของการสเกลในทิศของการเฉือน (แกน x) และทิศที่ตั้งฉาก (แกน y) ไม่มีความแตกต่างกัน แต่หากว่าค่าความถี่ของการเฉือนมีค่าน้อยมาก พฤติกรรมของระบบจะถูกควบคุมด้วยค่าเฟสเริ่มต้นของการเฉือน เนื่องจากพจน์ $cos\theta$ ที่ปรากฏในสมการที่ (21) ถ้าเฟสเริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 90 องศา หรือ 270 องศา ระบบจะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน ในทางกลับกัน ถ้าเฟสเริ่มต้นเท่ากับค่าอื่น ระบบจะประพฤติเสมือนว่าอยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ ซึ่งหมายความว่าพลวัตการสเกลของระบบในทิศของการเฉือนและทิศที่ตั้งฉากมีค่าต่างกัน โดยพิจารณาผ่านค่า α ที่สัมพันธ์กับกฎการเติบโตดังนี้ $L(t) \sim t^{\alpha}$ หาก $\alpha_{\parallel}$ และ $\alpha_{\perp}$ คือ เลขชี้กำลังของกฎการเติบโตในทิศขนานและตั้งฉากกับการเฉือนตามลำดับจากสมการที่ (35) หรือ สมการที่ (49) พบว่า $\alpha_{\parallel} = \frac{3}{2}$ และ $\alpha_{\perp} = \frac{1}{2}$ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยอื่นที่ $\alpha_{\parallel}$ และ $\alpha_{\perp}$จะสมพันธ์กันผ่านสมการ $\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} = 1$ [11]

จากสิ่งที่กล่าวไว้ข้างต้นอาจจะสรุปได้ว่า ที่การเฉือนความถี่ต่ำ ระบบจะมีเฟสที่แตกต่างกัน 2 เฟส โดยมีเฟสเริ่มต้นของการเฉือนเป็นพารามิเตอร์เฟส ระบบจะเกิดการเปลี่ยนเฟส จากเฟสที่ระบบประพฤติเสมือนว่าอยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ ไปยังเฟสที่ระบบจะประพฤติเสมือนว่าไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือน ณ เฟสเริ่มต้นของการเฉือนเท่ากับ 90 องศา

ในส่วนการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ พบว่าแบบจำลองสอดคล้องกับการคำนวณในบทที่ 3 และ 4 ในช่วงเวลา 0 ถึง 2,000 TU และเงื่อนไขของการเฉือนตามตารางที่ 1 แต่มีจุดที่น่าสังเกตคือการเฉือนที่ความถี่ต่ำและมีเฟสเริ่มต้นการเฉือนเท่ากับ 85 องศา พบว่าไม่สามารถจัดประเภทพฤติกรรมที่เหมาะสมของระบบได้ คาดว่าสาเหตุมาจาก การที่เมื่อเฟสเริ่มต้นของการเฉือนมีค่าเข้า

ใกล้ 90 องศา พจน์การเฉือนในสมการที่ (10) จะมีค่าน้อยมาก ดังนั้นอิทธิพลของการเฉือนจะส่งผลต่อระบบเมื่อเวลาผ่านไปนานมากพอ แต่เนื่องจากในการจำลองครั้งนี้เวลาที่ใช้ในการสังเกตการณ์คือ 2,000 TU ซึ่งอาจจะไม่เพียงพอที่จะสังเกตเห็นผลจากการเฉือน ดังนั้นในการแก้ปัญหานี้อาจจะขยายขอบเขตเวลาในการสังเกตการณ์ออกไปให้มากขึ้น แต่การขยายเวลาในการสังเกตให้มากขึ้นจำเป็นจะต้องขยายขนาดของระบบให้ใหญ่ขึ้นตาม เพื่อไม่ให้เกิดผลเนื่องจากขนาดที่จำกัดของระบบ (The finite system size effect) เพราะทฤษฎีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้อยู่บนสมมติฐานของลิมิตอุณหพลศาสตร์ (The thermodynamic limit) ในท้ายที่สุดเมื่อเวลานานพอและระบบมีขนาดที่ใหญ่พอ คาดว่าสำหรับการเฉือนที่ความถี่ต่ำและมีเฟสเริ่มต้น 85 องศา ระบบจะประพฤติเสมือนว่าอยู่ภายใต้อิทธิพลของการเฉือนแบบสม่ำเสมอ

รายการอ้างอิง

[1] Bray AJ 2002 *Adv. Phys.* **51** 481

[2] Piputnchonlathee V 2003 *ProQuest Dissertations And Theses* **75** 136

[3] Hyun K, Wilhelm M, Klein CO, Cho KS, Nam JG and Ahn KH 2011 *Prog. Polym. Sci.* **36** 1697

[4] Puri S and Wadhawan V 2009 *Kinetics of phase transitions* (Boca Raton: CRC Press)

[5] Nishimori H and Ortiz G 2011 *Elements of phase transitions and critical Phenomena* (New York: Oxford University Press)

[6] Hohenberg PC and Halperin BI 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 435

[7] Kittel C 1958 *Elementary Statistical Physics* (New York: Dover publication)

[8] Cavagna A, Bray AJ and Travasso RDM 2000 *Phys. Rev. E.* **62** 4702

[9] Cirillo ENM, Gonnella G and Saracco GP 2005 *Phys. Rev. E.* **72** 026139

[10] Kissner JG 1992 *Ph. D. Thesis* (University of Manchester)

[11] Corberi F, Gonnella G and Lamura A 2000 *Phys. Rev. E.* **61** 6621

บรรณานุกรม

1. Walter G, Ludwig N and Horst S 2001 *Thermodynamics and statistical mechanics* (New York: Springer)
2. Frederick R 2008 *Fundamentals statistical and thermal physics* (Illinois: Waveland Press)
3. Kerson H 1987 *Statistical mechanics* (New York: Wiley)
4. Julia Y 1992 *Statistical Mechanics of Phase transitions* (Oxford: Clarendon press)
5. Dimo I 2010 *Introduction to the Theory of Critical Phenomena* (New Jersey : World Scientific)
6. Kevin C 2013 *Physical Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press)

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

พิสูจน์ว่า $\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 = \Delta V_3$

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 = \langle\iint e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r'}}\phi(\vec{r},0)\phi\left(\vec{r'},0\right)d^3rd^3r'\rangle_0$$

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 = \iint\langle\phi(\vec{r},0)\phi(\vec{r'},0)\rangle_0\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r'})}d^3rd^3r'$$

จากสมการที่ (3) $\langle\phi(\vec{r},0)\phi(\vec{r}',0)\rangle_0 = \Delta\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 = \Delta\iint\delta(\vec{r}-\vec{r'})e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r'})}d^3rd^3r'$$

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 = \Delta\int d^3r = \Delta V_3$$

พิสูจน์ว่า $S(\vec{k},t) = \langle\tilde{\phi}(-\vec{k},t)\tilde{\phi}(\vec{k},t)\rangle_0 = \Delta V_3 e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-b(t)\right)}$

$$C(\vec{r},t) \equiv \left\langle\phi\left(\vec{r'},t\right)\phi\left(\vec{r'}+\vec{r},t\right)\right\rangle_0 = \langle\phi\left(\vec{r'},t\right)\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k'}\cdot(\vec{r'}+\vec{r})}\tilde{\phi}\left(\vec{k'},t\right)d^3k'\rangle_0$$

$$C(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^6}\left\langle\iint e^{i(\vec{k'}+\vec{k''})\cdot\vec{r'}}e^{i\vec{k'}\cdot\vec{r}}\tilde{\phi}\left(\vec{k'},t\right)\tilde{\phi}\left(\vec{k''},t\right)d^3k'd^3k''\right\rangle_0$$

จากสมการที่ (7) $S(\vec{k},t) \equiv V_3\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}C(\vec{r},t)d^3r = \iint e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}C(\vec{r},t)d^3rd^3r'$

$$S(\vec{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^6}\left\langle\iint\iint e^{i(\vec{k'}+\vec{k''})\cdot\vec{r'}}e^{i(\vec{k'}-\vec{k})\cdot\vec{r}}\tilde{\phi}\left(\vec{k'},t\right)\tilde{\phi}\left(\vec{k''},t\right)d^3rd^3r'\,d^3k'd^3k''\right\rangle_0$$

$$S(\vec{k},t) = \left\langle\iint\delta(\vec{k'}+\vec{k''})\delta(\vec{k}-\vec{k'})\tilde{\phi}\left(\vec{k'},t\right)\tilde{\phi}\left(\vec{k''},t\right)d^3k'd^3k''\right\rangle_0$$

$$S(\vec{k},t) = \left\langle\int\delta(\vec{k}+\vec{k''})\tilde{\phi}(\vec{k},t)\tilde{\phi}\left(\vec{k''},t\right)d^3k''\right\rangle_0$$

$$S(\vec{k},t) = \left\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},t)\tilde{\phi}(\vec{k},t)\right\rangle_0$$

จากสมการที่ (16) $\varphi(\vec{q},\tau) = \varphi(\vec{q},0)exp(-\Gamma(F(\vec{q},\tau)-b(\tau)))$ และจากสมการที่ (14)

$$\tilde{\phi}(\vec{k},t) = \tilde{\phi}(\vec{k},0)exp(-\Gamma(F(\vec{k},t)-b(t)))$$

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},t)\tilde{\phi}(\vec{k},t)\rangle_0 = \langle\tilde{\phi}(\vec{k},0)\tilde{\phi}(-\vec{k},0)exp(-2\Gamma(F(\vec{k},t)-b(t)))\rangle_0$$

โดยอาศัยสมบัติ $F(\vec{k},t) = F(-\vec{k},t)$

$$\langle\tilde{\phi}(-\vec{k},t)\tilde{\phi}(\vec{k},t)\rangle_0 = \langle\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\rangle_0 e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-b(t)\right)} = \Delta V_3 e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-b(t)\right)}$$

พิสูจน์ว่า $\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k$

$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3}\int \langle(\phi(\vec{r},t))^2\rangle_0 d^3r$$
$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^6}\int \left\langle \iint e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{k'}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{k},t)\phi\left(\vec{k'},t\right) d^3k d^3k' \right\rangle_0 d^3r$$
$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\left\langle \iint \delta(\vec{k}+\vec{k'})\phi(\vec{k},t)\phi\left(\vec{k'},t\right) d^3k d^3k' \right\rangle_0$$
$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int \langle \phi(\vec{k},t)\phi(-\vec{k},t)\rangle_0 d^3k$$

ข้อสังเกต $\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int S(\vec{k},t) d^3k$

$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{e^{2\Gamma b(t)}}{V_3(2\pi)^3}\langle \tilde{\phi}(\vec{k},0)\tilde{\phi}(-\vec{k},0)\rangle_0 \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k$$
$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k$$

บทที่ 3

กรณี (a)

พิสูจน์ว่า $\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{3\pi^3}{2(\gamma t cos\theta)^2\Gamma^3 t^3}}$

$$\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k = \iiint exp(-2\Gamma\left\{\left(\frac{1}{12}(\gamma t cos\theta)^2+1\right)k_x^2 + \left(k_y - \frac{1}{2}k_x \gamma t cos\theta\right)^2 + k_z^2\right\} t) dk_x dk_y dk_z$$

จากสมการที่ (26) $\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k = \{\sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{12}(\gamma t cos\theta)^2+1)2\Gamma t}}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}\} = \sqrt{\frac{\pi^3}{(2\Gamma t)^3(\frac{1}{12}(\gamma t cos\theta)^2+1)}}$

$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{(2\Gamma t)^3(\frac{1}{12}(\gamma t cos\theta)^2+1)}}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะ $t \rightarrow \infty$ และ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ และ $\gamma \neq 0$

$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{3\pi^3}{2(\gamma cos\theta)^2\Gamma^3 t^5}}$$

พิสูจน์ว่า $b(t)=\frac{5}{4\Gamma}ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$

จากเงื่อนไข $t\ \rightarrow\infty$ สมการที่ (24) จะเท่ากับสมการที่ (27) $-\frac{r_0}{u_0}=\frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{3\pi^3}{2(\gamma cos\theta)^2\Gamma^3t^5}}$

$$e^{2\Gamma b(t)}=\frac{|r_0|(2\pi)^3}{u_0\Delta}\sqrt{\frac{2(\gamma cos\theta)^2\Gamma^3t^5}{3\pi^3}}=\sqrt{(\frac{r_0}{u_0\Delta})^2\frac{128\pi^3(\gamma cos\theta)^2\Gamma^3t^5}{3}}$$

ให้ $t_0=\sqrt[5]{\frac{3}{128(\pi\Gamma)^3}\left(\frac{\Delta u_0}{r_0\gamma cos\theta}\right)^2}$ จะได้ว่า $e^{2\Gamma b(t)}=(\frac{t}{t_0})^{5/2}$ ดังนั้น $b(t)=\frac{5}{4\Gamma}ln(\frac{t}{t_0})$

พิสูจน์ว่า $S(\vec{k},t)=\Delta V_3\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{2}}exp\left(-2\Gamma\left\{\frac{1}{12}(\gamma t^{\frac{3}{2}}k_xcos\theta)^2+(t^{\frac{1}{2}}k_y-\frac{1}{2}\gamma t^{\frac{3}{2}}k_xcos\theta)^2+\left(t^{\frac{1}{2}}k_z\right)^2\right\}\right)$

$$S(\vec{k},t)=\Delta V_3e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-b(t)\right)}$$

$$S(\vec{k},t)=\Delta V_3exp(-2\Gamma\left\{\left(\frac{1}{12}(\gamma tcos\theta)^2\right)k_x^2+\left(k_y-\frac{1}{2}k_x\gamma tcos\theta\right)^2+k_z^2\right\}t\ +2\Gamma(\frac{5}{4\Gamma}ln(\frac{t}{t_0})))$$

$$S(\vec{k},t)=\Delta V_3(\frac{t}{t_0})^{5/2}exp\left(-2\Gamma\left\{\frac{1}{12}(\gamma t^{\frac{3}{2}}k_xcos\theta)^2+(t^{\frac{1}{2}}k_y-\frac{1}{2}\gamma t^{\frac{3}{2}}k_xcos\theta)^2+\left(t^{\frac{1}{2}}k_z\right)^2\right\}\right)$$

พิสูจน์ว่า $C(\vec{r},t)=-\frac{r_0}{u_0}exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(3\left(\frac{2x}{\gamma tcos\theta}+y\right)^2+y^2+z^2\right)\right)$

$$C(\vec{r},t)=\frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}S(\vec{k},t)d^3k$$

$$C(\vec{r},t)=\frac{1}{V_3(2\pi)^3}\iiint e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Delta V_3(\frac{t}{t_0})^{5/2}exp\left(-2\Gamma\left\{\frac{1}{12}(\gamma t^{\frac{3}{2}}k_xcos\theta)^2+(t^{\frac{1}{2}}k_y-\frac{1}{2}\gamma t^{\frac{3}{2}}k_xcos\theta)^2+\left(t^{\frac{1}{2}}k_z\right)^2\right\}\right)dk_xdk_ydk_z$$

