



โครงการ
การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

Multimedia CAI : Introduction to Probability

ชื่อนิสิต	นายเตโชดม ศิริพงษ์	เลขประจำตัว	5833520623
	นายนิพนพิชฌน์ ไส้สมบูรณ์		5833530923

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของโครงการทางวิชาการที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของโครงการทางวิชาการที่ส่งผ่านทางคณะที่สังกัด

The abstract and full text of senior projects in Chulalongkorn University Intellectual Repository(CUIR)
are the senior project authors' files submitted through the faculty.

สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

นาย เตโชคม ศิริพงษ์
นาย นิพิชฌน์ ได้สมบูรณ์

โครงการนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Multimedia CAI : Introduction to Probability

Mr. Tachodom Siripong

Mr. Nipphit Laisomboon

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2018

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อโครงการ	สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น Multimedia CAI Introduction to Probability
โดย	นาย เดโชคม สิริพงษ์ นาย นิพิชฌน์ ไล่สมบูรณ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อนุมัติให้นับโครงการฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา
2301499 โครงการวิทยาศาสตร์ (Senior Project)



.....
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ นิยมมณี)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงการ



.....
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ)

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ



.....
(รองศาสตราจารย์ ยูวรีย์ พันธุ์กล้า)

กรรมการสอบ



.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล)

กรรมการสอบ

เตโชดม สิริพงษ์, นิพิชฌน์ ไล่สมบูรณ์ สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น. (MULTIMEDIA CAI INTRODUCTION TO PROBABILITY)

อ. ที่ปรึกษาโครงการ ผศ.วาสนา สุขกระสานดี, 102 หน้า.

โครงการนี้เป็นสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น ซึ่งนำเสนอด้วยภาพเคลื่อนไหว พร้อมเสียงบรรยาย เพื่อช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถทำความเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายและสะดวกมากยิ่งขึ้น โดยโครงการนี้จะประกอบด้วยเนื้อหา 3 หัวข้อ คือ ปริภูมิตัวอย่าง การนับจุดตัวอย่าง และ ความน่าจะเป็น โดยมีทั้ง ตัวอย่าง แบบฝึกหัด และแบบทดสอบด้วย

สื่อการเรียนการสอนนี้พัฒนาขึ้นโดยใช้โปรแกรม Adobe animate CC เป็นหลัก โปรแกรม Adobe Photoshop CC โปรแกรม Microsoft Office และ โปรแกรม Audacity

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2561

ลายมือชื่อนิสิต. ๕๓.โรจน .. สิริพงษ์
ลายมือชื่อนิสิต. นิพิชฌน์ .. ไล่สมบูรณ์
ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงการ. วาสนา สุขกระสานดี

5833520623, ## 5833530923 MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS MULTIMEDIA CAI / PROBABILITY

TACHODOM SIRIPONG, NIPPHIT LAISOMBOON MULTIMEDIA CAI

INTRODUCTION TO PROBABILITY ADVISOR ASST PROF

VASANA SUKKRASANTI. 102 pp.

The project is the multimedia CAI: introduction to probability presenting in the form of animation with narration. This CAI will help students to comprehend the subject easily and conveniently. It consists of content with 3 topics sample space , sample point counting , probability, examples , exercises and tests.

The multimedia CAI is produced by Adobe Animate CC Adobe Photoshop CC Microsoft Office and Audacity

Department Mathematics and Computer Science	Student's Signature. <i>vasana sukkrasanti</i> .. <i>Tachodom Siripong</i>
Field of Study Mathematics	Student's Signature. <i>Nipphit Laisomboon</i> .. <i>Vasana Sukkrasanti</i>
Academic Year 2018	Advisor's Signature. <i>Dr. Vasana Sukkrasanti</i>

กิตติกรรมประกาศ

โครงการสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินโครงการ จึงใคร่ขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่างๆ ดังต่อไปนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ และคอยให้คำปรึกษาในเรื่องต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นขั้นตอนวิธีการพัฒนาข้อมูลและรูปภาพต่างๆ เป็นต้น รวมถึงสละเวลาคอยติดตามความก้าวหน้า เสนอแนะ และชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่างๆ ในการทำสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียมาโดยตลอด เริ่มตั้งแต่การจัดทำ จนทำให้การพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณกรรมการสอบโครงการรองศาสตราจารย์ ยุวรีย์ พันธุ์กล้า และรองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะและข้อคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง รวมทั้งชี้ให้เห็นถึงข้อผิดพลาดต่างๆ ซึ่งทำให้สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น สามารถนำไปเผยแพร่ และนำเสนอได้

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่และครอบครัวที่คอยสนับสนุน เป็นกำลังใจ และติดตาม ความก้าวหน้าในการทำโครงการมาโดยตลอด และขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ ทุกคน ที่คอยให้กำลังใจ ให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆ ในการทำโครงการนี้ตลอดจน สอบถาม ความก้าวหน้าของโครงการอย่างสม่ำเสมอ

ผู้จัดทำ

นาย เตโชคม ศิริพงษ์

นาย นิพิชฌน์ ไล่สมบูรณ์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 หลักการและเหตุผล.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	1
1.3 ขอบเขตของโครงการ.....	1
1.4 ลักษณะของโครงการ.....	2
1.5 วิธีการดำเนินงาน.....	2
1.6 ระยะเวลาที่ศึกษา.....	3
1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	4
1.8 อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้.....	4
บทที่ 2 เนื้อหาและ โปรแกรม Adobe Animate CC	
2.1 เนื้อหาความน่าจะเป็นเบื้องต้น.....	5
2.2 การใช้งาน Adobe Animate CC เบื้องต้น.....	7
บทที่ 3 การออกแบบสื่อการเรียนการสอน.....	18
บทที่ 4 คู่มือการใช้สื่อการเรียนการสอน.....	31
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ	
5.1 สรุปผลการดำเนินงาน.....	40
5.2 ปัญหา อุปสรรค และวิธีแก้ปัญหา.....	40
5.3 ข้อเสนอแนะ.....	41
รายการอ้างอิง.....	42
ภาคผนวก	
ก. แบบเสนอหัวข้อโครงการ.....	44
ข. เนื้อหาและแบบฝึกหัด.....	49
ค. แบบทดสอบ.....	91

ประวัติผู้เขียน.....	94
----------------------	----

บทที่ 1

บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

เนื่องจากวิชาความน่าจะเป็นมีความสำคัญอย่างมาก เพราะใช้ความรู้เรื่องการสร้างแบบจำลอง ใน การศึกษาสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับความไม่แน่นอน เช่น การทดลองใช้ยาใหม่ๆ การวิเคราะห์ผลการ เลือกตั้ง เป็นต้น

เนื้อหาเรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้นจะกล่าวถึงปริภูมิตัวอย่าง การนับจุดตัวอย่าง และ ความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นเนื้อหาที่มองเห็นภาพได้ยากทำให้ยากต่อการทำความเข้าใจ อีกทั้งการนำเสนอในหนังสือเป็น ภาพนิ่งสองมิติ ยังไม่เพียงพอต่อการทำความเข้าใจ

ดังนั้น ผู้ดำเนินการจึงต้องการพัฒนาบทเรียนช่วยสอนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น จะเป็นในรูปแบบ ของสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียซึ่งจะแสดงเนื้อหาในรูปแบบภาพสามมิติที่มีสีสัน อีกทั้งมี ภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยายประกอบเนื้อหาในแต่ละส่วนเพื่อให้ผู้ใช้งานสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย ขึ้นแล้วยังมีแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความเข้าใจในบทต่างๆ พร้อมเฉลยที่มีคำอธิบายประกอบ และใน ส่วนท้ายสุดจะมีแบบทดสอบเพื่อวัดความรู้ความเข้าใจอีกด้วย

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียเรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

1.3 ขอบเขตของโครงการ

สื่อการเรียนการสอนจะมีภาพและเสียงประกอบ รวมมี 3 บท โดยที่แต่ละบทจะมีหัวข้อย่อยแล้วแต่ เนื้อหาของแต่ละบท โดยที่แต่ละเนื้อหาจะมีตัวอย่างประกอบ และท้ายบทแต่ละบท จะมี แบบฝึกหัด 2 ชุด ชุดละ 5 ข้อ พร้อมเฉลย ซึ่งแบบฝึกหัด ประกอบด้วย แบบเติมคำ 1 ข้อ แบบตัวเลือก 2 ข้อ และแบบ ถูก-ผิด 2 ข้อ และจะมีแบบทดสอบท้ายบทเรียน 15 ข้อ

1.4 ลักษณะของโครงการ

สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียเรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น ประกอบด้วย

- เนื้อหา 3 บท ได้แก่ ปริภูมิตัวอย่าง การนับจุดตัวอย่าง และความน่าจะเป็น
- แบบฝึกหัด
- แบบทดสอบ

1.5 วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาบทเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นแล้วนำมาเรียบเรียงเป็นเนื้อหาที่จะนำเสนอ
2. ศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูป Adobe animate CC
3. วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอนโดยประกอบด้วย เนื้อหา รูปแบบการนำเสนอ การใช้งานและเขียนสคริปต์ประกอบการออกแบบ
4. สร้างสื่อการเรียนการสอนตามรูปแบบที่ได้ออกแบบไว้
5. ตกแต่งสื่อการเรียนการสอนให้มีความสวยงามและน่าสนใจ
6. ทดสอบ ตรวจสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดของสื่อการเรียนการสอนที่ได้
7. สรุปผล จัดทำเอกสารและคู่มือการใช้งาน

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ประโยชน์ต่อผู้ใช้งาน

- ใช้สื่อการเรียนการสอนเพื่อศึกษาบทเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น
- นำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้
- สร้างแรงจูงใจให้ผู้ใช้งาน มีความสนใจที่จะเรียนรู้มากยิ่งขึ้น

2. ประโยชน์ต่อผู้ดำเนินการ

- ได้ทบทวนความรู้ความเข้าใจบทเรียนเรื่องความน่าจะเป็น
- สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Adobe animate CC
- สามารถออกแบบและพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย
- ได้ประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้อื่น

1.8 อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. Hardware

- เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ ความเร็วไม่ต่ำกว่า 2.5 GHz
Ram ความจุไม่น้อยกว่า 4 GB
Hard disk ความจุไม่น้อยกว่า 1000 GB
- เครื่องพิมพ์
- อุปกรณ์บันทึกข้อมูล Flash Drive และ External hard disk
- อุปกรณ์บันทึกเสียง
- เม้าส์ปากกา

2. Software

- Adobe Animate cc 2018
- Adobe Photoshop CS6
- Audacity
- Windows 8.1
- Microsoft Office 2010

บทที่ 2

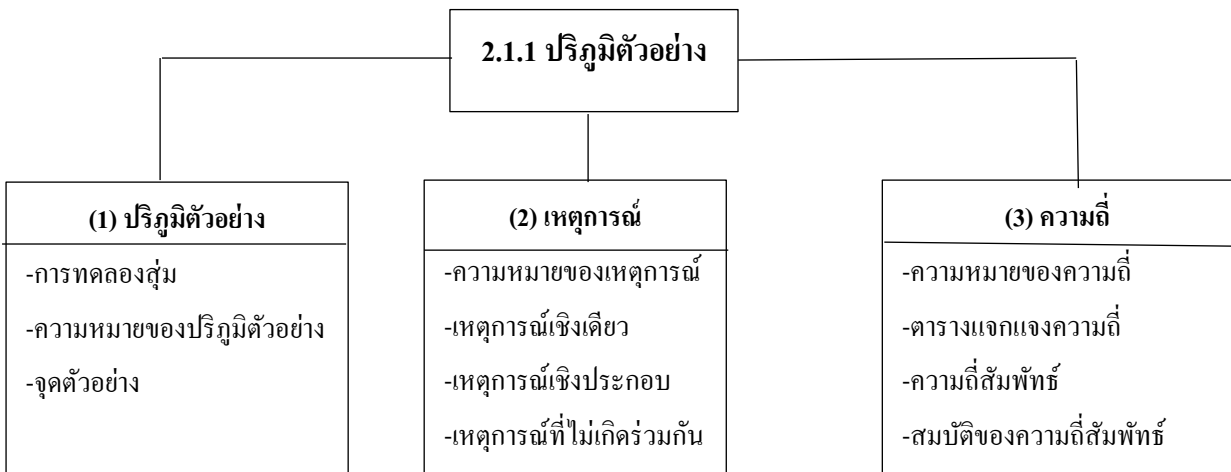
เนื้อหาและโปรแกรม Adobe Animate CC

2.1 เนื้อหาความน่าจะเป็นเบื้องต้น

ความน่าจะเป็นเบื้องต้นที่จะพัฒนาเป็นสื่อการเรียนการสอนนี้จะอธิบายถึง 3 หัวข้อ คือ ปฏิภูมิตัวอย่าง การนับจุดตัวอย่าง และความน่าจะเป็น ดังจะกล่าวรายละเอียดดังต่อไปนี้

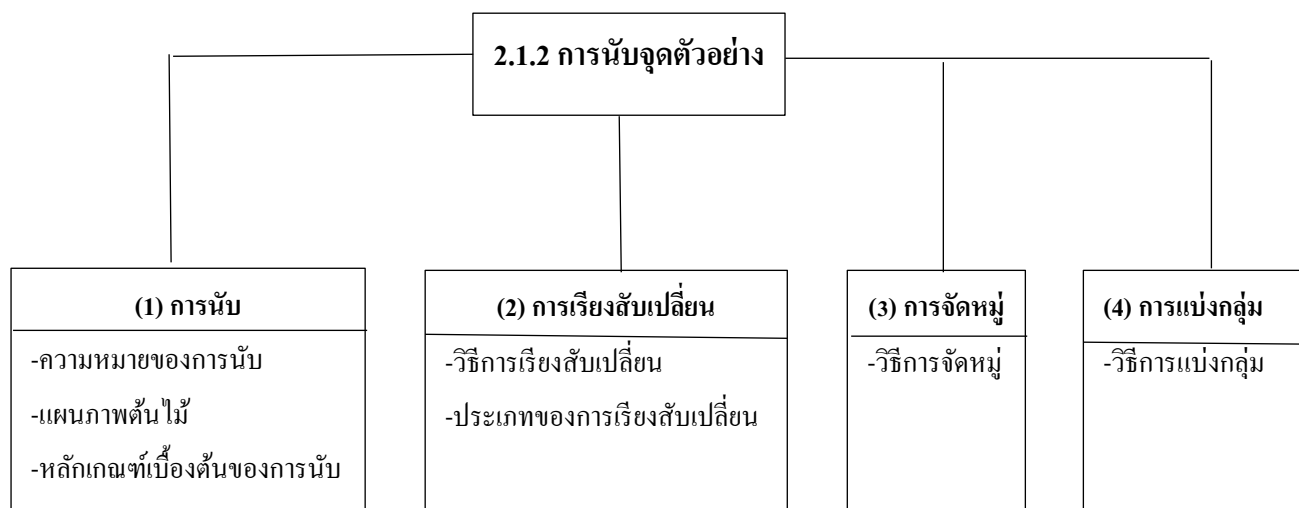
2.1.1 ปฏิภูมิตัวอย่าง

ปฏิภูมิตัวอย่างมีหัวข้อย่อยอยู่ 3 หัวข้อ คือ ปฏิภูมิตัวอย่าง เหตุการณ์ และความถี่ โดยสรุปเป็นแผนภาพได้ดังนี้



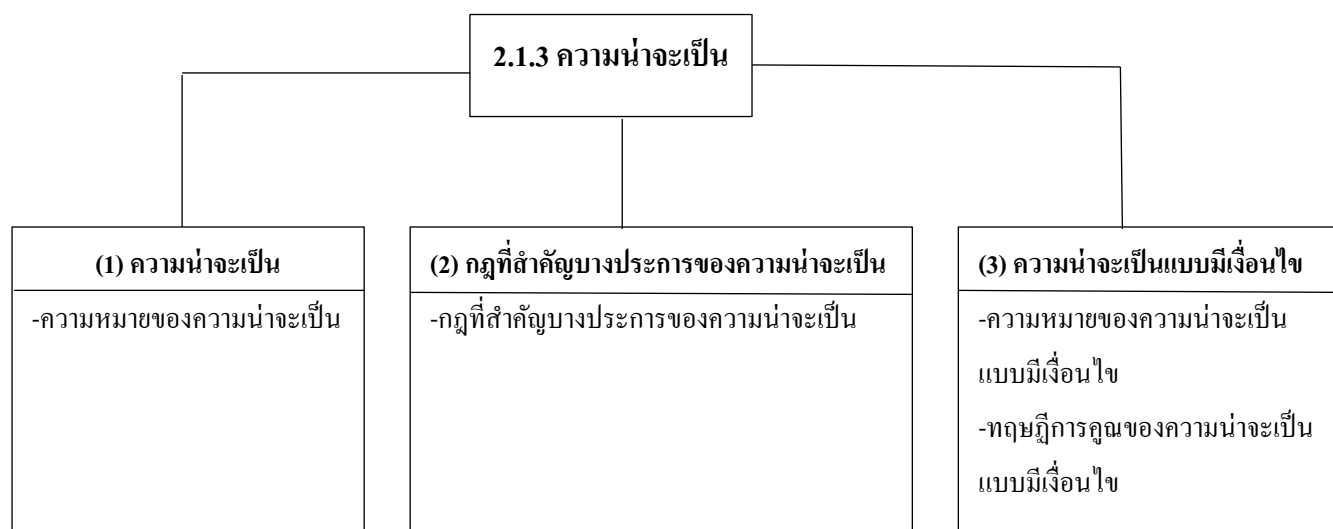
2.1.2 การนับจุดตัวอย่าง

การนับจุดตัวอย่างมีหัวข้อย่อยอยู่ 4 หัวข้อดังนี้ การนับ การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และการแบ่งกลุ่ม โดยสรุปเป็นแผนภาพได้ดังนี้



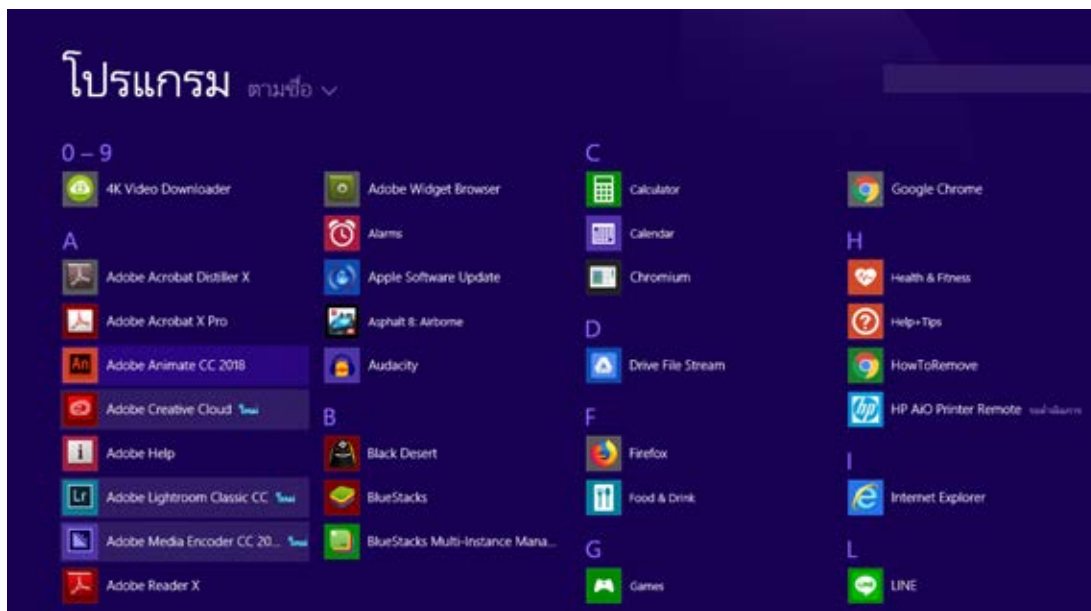
2.1.3 ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นมีหัวข้อย่อยอยู่ 3 หัวข้อดังนี้ ความน่าจะเป็น กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น และความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข โดยสรุปเป็นแผนภาพได้ดังนี้