จากสมการที่ (32)

$$C(\vec{r},t)=\frac{1}{V_3(2\pi)^3}\Delta V_3(\frac{t}{t_0})^{5/2}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{z^2}{8\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{y^2}{8\Gamma t}}\}\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy\cdot\frac{1}{2}\gamma tk_xcos\theta}e^{ik_xx}e^{-\frac{\Gamma}{6}(\gamma cos\theta)^2t^3k_x^2}dk_x\}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iy\cdot\frac{1}{2}\gamma tk_xcos\theta}e^{ik_xx}e^{-\frac{\Gamma}{6}(\gamma cos\theta)^2t^3k_x^2}dk_x&=\int_{-\infty}^{\infty}exp\{-\frac{\Gamma}{6}(\gamma cos\theta)^2t^3((k_x-\frac{3yi}{2\Gamma\gamma cos\theta t^2})^2\\&\quad+(\frac{3y}{2\Gamma\gamma cos\theta t^2})^2)\}e^{ik_xx}dk_x\\&=\sqrt{\frac{6\pi}{\Gamma(\gamma cos\theta)^2t^3}}exp\{-\frac{3}{8\Gamma t}(\frac{2x}{\gamma tcos\theta}+y)^2\}\end{aligned}$$

$$C(\vec{r},t)$$
$$= \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\Delta V_3(\frac{t}{t_0})^{5/2}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{z^2}{8\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{y^2}{8\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{6\pi}{\Gamma(\gamma cos\theta)^2t^3}}e^{-\frac{3}{8\Gamma t}(\frac{2x}{\gamma tcos\theta}+y)^2}\}$$
$$C(\vec{r},t) = (\frac{t}{t_0})^{5/2}\{\sqrt{\frac{3}{128(\pi\Gamma)^3t^5}\left(\frac{\Delta}{\gamma cos\theta}\right)^2}\}exp\{-\frac{1}{8\Gamma t}(3(\frac{2x}{\gamma tcos\theta}+y)^2+y^2+z^2)\}$$
$$C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0}(\frac{t}{t_0})^{5/2}(\frac{t_0}{t})^{5/2}exp\{-\frac{1}{8\Gamma t}(3(\frac{2x}{\gamma tcos\theta}+y)^2+y^2+z^2)\}$$
$$C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0}exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(3\left(\frac{2x}{\gamma tcos\theta}+y\right)^2+y^2+z^2\right)\right)$$

ในกรณี (b)

พิสูจน์ว่า $\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)8\Gamma^3t^3}}$

$$\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}d^3k = \iiint exp(-2\Gamma\{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1)k_x^2+\left(k_y+\frac{\gamma}{\omega}k_xsin(\omega t+\theta)\right)^2 + k_z^2\}t)dk_xdk_ydk_z$$
$$\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}d^3k = \{\sqrt{\frac{\pi}{2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}\} = \sqrt{\frac{\pi^3}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)8\Gamma^3t^3}}$$
$$\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}d^3k = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)8\Gamma^3t^3}}$$

พิสูจน์ว่า $b(t) = \frac{3}{4\Gamma}ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$

จากเงื่อนไข $t \to \infty$ สมการที่ (24) จะเท่ากับสมการที่ (29) $-\frac{r_0}{u_0} = \frac{\Delta e^{2\Gamma b(t)}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)8\Gamma^3t^3}}$

$$e^{2\Gamma b(t)} = \frac{|r_0|(2\pi)^3}{u_0\Delta}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)8\Gamma^3t^3}{\pi^3}} = \sqrt{(\frac{r_0}{u_0\Delta})^2\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)8\Gamma^3t^3}{\pi^3}}$$

ให้ $t_0 = \sqrt[3]{\frac{(\Delta u_0)^2}{512r_0^2(\pi\Gamma)^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)}}$ จะได้ว่า $e^{2\Gamma b(t)} = (\frac{t}{t_0})^{3/2}$ ดังนั้น $b(t) = \frac{3}{4\Gamma}ln(\frac{t}{t_0})$

พิสูจน์ว่า

$$S(\vec{k},t) = \Delta V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-2\Gamma\left\{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)\left(t^{\frac{1}{2}}k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}}k_y + \frac{\gamma}{\omega}sin(\omega t+\theta)t^{\frac{1}{2}}k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}}k_z\right)^2\right\}\right)$$

$$S(\vec{k},t) = \Delta V_3 e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-b(t)\right)}$$

$$S(\vec{k},t) = \Delta V_3 exp\left(-2\Gamma\{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)k_x^2 + \left(k_y + \frac{\gamma}{\omega}k_x sin(\omega t+\theta)\right)^2 + k_z^2\}t + \frac{3}{2}ln(\frac{t}{t_0})\right)$$

$$S(\vec{k},t) = \Delta V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-2\Gamma\left\{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)\left(t^{\frac{1}{2}}k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}}k_y + \frac{\gamma}{\omega}sin(\omega t+\theta)t^{\frac{1}{2}}k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}}k_z\right)^2\right\}\right)$$

พิสูจน์ว่า $C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega}y\,sin(\omega t+\theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right)$

$$C(\vec{r},t) = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} S(\vec{k},t)d^3k$$

$$C(\vec{r},t) = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\iiint e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\Delta V_3\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-2\Gamma\left\{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)\left(t^{\frac{1}{2}}k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}}k_y + \frac{\gamma}{\omega}sin(\omega t+\theta)t^{\frac{1}{2}}k_x\right)^2 + \left(t^{\frac{1}{2}}k_z\right)^2\right\}\right)dk_x dk_y dk_z$$

จากสมการที่ (32)

$$C(\vec{r},t) = \frac{\Delta}{(2\pi)^3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{z^2}{8\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{y^2}{8\Gamma t}}\}\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-i}{\omega}y\gamma k_x sin(\omega t+\theta)}e^{ik_x x} exp\left(-2\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)k_x{}^2\right)dk_x\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-i}{\omega}y\gamma k_x sin(\omega t+\theta)}e^{ik_x x} exp\left(-2\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)k_x{}^2\right)dk_x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-2\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)[(k_x + \frac{iy\gamma sin(\omega t+\theta)}{4\omega\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)})^2 + (\frac{y\gamma sin(\omega t+\theta)}{4\omega\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)})^2]\right)dk_x$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)}}\,exp\{-\frac{1}{8\Gamma t\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}\left(x - \frac{\gamma}{\omega}y\,sin(\omega t+\theta)\right)^2\}$$

กำหนดให้ $\beta = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}$

$$C(\vec{r},t) = \frac{\Delta}{(2\pi)^3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{z^2}{8\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}e^{-\frac{y^2}{8\Gamma t}}\}\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)}}e^{-\frac{\beta}{8\Gamma t}\left(x - \frac{\gamma}{\omega}y\,sin(\omega t+\theta)\right)^2}\}$$

$$C(\vec{r},t) = \frac{\Delta}{(2\pi)^3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\Gamma t}\right)^3 \frac{1}{(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 + 1)}}\, exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega} y\, sin(\omega t + \theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right)$$

$$C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0}(\frac{t}{t_0})^{3/2}(\frac{t_0}{t})^{3/2} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega} y\, sin(\omega t + \theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right)$$

$$C(\vec{r},t) = -\frac{r_0}{u_0} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega} y\, sin(\omega t + \theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right)$$

ภาคผนวก ข

บทที่ 4

พิสูจน์ว่า

$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta}{(2\pi)^3} e^{2\Gamma b(t)} \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k + \frac{D}{(2\pi)^3}\int_0^t e^{2\Gamma\left(b(t)-b(t')\right)} \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)} d^3k dt'$$

จากสมการที่ (41)

$$\varphi(\vec{q},\tau) = \varphi(\vec{q},0) exp(-\Gamma(F(\vec{q},\tau) - b(\tau))) + \int_0^\tau exp\{\Gamma[(F(\vec{q},\tau') - F(\vec{q},\tau)) - (b(\tau') - b(\tau))]\}\xi(\vec{q},\tau')d\tau'$$

แปลงตัวแปรกลับตามสมการที่ (14)

$$\tilde{\phi}(\vec{k},t) = \tilde{\phi}(\vec{k},0) exp(-\Gamma(F(\vec{k},t) - b(t))) + \int_0^\tau exp\{\Gamma[(F(\vec{k},t') - F(\vec{k},t)) - (b(t') - b(t))]\}\tilde{\zeta}(\vec{k},t')dt'$$

จากสมบัติ $F(\vec{k},t) = F(-\vec{k},t)$

$$\tilde{\phi}(-\vec{k},t) = \tilde{\phi}(-\vec{k},0) exp(-\Gamma(F(\vec{k},t) - b(t))) + \int_0^\tau exp\{\Gamma[(F(\vec{k},t') - F(\vec{k},t)) - (b(t') - b(t))]\}\tilde{\zeta}(-\vec{k},t')dt'$$

และจาก $\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\left\langle \int \phi(\vec{k},t)\phi(-\vec{k},t)d^3k\right\rangle_0 = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int \left\langle \phi(\vec{k},t)\phi(-\vec{k},t)\right\rangle_0 d^3k$

$$\begin{aligned}\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3}\int \Big\{ & \left\langle \tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\right\rangle_0 exp(-2\Gamma(F(\vec{k},t) - b(t))) \\ & + \int_0^\tau exp\{\Gamma[(F(\vec{k},t') - 2F(\vec{k},t)) - (b(t') - 2b(t))]\}\left\langle \tilde{\phi}(-\vec{k},0)\zeta(\vec{r},t')\right\rangle_0 dt' \\ & + \int_0^\tau exp\{\Gamma[(F(\vec{k},t') - 2F(\vec{k},t)) - (b(t') - 2b(t))]\}\left\langle \tilde{\phi}(\vec{k},0)\tilde{\zeta}(-\vec{k},t')\right\rangle_0 dt' \\ & + \int_0^\tau\int_0^\tau exp\{\Gamma[(F(\vec{k},t') + F(\vec{k},t'') - 2F(\vec{k},t)) - (b(t') + b(t'') \\ & - 2b(t))]\}\left\langle \tilde{\zeta}(\vec{k},t')\tilde{\zeta}(-\vec{k},t'')\right\rangle_0 dt'dt'' \Big\} d^3k\end{aligned}$$

จาก $\left\langle \tilde{\zeta}(\vec{k},t')\tilde{\zeta}(-\vec{k},t'')\right\rangle_0 = V_3 D\delta(t' - t'')$

$\left\langle \tilde{\phi}(\vec{k},0)\tilde{\zeta}(-\vec{k},t')\right\rangle_0 = \left\langle \tilde{\phi}(\vec{k},0)\right\rangle_0 \left\langle \tilde{\zeta}(-\vec{k},t')\right\rangle_0 = 0$

$\left\langle \tilde{\phi}(-\vec{k},0)\zeta(\vec{r},t')\right\rangle_0 = \left\langle \tilde{\phi}(-\vec{k},0)\right\rangle_0 \langle \zeta(\vec{r},t')\rangle_0 = 0$

$\left\langle \tilde{\phi}(-\vec{k},0)\tilde{\phi}(\vec{k},0)\right\rangle_0 = \Delta V_3$

ดังนั้น

$$\langle \phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta}{(2\pi)^3} e^{2\Gamma b(t)} \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k + \frac{D}{(2\pi)^3}\int_0^t e^{2\Gamma\left(b(t)-b(t')\right)} \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)} d^3k dt'$$

พิสูจน์ว่า $S(\vec{k},t) = \Delta V_3 e^{-2\Gamma(F(\vec{k},t)-b(t))} + DV_3 \int_0^t e^{2\Gamma((F(\vec{k},t')-F(\vec{k},t))-(b(t')-b(t)))} dt'$

จาก $\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{\Delta}{(2\pi)^3} e^{2\Gamma b(t)} \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k$

$$+ \frac{D}{(2\pi)^3} \int_0^t e^{2\Gamma\left(b(t)-b(t')\right)} \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)} d^3k dt'$$

$$\left\langle\phi^2(\vec{r},t)\right\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3} \int \{\Delta V_3 e^{-2\Gamma(F(\vec{k},t)-b(t))} + DV_3 \int_0^t e^{2\Gamma((F(\vec{k},t')-F(\vec{k},t))-(b(t')-b(t)))} dt'\} d^3k$$

และ $\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{V_3(2\pi)^3} \int S(\vec{k},t) d^3k$ ดังนั้น

$$S(\vec{k},t) = \Delta V_3 e^{-2\Gamma(F(\vec{k},t)-b(t))} + DV_3 \int_0^t e^{2\Gamma((F(\vec{k},t')-F(\vec{k},t))-(b(t')-b(t)))} dt'$$

พิสูจน์ว่า $\frac{d\eta(t)}{dt} = 2\Gamma\left(r_0\eta(t) + \frac{\Delta u_0 Ag(t)}{(2\pi)^3} + \frac{Du_0 A}{(2\pi)^3} \int_0^t \eta(t')g(t-t')dt'\right)$

$\eta(t) \equiv e^{-2\Gamma b(t)}$ หรือ $b(t) = -\frac{1}{2\Gamma} \ln\eta(t)$

และจากสมการที่ (11) $a(t) \equiv -(r_0 + u_0\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle)$ และ $a(t) = \frac{db(t)}{dt}$ ดังนั้น

$$\frac{db(t)}{dt} = -(r_0 + u_0\langle\phi^2(\vec{r},t)\rangle)$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2\Gamma} \ln\eta(t)\right)$$

$$= -\left(r_0 + u_0\{\frac{\Delta}{(2\pi)^3} e^{2\Gamma b(t)} \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k + \frac{D}{(2\pi)^3} \int_0^t e^{2\Gamma\left(b(t)-b(t')\right)} \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)} d^3k dt'\}\right)$$

$$\frac{1}{\eta(t)} \frac{d\eta(t)}{dt} = 2\Gamma\left(r_0 + u_0\{\frac{\Delta}{\eta(t)(2\pi)^3} \int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k + \frac{D}{\eta(t)(2\pi)^3} \int_0^t \eta(t') \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)} d^3k dt'\}\right)$$

ถ้ากำหนดให้ $\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k \equiv \mathrm{A}g(t)$ จะสามารถพิสูจน์ภายหลังได้ว่า

$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)} d^3k$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $Ag(t-t')$ ได้ เมื่อ A เป็นค่าคงที่

ดังนั้น $\frac{d\eta(t)}{dt} = 2\Gamma\left(r_0\eta(t) + \frac{\Delta u_0 Ag(t)}{(2\pi)^3} + \frac{Du_0 A}{(2\pi)^3} \int_0^t \eta(t')g(t-t')dt'\right)$

กรณี (a)