2.2 การใช้งาน Adobe Animate CC เบื้องต้น

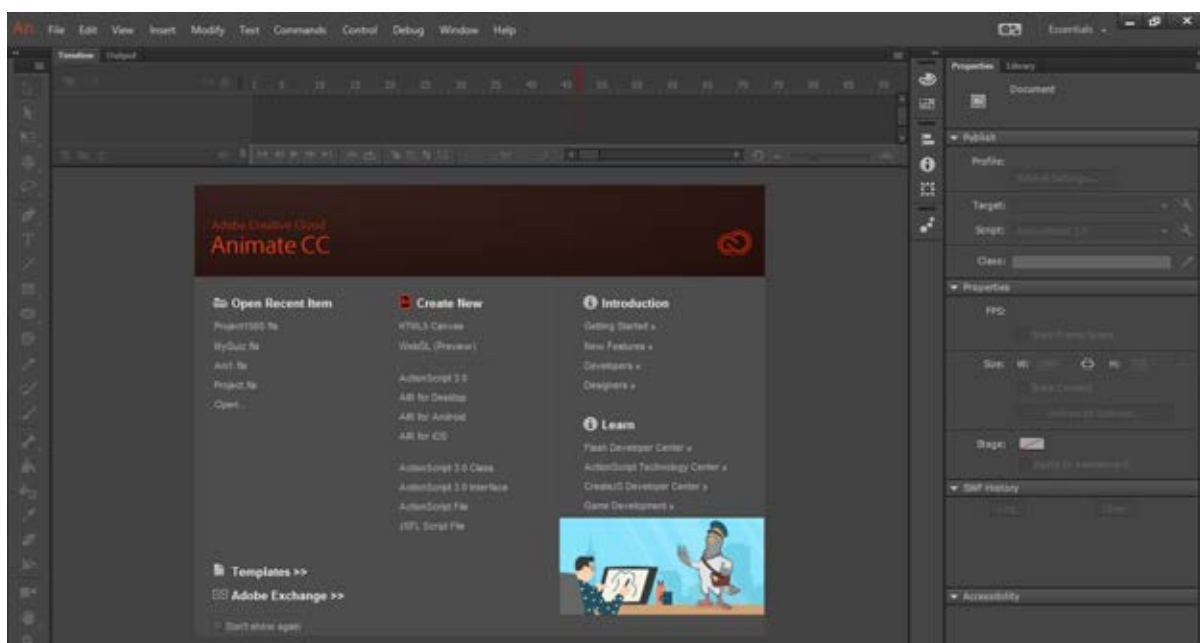
เมื่อติดตั้งโปรแกรม Adobe Animate CC เรียบร้อยแล้วจะปรากฏไอคอนของโปรแกรมในหน้าโปรแกรม MS Windows



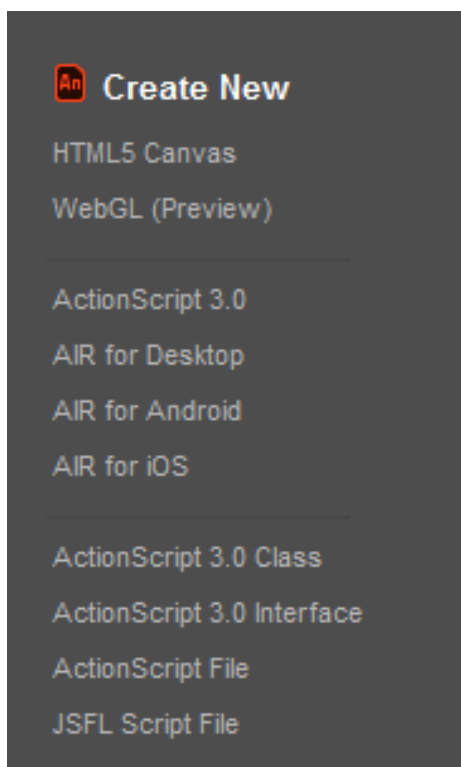
คลิกในส่วนของไอคอนโปรแกรมเพื่อเปิดใช้งาน



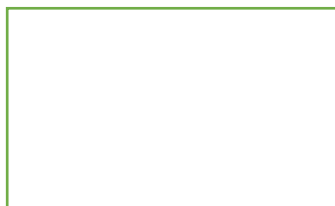
เมื่อเข้าสู่โปรแกรมแล้วจะพบหน้าแรกดังนี้

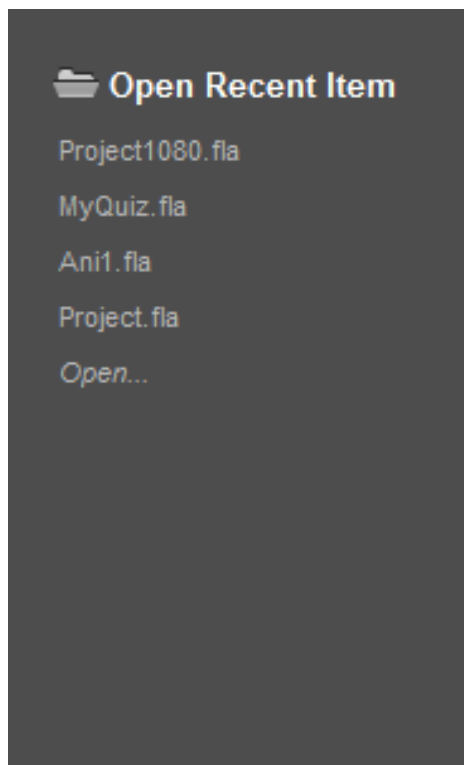


ซึ่งในส่วนของการทำงานเราจะทำงานกับ 2 ส่วนคือ



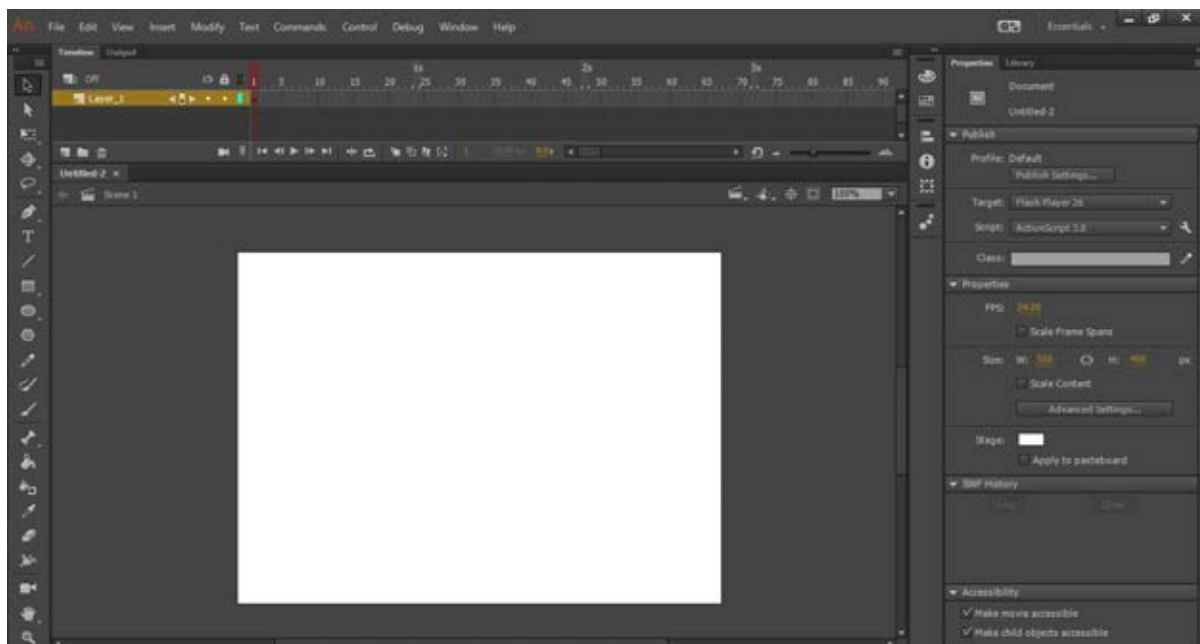
1. หน้าต่างสำหรับการสร้างงานใหม่ โดยจะให้เลือกประเภทของงานที่เราจะใช้งาน โดยสามารถเลือกประเภทของงานได้โดยการเลือกจากตัวเลือกทั้ง 3 และการสร้างสื่อการเรียนการสอนนี้เราใช้ AIR for Desktop เป็นหลัก



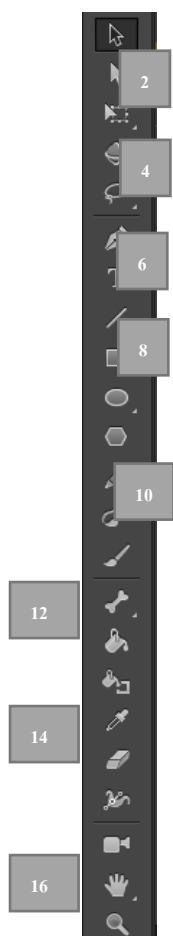


2. ส่วนการเปิดไฟล์งานสามารถกดไฟล์งานที่ต้องการจากรายชื่อที่ปรากฏ หรือถ้าหากไม่มีชื่อไฟล์งานอยู่ในรายชื่อที่ปรากฏ สามารถกด Open... เพื่อหาไฟล์งานได้ทันที

เมื่อเข้ามาในไฟล์งานจะพบหน้าต่างดังนี้



ในหน้าต่างแบ่งเป็น 5 ส่วน ดังนี้

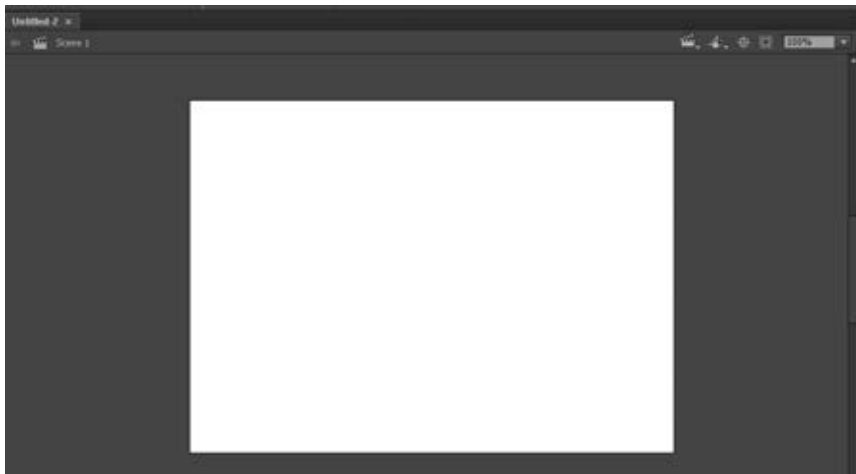


- 1 **Tools Box** ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะเครื่องมือสำคัญที่ใช้การทำงาน
- 2
- 3 **1.Selection Tool (V)** เป็นเครื่องมือในการเลือกหรือเคลื่อนย้าย Object การเลือก Object นั้นสามารถคลิกเมาส์ หรือ แดรกเมาส์คลุมพื้นที่ที่เราต้องการเลือก หรือ หากต้องการเลือกทั้งหมดใน Stage สามารถกด Ctrl + A ซึ่งจะเลือกให้ทุก Object ในทุก Layer
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9 **2. Subselection Tool (A)** เป็นเครื่องมือในการเลือก Object เช่นเดียวกับ Selection Tool แต่จะเป็นการเลือกจุดเชื่อมของเส้น และเคลื่อนย้ายจุดเชื่อมนั้น ๆ เพื่อเป็นการดัดเส้นจนเกิดเป็นรูปทรงใหม่
- 10
- 11 **3. Free Transform Tool (Q)** เป็นเครื่องมือที่ใช้เลือก Object เพื่อหมุน เคลื่อนย้าย รวมถึง การย่อ และขยาย ของ Object
- 12
- 13 **4. 3d rotation Tool (W)** เป็นเครื่องมือที่จัดการ Object แบบสามมิติ โดยการหมุน แกน X, Y และ Z ซึ่งสามารถหมุนได้ 360 องศา การใช้เครื่องมือตัวนี้จะช่วยให้ได้ภาพมีมิติยิ่งขึ้น
- 14
- 15
- 16
- 17

5. **Lasso Tool (L)** เป็นเครื่องมือ ที่สามารถเลือก Object ได้อย่างอิสระตามที่เราต้องการ
6. **Pen Tool (P)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวาดรูป สร้างเส้น โดยการสร้างจุด จากจุดหนึ่ง ไปยังจุดหนึ่ง และในการกำหนดจุดแต่ละจุดนั้นสามารถตัดเส้นจนเกิดเป็นรูปทรงต่าง ๆ ได้
7. **Text Tool (T)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการสร้างข้อความต่าง ๆ ตามที่เราต้องการ
8. **Line Tool (N)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการสร้างเส้นตรง
9. **Rectangle Tool (R)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการสร้างรูปสี่เหลี่ยม
10. **Pencil Tool (Y)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวาดรูปโดยการ ใช้เส้น ได้อย่างอิสระเหมาะสมสำหรับงานที่เป็น Freehand หรือมีอุปกรณ์เสริม
11. **Brush Tool (B)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวาดรูปโดยการ ใช้สี ได้อย่างอิสระเหมาะสมสำหรับงานที่เป็น Freehand หรือมีอุปกรณ์เสริม
12. **Bone Tool (M)** เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการใส่กระดูกให้กับ Object เพื่อสะดวกและสมจริงในการเคลื่อนที่ของข้อต่อ
13. **Paint Bucket Tool (K)** เป็นเครื่องมือ ที่ใช้ในการเทสีลงใน Object
14. **Eyedropper Tool (I)** เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการดูดสี จากสีที่เราต้องการ
15. **Eraser Tool (E)** เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการลบในส่วนที่เราไม่ต้องการ ซึ่งทำหน้าที่คล้ายยางลบ
16. **Hand Tool (H)** เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการย้ายหน้าจอกการทำงาน เพื่อความสะดวกในการทำงาน
17. **Zoom Tool (Z)** เป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการย่อ หรือขยาย หน้าจอกการทำงาน

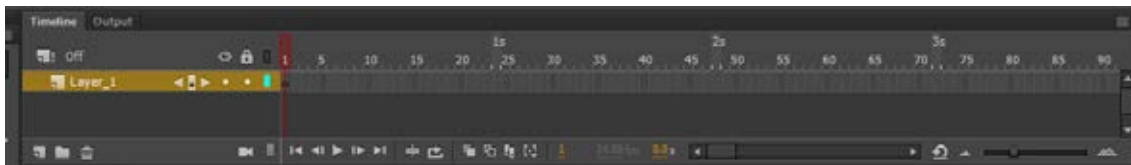
2. Stage

คือส่วนที่แสดงถึงรูปร่างหน้าตาของเรโดยเราจะใช้ Tools ทำงานเกี่ยวกับส่วนนี้ทั้งหมด เช่น การวาด การใส่ตัวอักษร และ การใส่สี เป็นต้น



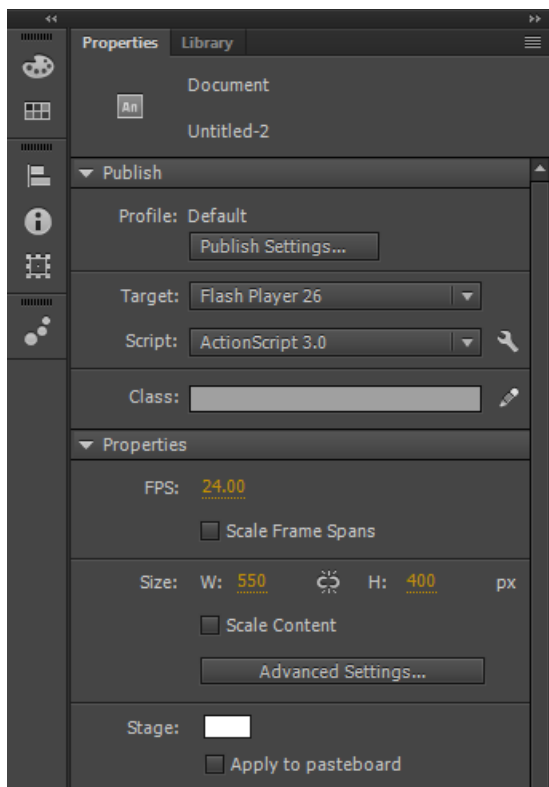
3. Timeline

เป็นส่วนที่ เราจะจัดการหน้าต่างๆในงาน แสดงข้อมูลการประมวลผลของงาน รวมไปถึงการสร้างภาพเคลื่อนไหวและเสียง



4. Properties

เป็นส่วนของคุณสมบัติโดยรวมของงาน เช่น ขนาดของงาน สีพื้นหลัง ขนาดของสื่อในงาน สีของสื่อในงาน ประเภทของ Script โปรแกรมที่ใช้ในการทำงาน Library ไฟล์ที่เก็บสื่อทั้งหมดในงาน เป็นต้น

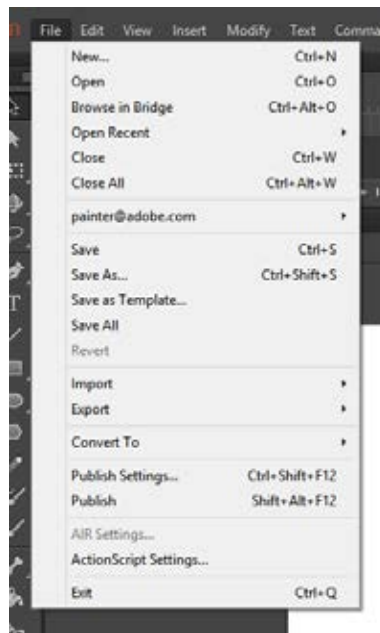


5. Menu Bar

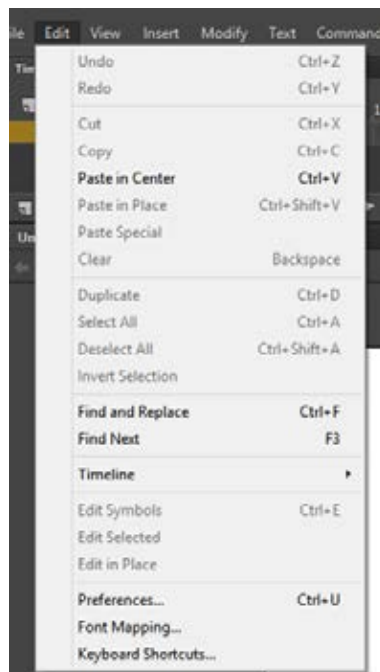
มีหน้าที่ควบคุมโปรแกรมทั้งหมดเป็นหลัก โดยมี Menu ให้เลือกทั้งหมด 11 หัวข้อ ดังนี้



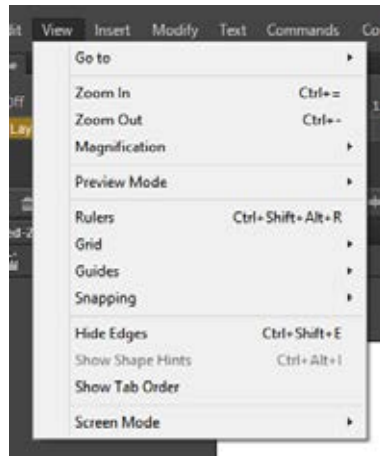
1. File มีหน้าที่หลักในการจัดการกับไฟล์งาน ทั้งการสร้าง การเปิด การบันทึก การนำเข้า และ การส่งออกงาน



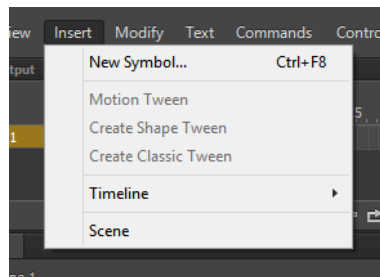
2. Edit มีหน้าที่หลักในการแก้ไข Object ในงาน โดยจะเน้นในงานบน Stage ไม่ว่าจะเป็น การตัด การคัดลอก การวาง การย้อนกลับ ฯลฯ



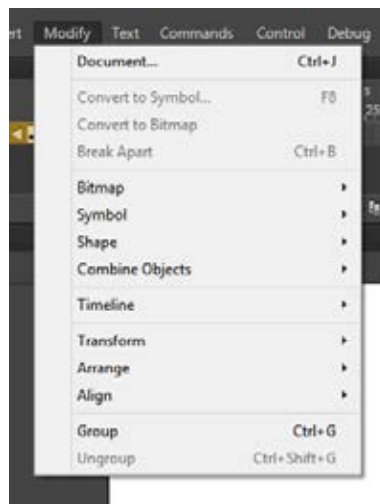
3. View มีหน้าที่หลักในการจัดการมุมมองของงาน



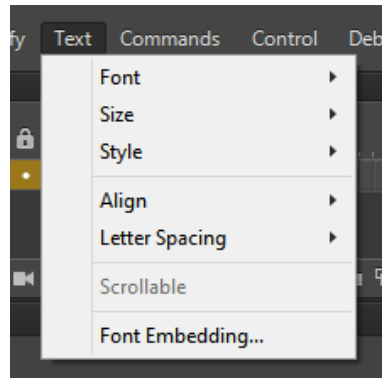
4. Insert มีหน้าที่หลักในการแทรก Object หรือ กิจกรรมต่างๆ เข้าไปในงาน



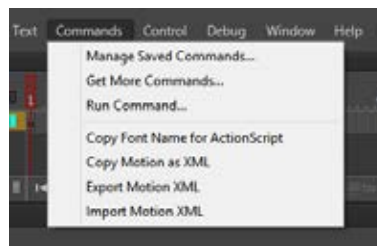
5. Modify มีหน้าที่หลักในการปรับแต่งเอกสารและงาน ซึ่งจะเน้นไปทางการปรับแต่งใน Properties



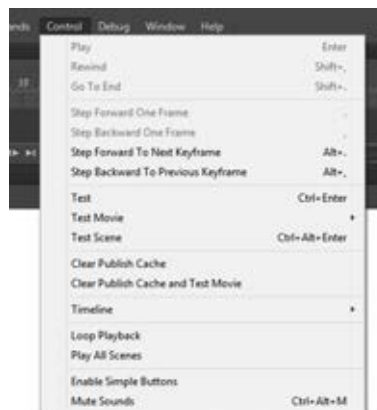
6. Text มีหน้าที่หลักในการจัดการข้อความทั้งหมดในโปรแกรม



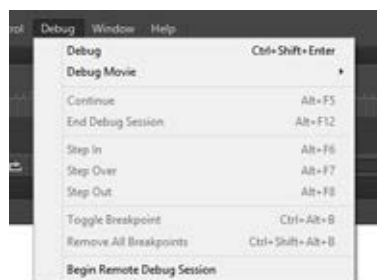
7. Commands มีหน้าที่หลักในการควบคุมงานการประมวลผลของโปรแกรม



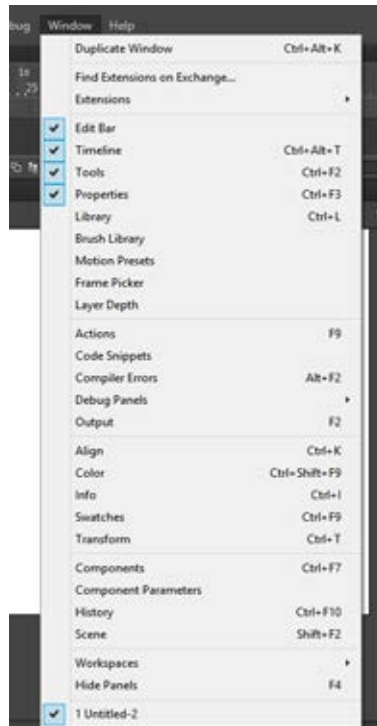
8. Control มีหน้าที่หลักในการควบคุมสื่อภายในงาน



9. Debug มีหน้าที่หลักในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในงาน



10. Window มีหน้าที่หลักในการจัดการหน้าต่างทั้งหมดในโปรแกรม



11. Help มีหน้าที่ให้คำแนะนำ และ ช่วยเหลือผู้ใช้งานให้ใช้งาน โปรแกรมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

บทที่ 3

การออกแบบสื่อการเรียนการสอน

ผู้พัฒนาโครงการได้ออกแบบสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดียนี้โดยยึดหลักให้ผู้ใช้สามารถเรียกใช้ และศึกษาได้โดยง่าย ซึ่งสื่อนี้จะมีการทำงานในลักษณะของเมนู มีรูปภาพ สี สัน และมีภาพเคลื่อนไหว ซึ่งจะทำให้ ผู้ใช้สื่อการเรียนการสอนนี้ สามารถเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายและศึกษาได้อย่างเพลิดเพลิน รวมทั้งแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยที่มีเสียงบรรยาย เพื่อให้ผู้ใช้ได้เข้าใจเนื้อหาได้ลึกซึ้งขึ้น และในส่วนท้ายสุดจะมีแบบทดสอบพร้อมบอกคะแนนที่ทำได้ เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของผู้ใช้อีกด้วย

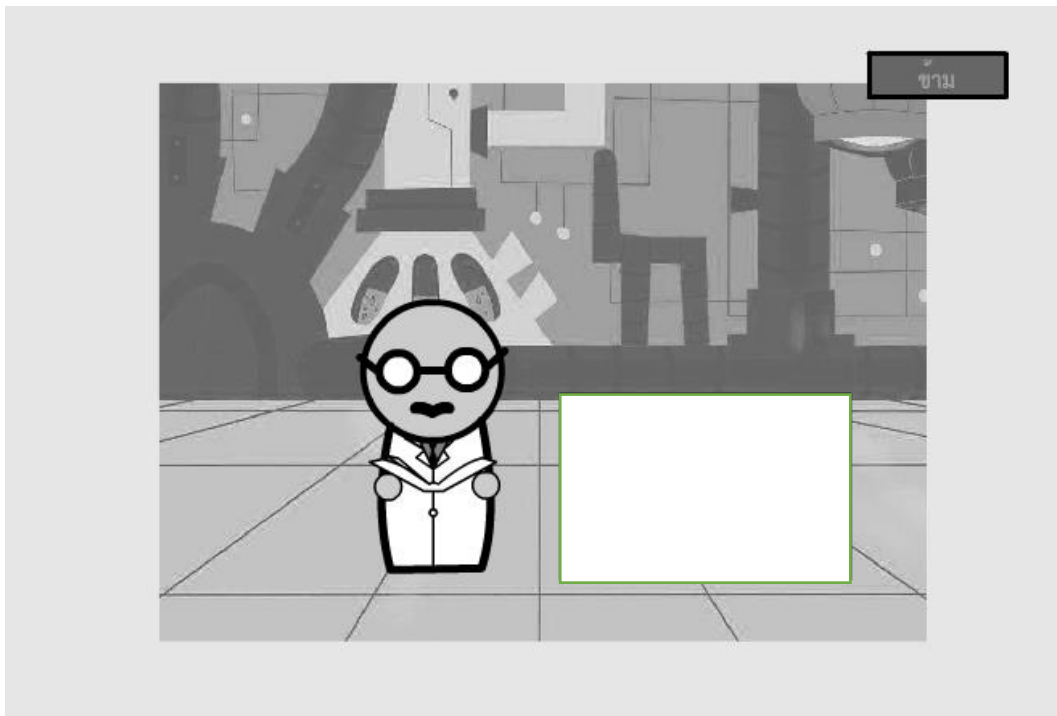
เมื่อเปิดสื่อการสอนจะปรากฏ “หน้าหลัก” แสดงชื่อของสื่อการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย 4 ตัวเลือก ดังนี้

1. เข้าสู่บทเรียน
2. เลือกบทเรียน
3. วิธีการใช้งาน
4. จบการทำงาน

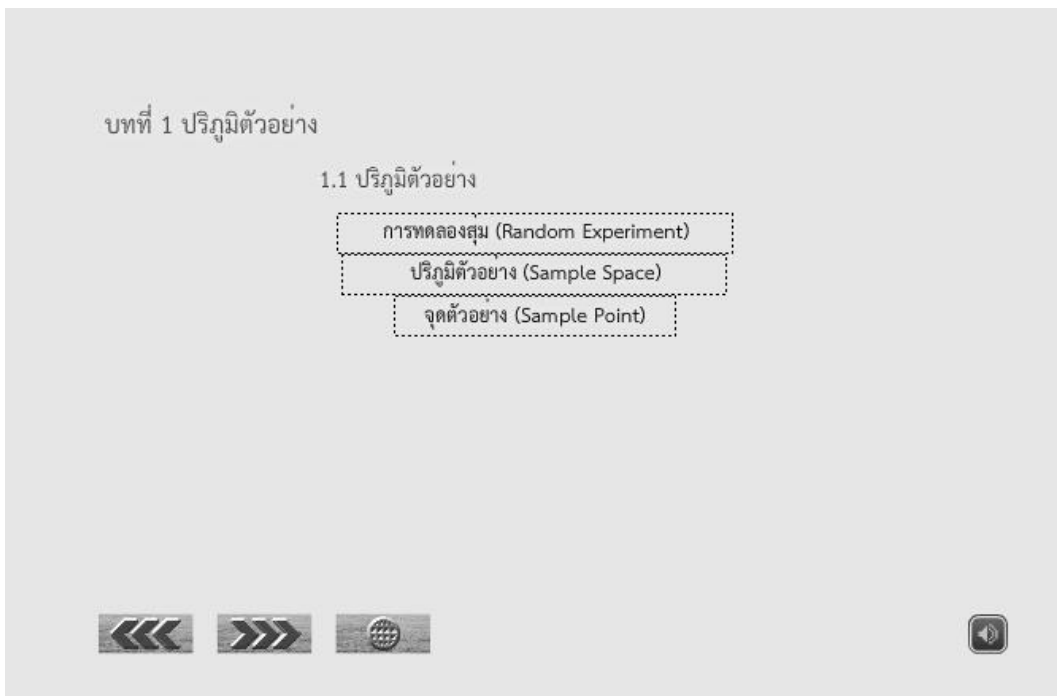
สื่อการเรียนการสอน
เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น


เข้าสู่บทเรียน
เลือกบทเรียน
วิธีการใช้งาน
จบการทำงาน

1. เมื่อกด “เข้าสู่บทเรียน” จะแสดงวิดีโอเกริ่นนำเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น
ภายในหน้านี้มีปุ่มเพียงปุ่มเดียวคือปุ่มข้าม



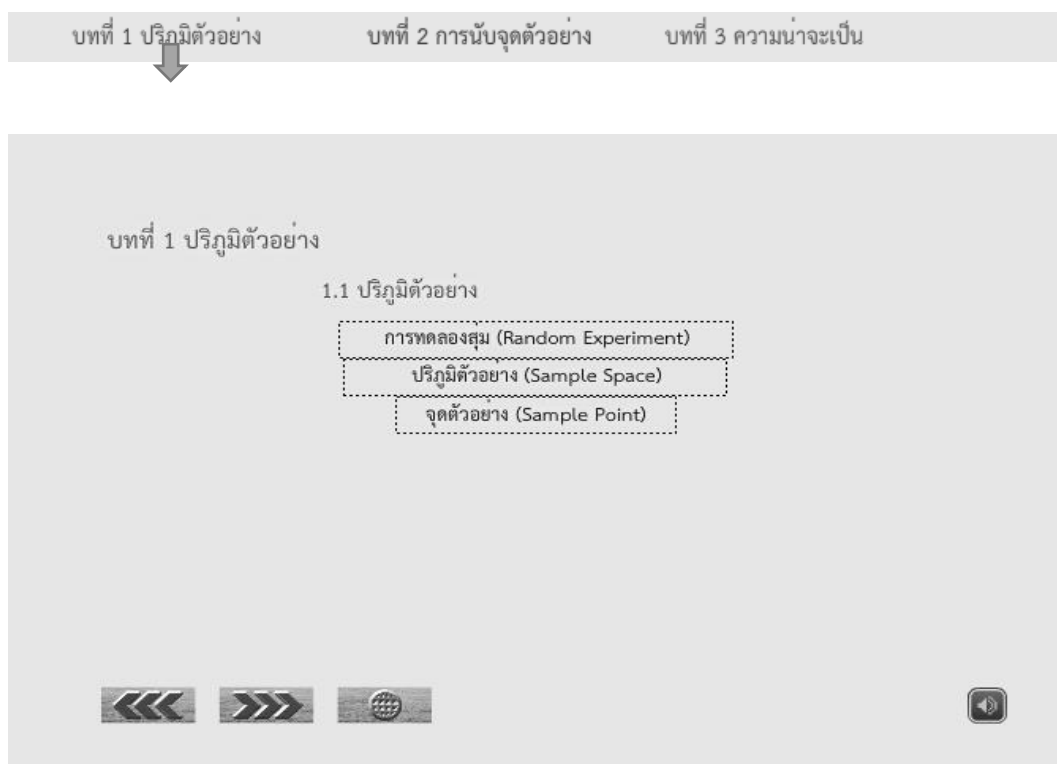
ซึ่งเมื่อกดแล้วจะไปยังหน้า “บทที่ 1 ปฏิบัติตัวอย่าง”



2. เมื่อกด “เลือกบทเรียน” จะพาเข้าสู่หน้าแสดงสารบัญของสื่อการเรียนการสอน ซึ่งสามารถเลือกบทเรียนที่ต้องการได้ โดยจะมีปุ่มอยู่มุมซ้ายบน  เป็นปุ่มกลับไปสู่ “หน้าหลัก”



ในส่วนถัดมาเป็นปุ่มตัวเลือกบทเรียน ซึ่งหากกดเข้าไปจะแสดงหน้าหลักของแต่ละบท




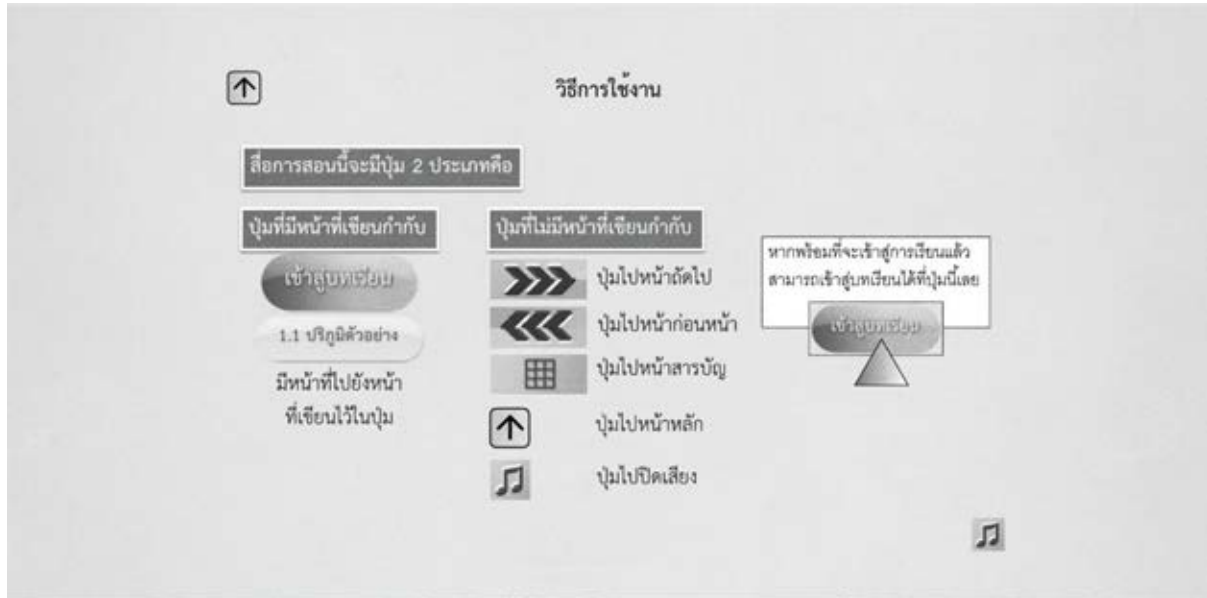
ต่อมาจะเป็นปุ่มตัวเลือกหัวข้อย่อยของแต่ละบทเรียน ซึ่งหากกดเข้าไปจะแสดงหน้าหลักของแต่ละหัวข้อย่อย



และส่วนสุดท้ายจะเป็นปุ่มตัวเลือกแบบฝึกหัดแต่ละบทเรียน รวมทั้งแบบทดสอบด้วย ซึ่งหากกดเข้าไปจะแสดงหน้าแบบฝึกหัด หรือ หน้าแบบทดสอบ







3. เมื่อกด “วิธีการใช้งาน” จะแสดงหน้าแสดงวิธีการใช้งานของสื่อการสอน โดยจะมีปุ่มอยู่มุมซ้ายบน  เป็นปุ่มกลับไปสู่ “หน้าหลัก”



4. เมื่อกด “จบการทำงาน” จะเป็นการปิดสื่อการสอนทันที

ตัวอย่างหน้าจอของหัวข้อย่อย โดยด้านบนจะเป็นชื่อหัวข้อของบทนั้น
 ในลำดับถัดมาจะเป็นชื่อหัวข้อย่อย ตามด้วย หัวข้อเนื้อหาตามแต่ละหัวข้อย่อย
 ซึ่งเป็นปุ่มตัวเลือกที่สามารถกดเข้าไปเพื่อเข้าสู่เนื้อหาได้