พิสูจน์ว่า $A = \sqrt{\frac{3\pi^3}{2\Gamma^3(\gamma\cos\theta)^2}}$ และ $g(t-t') = (t-t')^{-\frac{5}{2}}$

จากสมการที่ (25) และ (27) ในลิมิต $t \to \infty$ จะได้ว่า $\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} d^3k = \sqrt{\frac{3\pi^3}{2\Gamma^3(\gamma cos\theta)^2}}\, t^{-\frac{5}{2}}$

ดังนั้น $A = \sqrt{\frac{3\pi^3}{2\Gamma^3(\gamma\cos\theta)^2}}$ และ $g(t) = t^{-\frac{5}{2}}$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{12}(\gamma t k_x cos\theta)^2\right) + \left(k_y - \frac{1}{2}k_x\gamma t cos\theta\right)^2 + k_z^2\right\} t$$
$$- \left\{\left(\frac{1}{12}(\gamma t' k_x cos\theta)^2\right) + \left(k_y - \frac{1}{2}k_x\gamma t' cos\theta\right)^2 + k_z^2\right\} t'$$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \frac{1}{12}\left(t^3 - t'^3\right)(\gamma cos\theta k_x)^2 + (t-t')k_z^2 + k_y^2 - k_y k_x \gamma t cos\theta$$
$$+ \frac{1}{4}(k_x\gamma t cos\theta)^2 t + \{k_y^2 - k_y k_x \gamma t' cos\theta + \frac{1}{4}(k_x \gamma t' cos\theta)^2\} t'$$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \frac{1}{12}(t^3 - t'^3)(\gamma cos\theta k_x)^2 + (t-t')k_z^2 + (t-t')k_y^2 - k_y k_x \gamma (t^2$$
$$- t'^2) cos\theta + \frac{1}{4}(t^3 - t'^3)(k_x \gamma cos\theta)^2$$

จาก $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \frac{1}{12}(t-t')(t^2 + tt' + t'^2)(\gamma cos\theta k_x)^2 + (t-t')k_z^2 + (t-t')k_y^2$$
$$- k_y k_x \gamma (t-t')(t+t') cos\theta + \frac{1}{4}(t-t')(t^2 + tt' + t'^2)(k_x \gamma cos\theta)^2$$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \{\frac{1}{12}(t^2 + tt' + t'^2)(\gamma cos\theta k_x)^2 + k_z^2 + k_y^2 - k_y k_x \gamma (t+t') cos\theta$$
$$+ \frac{1}{4}(t^2 + tt' + t'^2)(k_x \gamma cos\theta)^2\}(t-t')$$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \{\frac{1}{3}(t^2 + tt' + t'^2)(\gamma cos\theta k_x)^2 + (k_y - \frac{1}{2}k_x \gamma (t+t') cos\theta)^2$$
$$- \frac{1}{4}(t^2 + 2tt' + t'^2)(k_x \gamma cos\theta)^2 + k_z^2\}(t-t')$$

$$F(\vec{k},t) - F(\vec{k},t')$$
$$= \{\frac{1}{12}(t^2 - 2tt' + t'^2)(\gamma cos\theta k_x)^2 + (k_y - \frac{1}{2}k_x \gamma (t+t') cos\theta)^2$$
$$+ k_z^2\}(t-t')$$

$$F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t') = \frac{1}{12}(t-t')^3(\gamma cos\theta k_x)^2+(t-t')\left(k_y-\frac{1}{2}k_x\gamma(t+t')cos\theta\right)^2 + (t-t')k_z^2$$

$$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k = \int e^{-2\Gamma\left(\frac{1}{12}(t-t')^3(\gamma cos\theta k_x)^2+(t-t')\left(k_y-\frac{1}{2}k_x\gamma(t+t')cos\theta\right)^2+(t-t')k_z^2\right)}d^3k$$

เปรียบเทียบกับ $\int e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}d^3k = \int exp(-2\Gamma\left\{\left(\frac{1}{12}(\gamma tcos\theta)^2\right)k_x^2+\left(k_y-\frac{1}{2}k_x\gamma tcos\theta\right)^2+k_z^2\right\}t)d^3k = \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{12}(\gamma tcos\theta)^2)2\Gamma t}}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma t}}$ ดังนั้น

$$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k = \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{12}(\gamma(t-t')cos\theta)^2)2\Gamma(t-t')}}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma(t-t')}}\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma(t-t')}}$$

$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k = \sqrt{\frac{3\pi^3}{2\Gamma^3(\gamma\cos\theta)^2}}(t-t')^{-\frac{5}{2}}$ และ $g(t-t')=(t-t')^{-\frac{5}{2}}$

พิสูจน์ว่า $\eta(t)=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{5}{2}}$ เมื่อ $t_0^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{c_1c_3'-c_1'c_3}{{c'_1}^2}\right)$

จาก $\frac{d\eta(t)}{dt}=2\Gamma\left(r_0\eta(t)+\frac{\Delta u_0Ag(t)}{(2\pi)^3}+\frac{Du_0A}{(2\pi)^3}\int_0^t\eta(t')g(t-t')dt'\right)$
เมื่อดำเนินการแปลงลาปลาซสมการนี้จะได้ว่า

$$-1+s\bar{\eta}(s)=2\Gamma(r_0\bar{\eta}(s)+\frac{\Delta u_0A\bar{g}(s)}{(2\pi)^3}+\frac{Du_0A}{(2\pi)^3}\bar{\eta}(s)\bar{g}(s))$$

โดยที่ $\bar{\eta}(s)=\int_0^\infty\eta(t)e^{-st}dt$ $\bar{g}(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$ และ

$\int_0^\infty\{\int_0^t\eta(t')g(t-t')dt'\}e^{-st}dt=\int_0^\infty\eta*g(t)e^{-st}dt=\bar{\eta}(s)\bar{g}(s)$

$$\bar{\eta}(s)=\frac{1+\frac{2\Gamma\Delta u_0A\bar{g}(s)}{(2\pi)^3}}{s-\frac{2\Gamma Du_0A}{(2\pi)^3}\bar{g}(s)-2\Gamma r_0}$$

จาก สูตรผกผันของ Mellin $\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\bar{\eta}(s)e^{st}ds$

ที่เวลานานมากการแปลงลาปลาซของ $g(t)$ จะเป็นไปตามสมการ

$\bar{g}(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty g(t+\alpha^2)e^{-st}dt$ โดย α คือจำนวนจริงใดที่ $\alpha^2\ll 1$

$$\bar{g}(s)=\int_0^\infty g(t+\alpha^2)e^{-st}dt=\int_0^\infty(t+\alpha^2)^{-\frac{5}{2}}e^{-st}dt=s^{3/2}e^{\alpha^2s}\int_{\alpha^2s}^\infty t^{-\frac{5}{2}}e^{-t}dt$$

$$\bar{g}(s) = \frac{-2}{3} s^{3/2} e^{\alpha^2 s} \left\{ t^{-\frac{3}{2}} e^{-t} \Big|_{\alpha^2 s}^{\infty} + \int_{\alpha^2 s}^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-t} dt \right\}$$

$$\bar{g}(s) = \frac{-2}{3} s^{3/2} e^{\alpha^2 s} \left\{ t^{-\frac{3}{2}} e^{-t} \Big|_{\alpha^2 s}^{\infty} - 2 \left(t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \Big|_{\alpha^2 s}^{\infty} + \int_{\alpha^2 s}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \right) \right\}$$

เนื่องจาก $\alpha^2 \ll 1$ ดังนั้น $\alpha^2 s \to 0$ และ $e^{\pm \alpha^2 s} \approx 1$ ทำให้

$$\bar{g}(s) = \frac{-2}{3} s^{3/2} \left\{ -(\alpha^2 s)^{-\frac{3}{2}} - 2 \left(-(\alpha^2 s)^{-\frac{1}{2}} + \int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \right) \right\}$$

$$\bar{g}(s) = \frac{-2}{3} s^{3/2} \left\{ -(\alpha^2 s)^{-\frac{3}{2}} - 2 \left(-(\alpha^2 s)^{-\frac{1}{2}} + \Gamma(\frac{1}{2}) \right) \right\}$$

$$\bar{g}(s) = \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{2\alpha^3} - \frac{s}{\alpha} + \sqrt{\pi} s^{3/2} \right\}$$

จาก

$$\bar{\eta}(s) = \frac{1 + \frac{2\Gamma \Delta u_0 A \bar{g}(s)}{(2\pi)^3}}{s - \frac{2\Gamma D u_0 A}{(2\pi)^3} \bar{g}(s) - 2\Gamma r_0}$$

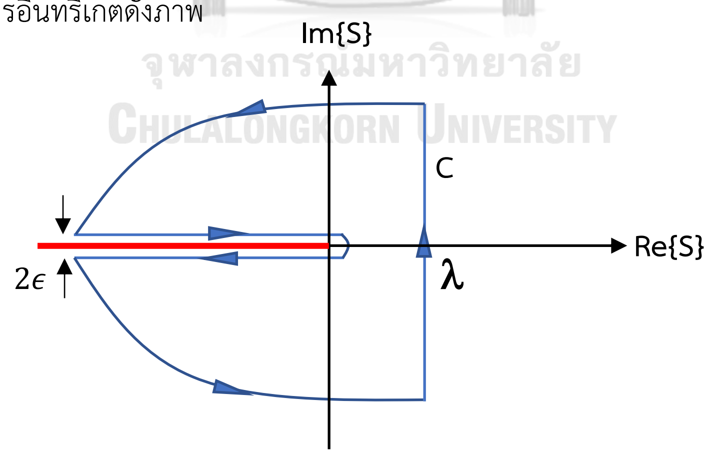
กำหนดให้

$$Z = \frac{2\Gamma A u_0}{(2\pi)^3}$$

$c_1 = 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\alpha^3}\right) \Delta Z$, $c_2 = -\frac{4}{3\alpha} \Delta Z$, $c_3 = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \Delta Z$

$c_1' = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\alpha^3}\right) DZ - 2\Gamma r_0$, $c_2' = 1 + \frac{4}{3\alpha} DZ$ และ $c_3' = -\frac{4}{3}\sqrt{\pi} \Delta Z$

$\bar{\eta}(s) = \frac{c_1 + c_2 s + c_3 s^{3/2}}{c_1' + c_2' s + c_3' s^{3/2}}$ เนื่องจากพจน์ $s^{3/2}$ ทำให้เกิดแบรชคัต (Branch cut) ซึ่งเป็นสิ่งที่กำหนดเส้นทางในการอินทริเกตดังภาพ



$$\oint_C \bar{\eta}(s)e^{st}ds = 0$$

$$-\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty+i\epsilon}^{0+i\epsilon} \bar{\eta}(s)e^{st}ds + \int_{0-i\epsilon}^{-\infty-i\epsilon} \bar{\eta}(s)e^{st}ds\right\}$$

$$-\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = \int_0^\infty \left\{\frac{c_1 - c_2x + ic_3x^{3/2}}{c_1' - c_2'x + ic_3'x^{3/2}}\right\}e^{-xt}dx - \int_0^\infty \left\{\frac{c_1 - c_2x - ic_3x^{3/2}}{c_1' - c_2'x - ic_3'x^{3/2}}\right\}e^{-xt}dx$$

$$-\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = 2i\int_0^\infty \left\{\frac{(c_1 - c_2x)(-c_3') - (-c_3)(c_1' - c_2'x)}{(c_1' - c_2'x)^2 + {c_3'}^2x^3}\right\}x^{3/2}e^{-xt}dx$$

จากเงื่อนไข $lim\ t \to \infty$ ดังนั้นเฉพาะค่า $x \ll 0$ เท่านั้นที่มีผลต่อการอินทริเกรต

$$\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = 2i\left[\frac{c_1c_3' - c_1'c_3}{{c_1'}^2}\right]\int_0^\infty x^{3/2}e^{-xt}dx = 2i\left[\frac{c_1c_3' - c_1'c_3}{{c_1'}^2}\right]\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}t^{-5/2}\right)$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i}2i\left[\frac{c_1c_3' - c_1'c_3}{{c_1'}^2}\right]\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}t^{-5/2}\right) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

เมื่อ $t_0^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{c_1c_3' - c_1'c_3}{{c'_1}^2}\right)$

พิสูจน์ว่า $S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right)V_3\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{2}}e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}$

จาก $S(\vec{k},t) = \Delta V_3 e^{-2\Gamma(F(\vec{k},t)-b(t))} + DV_3\int_0^t e^{2\Gamma((F(\vec{k},t')-F(\vec{k},t))-(b(t')-b(t)))}dt'$

$$S(\vec{k},t) = \frac{\Delta V_3}{\eta(t)}e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} + DV_3\int_0^t \frac{\eta(t')}{\eta(t)}e^{2\Gamma\left(F(\vec{k},t')-F(\vec{k},t)\right)}dt'$$

จากเงื่อนไข $lim\ t \to \infty$ ดังนั้นเฉพาะค่า $t' \ll 0$ เท่านั้นที่มีผลต่อการอินทริเกรต

$$S(\vec{k},t) = \frac{\Delta V_3}{\eta(t)}e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} + \frac{DV_3e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}}{\eta(t)}\int_0^\infty \eta(t')dt'$$

$$S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\bar{\eta}(0)\right)\frac{V_3}{\eta(t)}e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}$$

$$S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right)V_3\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{2}}e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}$$

ข้อสังเกต $S(\vec{k},t)$ ในกรณีที่คำนึงถึงการรบกวนเชิงความร้อน แตกต่างจากกรณีที่ไม่คำนึงถึงการรบกวนเชิงความร้อนตรงที่มีพจน์ $D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)$ เพิ่มเข้ามาในสัมประสิทธิ์

พิสูจน์ว่า $C(\vec{r},t) = \frac{\left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right)A}{(2\pi)^3t_0^{\frac{5}{2}}}exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(3\left(\frac{2x}{\gamma t\cos\theta} + y\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right)$

สามารถใช้วิธีคิดของกรณีที่ไม่คำนึงถึงการรบกวนเชิงความร้อนได้ ผลลัพธ์จะแตกต่างเพียงสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่เท่านั้น

กรณี (b)

พิสูจน์ว่า $\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\pi^3}{8\Gamma^3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}}$ และ $g(t-t') = (t-t')^{-\frac{3}{2}}$

ทำการแปลง $\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k$ ด้วยจาโคเบียนของการแปลงและสมการที่ (14) ดังนั้น

$$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{k},t)-F(\vec{k},t')\right)}d^3k = \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{q},\tau)-F(\vec{q},\tau')\right)}Jd^3q = \int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{q},\tau)-F(\vec{q},\tau')\right)}d^3q$$