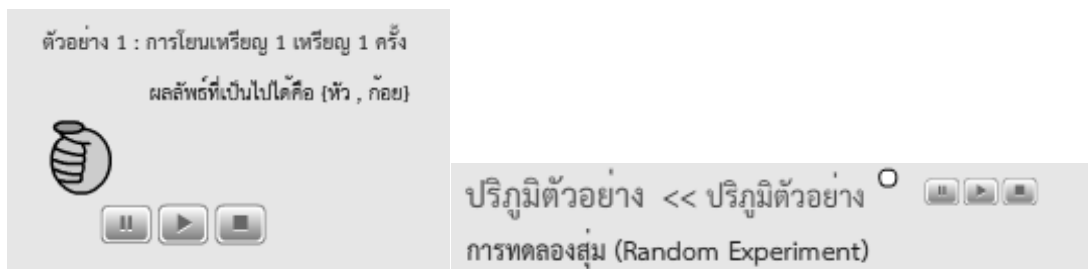





โดยทุกหน้าจอของบทเรียนที่มุมซ้ายล่างจะมีปุ่ม **กลับสู่หน้าก่อนหน้า** 
ไปยังหน้าถัดไป  **กลับสู่เลือกบทเรียน**  ตามลำดับ และที่มุมขวาล่าง
 จะมีปุ่มเปิดหรือเปิดเสียงดนตรีประกอบ  ด้วย

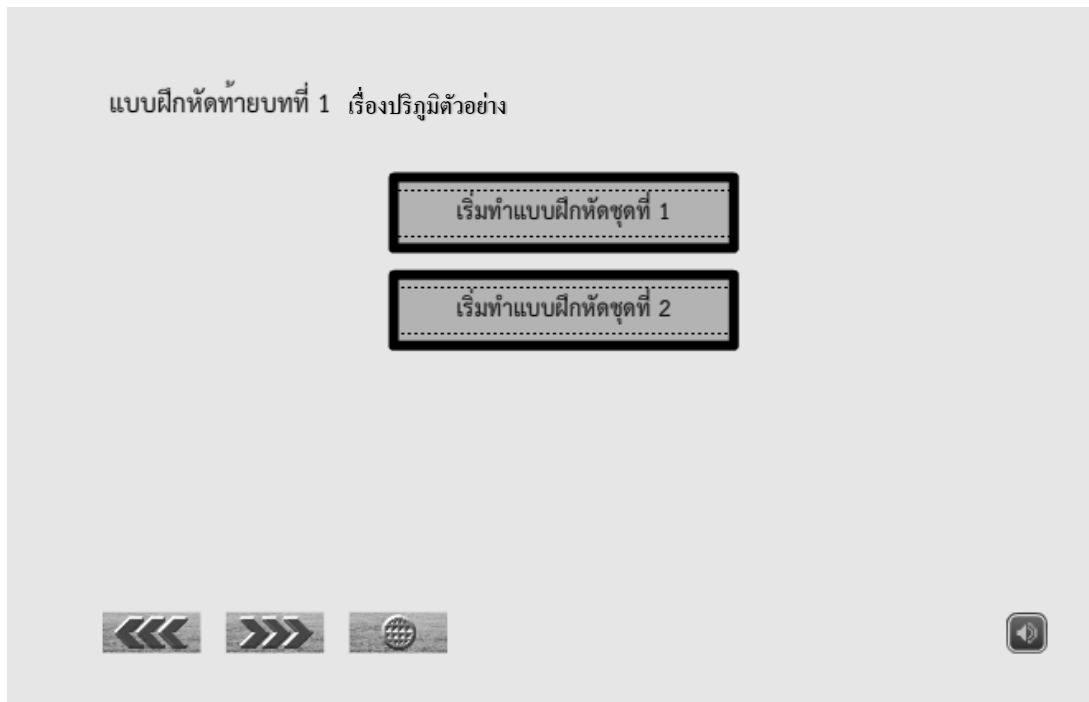
ตัวอย่างหน้าของเนื้อหาตามแต่ละหัวข้อย่อยโดยด้านบนจะเป็นหัวข้อของบทนั้น และหัวข้อย่อย



ส่วนด้านล่างจะเหมือนหน้าของหัวข้อย่อย และบางเนื้อหาจะมี ปุ่มการเล่น เพิ่มขึ้นมาดังรูป



ตัวอย่างจะมีปุ่ม **พัก**  **เล่น**  และ **หยุด**  ตามลำดับ ตำแหน่งของปุ่มจะอยู่ด้านล่างหรือด้านข้างของภาพเคลื่อนไหว และจะมีปุ่มลักษณะเดียวกันแต่ขนาดเล็กกว่า และมีหน้าที่เหมือนกันอยู่ในส่วนเนื้อหาที่มีเสียงพากย์



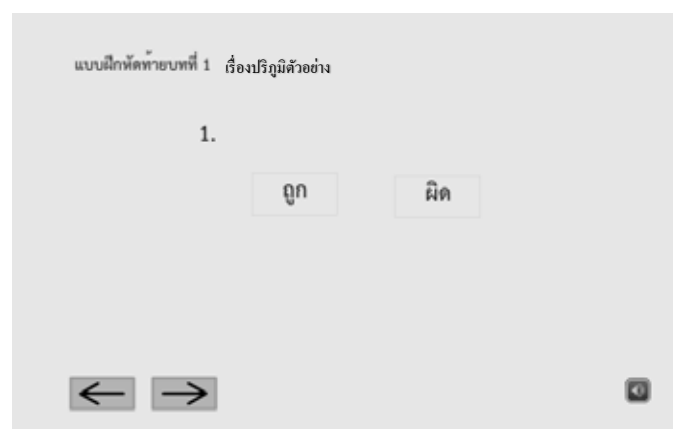
ในส่วนของแบบฝึกหัดท้ายบท จะแสดงว่าเป็นแบบฝึกหัดท้ายบท เรื่องอะไรที่มุมซ้ายบน และมีปุ่มให้เลือกว่าจะเลือกทำ แบบฝึกหัดชุดที่ 1 หรือ แบบฝึกหัดชุดที่ 2

แบบฝึกหัดจะมีโจทย์ 3 ลักษณะ คือ

1. แบบสองตัวเลือก คือ ถูก และ ผิด
2. แบบสี่ตัวเลือก คือ ก ข ค และ ง
3. แบบเติมคำตอบ

ดังรูปที่ 1 ถึง รูปที่ 3

รูปที่ 1



หากครบทุกข้อแล้วจะเปิดมายัง หน้าสรุปคะแนน และมีปุ่มเฉลยเพื่อเข้าไปดูเฉลย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 เรื่องปริภูมิตัวอย่าง

คะแนน / จากคะแนนเต็ม

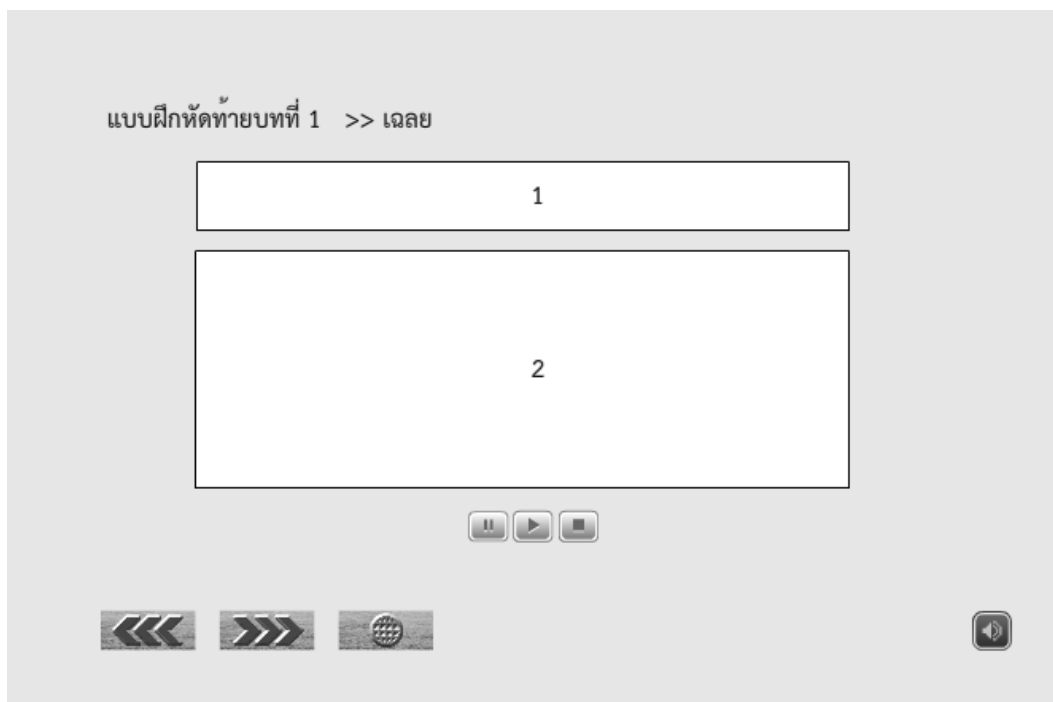
เฉลย




เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 เรื่องปริภูมิตัวอย่าง



สามารถกดเข้าไปดูวิธีทำโดยละเอียดได้ด้วย
 เฉลยของแบบฝึกหัดจะมีส่วน [1] เป็นโจทย์ และ [2] เป็นวิธีทำโดยละเอียด



จะมีปุ่ม พัก  เล่น  และหยุด  ตามลำดับ

สามารถฟังเสียงบรรยายได้โดยการกดปุ่มเสียง 

หากครบทุกข้อแล้วจะเปิดมายัง หน้าสรุปคะแนน ในส่วนของแบบทดสอบจะมีการจัดระดับคะแนนไว้ดังนี้

จะปรากฏข้อความ “คุณได้ x คะแนน จากคะแนนเต็ม 15 คะแนน”

โดยที่ x = คะแนนที่ผู้ใช้งานทำได้ และจะแสดงข้อความด้านล่างตามคะแนนที่ทำได้ ดังนี้

ได้คะแนน 15 คะแนน

“ว้าวสุดยอดไปเลยนี้ได้คะแนนเยอะที่สุดเลยนะ”

ได้คะแนนตั้งแต่ 10 – 14 คะแนน

“ทำได้ดีมากๆ เลยนะได้คะแนนเยอะมากเลยทีเดียวนะ”

ได้คะแนนตั้งแต่ 8 – 10 คะแนน

“ทำได้ดีคะแนนเยอะพอสมควร”

ได้คะแนนตั้งแต่ 5 - 8 คะแนน

“ยังต้องฝึกฝนหน่อยนะครับแต่ไม่แย่เลยทีเดียวนะ”

ได้คะแนนตั้งแต่ 1 – 4 คะแนน

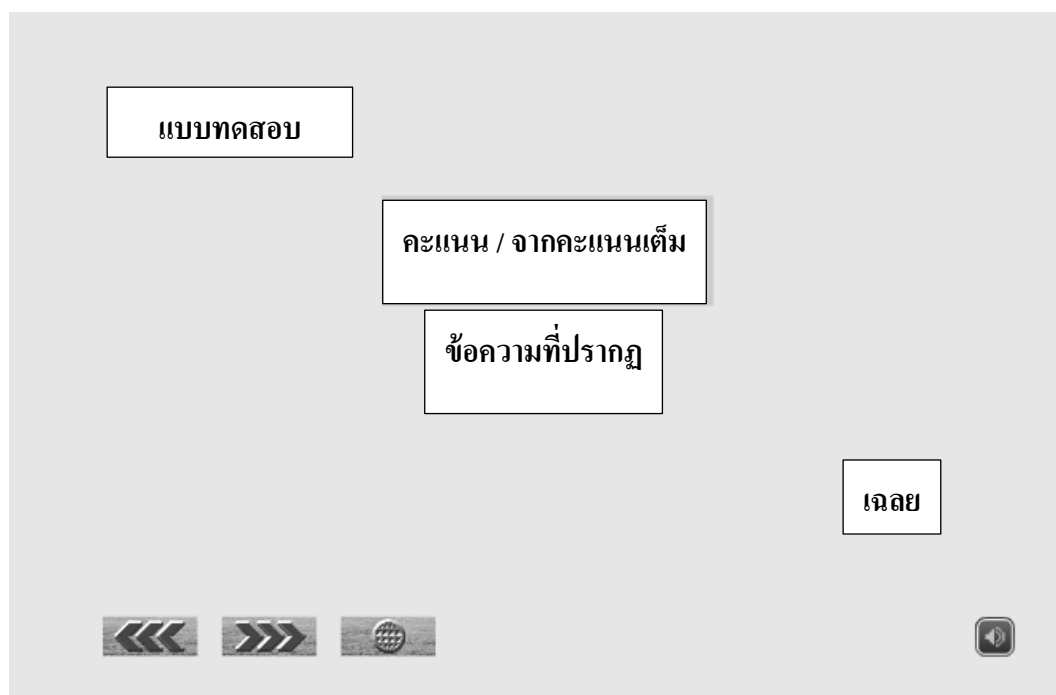
“ลองพยายามอีกสักครั้งนะครับ”

ได้คะแนน 0 คะแนน

“รับชมบทเรียนใหม่สักครั้งก่อนลองอีกครั้งก็ได้นะครับ”

และ เฉลยในแบบทดสอบจะมีเพียงคำตอบจะไม่มี การแสดงวิธีทำ

ตัวอย่างหน้าสรุปคะแนนของแบบทดสอบ



บทที่ 4

คู่มือการใช้สื่อการเรียนการสอน

สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น เป็นโปรแกรมที่สร้างขึ้นจากโปรแกรม Adobe Animate CC ซึ่งผู้พัฒนาต้องการให้สามารถใช้งานได้อย่างสะดวก โดยผู้เรียนสามารถใช้โปรแกรมนี้บนระบบ Windows ได้โดยไม่ต้องติดตั้งโปรแกรม FlashPlayer บนเครื่องนั้น และสามารถใช้งานบนโทรศัพท์มือถือได้ด้วยหากมีโปรแกรม FlashPlayer นั่นคือ เมื่อเปิดเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ Run ด้วยระบบ Windows จะสามารถใช้งานได้ทันที(ไฟล์ exe เป็นไฟล์ที่สามารถเปิดได้ทั่วไปโดยไม่ต้องติดตั้งโปรแกรมใดๆใน Windows) และ ในโทรศัพท์มือถือก็สามารถใช้งานได้โดยติดตั้ง FlashPlayer ไว้ในเครื่องก่อน(ไฟล์ swf เป็นไฟล์ดิบของ Flash จึงจำเป็นต้องติดตั้งโปรแกรมก่อนจึงสามารถใช้งานได้) ซึ่งเมื่อเปิดโปรแกรมขึ้นมาจะปรากฏหน้าต่าง ดังนี้



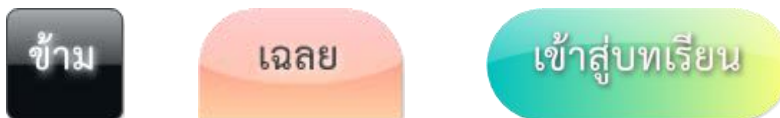
เมื่อกด “เข้าสู่บทเรียน” จะนำเข้าสู่หน้าแสดงวิดีโอเกริ่นนำถึงเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น โดยสามารถกดปุ่มตัวเลือก “ข้าม” ไปยังหน้า “บทที่ 1 ปฏิบัติตัวอย่าง” ได้

เมื่อกด “เลือกบทเรียน” จะนำเข้าสู่หน้าแสดงสารบัญของสื่อการสอน ซึ่งสามารถเลือกบทเรียนที่ต้องการได้



ในหน้านี้ผู้ใช้งานสามารถเลือก **บทเรียน** หรือ **แบบฝึกหัด** หรือ **แบบทดสอบ** ที่ต้องการได้โดย
 สำหรับในการใช้งานจะมีปุ่มที่ควรรู้จักดังนี้

1. ปุ่มตัวเลือกที่มีข้อความกำหนดชัดเจน



ปุ่มตัวเลือกประเภทนี้จะมีข้อความระบุหน้าที่ หรือ หัวข้อ ชัดเจนว่าเมื่อกดแล้วจะเกิดสิ่งใด
 หรือ พาเข้าไปสู่หน้าใด

2. ปุ่มตัวเลือกที่ใช้สัญลักษณ์



ปุ่มกลับไป “หน้าหลัก”



ปุ่มกลับสู่ “หน้าก่อนหน้า” และ ปุ่มไป “หน้าถัดไป”



ปุ่มไปหน้า “เลือกบทเรียน”



ปุ่มเพื่อเปิด และ ปิดเสียงดนตรีประกอบ



ปุ่มสำหรับภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยาย มีหน้าที่

1. ปุ่มพัก  เพื่อหยุดภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยายชั่วคราว

2. ปุ่มเล่น  เพื่อเล่นภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยาย

3. ปุ่มหยุด  เพื่อหยุดและไปยังตอนเริ่มต้นของภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยาย

สื่อการสอนนี้จะแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนเนื้อหา และส่วนแบบทดสอบ

1. ส่วนเนื้อหา

ส่วนเนื้อหามีจะมี 3 บท คือ



ในแต่ละบทจะมีหัวข้อย่อย และในหัวข้อย่อยจะประกอบด้วยหัวข้อเนื้อหาตามแต่ละหัวข้อย่อย

ตัวอย่างหน้า หัวข้อย่อย

บทที่ 1 ปฏิบัติตัวอย่าง

1.1 ปฏิบัติตัวอย่าง

การทดลองสุ่ม (Random Experiment)

ปฏิบัติตัวอย่าง (Sample Space)

จุดตัวอย่าง (Sample Point)

Navigation icons: back, forward, grid, and music.

ตัวอย่างหน้าเนื้อหา และหน้าบทเรียนปกติ

2. ส่วนแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ

ตัวอย่างหน้า แบบฝึกหัดท้ายบท

ตัวอย่างหน้า เกลยของแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ(ให้ผู้ใช้คลิกที่ข้อที่ต้องการดูเฉลย)

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 ปริภูมิตัวอย่าง

ชุดที่ 1

ข้อที่ 1

ข้อที่ 2

ข้อที่ 3

ข้อที่ 4

ข้อที่ 5

ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ข้อที่ 2

ข้อที่ 3

ข้อที่ 4

ข้อที่ 5







ตัวอย่างหน้า เกลยละเอียด

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 ปริภูมิตัวอย่าง >> เฉลย

5. S เป็นปริภูมิตัวอย่างหนึ่ง โดยที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันในปริภูมิตัวอย่าง S กำหนดให้ $n(S) = 8$, $n(A) = 2$, $n(B) = 2$ ตามลำดับ จงหาความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ $A \cup B$ (ตอบในรูปจำนวนทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

ตอบ 0.5

จาก A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน
ดังนั้นโดยคุณสมบัติของความถี่สัมพัทธ์จะได้ว่า

$$f_{(A \cup B)} = f_A + f_B$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$$











ตัวอย่างหน้า โจทย์

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 ปริภูมิตัวอย่าง

5. S เป็นปริภูมิตัวอย่างหนึ่ง โดยที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันในปริภูมิตัวอย่าง S กำหนดให้ $n(S) = 8$, $n(A) = 2$, $n(B) = 2$ ตามลำดับ จงหาความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ $A \cup B$ (ตอบในรูปจำนวนทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

←
→

เมื่อผู้ใช้ได้คำตอบแล้วให้ใส่ตัวเลขคำตอบในกล่องข้อความ

กดปุ่ม เพื่อย้อนกลับไปข้อก่อนหน้า

กดปุ่ม เพื่อไปข้อต่อไป

เมื่อใส่คำตอบครบทุกข้อแล้วจะปรากฏหน้าแสดงคะแนนเพื่อบอกว่าผู้ใช้ทำถูกกี่ข้อ
 ได้กี่คะแนน และถ้าต้องการดูเฉลยให้คลิกที่ปุ่ม “เฉลย” จะเป็นเฉลยของแบบฝึกหัดบทนั้น
 ตัวอย่างหน้า แสดงคะแนน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 ปริภูมิตัวอย่าง

คุณได้ **5** คะแนน จากคะแนนเต็ม 5 คะแนน

เฉลย




⏪
⏩
📄

ตัวอย่างหน้า แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบทดสอบ

11. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 - 10 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบโดยให้แต้มรวมเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดที่หมายเลขสูงกว่า 5 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้.