เมื่อ $J = \left|\frac{\partial k_i}{\partial q_j}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma}{\omega}(sin(\omega\tau+\theta)-sin(\theta)) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$F(\vec{q},\tau) - F(\vec{q},\tau') = \left\{\vec{q}^2 + \frac{2q_xq_y\gamma}{\omega}sin\theta + \left(\frac{q_x\gamma}{\omega}\right)^2\left(\frac{1}{2}+sin^2\theta\right)\right\}(\tau-\tau')$ ดังนั้น

$$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{q},\tau)-F(\vec{q},\tau')\right)}d^3q = \int e^{-2\Gamma F(\vec{q},(\tau-\tau'))}d^3q$$

$$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{q},\tau)-F(\vec{q},\tau')\right)}d^3q$$

$$= \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2+1\right)\Gamma(\tau-\tau')}}\right\}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma(\tau-\tau')}}\right\}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2\Gamma(\tau-\tau')}}\right\}$$

$\int e^{-2\Gamma\left(F(\vec{q},\tau)-F(\vec{q},\tau')\right)}d^3q = \sqrt{\frac{\pi^3}{8\Gamma^3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}}(t-t')^{-\frac{3}{2}}$ ดังนั้น

$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{\pi^3}{8\Gamma^3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2\right)}}$ และ $g(t-t') = (t-t')^{-\frac{3}{2}}$

พิสูจน์ว่า $\eta(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{3}{2}}$ เมื่อ $t_0^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{c_2c'_1-c'_2c_1}{{c'_1}^2}\right)$,

ขั้นตอนในการพิสูจน์จะคล้ายกับกรณี (a)

$\bar{g}(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty g(t+\alpha^2)e^{-st}dt$ โดย α คือจำนวนจริงใดที่ $\alpha^2 \ll 1$

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty g(t+\alpha^2)e^{-st}dt = \int_0^\infty (t+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}e^{-st}dt = \sqrt{s}e^{\alpha^2 s}\int_{\alpha^2 s}^\infty t^{-\frac{3}{2}}e^{-t}dt$$

$$\bar{g}(s) = -2\sqrt{s}e^{\alpha^2 s}\left\{t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\Big|_{\alpha^2 s}^\infty + \int_{\alpha^2 s}^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt\right\}$$

เนื่องจาก $\alpha^2 \ll 1$ ดังนั้น $\alpha^2 s \to 0$ และ $e^{\pm\alpha^2 s} \approx 1$ ทำให้

$$\bar{g}(s) = -2\sqrt{s}\left\{-(\alpha^2 s)^{-\frac{1}{2}} + \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt\right\}$$

$$\bar{g}(s) = \frac{2}{\alpha} - 2\sqrt{\pi}\sqrt{s}$$

จาก

$$\bar{\eta}(s) = \frac{1 + \dfrac{2\Gamma \Delta u_0 A \bar{g}(s)}{(2\pi)^3}}{s - \dfrac{2\Gamma D u_0 A}{(2\pi)^3}\bar{g}(s) - 2\Gamma r_0}$$

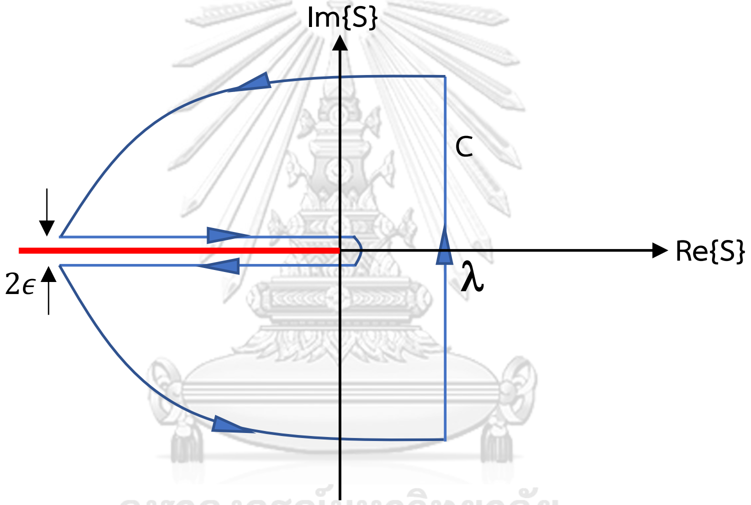
$$\bar{\eta}(s) = \frac{c_1 + c_2\sqrt{s}}{c_1' + c_2'\sqrt{s} + s}$$

เมื่อ $Z = \frac{2\Gamma A u_0}{(2\pi)^3}$

$c_1 = 1 + \frac{2\Delta Z}{\alpha}$, $c_2 = -2\sqrt{\pi}\Delta Z$

$c_1' = -\frac{2DZ}{\alpha} - 2\Gamma r_0$ และ $c_2' = 2\sqrt{\pi} DZ$

เนื่องจากพจน์ $\sqrt{s}$ ทำให้เกิดแบรชคัตซึ่งเป็นสิ่งที่กำหนดเส้นทางในการอินทริเกตดังภาพ



$$\oint_C \bar{\eta}(s)e^{st}ds = 0$$

$$-\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty+i\epsilon}^{0+i\epsilon} \bar{\eta}(s)e^{st}ds + \int_{0-i\epsilon}^{-\infty-i\epsilon} \bar{\eta}(s)e^{st}ds\right\}$$

$$-\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \bar{\eta}(s)e^{st}ds = \int_0^{\infty}\left\{\frac{c_1 - ic_2\sqrt{x}}{c_1' - c_2' i\sqrt{x} - x}\right\}e^{-xt}dx - \int_0^{\infty}\left\{\frac{c_1 + ic_2\sqrt{x}}{c_1' + c_2' i\sqrt{x} - x}\right\}e^{-xt}dx$$

จากเงื่อนไข $lim\ t \to \infty$ ดังนั้นเฉพาะค่า $x \ll 0$ เท่านั้นที่มีผลต่อการอินทริเกรต

$$\eta(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{c_2 c'_1 - c'_2 c_1}{{c'_1}^2}\right] t^{-5/2} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

เมื่อ $t_0^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{c_2 c'_1 - c'_2 c_1}{{c'_1}^2}\right)$

พิสูจน์ว่า $S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right) V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}$

จาก $S(\vec{k},t) = \frac{\Delta V_3}{\eta(t)} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} + DV_3 \int_0^t \frac{\eta(t')}{\eta(t)} e^{2\Gamma\left(F(\vec{k},t') - F(\vec{k},t)\right)} dt'$

จากเงื่อนไข $lim\ t \to \infty$ ดังนั้นเฉพาะค่า $t' \ll 0$ เท่านั้นที่มีผลต่อการอินทริเกรต

$$S(\vec{k},t) = \frac{\Delta V_3}{\eta(t)} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)} + \frac{DV_3 e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}}{\eta(t)} \int_0^\infty \eta(t') dt'$$

$$S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\bar{\eta}(0)\right) \frac{V_3}{\eta(t)} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}$$

$$S(\vec{k},t) = \left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right) V_3 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2\Gamma F(\vec{k},t)}$$

ข้อสังเกต $S(\vec{k},t)$ ในกรณีที่คำนึงถึงการรบกวนเชิงความร้อน แตกต่างจากกรณีที่ไม่คำนึงถึงการรบกวนเชิงความร้อนตรงที่มีพจน์ $D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)$ เพิ่มเข้ามาในสัมประสิทธิ์

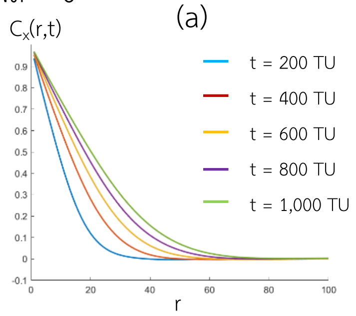
พิสูจน์ว่า $C(\vec{r},t) = \frac{\left(\Delta + D\left(\frac{c_1}{c'_1}\right)\right)A}{(2\pi)^3 t_0^{\frac{3}{2}}} exp\left(-\frac{1}{8\Gamma t}\left(\beta\left(x - \frac{\gamma}{\omega} y\, sin(\omega t + \theta)\right)^2 + y^2 + z^2\right)\right)$

สามารถใช้วิธีคิดของกรณีที่ไม่คำนึงถึงการรบกวนเชิงความร้อนได้ ผลลัพธ์จะแตกต่างเพียงสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่เท่านั้น

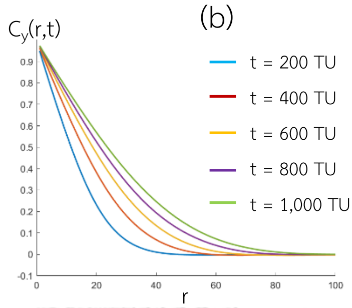
ภาคผนวก ค

ความถี่ = 64 , ℓ = 4,096

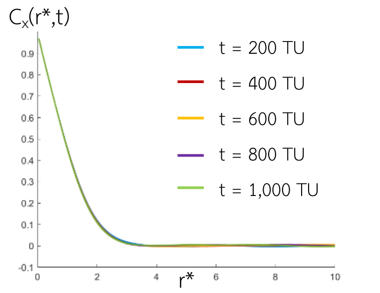
เฟส = 0



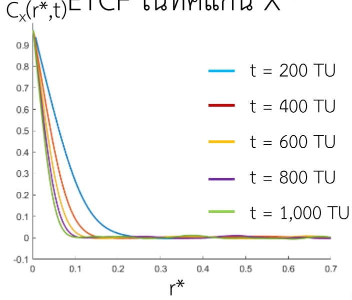
ETCF ในทิศแกน X



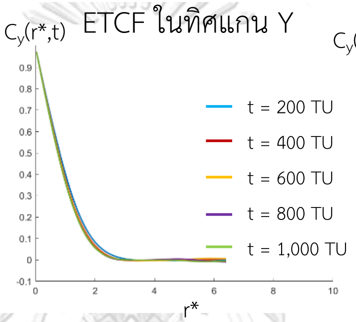
ETCF ในทิศแกน Y



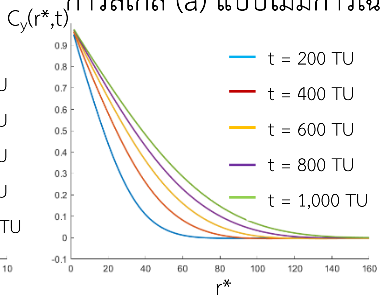
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

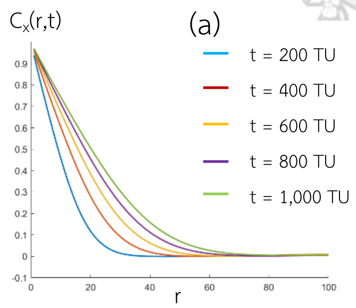


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

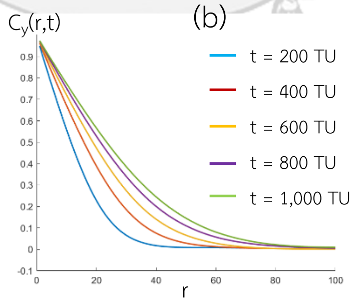


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

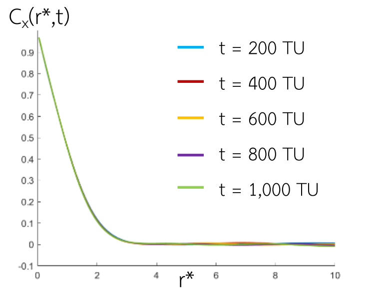
เฟส = 5



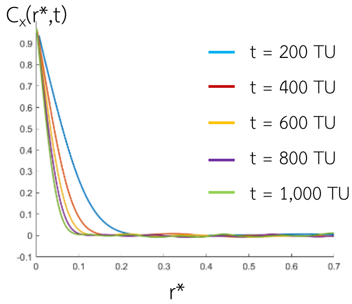
ETCF ในทิศแกน X



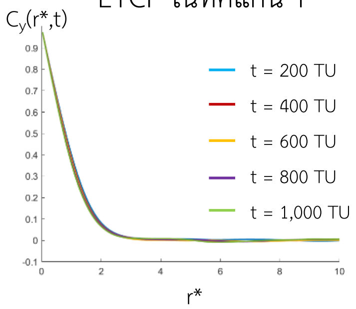
ETCF ในทิศแกน Y



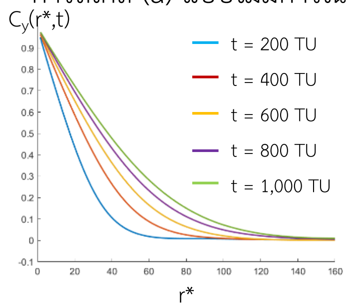
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



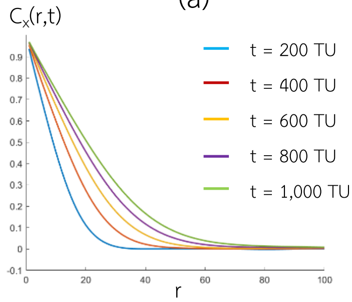
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

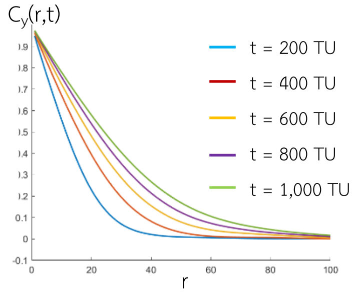
เฟส = 10

(a)

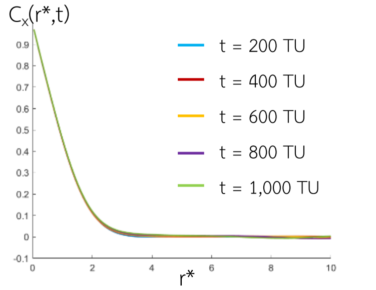


ETCF ในทิศแกน X

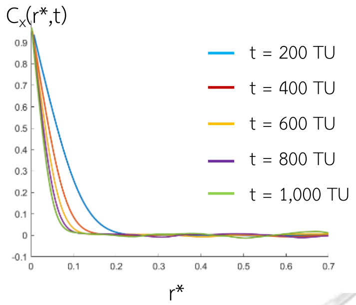
(b)



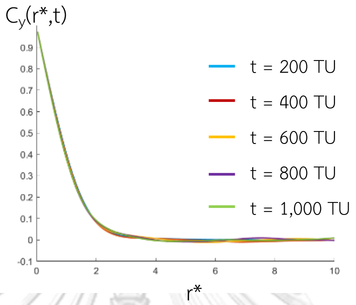
ETCF ในทิศแกน Y



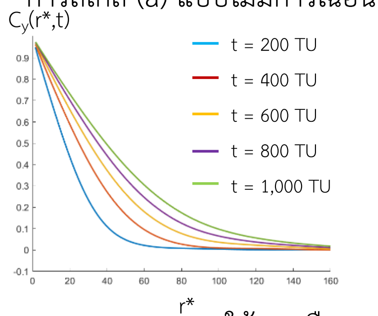
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



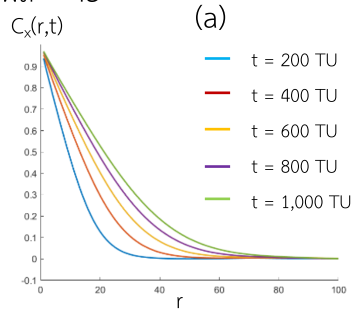
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

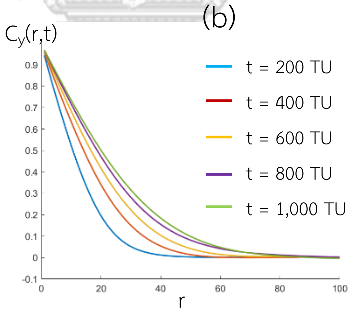
เฟส = 45

(a)

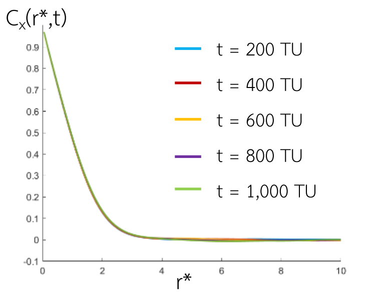


ETCF ในทิศแกน X

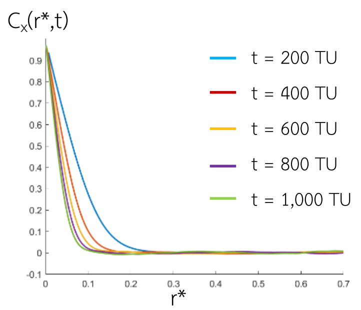
(b)



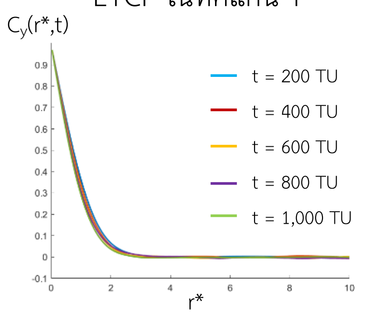
ETCF ในทิศแกน Y



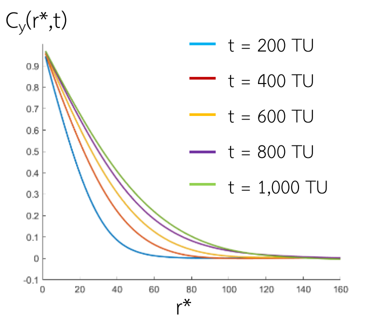
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

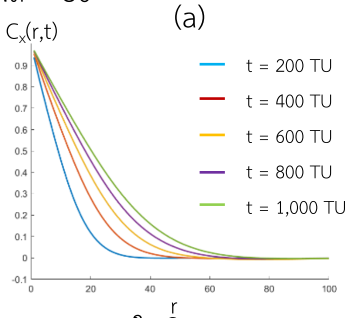


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

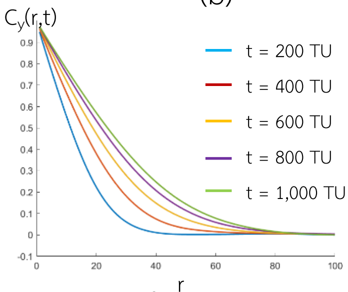
เฟส = 80

(a)

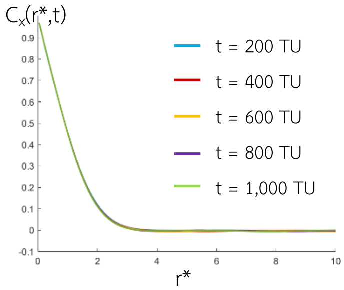
(b)



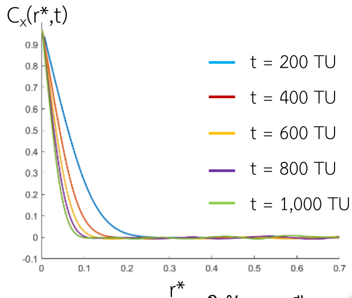
ETCF ในทิศแกน X



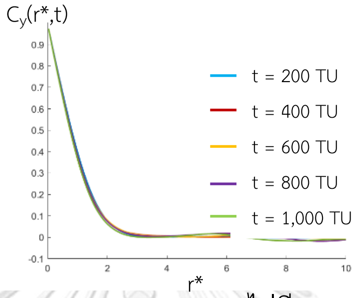
ETCF ในทิศแกน Y



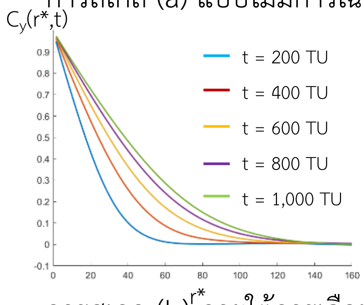
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

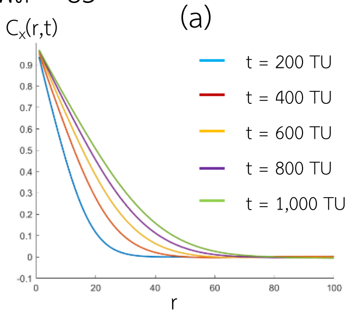


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

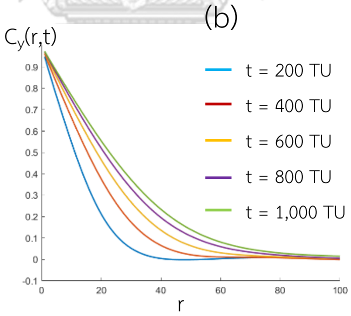
เฟส = 85

(a)

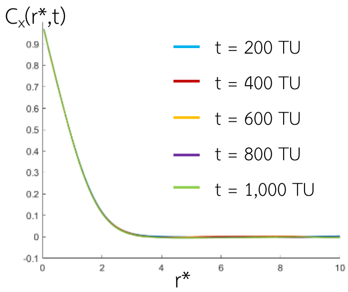
(b)



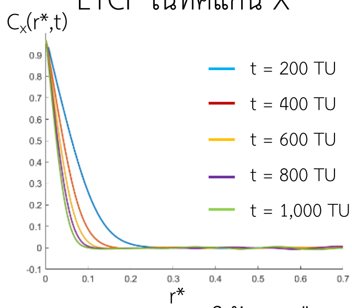
ETCF ในทิศแกน X



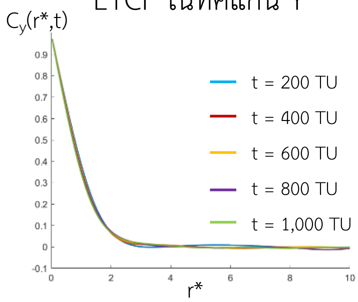
ETCF ในทิศแกน Y



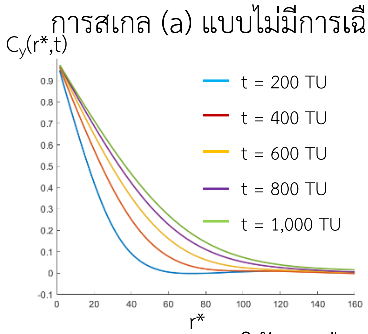
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



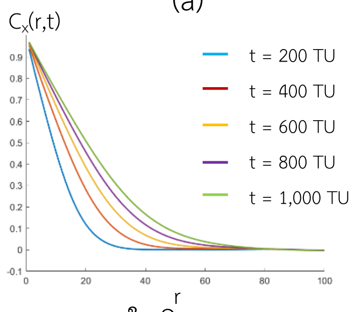
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

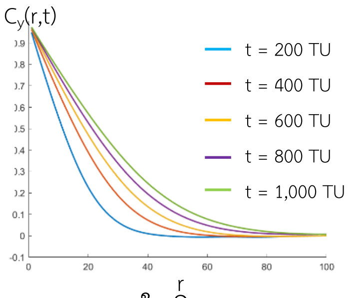
เฟส = 90

(a)

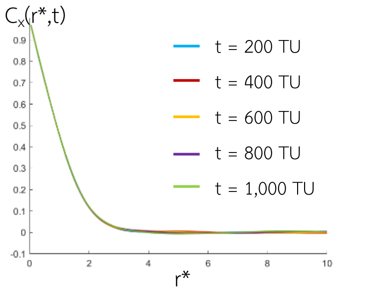


ETCF ในทิศแกน X

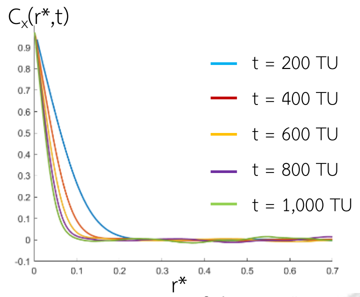
(b)



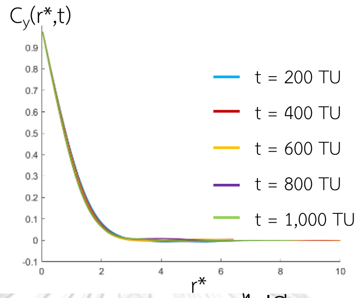
ETCF ในทิศแกน Y



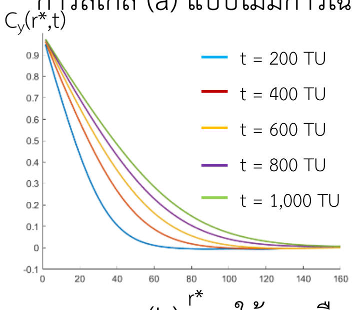
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

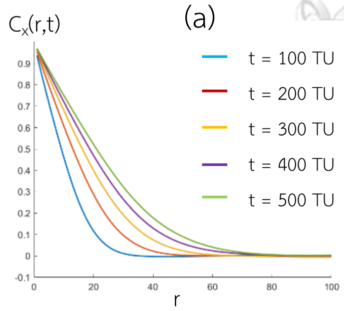


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

ความถี่ = 48 , ℓ = 2,048

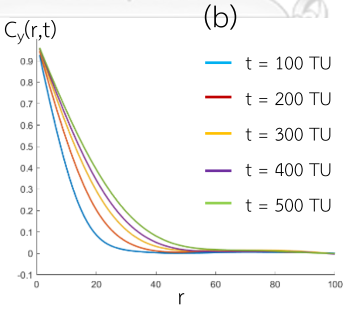
เฟส = 0

(a)

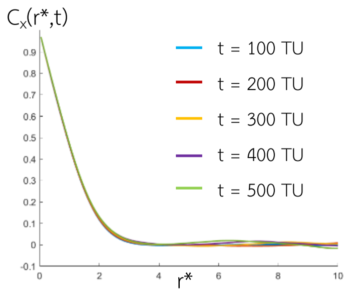


ETCF ในทิศแกน X

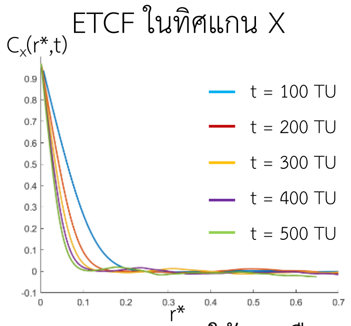
(b)



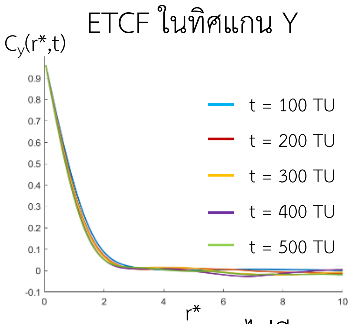
ETCF ในทิศแกน Y



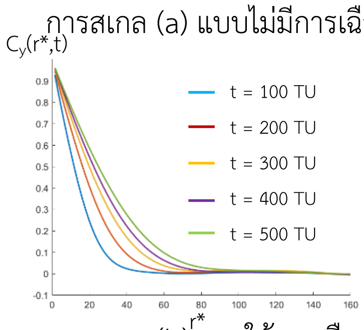
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

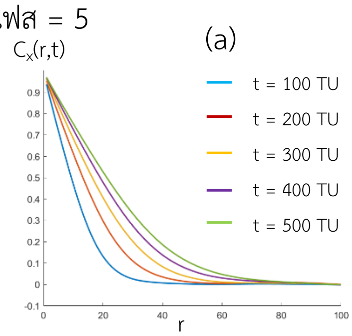


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

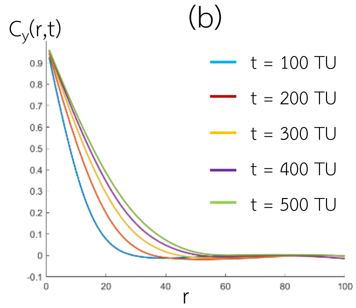


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

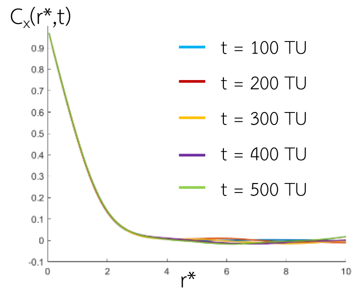
เฟส = 5



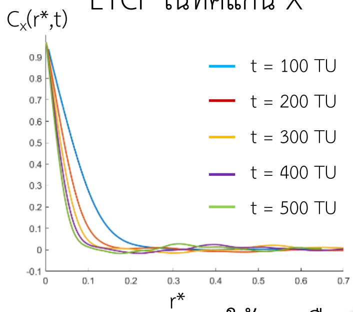
ETCF ในทิศแกน X



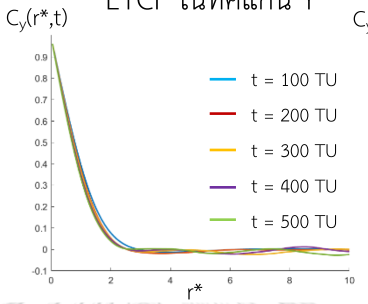
ETCF ในทิศแกน Y



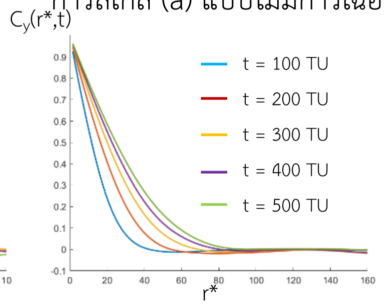
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