1. $1/60$ 2. $1/40$ 3. $1/30$ 4. $1/20$

ตัวอย่างหน้า แสดงคะแนน



ข้อความที่ขึ้นจะเปลี่ยนไปตามคะแนนที่ได้

ได้คะแนน 15 คะแนน

“ว้าวสุดยอดไปเลยนี้ได้คะแนนเยอะที่สุดเลยนะ”

ได้คะแนนตั้งแต่ 10 – 14 คะแนน

“ทำได้ดีมากเลยนะได้คะแนนเยอะมากเลยทีเดียวนะ”

ได้คะแนนตั้งแต่ 8 – 10 คะแนน

“ทำได้ดีเลยนะคะแนนเยอะพอสมควร”

ได้คะแนนตั้งแต่ 5 - 8 คะแนน

“ยังต้องฝึกฝนหน่อยนะครับแต่ไม่แย่เลยทีเดียวนะ”

ได้คะแนนตั้งแต่ 1 – 4 คะแนน

“ลองพยายามอีกสักครั้งนะครับ”

ได้คะแนน 0 คะแนน

“รับชมบทเรียนใหม่สักครั้งก่อนลองอีกครั้งก็ได้นะครับ”

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

ผู้ดำเนินโครงการได้สร้างสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น โดยจะมีภาพสามมิติที่มีสีสัน อีกทั้งมีภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยายประกอบเนื้อหาในแต่ละส่วน เพื่อให้ผู้ใช้สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น สื่อการเรียนการสอนนี้จะช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดความรู้สึกสนใจที่จะศึกษาค้นคว้าเนื้อหาต่างๆ ของบทเรียนทำให้เกิดจินตนาการที่สร้างสรรค์และใช้เวลาในการทำความเข้าใจน้อยลง มีตัวอย่าง และแบบฝึกหัดที่ช่วยให้ผู้เรียนสามารถทำความเข้าใจในเนื้อหาได้มากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังมีแบบทดสอบที่สามารถประเมินความรู้ความเข้าใจของผู้เรียนว่ามีความเข้าใจในเนื้อหาอย่างน้อยเพียงใด

การสร้างสื่อการเรียนการสอนนี้ ผู้ดำเนินโครงการแบ่งขั้นตอนการจัดทำออกเป็นสองส่วนหลัก คือ ส่วนแรกเป็นเนื้อหาพร้อมตัวอย่าง ในลักษณะของภาพที่มีการเคลื่อนไหว และเสียงบรรยายประกอบ สำหรับส่วนที่สองเป็นแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ โดยแบบฝึกหัดจะเสนออยู่ที่ท้ายบทแต่ละบท จะมีแบบฝึกหัดทั้งหมด 2 ชุด ชุดละ 5 ข้อ พร้อมเฉลย ซึ่งแบบฝึกหัด ประกอบด้วย แบบเติมคำ แบบตัวเลือก และแบบ ถูก-ผิด และในท้ายที่สุดจะมีแบบทดสอบ 15 ข้อ ซึ่งประกอบด้วย แบบเติมคำ และ แบบตัวเลือก พร้อมสรุปคะแนนเมื่อทำเสร็จ โดยใช้เครื่องมือการสร้างจากโปรแกรม Adobe Animate CC

5.2 ปัญหา อุปสรรค และวิธีการแก้ปัญหา

5.2.1 ปัญหาเกี่ยวกับการออกแบบ สิ่งที่สำคัญอย่างหนึ่งในการสร้างสื่อการเรียนการสอน คือการออกแบบสื่อการเรียนการสอนให้น่าสนใจ เพื่อให้ผู้ศึกษามีความสนใจและต้องการที่จะติดตามต่อไป จึงทำให้ผู้ดำเนินโครงการต้องใช้เวลาในการศึกษาหาข้อมูลเกี่ยวกับวิธีการออกแบบสื่อการเรียนการสอนและออกแบบปุ่ม รวมทั้งไอคอนต่างๆ ให้มีความน่าสนใจมากขึ้น

5.2.2 ปัญหาการใช้โปรแกรม Microsoft Word และโปรแกรม Adobe Animate CC เนื่องจากผู้จัดทำโครงการมีการแบ่งงานกัน ซึ่งทำให้เกิดปัญหาการนำข้อมูลที่ทำไว้จากเครื่องหนึ่งมาเปิดอ่านในอีกเครื่องหนึ่ง เช่น ตัวอักษรขาดหายไปบ้าง เปิดไฟล์ไม่ขึ้น ตัวหนังสือและรูปภาพไม่เป็นระเบียบตามที่จัดไว้ตอนแรก เป็นต้น ดังนั้นต้องทำการแปลงไฟล์ก่อนส่งไปให้อีกเครื่องหนึ่ง ซึ่งทำให้การดำเนินงานเกิดความล่าช้า

5.2.3 ปัญหาในการสร้างสมการและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ สมการในสื่อการเรียนการสอนจะมีตัวเลขเศษส่วนและเครื่องหมายต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งในโปรแกรม Adobe Animate CC ไม่มีฟังก์ชันรองรับ ดังนั้นผู้ดำเนินโครงการต้องจัดตำแหน่งของตัวเลข และเครื่องหมายต่างๆ เอง และใช้โปรแกรมอื่นช่วย ทำให้ใช้เวลาในการสร้างสมการพอสมควร

5.2.4 ปัญหาในการเชื่อมโยงข้อมูล เนื่องจากสื่อการเรียนการสอนมีไฟล์ข้อมูลย่อยเป็นจำนวนมาก ในบางครั้งจึงเกิดความผิดพลาดในการเชื่อมโยงข้อมูล ผู้ดำเนินโครงการจึงต้องทำการตรวจสอบและทบทวนเนื้อหา อย่างละเอียดรอบคอบอยู่เสมอ

5.3 ข้อเสนอแนะ

5.3.1 ควรจะมีการนำสื่อการเรียนการสอนที่ได้พัฒนาไปเผยแพร่ทางอินเทอร์เน็ต เพื่อให้ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาด้วยตนเองได้อย่างกว้างขวาง

5.3.2 ควรมีการเพิ่มตัวอย่างโจทย์ปัญหา แบบฝึกหัด และแบบทดสอบ

รายการอ้างอิง

1. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, *ความน่าจะเป็นและสถิติ*, โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2555.
2. มนต์สินี ลำสันเทียะ, *ลงมือทำจริง Flash Persentation*, พิมพ์ครั้งที่ 1, กรุงเทพมหานคร, บริษัทริโวว่า จำกัด, 2555.
3. ศุภชัย นาทะพันธ์, *ความน่าจะเป็นและสถิติ*, 2556.
4. อิศเรศ ภาชนะกาญจน์, *Flash basic*, พิมพ์ครั้งที่ 1, นนทบุรี, ไอดีซี จำกัด, 2554.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงการ รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย)	สื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น
ชื่อโครงการ (ภาษาอังกฤษ)	Multimedia CAI : Introduction to Probability
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ
ผู้ดำเนินการ	1. นายเตโชคม ศิริพงษ์ เลขประจำตัวนิสิต 5833520623 2. นายนิพิพิพนธ์ ไล่สมบุรณ์ เลขประจำตัวนิสิต 5833530923 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

เนื่องจากวิชาความน่าจะเป็นมีความสำคัญอย่างมาก เพราะใช้ความรู้เรื่องการสร้างแบบจำลอง ใน การศึกษาสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับความไม่แน่นอน เช่น การทดลองใช้ยาใหม่ๆ การวิเคราะห์ผลการ เลือกตั้ง เป็นต้น

เนื้อหาเรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้นจะกล่าวถึงปริภูมิตัวอย่าง การนับจุดตัวอย่าง และ ความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นเนื้อหาที่มองเห็นภาพได้ยากทำให้อยากต่อการทำความเข้าใจ อีกทั้งการนำเสนอในหนังสือเป็น ภาพนิ่งสองมิติ ยังไม่เพียงพอต่อการทำความเข้าใจ

ดังนั้น ผู้ดำเนินการจึงต้องการพัฒนาบทเรียนช่วยสอนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น จะเป็นในรูปแบบ ของสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย ซึ่งจะแสดงเนื้อหาในรูปแบบภาพสามมิติที่มีสีสัน อีกทั้งมี ภาพเคลื่อนไหวและเสียงบรรยายประกอบเนื้อหาในแต่ละส่วนเพื่อให้ผู้ใช้สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น แล้วยังมีแบบฝึกหัด เพื่อทดสอบความเข้าใจในบทต่างๆ พร้อมเฉลยที่มีคำอธิบายประกอบ และในส่วนท้าย สุดจะมีแบบทดสอบเพื่อวัดความรู้ความเข้าใจอีกด้วย

วัตถุประสงค์

เพื่อพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

ขอบเขตของโครงการ

สื่อการเรียนการสอนจะมีภาพและเสียงประกอบ รวมมี 3 บท โดยที่แต่ละบทจะมีหัวข้อย่อยแล้วแต่เนื้อหาของแต่ละบท โดยที่แต่ละเนื้อหาจะมีตัวอย่างประกอบ และท้ายบทแต่ละบท จะมี แบบฝึกหัด 2 ชุด ชุดละ 5 ข้อ พร้อมเฉลย ซึ่งแบบฝึกหัด ประกอบด้วย แบบเติมคำ 1 ข้อ แบบตัวเลือก 2 ข้อ และแบบ ถูก-ผิด 2 ข้อ และจะมีแบบทดสอบท้ายบทเรียน 15 ข้อ

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาบทเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นแล้วนำมาเรียบเรียงเป็นเนื้อหาที่จะนำเสนอ
2. ศึกษาโปรแกรมสำเร็จรูป Adobe animate CC
3. วิเคราะห์และออกแบบสื่อการเรียนการสอนโดยประกอบด้วย เนื้อหา รูปแบบการนำเสนอ การใช้งานและเขียนสคริปต์ประกอบการออกแบบ
4. สร้างสื่อการเรียนการสอนตามรูปแบบที่ได้ออกแบบไว้
5. ตกแต่งสื่อการเรียนการสอนให้มีความสวยงามและน่าสนใจ
6. ทดสอบ ตรวจสอบและแก้ไขข้อผิดพลาดของสื่อการเรียนการสอนที่ได้
7. สรุปผล จัดทำเอกสารและคู่มือการใช้งาน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อผู้ใช้งาน

- ใช้สื่อการเรียนการสอนเพื่อศึกษาบทเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น
- นำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้
- สร้างแรงจูงใจให้ผู้ใช้งาน มีความสนใจที่จะเรียนรู้มากยิ่งขึ้น

ประโยชน์ต่อผู้ดำเนินการ

- ได้ทบทวนความรู้ความเข้าใจบทเรียนเรื่องความน่าจะเป็น
- สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Adobe animate CC
- สามารถออกแบบและพัฒนาสื่อการเรียนการสอนแบบมัลติมีเดีย
- ได้ประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้อื่น

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. Hardware

- เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ ความเร็วไม่ต่ำกว่า 2.5 GHz
- Ram ความจุไม่น้อยกว่า 4 GB
- Hard disk ความจุไม่น้อยกว่า 1000 GB
- เครื่องพิมพ์
- อุปกรณ์บันทึกข้อมูล Flash Drive และ External hard disk
- อุปกรณ์บันทึกเสียง
- เม้าส์ปากกา

2. Software

- Adobe Animate cc 2018
- Adobe Photoshop CS6
- Audacity
- Windows 8.1
- Microsoft Office 2010

งบประมาณ

1. กระดาษ A4 2 รีม	ราคา 200 บาท
2. ค่าถ่ายเอกสารและค่าพิมพ์งาน	ราคา 500 บาท
3. External storage	ราคา 1800 บาท
4. เม้าส์ปากกา	ราคา 2500 บาท
	รวม 5000 บาท

เอกสารอ้างอิง

1. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, *ความน่าจะเป็นและสถิติ*, โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2555.
2. มนต์สินี ลำสันเทียะ, *ลงมือทำจริง Flash Persentation*, พิมพ์ครั้งที่ 1, กรุงเทพมหานคร, บริษัทริโวว่า จำกัด, 2555.
3. ศุภชัย นาทะพันธ์, *ความน่าจะเป็นและสถิติ*, 2556.
4. อิศเรศ ภาชนะกาญจน์, *Flash basic*, พิมพ์ครั้งที่ 1, นนทบุรี, ไอดีซี จำกัด, 2554.

เนื้อหา

1. ปริภูมิตัวอย่าง

ในบทที่ 1 ปริภูมิตัวอย่างจะมีหัวข้อย่อยอยู่ 3 หัวข้อดังนี้

1.1 ปริภูมิตัวอย่าง

1.2 เหตุการณ์

1.3 ความถี่

1.1 ปริภูมิตัวอย่าง

ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

- (1) การทดลองสุ่ม
- (2) ความหมายของปริภูมิตัวอย่าง
- (3) จุดตัวอย่าง

(1) การทดลองสุ่ม (Random Experiment)

คือ การกระทำหรือกิจกรรมใดๆ ที่มีผลลัพธ์ (Outcome) ที่เป็นไปได้มากกว่า 1 อย่าง และไม่สามารถบอกล่วงหน้าว่าจะเกิดผลลัพธ์อะไร จนกว่าจะได้กระทำแล้วเสร็จ

ตัวอย่างที่ 1 การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง

ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ คือ หัว , ก้อย

ตัวอย่างที่ 2 การเล่นเกมเป่ายิงฉุบ

ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ คือ ชนะ , แพ้

(2) ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)

คือ เซตที่มีสมาชิก (Element) เป็นผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S

เช่น ในการทดลองหนึ่ง มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ วงกลม สามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยม

ดังนั้น $S = \{\text{วงกลม}, \text{สามเหลี่ยม}, \text{สี่เหลี่ยม}\}$

จะได้ว่าจำนวนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในการทดลอง คือ จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(S)$

จากการทดลองที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ วงกลม สามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยม

ดังนั้น $n(S) = 3$

ตัวอย่างที่ 1 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าเราสนใจแต้มของลูกเต๋านั้น

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

ดังนั้นปริภูมิตัวอย่างจะเขียนได้ดังนี้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

และ $n(S) = 6$

ตัวอย่างที่ 2 ในการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ สนใจหน้าที่ขึ้น

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ หัว, ก้อย

ถ้าเราใช้สัญลักษณ์ H แทน การที่เหรียญขึ้นหัว และ T แทน การที่เหรียญขึ้นก้อย

ดังนั้นปริภูมิตัวอย่างจะเขียนได้ดังนี้ $S = \{H, T\}$

โดยที่ $n(S) = 2$

ตัวอย่างที่ 3 ในการทดลองโยนเหรียญ 2 เหรียญ ที่ต่างกัน สนใจหน้าที่ขึ้น

ถ้าเราใช้สัญลักษณ์ H แทน การที่เหรียญขึ้นหัว และ T แทน การที่เหรียญขึ้นก้อย
ใช้สัญลักษณ์ (A , B) แทนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้น

โดย A แทน หน้าที่หงายขึ้นของเหรียญแรก
B แทน หน้าที่หงายขึ้นของเหรียญที่สอง

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

เหรียญแรก	เหรียญที่สอง
H	H
H	T
T	H
T	T

ดังนั้นปริภูมิตัวอย่างจะเขียนได้ดังนี้ $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

โดยที่ $n(S) = 4$

ข้อสังเกต

การโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง สนใจหน้าที่ขึ้น

ปริภูมิตัวอย่างในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง คือ $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

การโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง สนใจหน้าที่ขึ้น

ปริภูมิตัวอย่างในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง คือ $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

จะเห็นว่า

การโยนเหรียญ 2 เหรียญ 1 ครั้ง กับ โยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง จะให้ปริภูมิตัวอย่าง S ที่เหมือนกัน

ปริภูมิตัวอย่างมีทั้งเซตจำกัด และ เซตไม่จำกัด

เซตจำกัด เช่น

การซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาลสนใจ เลขท้าย 2 ตัว

เซตไม่จำกัด เช่น

การนับจำนวนดวงดาวทั้งหมดในจักรวาล

(3) จุดตัวอย่าง (Sample Point)

คือ สมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่าง : การทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 1 ครั้ง สนใจหน้าที่ขึ้น

จะสังเกตว่าปริภูมิตัวอย่างในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 1 ครั้ง คือ $S = \{\text{หัว}, \text{ก้อย}\}$

ดังนั้นจุดตัวอย่างของปริภูมิตัวอย่าง S คือ หัว และ ก้อย

1.2 เหตุการณ์

ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

- (1) เหตุการณ์
- (2) เหตุการณ์เชิงเดียว
- (3) เหตุการณ์เชิงประกอบ
- (4) เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

(1) เหตุการณ์ (Event)

คือ สับเซต (Subset) ของปริภูมิตัวอย่าง

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E

ตัวอย่าง : ในการสุ่มเลือกถุงเท้า 1 คู่ จากถุงเท้า 5 คู่ ที่มีหมายเลข 1-5 ติดอยู่ที่คู่เดียวกัน

พิจารณาหมายเลขของถุงเท้า

จะเห็นว่า $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบถุงเท้ามา 1 คู่ แล้วได้หมายเลขที่เป็นเลขคู่

ดังนั้น $E = \{2, 4\}$

(2) เหตุการณ์เชิงเดียว (Sample Event)

คือ เหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยจุดตัวอย่าง 1 จุด

ตัวอย่าง : ในการทดลองสุ่มหยิบไฟ 1 ใบ จากสำรับ

พิจารณาสัญลักษณ์บนหน้าไฟ

จะเห็นว่า $S = \{\text{โพดำ}, \text{โพแดง}, \text{ข้าวหลามตัด}, \text{ดอกจิก}\}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไฟได้ไฟโพแดง

จะได้ว่า $A = \{\text{โพแดง}\}$

ดังนั้น A เป็นเหตุการณ์เชิงเดียว

(3) เหตุการณ์เชิงประกอบ (Compound Event)

คือ เซตของเหตุการณ์ที่สามารถเขียนเป็นยูเนียน (Union) ของเหตุการณ์เชิงเดียว

ตัวอย่าง : ในการทดลองสุ่มเลือก 1 ตัว จากตู้เสื้อผ้าที่มีเสื้อผ้าอยู่ 5 ตัว คือ สีขาว สีดำ สีแดง สีส้ม และ สีฟ้า

ปริภูมิตัวอย่าง คือ $S = \{\text{ขาว}, \text{ดำ}, \text{แดง}, \text{ส้ม}, \text{ฟ้า}\}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เสื้อสีแดงหรือเสื้อสีดำ

ดังนั้น $B = \{\text{แดง}\} \cup \{\text{ดำ}\} = \{\text{แดง}, \text{ดำ}\}$

เนื่องจากเหตุการณ์ที่หยิบได้เสื้อสีแดงและเหตุการณ์ที่หยิบได้เสื้อสีดำ เป็นเหตุการณ์เชิงเดียว

ดังนั้น B เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ

(4) เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (Mutually Exclusive Event)

คือ การที่เหตุการณ์สองเหตุการณ์ไม่สามารถเกิดขึ้นในเวลาเดียวกัน หรือ อินเตอร์เซกชัน (Intersection) ของเหตุการณ์ทั้งสองเท่ากับเซตว่าง

ตัวอย่าง : ในวันปีใหม่ อมาของน้องคิมได้จัดงานฉลองให้หลานๆ โดยมีกล่องของขวัญอยู่ 4 กล่อง โดยจะมีตัวเลขเบอร์ติดอยู่ที่ตัวกล่อง คือ เบอร์ 1 เบอร์ 2 เบอร์ 3 และเบอร์ 4 ตามลำดับ

น้องคิมสุ่มเลือกกล่องของขวัญ มา 1 กล่อง

จะสังเกตว่า $S = \{1, 2, 3, 4\}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่น้องคิมสุ่มได้กล่องของขวัญเป็นเบอร์เลขคู่

ก็คือ $A = \{2, 4\}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่น้องคิมสุ่มได้กล่องของขวัญเป็นเบอร์เลขคี่

ก็คือ $B = \{1, 3\}$

จะได้ว่า $A \cap B = \emptyset$

ดังนั้น A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

1.3 ความถี่

ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

- (1) ความหมายของความถี่
- (2) ตารางแจกแจงความถี่
- (3) ความถี่สัมพัทธ์
- (4) สมบัติของความถี่สัมพัทธ์

(1) ความหมายของความถี่

คือ ปริมาณที่บ่งบอกจำนวนครั้งที่เหตุการณ์เกิดขึ้นในเวลาหนึ่ง

ตัวอย่าง : ในการทดลองเสียงเซียมซีที่มีอยู่ 3 ไม้ แต่ละไม้มีตัวเลขติดอยู่ คือ 1, 2, 3 ตามลำดับ ทั้งหมด 5 ครั้ง

ปรากฏว่าได้ผลการทดลองดังนี้ คือ 3, 2, 3, 1, 1 ตามลำดับ

นำข้อมูลมาจัดเรียงใหม่ได้ดังนี้ คือ 1, 1, 2, 3, 3

ดังนั้นจะเห็นว่า เซียมซีเบอร์ 1 มีความถี่ = 2

เซียมซีเบอร์ 2 มีความถี่ = 1

เซียมซีเบอร์ 3 มีความถี่ = 2

(2) ตารางแจกแจงความถี่ (Frequency Distribution Table)

การสร้างตารางแจกแจงความถี่ทำได้ 2 แบบ คือ

1. การแจกแจงความถี่ของลักษณะที่สนใจที่เป็นไปได้ทั้งหมด
2. การแจกแจงความถี่สำหรับค่าในแต่ละช่วงที่สนใจ

1. การแจกแจงความถี่ของลักษณะที่สนใจที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ใช้กับข้อมูลที่มีลักษณะที่เป็นไปได้ทั้งหมดไม่มากนัก

เช่น จำแนกตามเพศ , ระดับการศึกษา

ตัวอย่าง : การสำรวจนิสิตเก่าจุฬา ฯ ที่มาในงานคืนสู่เหย้า 102 ปี

โดยแจกแจงความถี่ตามเพศได้ดังนี้

เพศ	จำนวนนิสิตเก่า (คน)
ชาย	145
หญิง	160
รวม	305

2. การแจกแจงความถี่สำหรับค่าในแต่ละช่วงที่สนใจ

ใช้กับข้อมูลที่มีจำนวนลักษณะที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นจำนวนมาก

เช่น จำแนกตามรายได้ของคนไทยทั้งหมด , อายุของคนไทยทั้งหมด

ตัวอย่าง : สุ่มนิสิตหญิงมา 10 คน สอบถามความสูง แล้วจัดเป็นช่วงๆ 5 ชั้น ดังนี้

ความสูงของนิสิตหญิง (ซม.)	จำนวนนิสิต (คน)
135 - 144	1
145 - 154	2
155 - 164	4
165 - 174	2
175 - 184	1
รวม	10

(3) ความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency)

คือ ค่าที่แสดงว่าความถี่ของเหตุการณ์ที่สนใจคิดเป็นอัตราส่วนเท่าใดของความถี่ทั้งหมด
คำนวณจาก ความถี่ของเหตุการณ์ที่สนใจหารด้วยความถี่ของเหตุการณ์ทั้งหมดหรือ จำนวนข้อมูล

ใช้สัญลักษณ์ f_A แทน ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A

$n(A)$ แทน ความถี่ของเหตุการณ์ A

n แทน ความถี่ของเหตุการณ์ทั้งหมด

ดังนั้น ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A (f_A) คือ $f_A = \frac{n(A)}{n}$

ตัวอย่างที่ 1 : น้องแมนต้องการฝึกซ้อมเตะบอลเข้าโกล 30 ครั้ง ปรากฏว่า เตะบอลเข้า 12 ครั้ง และ
เตะบอลไม่เข้า 18 ครั้ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เตะบอลเข้าโกล จงหาความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A

วิธีทำ การฝึกซ้อมเตะบอล 30 ครั้ง ก็คือ ความถี่ของเหตุการณ์ทั้งหมด เท่ากับ 30

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่เตะบอลเข้าโกล

ก็คือ ความถี่เหตุการณ์ A เท่ากับ 12

สรุปได้ว่า ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A $= \frac{n(A)}{n} = \frac{12}{30} = 0.4$

ตัวอย่างที่ 2 : นื่องมาต้องการสำรวจประเภทของดนตรีที่วัยรุ่นให้ความสนใจโดยได้ทำการสอบถามนักเรียนจากโรงเรียนแห่งหนึ่งทั้งหมด 20 คน ผลปรากฏตามตารางแจกแจงความถี่ดังนี้

ประเภทของดนตรี	จำนวนนักเรียนที่สนใจ (คน)
คลาสสิก	6
เมทัล	2
ป๊อป	5
แร็ป	3
แจ๊ส	4

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่วัยรุ่นให้ความสนใจดนตรีประเภทป๊อป

จงหาความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A

วิธีทำ การสอบถามนักเรียน 20 คน ก็คือความถี่ของเหตุการณ์ทั้งหมดเท่ากับ 20

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่วัยรุ่นให้ความสนใจดนตรีประเภทป๊อป

ก็คือ ความถี่ของเหตุการณ์ A เท่ากับ 5

สรุปได้ว่า ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A $= \frac{n(A)}{n} = \frac{5}{20} = 0.25$

(4) สมบัติของความถี่สัมพัทธ์ (Qualification of Relative Frequency)

- $0 \leq f_A \leq 1$ เมื่อ f_A แทน ความถี่ของเหตุการณ์ A
- $f_A = 1$ ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นทุก ๆ ครั้งที่ทำการทดลอง
- $f_A = 0$ ถ้าเหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้นเลย ในการทดลอง
- ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันแล้ว

ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ $A \cup B$ ($f_{A \cup B}$) คือ $f_A + f_B$

แบบฝึกหัดเรื่องปริภูมิตัวอย่าง ชุดที่ 1

1. ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A จะมีค่ามากกว่า 0 แต่น้อยกว่า 1 เสมอ
2. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว $A \cap B = \emptyset$
3. กำหนดให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างการสุ่มหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ โดยพิจารณาสัญลักษณ์บนหน้าไพ่
ข้อใดต่อไปนี้เป็นปริภูมิตัวอย่าง S
 1. {โพดำ, โพแดง, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด}
 2. {โพแดง, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด}
 3. {ดอกจิก, ข้าวหลามตัด}
 4. {โพดำ, โพแดง}
4. ในการสำรวจความชอบของวัยรุ่นต่อสัตว์ชนิดต่าง ๆ โดยทำการสอบถามจากวัยรุ่นจำนวน 50 คน
ผลปรากฏตามตารางแจกแจงความถี่ดังนี้

ชนิดของสัตว์	จำนวนวัยรุ่นที่ชอบ (คน)
สุนัข	20
แมว	15
กระต่าย	10
เม่น	5

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่วัยรุ่นชอบสุนัข ข้อใดต่อไปนี้เป็นความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A

1. $\frac{3}{10}$
 2. $\frac{2}{5}$
 3. $\frac{1}{5}$
 4. $\frac{4}{5}$
5. นายแมนมีกล่องดินสอที่มีดินสออยู่ 5 สี ได้แก่ สีฟ้า สีน้ำเงิน สีแดง สีเหลือง และ สีส้ม
กำหนดให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการสุ่มหยิบดินสอ 1 แท่ง จากกล่องดินสอของนายแมน
จงหาจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องปริภูมิตัวอย่าง ชุดที่ 1

1. ตอบ ผิด

เพราะว่า ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A สามารถมีค่าเท่ากับ 1 ได้ ถ้า เหตุการณ์ A เกิดขึ้นทุกครั้ง
และ ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A สามารถมีค่าเท่ากับ 0 ได้ ถ้า เหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้นเลย

2. ตอบ ถูก

เพราะว่า การที่เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ดังนั้นอินเตอร์เซกชันของทั้งสอง
เหตุการณ์เท่ากับ เซตว่าง

3. ตอบ ข้อ 1. {โพดำ, โพแดง, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด}

วิธีทำ จากโจทย์ให้พิจารณาสัญลักษณ์บนหน้าไพ่

เพราะว่าไพ่ 1 สำรับ ประกอบด้วยหน้าไพ่ คือ โพดำ โพแดง ดอกจิก ข้าวหลามตัด

ดังนั้น $S = \{\text{โพดำ, โพแดง, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด}\}$

4. ตอบ ข้อ 2. $\frac{2}{5}$

วิธีทำ โจทย์กำหนดตารางแจกแจงความถี่

จะได้ความถี่ของเหตุการณ์ A คือ วิทยุรุ่นชอบสุนัข เท่ากับ 20 และ ความถี่ของเหตุการณ์ทั้งหมด เท่ากับ 50

ดังนั้น ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A $(f_A) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

5. ตอบ 5

วิธีทำ จาก S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการสุ่มหยิบดินสอ 1 แท่ง จากกล่องดินสอที่มีดินสออยู่ 5 สี ได้แก่
สีฟ้า สีน้ำเงิน สีแดง สีเหลือง และ สีส้ม

จะได้ว่า ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{\text{ดินสอสีฟ้า, ดินสอสีน้ำเงิน, ดินสอสีแดง, ดินสอสีเหลือง, ดินสอสีส้ม}\}$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S เท่ากับ 5

แบบฝึกหัดเรื่องปริภูมิตัวอย่าง ชุดที่ 2

1. ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งในปริภูมิตัวอย่าง แล้ว เซตของ A ไม่สามารถเป็นเซตว่างได้

2. ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

3. โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 2 ครั้ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหน้าขึ้นหัวทั้งสองครั้ง

กำหนดให้ H แทนการที่เหรียญขึ้นหัว และ T แทนการที่เหรียญขึ้นก้อย

ข้อใดต่อไปนี้เป็นเหตุการณ์ A

1. $\{(H, H)\}$

2. $\{(H, (T, T))\}$

3. $\{(H, H)\}$

4. $\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

4. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สนใจแต้มของลูกเต๋าคี่ขึ้น

กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋ามีค่ามากกว่า 2

และ B เป็นเหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋ามีค่าน้อยกว่า 5

ข้อใดต่อไปนี้เป็น $A \cap B$

1. $\{3, 4, 5\}$

2. $\{3, 4\}$

3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. \emptyset

5. กำหนด S เป็นปริภูมิตัวอย่าง โดยที่ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันในปริภูมิตัวอย่าง S

กำหนดให้ $n(S) = 8$, $n(A) = 2$, $n(B) = 2$ ตามลำดับ จงหาความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ $A \cup B$

(ตอบในรูปทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องปริภูมิตัวอย่าง ชุดที่ 2

1. ตอบ ผิด

เพราะว่า เซตของ A สามารถเป็นเซตว่างได้ ถ้า เหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้นเลย

2. ตอบ ถูก

เพราะว่าความถี่ของเหตุการณ์ A จะมีตั้งแต่ไม่เกิดเหตุการณ์ A เลย ไปจนถึง เกิดเหตุการณ์ A ทุกครั้ง
ดังนั้น $0 \leq n(A) \leq n$ (i)

นำ n มาหาร (i) ทั้งสมการ

$$\text{จะได้ว่า } \frac{0}{n} \leq \frac{n(A)}{n} \leq \frac{n}{n}$$

$$\text{จากสูตร } f_A = \frac{n(A)}{n}$$

$$\text{จะได้ว่า } 0 \leq f_A \leq 1$$

จึงสรุปได้ว่าความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

3. ตอบ ข้อ 1. {(H, H)}

วิธีทำ จากโจทย์การโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 2 ครั้ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)

เพราะว่า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวทั้งสองครั้ง

$$\text{ดังนั้น } A = \{(H, H)\}$$

4. ตอบ ข้อ 2. {3, 4}

วิธีทำ โจทย์กำหนด A เป็นเหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋ามีค่ามากกว่า 2

$$\text{จะได้ว่า } A = \{3, 4, 5, 6\}$$

B เป็นเหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋ามีค่าน้อยกว่า 5

$$\text{จะได้ว่า } B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{ดังนั้น } A \cap B = \{3, 4\}$$

5. ตอบ 0.5

วิธีทำ เพราะว่า $f_{(A \cup B)} = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$ (i)

เนื่องจาก A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 0$ (ii)

นำ (ii) แทนใน (i)

จะได้ว่า $f_{(A \cup B)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$

แทนค่าจากโจทย์ $n(A) = 2 ; n(B) = 2 ;$

และ $n(S) = 8$

จะได้ว่า $f_{(A \cup B)} = \frac{2 + 2}{8} = \frac{1}{2}$

2. การนับจุดตัวอย่าง

ในบทที่ 2 การนับจุดตัวอย่างจะมีหัวข้อย่อยอยู่ 4 หัวข้อดังนี้

2.1 การนับ

2.2 การเรียงสับเปลี่ยน

2.3 การจัดหมู่

2.4 การแบ่งกลุ่ม

2.1 การนับ

ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

- (1) ความหมายการนับ
- (2) แผนภาพต้นไม้
- (3) หลักเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

(1) ความหมายการนับ

คือ การนับจำนวนวิธีที่สามารถเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของเหตุการณ์ที่เราสนใจ

ตัวอย่างที่ 1 : จำนวนวิธีในการเลือกเครื่องดื่มจากตู้กดน้ำที่มีเครื่องดื่ม 4 ชนิด

ได้แก่ น้ำส้ม น้ำองุ่น น้ำแอปเปิ้ล และน้ำมะเขือเทศ

วิธีทำ ให้ A แทน เหตุการณ์ในการเลือกเครื่องดื่มจากตู้กดน้ำที่มีเครื่องดื่ม 4 ชนิด

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกเครื่องดื่ม เท่ากับ 4 วิธี

ตัวอย่างที่ 2 : จำนวนวิธีในการเลือกทาสีตู้กดน้ำโดยมีสีให้เลือก 3 สี

ได้แก่ สีแดง สีน้ำเงิน และสีเขียว มีข้อกำหนดว่าห้ามผสมสีและสามารถเลือกทำได้เพียงสีเดียว

วิธีทำ ให้ A แทน เหตุการณ์ในการเลือกทาสีตู้กดน้ำโดยมีสีให้เลือก 3 สี

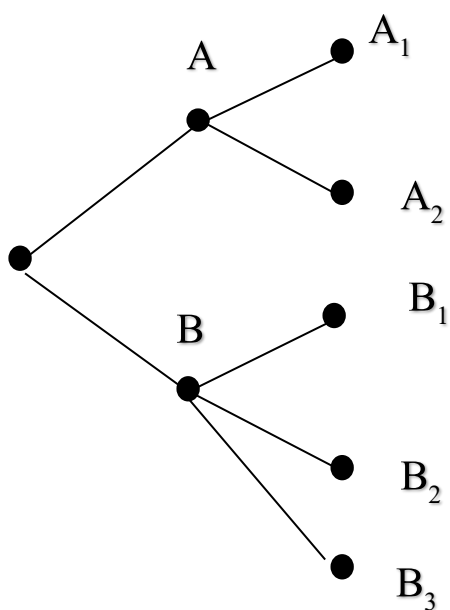
ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกทาสี เท่ากับ 3 วิธี

(2) แผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)

คือ เครื่องมือที่ใช้แสดงให้เห็นถึงความเป็นไปได้ของผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นทั้งหมดในลักษณะของรูปภาพแทนการเขียนเซตของปริภูมิ

ตัวอย่างที่ 1 : ในการทำงานอย่างหนึ่งมีวิธีเลือกทำงานอยู่ 2 แบบ คือ A และ B

โดยที่ A เลือกทำงานได้ 2 วิธี และ B เลือกทำงานได้ 3 วิธี

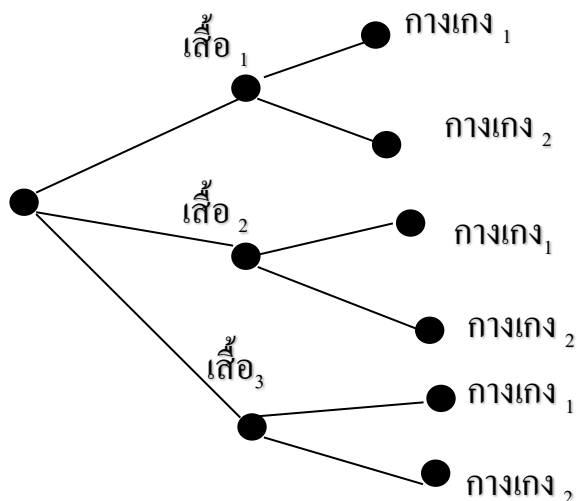


จากแผนภาพต้นไม้นี้มีวิธีเลือกทำงานได้ 5 วิธี

ตัวอย่างที่ 2 : สิงโตมีเสื้อและกางเกง สำหรับสวมใส่ออกไปเที่ยว 3 ตัว และ 2 ตัวตามลำดับ

จงหาจำนวนวิธีในการเลือกเสื้อและกางเกงที่เป็นได้ทั้งหมด

วิธีทำ



จากแผนภาพต้นไม้

จำนวนวิธีในการเลือกเสื้อและกางเกงที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด 6 วิธี

(3) หลักเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (Principle of Counting)

การนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ หรือจำนวนวิธีในการจัดชุดของสิ่งของต่างๆ เช่น การเลือกเสื้อผ้า การเลือกโต๊ะอาหารจีน และการเลือกตั้ง โดยที่การนับจะมีทฤษฎีบทย่อยอยู่ 2 บท คือ

1. ทฤษฎีการบวก
2. ทฤษฎีการคูณ

1. ทฤษฎีการบวก

ถ้าการทำงานหนึ่งมีวิธีการทำ k แบบ คือ แบบที่ 1 ถึง แบบที่ k โดยที่

งานแบบที่ 1 มีวิธีเลือกทำงาน n_1 วิธี

งานแบบที่ 2 มีวิธีเลือกทำงาน n_2 วิธี

.