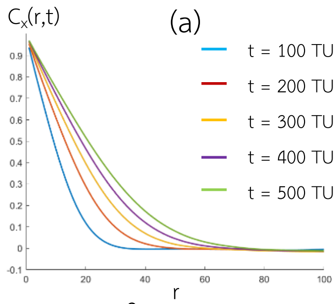


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

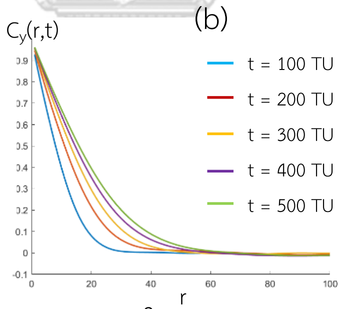


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

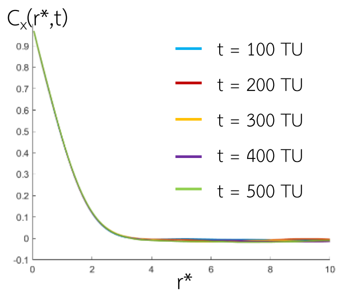
เฟส = 10



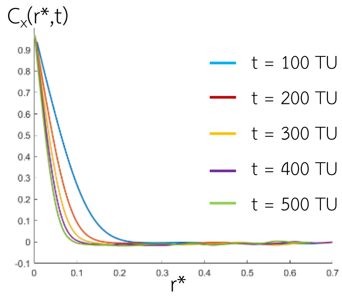
ETCF ในทิศแกน X



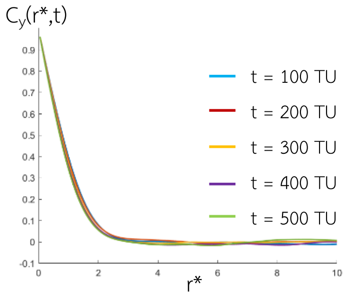
ETCF ในทิศแกน Y



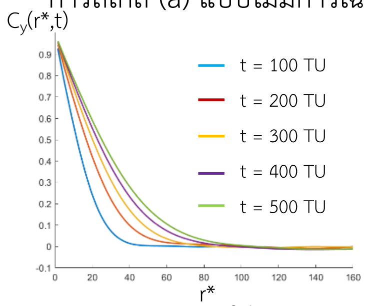
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

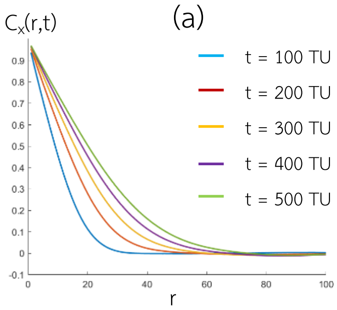


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

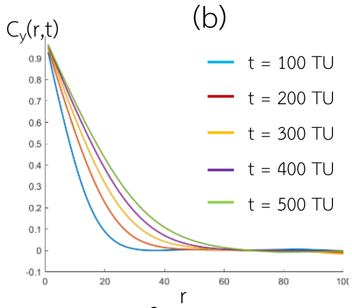


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

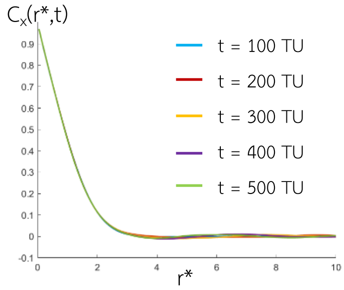
เฟส = 45



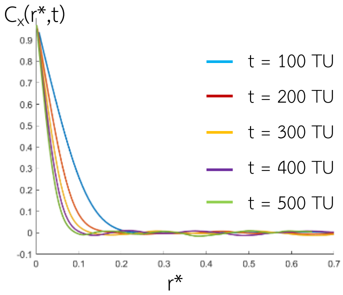
ETCF ในทิศแกน X



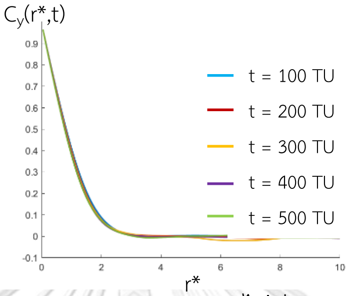
ETCF ในทิศแกน Y



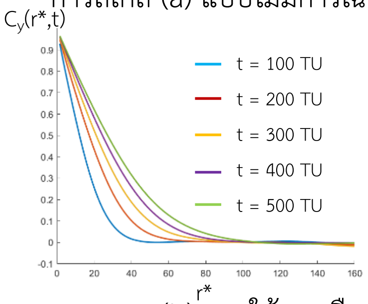
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

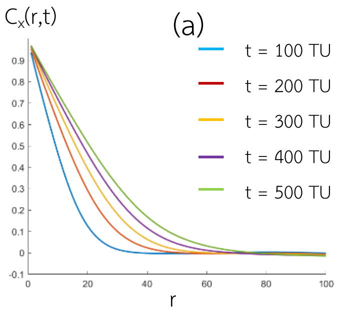


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

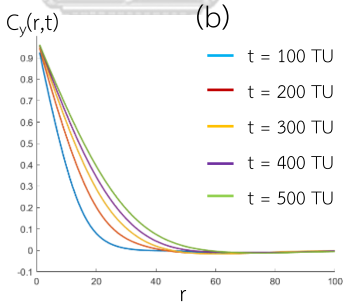


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

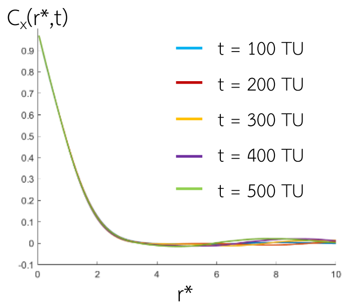
เฟส = 80



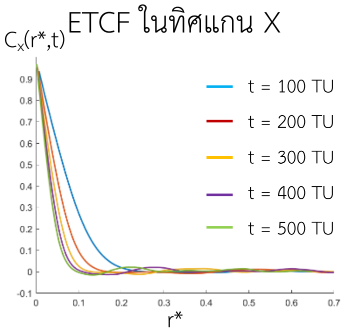
ETCF ในทิศแกน X



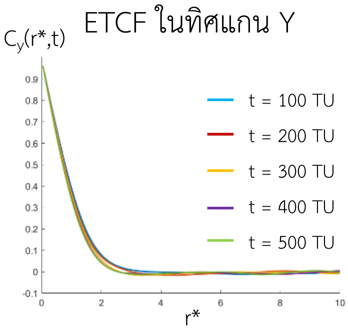
ETCF ในทิศแกน Y



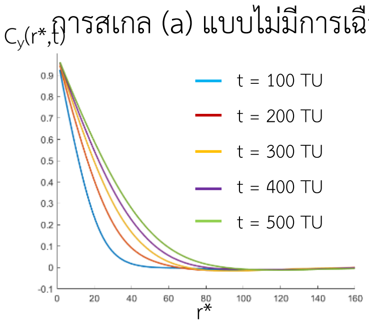
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

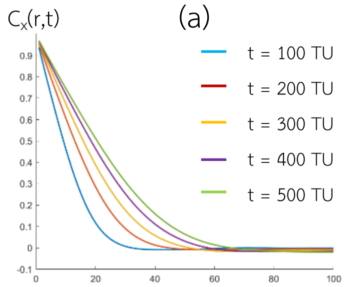


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

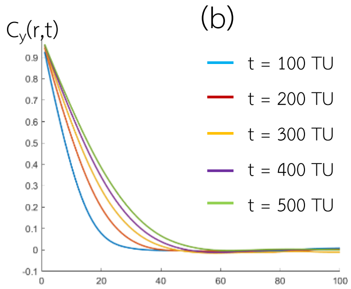


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

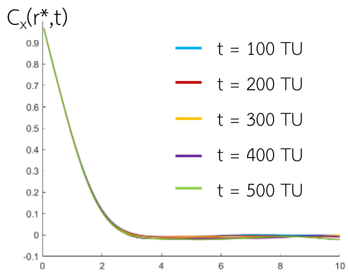
เฟส = 85



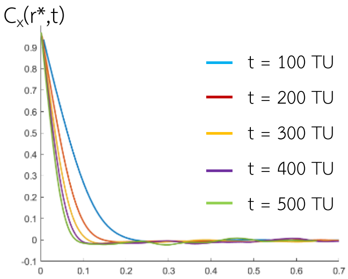
ETCF ในทิศแกน X



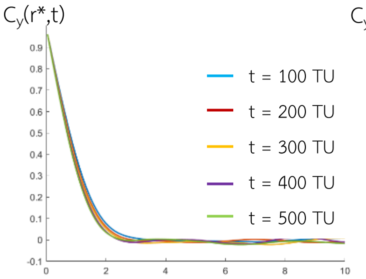
ETCF ในทิศแกน Y



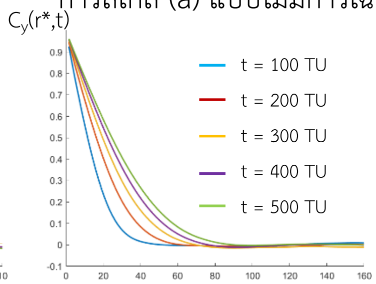
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

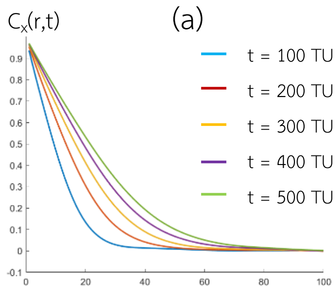


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

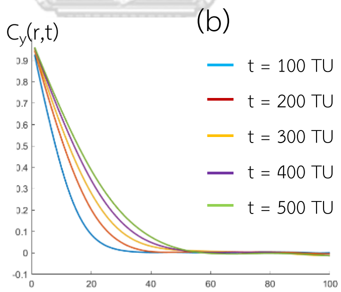


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

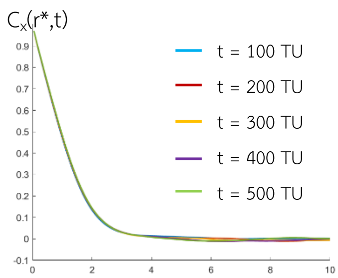
เฟส = 90



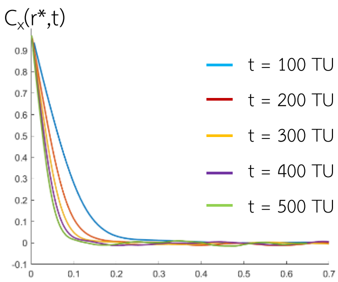
ETCF ในทิศแกน X



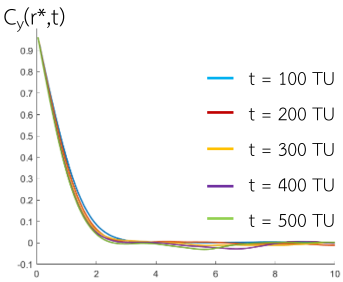
ETCF ในทิศแกน Y



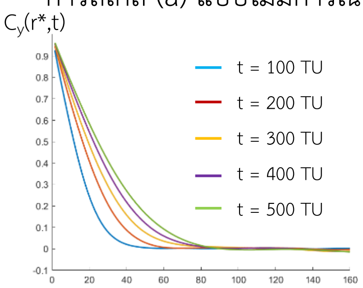
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

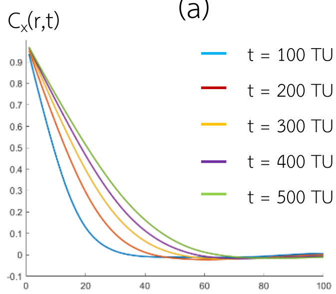


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

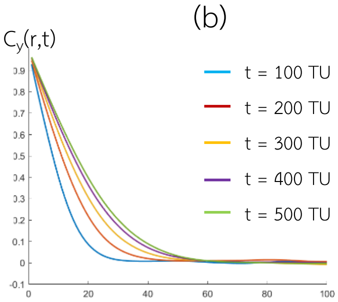
ความถี่ = 24 , ℓ = 2,048

เฟส = 0

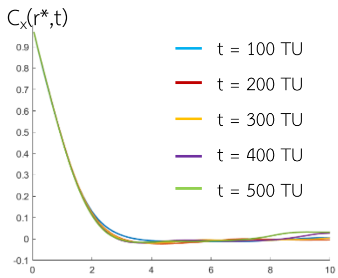
(a) (b)



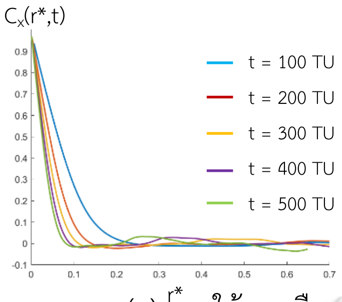
ETCF ในทิศแกน X



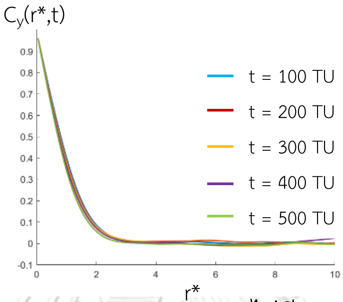
ETCF ในทิศแกน Y



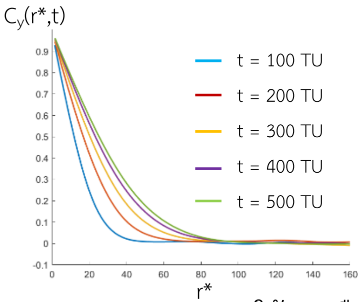
การสเกล (a) แบบไม่มีการ



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



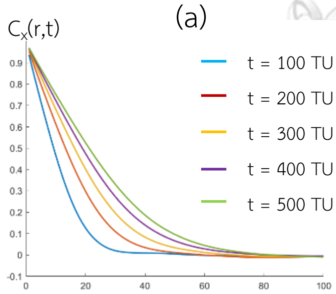
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



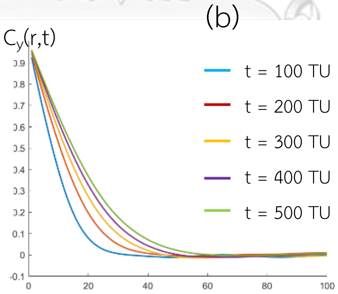
การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

เฟส = 5

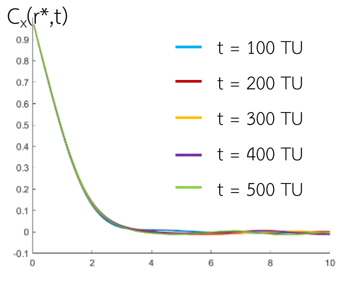
(a) (b)



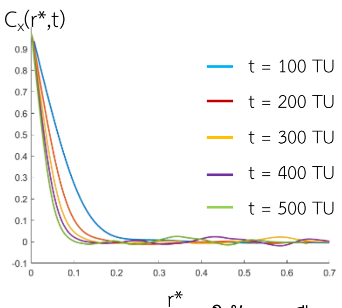
ETCF ในทิศแกน X



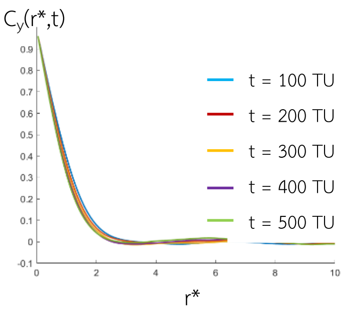
ETCF ในทิศแกน Y



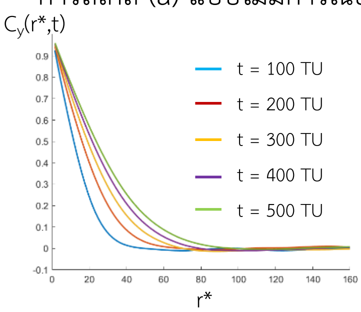
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



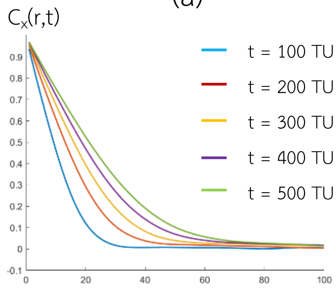
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



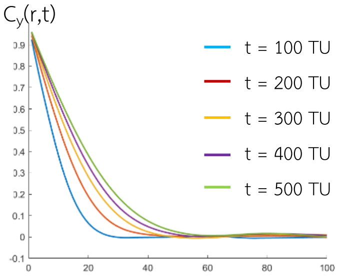
การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

เฟส = 10

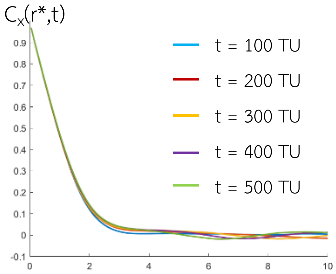
(a) (b)



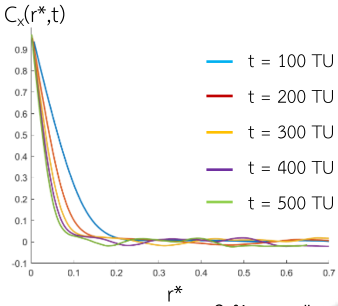
ETCF ในทิศแกน X



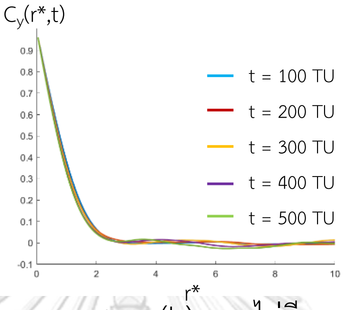
ETCF ในทิศแกน Y



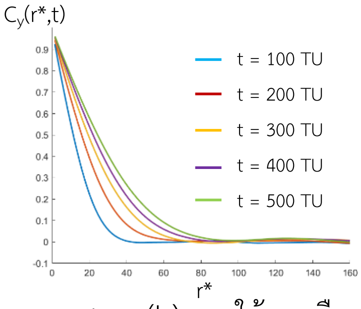
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



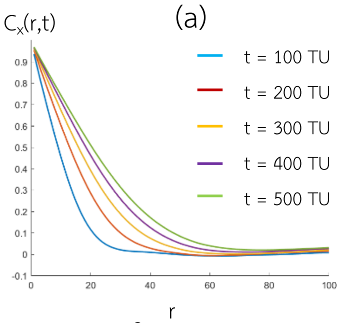
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



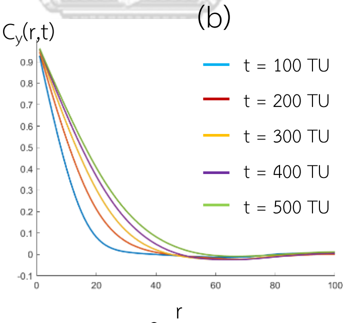
การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

เฟส = 45

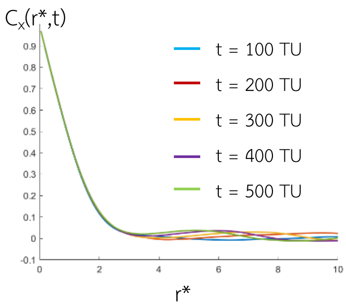
(a) (b)



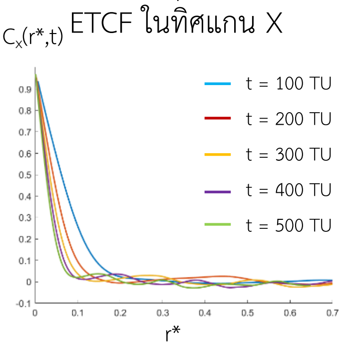
ETCF ในทิศแกน X



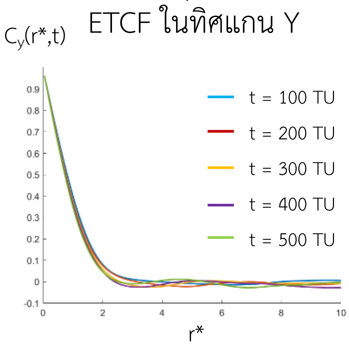
ETCF ในทิศแกน Y



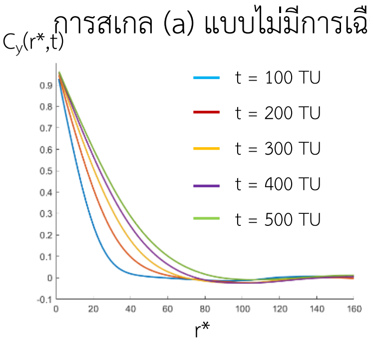
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



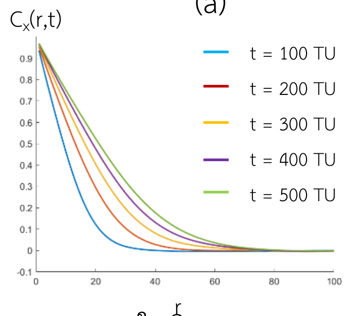
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

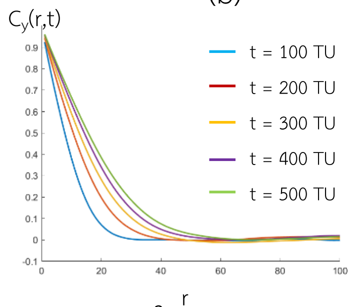
เฟส = 80

(a)

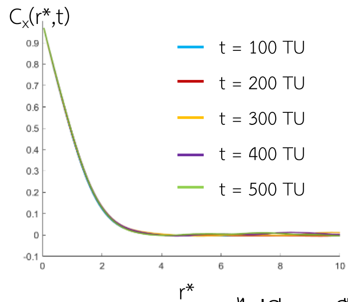


ETCF ในทิศแกน X

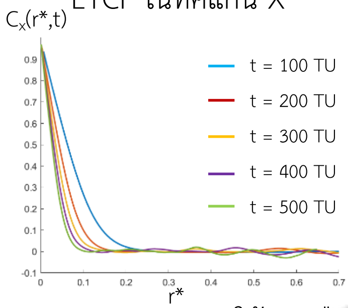
(b)



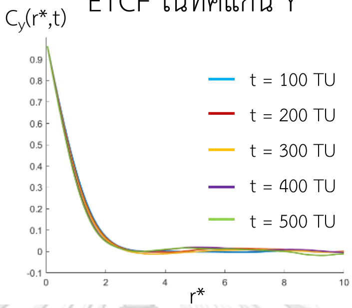
ETCF ในทิศแกน Y



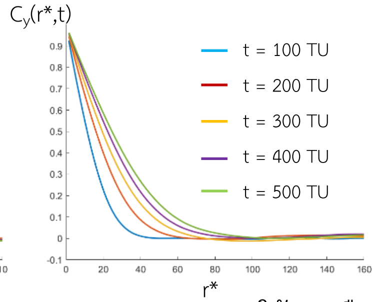
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



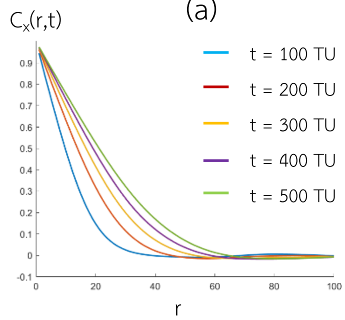
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

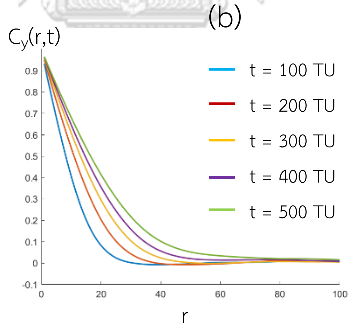
เฟส = 85

(a)

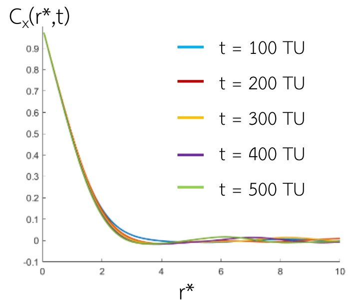


ETCF ในทิศแกน X

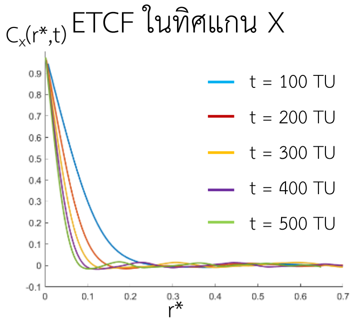
(b)



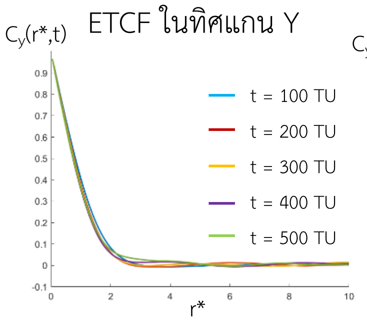
ETCF ในทิศแกน Y



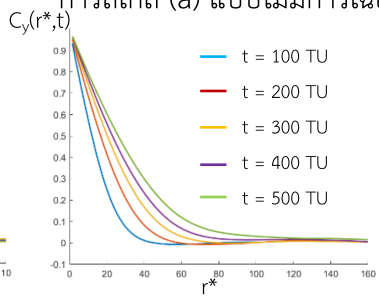
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



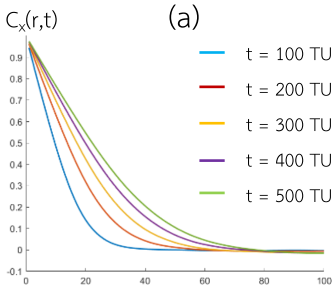
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

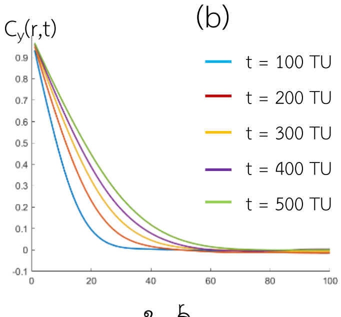
เฟส = 90

(a)

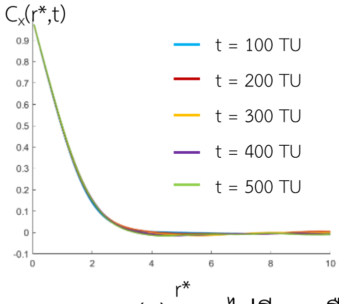


ETCF ในทิศแกน X

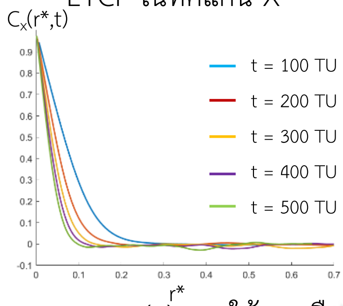
(b)



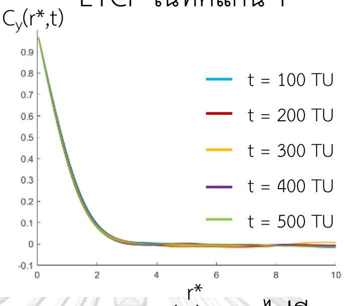
ETCF ในทิศแกน Y



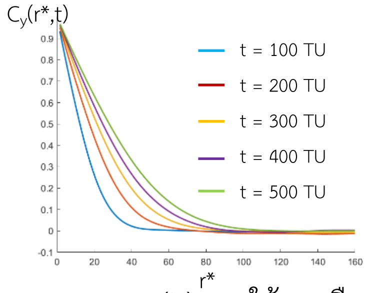
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

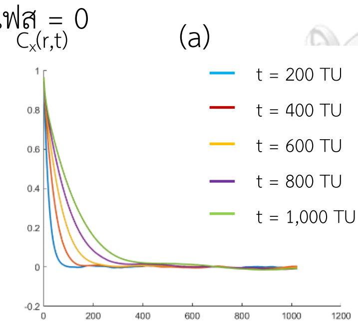


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

ความถี่ = 0.00001 , ℓ = 4,096

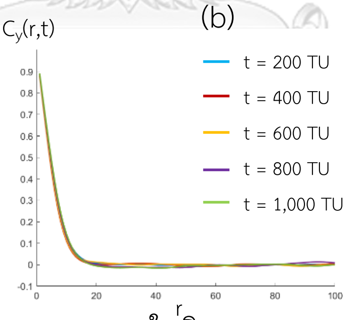
เฟส = 0

(a)

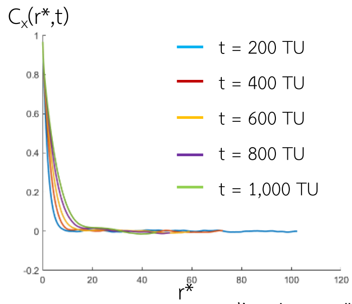


ETCF ในทิศแกน X

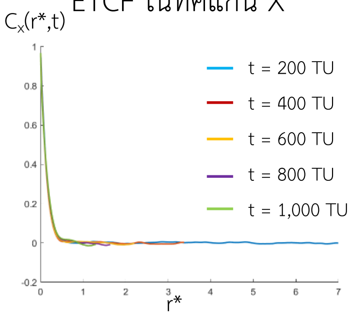
(b)



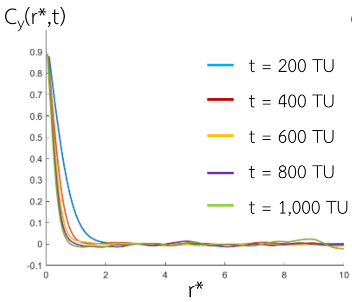
ETCF ในทิศแกน Y



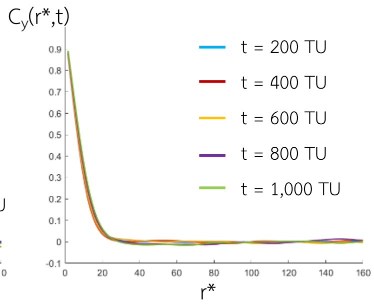
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



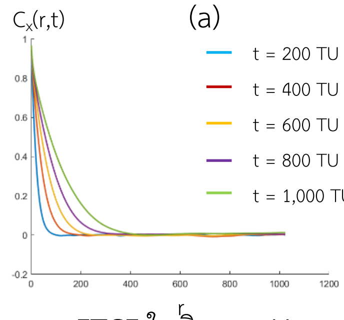
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