.

.

งานแบบที่ k มีวิธีเลือกทำงาน n_k วิธี

ถ้าการทำงานของแต่ละแบบแตกต่างกันทั้งหมด แล้วจำนวนวิธีเลือกทำงานรวมทั้งหมดโดยเลือกเพียง 1 งาน

เท่ากับผลรวมของวิธีเลือกทำของแบบต่างๆ คือ $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ วิธี

ตัวอย่าง : ชายคนหนึ่งเป็นผู้โชคดีได้รับรางวัลที่ 1 จากการชิงโชค โดยที่รางวัลที่หนึ่งสามารถเลือกรางวัล

ได้เพียง 1 อย่าง จากทั้งหมด 3 หมวด โดยจะมีรางวัลให้เลือกดังนี้

1. ท่องเที่ยว : พักยา, ลำปาง

2. ละคราคาสินค้า : ร้านอาหาร, ร้านเครื่องประดับ, ร้านทำผม

3. ของสมนาคุณ : กระเป๋า, สร้อยคอ, กำไลข้อมือ, รองเท้า, มงกุฏ

จงหาจำนวนวิธีเลือกรางวัลทั้งหมด

วิธีทำ การเลือกรางวัลในครั้งนี้สามารถเลือกรางวัลได้ 3 หมวดดังนี้

หมวดที่ 1 สามารถเลือกรางวัลได้ 2 วิธี

หมวดที่ 2 สามารถเลือกรางวัลได้ 3 วิธี

หมวดที่ 3 สามารถเลือกรางวัลได้ 5 วิธี

จากทฤษฎีการบวกจะได้ว่า

จำนวนจำนวนวิธีเลือกรางวัลทั้งหมด $= 2 + 3 + 5 = 10$ วิธี

2. ทฤษฎีการคูณ

ถ้าการทำงานหนึ่งต้องผ่านขั้นตอนการทำงาน k ขั้นตอน โดยที่

งานขั้นตอนที่ 1 มีวิธีทำ n_1 วิธี

งานขั้นตอนที่ 2 มีวิธีทำ n_2 วิธี

.

.

.

งานขั้นตอนที่ k มีวิธีทำ n_k วิธี

ถ้าวิธีทำแต่ละวิธีแตกต่างกันทั้งหมด แล้วจำนวนวิธีทำงานทั้งหมดโดยเลือกทำทุกงาน

เท่ากับผลคูณของวิธีเลือกทำงานขั้นตอนต่างๆ คือ $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ วิธี

ตัวอย่าง : ในการทดลองสู่มหิบบัซขึ้นมาจากหม้อ โดยที่ภายในหม้อมีไขอยู่ 3 ชนิด คือ ไขเปิด ไขไก่ และไขห่าน จากนั้นนำมาตอกดูว่าไขสุกหรือไขไม่สุก จงหาจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้

วิธีทำ ในการทดลองหิบบัซ ประกอบด้วยการทำงาน 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สู่มหิบบัซได้ 3 ชนิด คือ ไขเปิด ไขไก่ และไขห่าน

ขั้นตอนที่ 2 ตอกไขที่หิบบัซขึ้นมามีผลลัพธ์ 2 แบบ คือ ไขสุก และไขไม่สุก

ดังนั้นจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ $= 3 \times 2 = 6$ แบบ

2.2 การเรียงสับเปลี่ยน

ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

(1) วิธีเรียงสับเปลี่ยน

(2) ประเภทของการเรียงสับเปลี่ยน

(1) วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

คือ วิธีการเรียงสิ่งของ โดยคำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสิ่งสำคัญที่สุด

ตัวอย่าง : ในการจัดหนังสือ 3 เล่มเข้าชั้นหนังสือ ได้แก่ หนังสือศิลปะ หนังสือฟิสิกส์ และหนังสือเคมี

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงหนังสือเป็นแถวบนชั้นจะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ การเรียงหนังสือเป็นแถวบนชั้นจะมีผลลัพธ์ทั้งหมดดังนี้



ดังนั้น จำนวนวิธีในการเรียงหนังสือ เท่ากับ 6 วิธี

(2) ประเภทของการเรียงสับเปลี่ยน (Type of Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยนที่จะกล่าวถึงมี 4 ประเภท

1. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด
2. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง โดยที่ $r < n$
3. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงเป็นวงกลม
4. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

1. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด คือ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 : ในการเรียง วงกลม สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม เป็นเส้นตรง จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน

วิธีทำ ในตำแหน่งที่ 1 สามารถเลือกได้ 3 ตัว

ต่อมาในตำแหน่งที่ 2 สามารถเลือกได้ 2 ตัว

ต่อมาในตำแหน่งสุดท้าย สามารถเลือกได้เพียงตัวเดียว

ดังนั้นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน = $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 : ในการนำเด็กชายจำนวน 4 คน คือ กาย อาร์ม มาร์ค เสือ มาเรียงแถวเป็นเส้นตรง

จงหาจำนวนวิธีในการจัดแถวของเด็กทั้ง 4 คน

วิธีทำ ในตำแหน่งที่หนึ่งสามารถเลือกเด็กมาจัดแถวได้ 4 คน

ต่อมาในตำแหน่งที่สองสามารถเลือกเด็กมาจัดแถวได้ 3 คน

ต่อมาในตำแหน่งที่สามสามารถเลือกเด็กมาจัดแถวได้ 2 คน

ต่อมาในตำแหน่งที่สี่สามารถเลือกเด็กมาจัดแถวได้ 1 คน

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน = $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

2. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง โดยที่ $r < n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง

โดยที่ $r < n$ มีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " P_r " หรือ nPr แทน จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง

ตัวอย่างที่ 1 : ในการเรียงสามเหลี่ยม วงกลม สี่เหลี่ยม ห้าเหลี่ยม เป็นเส้นตรง

จงหาจำนวนวิธีในการเรียงกันทีละ 2 รูป

วิธีทำ นั่นคือ $n = 4 ; r = 2$

ในตำแหน่งที่หนึ่งสามารถเลือก ได้ 4 รูป

ต่อมาในตำแหน่งที่สองสามารถเลือก ได้ 3 รูป

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน = $4 \times 3 = 12$ วิธี

สรุปคือ ${}^4P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 : ต้องการรับพนักงานเสิร์ฟหญิง 2 ตำแหน่ง ที่แตกต่างกัน แต่มีคนมาสมัคร 5 คน

จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเลือกคนเข้าทำงาน

วิธีทำ นั่นคือ $n = 5 ; r = 2$

ในตำแหน่งที่หนึ่งสามารถเลือกเด็กมาได้ 5 คน

ต่อมาในตำแหน่งที่สองสามารถเลือกเด็กมาได้ 4 คน

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดในการเลือกคนเข้าทำงาน เท่ากับ ${}^5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ วิธี

3. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงเป็นวงกลม

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมดมาเรียงเป็นวงกลม

มีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ วิธี

ตัวอย่าง : จงหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงเก้าอี้ 4 ตัว ซึ่งมีสีแตกต่างกันทั้งหมด รอบโต๊ะกลมตัวหนึ่ง

วิธีทำ นั่นคือ $n = 4$

สมมติให้เก้าอี้ 4 ตัว เป็นสีแดง , ฟ้ำ , เขียว , ดำ

จากสูตรจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมเท่ากับ $(n-1)!$

ดังนั้นจำนวนวิธีในการเรียงเก้าอี้ 4 ตัว เป็นวงกลม เท่ากับ $(4-1)! = 3! = 6$ วิธี

4. การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนี้

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของที่มีความซ้ำกันอยู่ n_1 สิ่ง

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของที่มีความซ้ำกันอยู่ n_2 สิ่ง

· ·
· ·

กลุ่มที่ k มีสิ่งของที่มีความซ้ำกันอยู่ n_k สิ่ง

เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งที่ไม่แตกต่างกัน

ทั้งหมดในแนวเส้นตรงคือ $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 : มีลูกบอล 3 ลูก โดยมีลูกบอลสีเขียว 2 ลูก และลูกบอลสีชมพู 1 ลูก

ถ้าถือว่าลูกบอลสีเขียวเหมือนกันไม่แตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนลูกบอล 3 ลูก

วิธีทำ มีลูกบอลรวม $2 + 1 = 3$ ลูก

ลูกบอลสีเขียว ที่ไม่แตกต่างกัน 2 ลูก

ลูกบอลสีชมพู 2 ลูก

ดังนั้นจำนวนวิธีในการเรียงลูกบอล = $\frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 : มีหนังสือ วิชาคณิตศาสตร์ 4 เล่ม วิชาภาษาอังกฤษ 2 เล่ม วิชาภาษาไทย 3 เล่ม
ถ้าถือว่าหนังสือวิชาเดียวกันไม่แตกต่างกัน แล้วจะจัดเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นได้กี่วิธี

วิธีทำ มีหนังสือรวม $4 + 2 + 3 = 9$ เล่ม

หนังสือ วิชาคณิตศาสตร์ ที่ไม่แตกต่างกัน 4 เล่ม

หนังสือ วิชาภาษาอังกฤษ ที่ไม่แตกต่างกัน 2 เล่ม

หนังสือ วิชาภาษาไทย ที่ไม่แตกต่างกัน 3 เล่ม

ดังนั้นมีจำนวนวิธีจัดเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นวาง $= \frac{9!}{4!2!3!} = 1260$ วิธี

2.2.3 การจัดหมู่

วิธีเรียงการจัดหมู่(Combination)

คือ การเลือกสิ่งของออกมาเป็นหมู่หรือเป็นชุดโดยไม่คำนึงว่าสิ่งใดจะออกมาก่อนหรือหลัง
กำหนดให้จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกทีละ r สิ่ง โดยที่ $1 \leq r \leq n$

จะเกิดวิธีการเลือกได้ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ nC_r หรือ $C_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง
โดยเลือกทีละ r สิ่ง

ตัวอย่าง : จำนวนวิธีการเลือกกรรมการ 3 คนจากผู้สมัคร 8 คน

วิธีทำ นั่นคือ $n = 8 ; r = 3$

ดังนั้นจำนวนวิธีการเลือกกรรมการ $= C_{n,r} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$ วิธี

2.2.4 การแบ่งกลุ่ม

วิธีการแบ่งกลุ่ม (Partitioning)

คือ การแบ่งของ n ชิ้น ที่แตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการเลือกของมา r ชิ้น เพื่อจัดออกเป็น k กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มแตกต่างกัน ซึ่งมีจำนวน r_1, r_2, \dots, r_k ชิ้น ตามลำดับ ($r_1 + r_2 + \dots + r_k = r$) และมีของเหลืออยู่ $n - r = R$ ชิ้น

จะได้ว่าวิธีการแบ่งกลุ่มเหล่านี้ เท่ากับ $\frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!R!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ : เลือกนักแสดง 5 คน จากผู้สมัคร 8 คน จะมีวิธีเลือกทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ วิธีที่ 1

ผู้สมัคร 8 คน คือ $n = 8$

เลือกนักแสดง 5 คน คือ $r = 5$

ดังนั้นจำนวนวิธีเลือกนักแสดง 5 คน จากผู้สมัคร 8 คน $= C_{8,5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!}$ วิธี

วิธีที่ 2

ผู้สมัคร 8 คน คือ $n = 8$

แบ่ง 1 กลุ่ม จำนวน 5 คน นั่นคือ $k = 1 ; r_1 = 5$

มีผู้สมัครเหลือจำนวน $n - r_1 = 8 - 5 = 3$ คน

นั่นคือ $R = 3$

ดังนั้นจำนวนวิธีแบ่งกลุ่มนักแสดง $= \frac{n!}{r_1!R!} = \frac{8!}{5!3!}$ วิธี

ข้อสังเกต

ถ้าต้องการแบ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันเป็น k กลุ่ม กลุ่มละ n_1 สิ่ง เป็นจำนวน k_1 กลุ่ม กลุ่มละ n_2 สิ่ง เป็นจำนวน k_2 กลุ่ม กลุ่มละ n_3 สิ่ง 1 กลุ่ม กลุ่มละ n_4 สิ่ง 1 กลุ่ม จำนวนวิธีเท่ากับ $\frac{n!}{(n_1!)^{k_1}(n_2!)^{k_2}n_3!n_4!k_1!k_2!}$ วิธี

ตัวอย่าง 1: จงหาจำนวนวิธีแบ่งปากกา 3 ด้าม ที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็น 3 มัด มัดละเท่าๆ กัน

วิธีทำ ต้องการแบ่งปากกา 3 ด้าม ที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็น 3 มัด มัดละ 1 ด้าม

นั่นคือ $n = 3 ; n_1 = 1 ; k_1 = 3$

จะได้ว่าจำนวนวิธี $= \frac{n!}{(n_1!)^{k_1}k_1!} = \frac{3!}{1!1!1!3!} = 1$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธี $= 1$ วิธี

ตัวอย่าง 2: จงหาจำนวนวิธีแบ่งปากกา 4 ด้าม ที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็น 2 มัด มัดละเท่าๆ กัน

วิธีทำ ต้องการแบ่งปากกา 4 ด้าม ที่แตกต่างกันทั้งหมด เป็น 2 มัด มัดละ 2 ด้าม

นั่นคือ $n = 4$; $n_1 = 2$; $k_1 = 2$

$$\text{จะได้ว่าจำนวนวิธี} = \frac{n!}{(n_1!)^{k_1} k_1!} = \frac{4!}{(2!)^2 2!} = 3 \text{ วิธี}$$

ดังนั้นจำนวนวิธี = 3 วิธี

แบบฝึกหัดเรื่องการนับชุดที่ 1

1. การจัดหมู่ คือ การเลือกสิ่งของออกมาเป็นหมู่หรือเป็นชุดโดยคำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสำคัญ

2. การเรียงลำดับเก้าอี้ที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว รอบโต๊ะกลมตัวหนึ่ง จำนวนวิธีในการจัดเรียงเก้าอี้

คือ $\frac{n!}{n}$ วิธี

3. ในการสร้างเลขหลักร้อย จากเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5 โดยแต่ละจำนวนนั้น

ต้องไม่มีเลขโดดในหลักใดซ้ำกันเลย จำนวนวิธีในการสร้างเลขจำนวนนี้ตรงกับข้อใด

1. 30 วิธี 2. 60 วิธี 3. 80 วิธี 4. 90 วิธี

4. นายสิงห์ลาพักร้อนไปเที่ยวเกาะช้าง โดยที่นายสิงห์สามารถเลือกเดินทางได้เพียง 1 วิธี จาก 3 ตัวเลือก

คือ รถตู้ เครื่องบิน และเรือโดยสาร โดยแต่ละวิธีเลือกประเภทได้อีก 3 ประเภท คือ ประเภท ก. ข. และค.

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนวิธีเลือกเดินทางไปเกาะช้างของนายสิงห์

1. 3 วิธี 2. 6 วิธี 3. 9 วิธี 4. 12 วิธี

5. น้องเพชรต้องเลือกทำการบ้าน 6 ข้อ จากทั้งหมด 8 ข้อ จงหาจำนวนวิธีเลือกทำการบ้านของน้องเพชร

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องการนับชุดที่ 1

1. ตอบ ผิด

เพราะว่า การจัดหมู่ คือ การเลือกสิ่งของออกมาเป็นหมู่หรือเป็นชุดโดยไม่คำนึงถึงลำดับ

2. ตอบ ถูก

เพราะว่า การเรียงลำดับเก้าอี้ที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว รอบโต๊ะกลมตัวหนึ่ง เป็นการเรียงแบบวงกลม ดังนั้นจำนวนวิธีในการจัดเรียงเก้าอี้ คือ $\frac{n!}{n}$ วิธี

3. ตอบ ข้อ 2 60 วิธี

วิธีทำ การสร้างเลขหลักร้อยนี้ประกอบด้วยเลือก 3 ขั้นตอนดังนี้

ตำแหน่งหลักร้อย สามารถเลือกตัวเลขได้ 5 วิธี

ตำแหน่งหลักสิบ สามารถเลือกตัวเลขได้ 4 วิธี

ตำแหน่งหลักหน่วย สามารถเลือกตัวเลขได้ 3 วิธี

จากทฤษฎีการคูณจะได้ว่า

จำนวนจำนวนวิธีในการสร้างเลขจำนวนนี้ $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

4. ตอบ ข้อ 3

วิธีทำ การเลือกเส้นทางไปเกาะช้างสามารถเลือกได้ 1 วิธี จาก 3 ตัวเลือก

วิธีที่ 1 รถตู้ เลือกได้ $\frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ วิธี

วิธีที่ 2 เครื่องบิน เลือกได้ $\frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ วิธี

วิธีที่ 3 เรือโดยสาร เลือกได้ $\frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ วิธี

จากทฤษฎีการบวกจะได้ว่า

จำนวนวิธีในการเดินทางไปเกาะช้างของนายสิงห์ $= 3 + 3 + 3 = 9$ วิธี

5. ตอบ 28 วิธี

วิธีทำ โจทย์กำหนดมีการบ้านทั้งหมด 8 ข้อ ให้ $n = 8$

เลือกทำการบ้าน 6 ข้อ ให้ $r = 6$

จะได้ว่า จำนวนวิธีในการเลือกทำการบ้าน 6 ข้อ จากทั้งหมด 8 ข้อ $= C_{8,6} = \binom{8}{6} = 28$ วิธี

แบบฝึกหัดเรื่องการนับชุดที่ 2

1. การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของจะไม่คำนึงถึงตำแหน่งหรือลำดับของสิ่งของ

2. การจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกทีละ r สิ่ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ nC_r

2. น้องนุชต้องการเรียงลำดับตัวอักษร 6 ตัว ได้แก่ A B C A A B จำนวนวิธีในการเรียงลำดับตัวอักษรคือข้อใดต่อไปนี้

1. 60 วิธี 2. 80 วิธี 3. 120 วิธี 4. 140 วิธี

3. ในการตั้งชมรมหนึ่ง ต้องเลือก ครูที่ปรึกษา 1 คน ประธานชมรมเป็นนักเรียนชาย 1 คน และ เลขานุการเป็นนักเรียนหญิง 2 คน จากครู 10 คน นักเรียนชาย 15 คน และ นักเรียนหญิง 20 คน ข้อใดคือจำนวนวิธีในการเลือกก่อตั้งชมรมนี้

1. 8,000 วิธี 2. 12,000 วิธี 3. 15,000 วิธี 4. 28,500 วิธี

5. สมใจต้องการจัดเรียงเก้าอี้ 6 ตัว ซึ่งมีสีแตกต่างกันทั้งหมด รอบโต๊ะกลมตัวหนึ่ง

จงหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงเก้าอี้รอบโต๊ะกลม

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องการนับชุดที่ 2

1. ตอบ ผิด

เพราะว่า การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของจะคำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของเป็นสำคัญ

2. ตอบ ถูก

เพราะว่า การจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกทีละ r สิ่ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ nC_r หรือ $C_{n,r}$

3. ตอบ ข้อที่ 1

วิธีทำ จากโจทย์มีตัวอักษร 6 ตัวได้แก่

A มี 3 ตัว

B มี 2 ตัว

C มี 1 ตัว

ดังนั้นจำนวนวิธีในการเรียงตัวอักษร = $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ วิธี