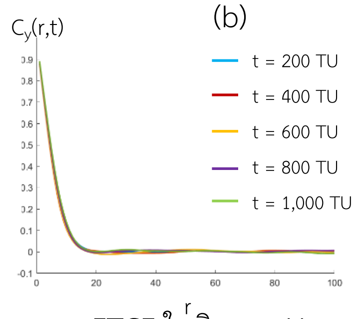
การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

เฟส = 5

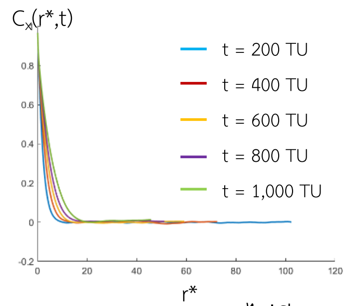
(a) (b)



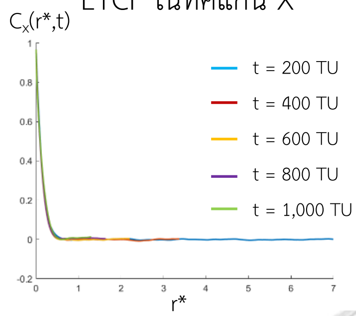
ETCF ในทิศแกน X



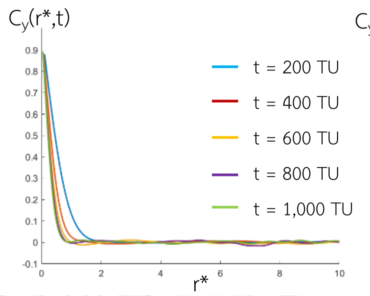
ETCF ในทิศแกน Y



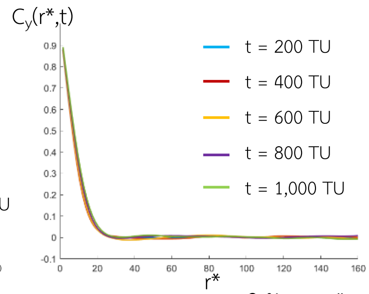
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



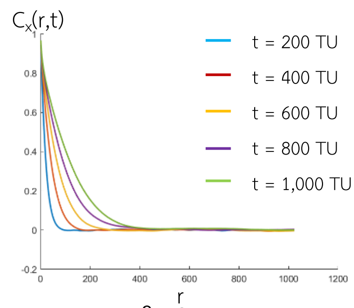
การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



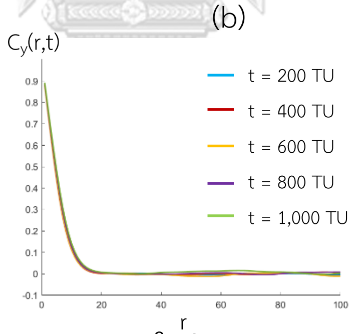
การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

เฟส = 10

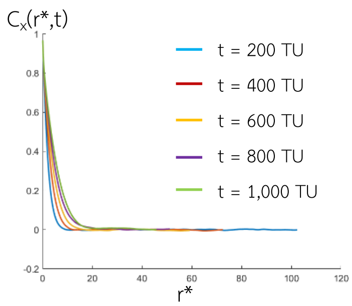
(a) (b)



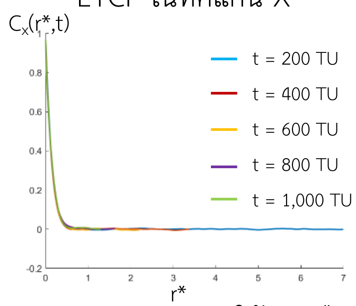
ETCF ในทิศแกน X



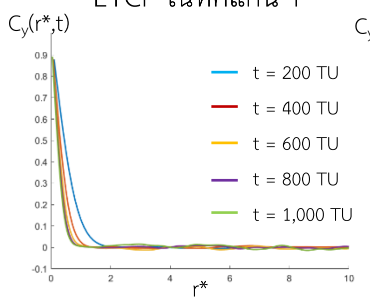
ETCF ในทิศแกน Y



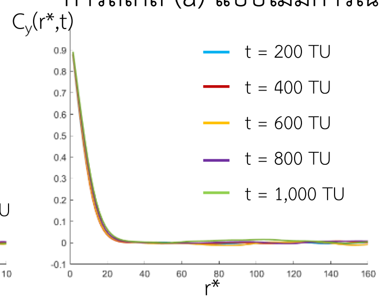
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

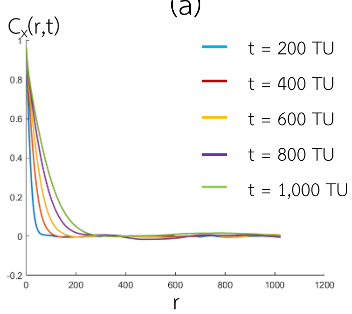


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

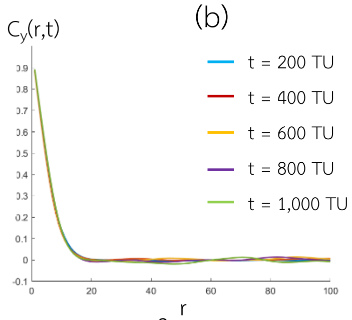


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

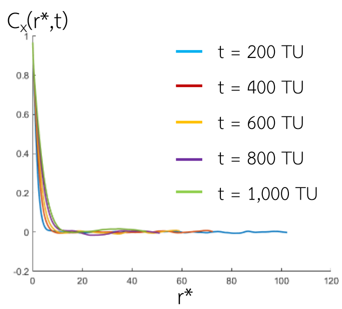
เฟส = 45



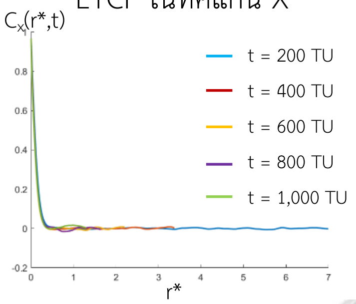
ETCF ในทิศแกน X



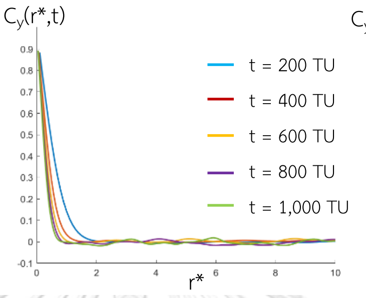
ETCF ในทิศแกน Y



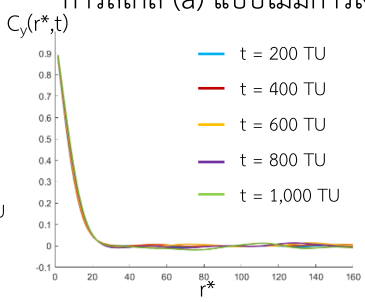
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

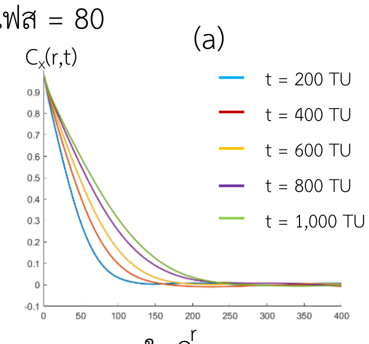


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

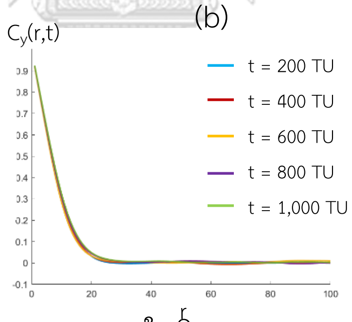


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

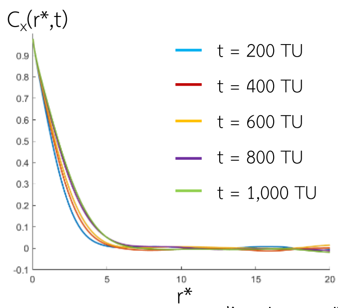
เฟส = 80



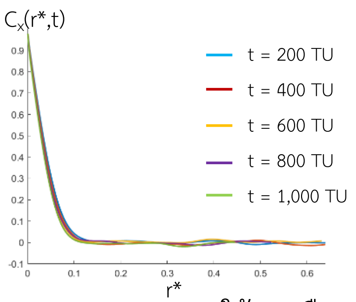
ETCF ในทิศแกน X



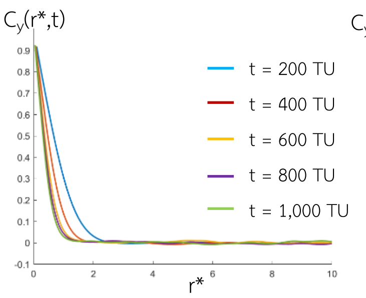
ETCF ในทิศแกน Y



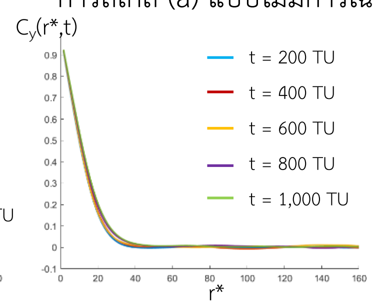
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

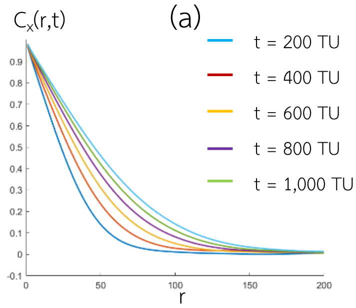


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

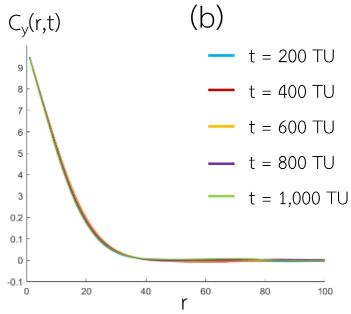


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

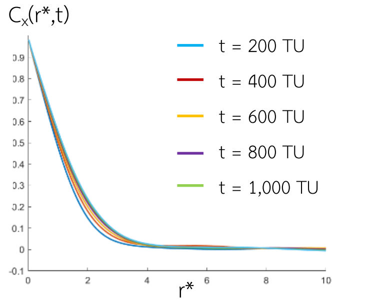
เฟส = 85



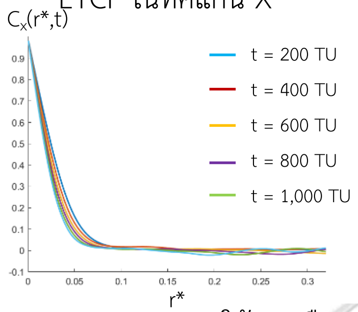
ETCF ในทิศแกน X



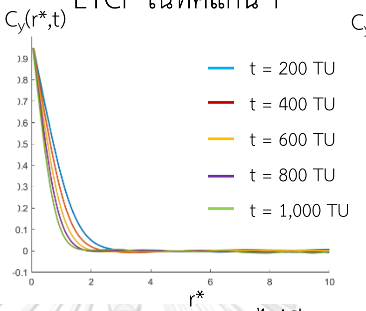
ETCF ในทิศแกน Y



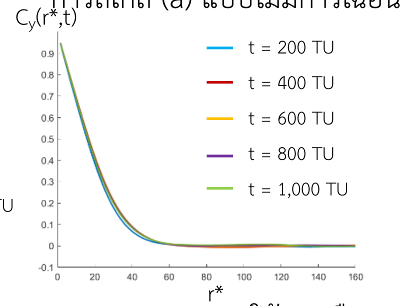
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

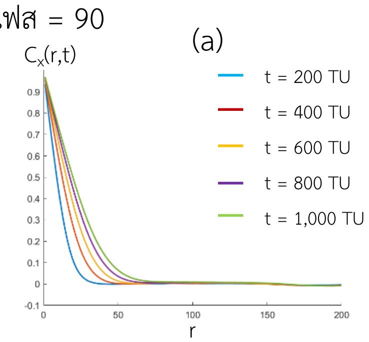


การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน

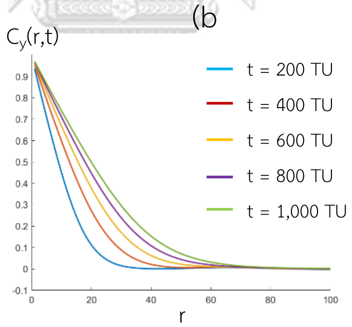


การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

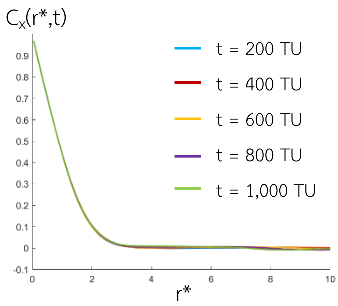
เฟส = 90



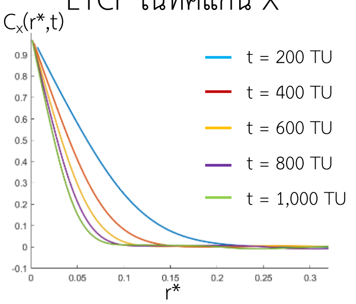
ETCF ในทิศแกน X



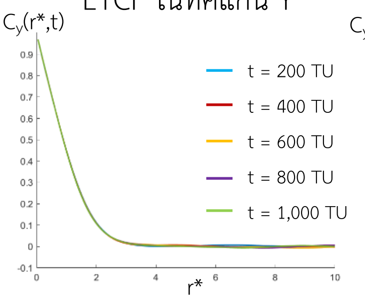
ETCF ในทิศแกน Y



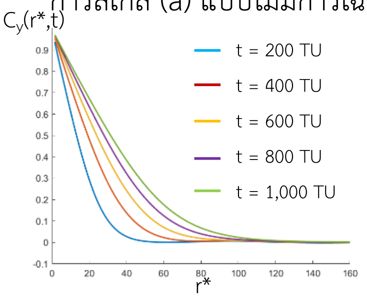
การสเกล (a) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (a) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ



การสเกล (b) แบบไม่มีการเฉือน



การสเกล (b) ภายใต้การเฉือนแบบสม่ำเสมอ

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	สราวุธ สะสม
วัน เดือน ปี เกิด	25 กันยายน 2536
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่
วุฒิการศึกษา	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ที่อยู่ปัจจุบัน	107 ชัยกานต์อพาร์ทเมนต์ ซ.พระยาดำรงค์ ถ.พระราม 4 แขวงมหาพฤฒาราม เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร 10500
ผลงานตีพิมพ์	-
รางวัลที่ได้รับ	-