4. ตอบ ข้อที่ 4

วิธีทำ ในการก่อตั้งชมรมนี้แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกครูที่ปรึกษา 1 คน จากครูทั้งหมดได้ $C_{10,1} = \binom{10}{1} = 10$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกประธานชมรมชาย 1 คน จากนักเรียนชายทั้งหมดได้ $C_{15,1} = \binom{15}{1} = 15$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขาหญิง 2 คน จากนักเรียนหญิงทั้งหมดได้ $C_{20,2} = \binom{20}{2} = 190$ วิธี

จากหลักการคูณจะได้ว่าจำนวนวิธีในการก่อตั้งชมรมนี้ = $10 \times 15 \times 190 = 28500$ วิธี

5. ตอบ 120 วิธี

วิธีทำ จากโจทย์การจัดเรียงเก้าอี้รอบโต๊ะกลมเป็นการเรียงแบบวงกลม

นั่นคือ $n = 6$

ดังนั้นจำนวนวิธีในการจัดเรียงเก้าอี้รอบโต๊ะกลม = $(n-1)! = (6-1)! = 120$ วิธี

3. ความน่าจะเป็น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง

3.1 ความน่าจะเป็น

3.2 กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น

3.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

3.1 ความน่าจะเป็น

ความหมายของความน่าจะเป็น (Probability)

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ A ต่อจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S สามารถเขียนได้ดังนี้

กำหนดให้ S แทน ปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มอย่างหนึ่ง
ซึ่งแต่ละจุดตัวอย่างของการทดลองมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน
 E_A แทน เหตุการณ์ A
 $P(E_A)$ แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

$$\text{ดังนั้น } P(E_A) = \frac{n(E_A)}{n(S)}$$

เมื่อ $n(E_A)$ แทน จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A

$n(S)$ แทน จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S

ตัวอย่างที่ 1 : โถมีสิทธิ์ในการจับรางวัล 1 ครั้ง โดยที่มีรางวัลทั้งหมดดังนี้

รางวัลที่ 1 มี 1 รางวัล

รางวัลที่ 2 มี 2 รางวัล

รางวัลที่ 3 มี 3 รางวัล

รางวัลปลอมใจ มี 9 รางวัล

ให้ถือว่ารางวัลแต่ละรางวัลแตกต่างกัน จงหาความน่าจะเป็นที่โถจะจับได้รางวัลที่ 1

วิธีทำ ให้ S แทน ปริภูมิตัวอย่างของการจับรางวัล 1 ครั้ง

$$\text{นั่นคือ } n(S) = 15$$

และ E แทน เหตุการณ์ที่โถจับรางวัลได้รางวัลที่ 1 ใน 1 ครั้ง

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 1$$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$\text{ดังนั้น } P(E) = \frac{1}{15}$$

ตัวอย่างที่ 2 : เก่งสุ่มหยิบไพ่ 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่เก่งหยิบได้ไพ่โพดำ

วิธีทำ ให้ S แทน ปริภูมิตัวอย่างของการสุ่มหยิบไพ่ 1 ใบ

$$\text{นั่นคือ } n(S) = 52$$

และ E แทน เหตุการณ์ที่เก่งหยิบได้ไพ่โพดำ

$$\text{นั่นคือ } n(E) = 13$$

$$\text{จาก } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$\text{ดังนั้น } P(E) = \frac{13}{52}$$

3.2 กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น

กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น

กฎของความน่าจะเป็นที่จะกล่าวถึงมี 4 ข้อ

1. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์ จากความรู้เรื่องเซต

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

เมื่อหารด้วย $n(S)$ ทั้งสมการ

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันจะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

พิสูจน์ จาก A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันทำให้

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

เพราะว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. ถ้า A' เป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A แล้ว $P(A') = 1 - P(A)$

พิสูจน์ เพราะว่า $P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

จาก $P(S) = 1$

จะได้ว่า $1 = P(A) + P(A')$

ดังนั้น $P(A') = 1 - P(A)$

4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ จะได้ว่า

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์ จาก $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

$$\text{และ } (A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$$

จะได้ว่า $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$

ดังนั้น $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

3.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

(1) ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

(2) ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็น

(1) ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

คือ ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้น
เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว จะเรียกว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

นิยามเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ : $P(B | A)$

โดยที่ $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ เมื่อ $P(A) \neq 0$

ตัวอย่าง ในสำนักงานแห่งหนึ่งมีเครื่องคิดเลข 100 เครื่อง มีทั้งเครื่องไฟฟ้า (E) และเครื่องที่ใช้มือหมุน (M) บางเครื่องใหม่ (N) บางเครื่องใช้แล้ว (U) ตารางต่อไปนี้ คือ จำนวนเครื่องคิดเลขแยกตามสภาพ

ชนิด	E	M	รวม
สภาพ			
N	40	30	70
U	20	10	30
รวม	60	40	100

ชายคนหนึ่งเลือกเครื่องคิดเลขมา 1 อัน แบบสุ่มและพบว่า เป็นของใหม่ จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องคิดเลขนี้เป็นแบบไฟฟ้า

$$\text{วิธีทำ} \text{ เราต้องการหา } P(E | N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{\left(\frac{40}{100}\right)}{\left(\frac{70}{100}\right)} = \frac{4}{7}$$

$$\text{ดังนั้นความน่าจะเป็นที่เครื่องคิดเลขนี้เป็นแบบไฟฟ้า} = \frac{4}{7}$$

(2) ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็น (Multiplication Theorem of Probability)

ในการทดลองหนึ่ง ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นสองเหตุการณ์ จะได้ว่า

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A) \text{ เมื่อ } P(A) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(B) P(A | B) \text{ เมื่อ } P(B) \neq 0$$

$$\text{จาก } P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{และ} \quad P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{จะได้ว่า } P(A \cap B) = P(A) P(B | A) \quad \text{และ} \quad P(A \cap B) = P(B) P(A | B)$$

ตัวอย่าง: ปากการุ่นหนึ่งจากโรงงานประกอบด้วยปากกาหมึกแดง 20 ด้าม ปากกาหมึกดำ 80 ด้าม ถ้าเลือกปากกา 2 ด้าม ทีละด้ามโดยการสุ่ม โดยปากกาด้ามแรกที่หยิบมาโดยไม่ได้ใส่คืนกลับไปก่อนหยิบด้ามที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ปากกาหมึกแดงทั้ง 2 ด้าม

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ปากกาด้ามแรกเป็นหมึกแดง
B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ปากกาด้ามที่สองเป็นหมึกแดง

ต้องการหา $P(A \cap B)$

จาก $P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ได้ปากกาหมึกแดงทั้ง 2 ด้าม = $\left(\frac{20}{100}\right) \left(\frac{19}{99}\right) = \frac{19}{495}$

แบบฝึกหัดเรื่องความน่าจะเป็นชุดที่ 1

1. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันแล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. ถ้า A' เป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A แล้ว $P(A') = P(A) - 1$

3. มีกล่องอยู่ 10 กล่อง มีกล่องที่ข้างในกล่องบรรจุ แก้วน้ำ อยู่ 2 กล่อง ที่เหลือเป็นกล่องเปล่า กำหนดให้กล่องแต่ละกล่องแตกต่างกัน สุ่มเลือกกล่องออกมา 3 กล่อง ความน่าจะเป็นที่สุ่มเลือกได้กล่องที่มีแก้วอย่างน้อย 1 กล่อง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{8}{15}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{4}{5}$

4. กำหนดให้ ความน่าจะเป็นที่บูมจะใส่เสื้อสีแดง เท่ากับ 0.2

ความน่าจะเป็นที่บูมจะใส่กางเกงสีดำ เท่ากับ 0.1

ความน่าจะเป็นที่บูมจะใส่เสื้อสีแดงหรือใส่กางเกงสีดำ เท่ากับ 0.25

ความน่าจะเป็นที่บูมจะใส่เสื้อสีแดงและกางเกงสีดำ เท่ากับข้อใด

1. 0.025 2. 0.05 3. 0.75 4. 0.8

5. ถ้าความน่าจะเป็นที่น้องน้อย จะสอบผ่านวิชาภาษาไทยและวิชาภาษาอังกฤษเป็น 0.4 และ 0.6 ตามลำดับ และความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเป็น 0.8 จงหาความน่าจะเป็นที่น้องน้อยจะผ่านทั้งสองวิชานี้ (ตอบในรูปทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องความน่าจะเป็นชุดที่ 1

1. ตอบ ถูก

เพราะว่า จากสูตร $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

เนื่องจาก A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันจะได้ว่า $A \cap B = \emptyset$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. ตอบ ผิด

เพราะว่า ถ้าเหตุการณ์ A ไม่ได้เกิดขึ้นทุกครั้ง

จะได้ว่า $P(A) < 1$ ดังนั้น $P(A') = 1 - P(A) > 0$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์จะเท่ากับ 0

3. ตอบ ข้อ 2

วิธีทำ ให้ S แทน ปริภูมิตัวอย่างของการเลือกกล่อง 3 กล่อง จากจำนวนทั้งหมด 10 กล่อง

E แทน เหตุการณ์ที่สุ่มเลือกกล่อง 3 กล่อง แล้วได้กล่องที่มีแก้วอย่างน้อย 1 กล่อง

จะได้ว่า E' คือ เหตุการณ์ที่สุ่มเลือกกล่อง 3 กล่อง ได้กล่องเปล่าทั้งหมด

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120$$

และ $n(E') = \binom{8}{3} = 56$

จาก $P(E') = 1 - P(E)$

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{56}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

4. ตอบ ข้อ 2

วิธีทำ ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่บูมจะใส่เสื้อสีแดง

E_2 แทน เหตุการณ์ที่บูมจะใส่กางเกงสีดำ

จากโจทย์จะได้ว่า

$$P(E_1) = 0.2$$

$$P(E_2) = 0.1$$

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.25$$

จากสูตร $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) \\ &= 0.2 + 0.1 - 0.25 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่บูมจะใส่เสื้อสีแดงและกางเกงสีดำ เท่ากับ 0.05

5. ตอบ 0.2

วิธีทำ ให้ T แทน เหตุการณ์ที่น้องน้อยจะสอบผ่านวิชาภาษาไทย

E แทน เหตุการณ์ที่น้องน้อยจะสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ

โจทย์กำหนด $P(T) = 0.4$; $P(E) = 0.6$

และความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาคือ $P(T \cup E) = 0.8$

จาก

$$P(T \cup E) = P(T) + P(E) - P(T \cap E)$$

$$P(T \cap E) = P(T) + P(E) - P(T \cup E)$$

$$= 0.4 + 0.6 - 0.8$$

$$= 0.2$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่น้องน้อยจะผ่านทั้งสองวิชานี้คือ 0.2

แบบฝึกหัดเรื่องความน่าจะเป็นชุดที่ 2

1. ถ้าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้น

แล้ว $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ โดยที่ $P(A) \neq 0$

2. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันจะได้ว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

โดยที่ $P(A \cap B) \neq 0$

3. กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่าง

5hk A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันมี $P(A) = 0.3$ และ $P(B) = 0.5$

แล้ว $P(A \cup B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.3 2. 0.5 3. 0.8 4. 1

4. กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่าง S ถ้าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้น แล้ว $P(A \cup B) = 0.5$ และ $P(A) = P(B) = 0.3$

ข้อใดต่อไปนี้คือ $P(B | A)$

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 4. $\frac{4}{3}$

5. โหลลูกกอล์ฟ 1 โหล ประกอบด้วยลูกกอล์ฟ 2 ชนิด คือ ลูกกอล์ฟรูปร่าง 5 ชั้น ลูกกอล์ฟรูปร่างสี่เหลี่ยม 5 ชั้น โดยที่ลูกกอล์ฟแต่ละชั้นแตกต่างกัน ถ้าหยิบลูกกอล์ฟออกมา 2 ชั้น จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบลูกกอล์ฟได้รูปร่างทั้ง 2 ชั้น

(ตอบในรูปทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องความน่าจะเป็นชุดที่ 2

1. ตอบ ถูก

เพราะว่า จากนิยามของ $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ โดยที่ $P(A) \neq 0$

2. ตอบ ผิด

เพราะ ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันจะได้ว่า $(A \cap B) = \emptyset$

ดังนั้น $P(A \cap B) = 0$

3. ตอบ ข้อ 3

วิธีทำ จาก A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= 0.3 + 0.5 = 0.8 \end{aligned}$$

4. ตอบ ข้อ 1

โจทย์กำหนด $P(A) = 0.3$; $P(B) = 0.3$; $P(A \cup B) = 0.5$

จากสูตร $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.3 + 0.3 - 0.5 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

เพราะว่า $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$

5. ตอบ 0.2

วิธีทำ ให้ S แทน ปริภูมิตัวอย่างในการหยิบลูกกอล์ฟ 2 ชิ้น

E แทน เหตุการณ์ที่หยิบลูกกอล์ฟได้รูปดาวทั้ง 2 ชิ้น

$$n(S) = \binom{10}{2} = 45 \text{ วิธี}$$

$$n(E) = \binom{5}{2} = 10 \text{ วิธี}$$

จะได้ว่า $P(E) = \frac{10}{45} = 0.2$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หยิบลูกกอล์ฟได้รูปดาวทั้ง 2 ชิ้น เท่ากับ 0.2

แบบทดสอบ

1. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 – 10 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบโดยให้แต้มรวมเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดที่หมายเลขสูงกว่า 5 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{60}$ 2. $\frac{1}{40}$ 3. $\frac{1}{30}$ 4. $\frac{1}{20}$

เฉลย ข้อที่ 1.

2. ผลการสอบวิชาฟิสิกส์และวิชาชีววิทยาของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ปรากฏว่า $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมดผ่านวิชาฟิสิกส์ และ $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมดผ่านวิชาชีววิทยา ถ้าความน่าจะเป็นของนักเรียนคนหนึ่งในกลุ่มนี้ที่จะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเป็น $\frac{4}{5}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{1}{15}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{13}{15}$

เฉลย ข้อที่ 1.

3. ต้องการจัดคน 7 คนนั่งบนรถโดยสาร 7 ที่นั่ง(รวมทั้งคนขับแล้ว) โดยมีคนขับรถเป็นเพียง 4 คน จะมีจำนวนวิธีการจัดได้กี่วิธี

1. 2410 วิธี 2. 2760 วิธี 3. 2880 วิธี 4. 3000 วิธี

เฉลย ข้อที่ 3.

4. ถ้านำตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า LOVELY มาจัดเรียงเป็นคำต่างๆ โดยไม่จำเป็นต้องมีความหมาย จะจัดได้คำที่แตกต่างกันกี่คำ

1. 120 คำ 2. 240 คำ 3. 360 คำ 4. 480 คำ

เฉลย ข้อที่ 3.

5. มีปลากะป๋อง 3 ยี่ห้อ ยี่ห้อ A มี 5 กระป๋อง ยี่ห้อ B มี 3 กระป๋อง และยี่ห้อ C มี 2 กระป๋อง โดยที่ปลากระป๋องยี่ห้อเดียวกันไม่ต่างกัน จำนวนวิธีแจกปลากะป๋องให้คน 10 คน คนละหนึ่งกระป๋อง มีค่าเท่าใด

1. 900 2. 1200 3. 1440 4. 2250

เฉลย ข้อที่ 4.

6. ในการเลือกตั้งคณะกรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วย ประธาน รองประธาน เกรียงไกร และเลขานุการ โดยที่กรรมการแต่ละคนจะดำรงตำแหน่งได้เพียงตำแหน่งเดียวเท่านั้น ถ้ามีผู้สมัครทั้งหมด 6 คน เป็นชาย 2 คน เป็นหญิง 4 คน ผลการเลือกตั้งกรรมการชุดนี้จะมีได้ทั้งหมดกี่แบบ โดยที่ กำหนดให้ประธานเป็นชาย และ เลขาคต้องเป็นหญิง

1. 24 แบบ 2. 48 แบบ 3. 96 แบบ 4. 360 แบบ

เฉลย ข้อที่ 3.

7. ถ้าต้องเขียนจำนวนที่มี 7 หลัก โดยใช้ตัวเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และให้มีเลขโดด 3, 4, 5 อยู่ติดกันตรงกลางระหว่างเลขโดดคู่และเลขโดดคี่โดยแต่ละจำนวนไม่มีเลขซ้ำ แล้วจะเขียนได้ทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใดต่อไปนี

1. 6 2. 12 3. 24 4. 48

เฉลย ข้อที่ 4.

8. มีลูกอม 10 เม็ด ในจำนวนนี้เป็นรสโคล่า 2 เม็ด ส้มหยิบลูกอม 3 เม็ด ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกอมรสโคล่าอย่างน้อย 1 เม็ด เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{8}{15}$ 3. $\frac{13}{15}$ 4. $\frac{14}{15}$

เฉลย ข้อที่ 2.

9. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ และ $P(A \cup B) = 0.8$

$P(A \cap B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. 0.1 2. 0.2 3. 0.3 4. 0.4

เฉลย ข้อที่ 1.

10. สลากชุดหนึ่งมี 12 ใบ มีหมายเลข 1 - 12 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบให้มีแต้มรวมเป็น 11 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 6 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{220}$ 2. $\frac{9}{220}$ 3. $\frac{1}{440}$ 4. $\frac{3}{440}$

เฉลย ข้อที่ 1.

11. ถ้าต้องการจัดอาหาร 10 คน นั่งเป็นวงกลม โดยที่ 10 คนนี้ มีองอาจและหาญกล้ารวมอยู่ด้วย จงหาความน่าจะเป็นที่องอาจและหาญกล้านั่งติดกัน (ตอบในรูปทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

เฉลย 0.2

12. ข้อสอบฉบับหนึ่งมี 10 ข้อเป็นแบบถูก-ผิด จะมีวิธีตอบข้อสอบที่ไม่ซ้ำกันเลยกี่วิธี

เฉลย 1024 วิธี

13. ถ้าต้องการใช้เลขโดด 0 , 1 , 2 , 3 , 4 และ 5 มาสร้างจำนวน 3 หลัก จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้าจำนวนที่ได้ต้องมีค่ามากกว่า 350 และแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

เฉลย 43 วิธี

14. ในการเล่นเกมอย่างหนึ่ง เล่นได้ไม่เกิน 5 ครั้ง นายสมปอง มีเงิน 1 บาท เมื่อเริ่มเล่น เขาจะเลิกเล่นเกมเมื่อมีกำไร 2 บาท หรือเงินหมด จะมีวิธีเล่นที่แตกต่างกันกี่วิธี

ถ้าชนะเขาจะได้ครั้งละ 1 บาท และถ้าแพ้เสีย 1 บาท

เฉลย 12 วิธี

15. กล่องใบหนึ่งมีลูกโป่ง 15 ลูก เป็นสีส้ม 1 ลูก สีขาว 2 ลูก นอกนั้นเป็นสีดำ ถ้าเลือกลูกบอล 3 ลูก จากกล่องใบนี้ ให้ได้สีส้ม 1 ลูก และไม่ได้สีขาว จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

เฉลย 66 วิธี

ประวัติผู้เขียน



ชื่อ นายเตโชคม ศิริพงษ์

กำลังศึกษาชั้นปี 4 สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อ นายนิพนธ์ ไล่สมบุญ

กำลังศึกษาชั้นปี 4 สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

