โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ปัญหาการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู
INTERSECTION OF TRAPZOIDS

ชื่อนิสิต **นายพงศกร เกสรินทร์** **583 35338 23**

ภาควิชา **คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์**
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา **2561**

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปัญหาการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

นายพงศกร เกสรินทร์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

INTERSECTION OF TRAPZOIDS

Mr.Pongsakon Ketsarin

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน	ปัญหาการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู
โดย	นายพงศกร เกสรินทร์ เลขประจำตัวนิสิต 5833533823
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	อาจารย์.ดร.กีรติ ศรีอมร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

กีรติ ศรีอมร .... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(อาจารย์ ดร.กีรติ ศรีอมร)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ จิตรจวบ เปาอินทร์)

นายพงศกร เกสรินทร์: ปัญหาการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู. (INTERSECTION OF TRAPZOIDS) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก: อาจารย์ ดร.กีรติ ศรีอมร, 54 หน้า.

ในปี ค.ศ. 1980, J.W. Fickett ได้เสนอการคาดคะเนเกี่ยวกับขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการที่ตัดกันสองรูปว่าจะมีขอบเขตที่เป็นไปได้ตั้งแต่ $\frac{1}{3}$ ถึง 3 และในปี 2013 C.Nielsen and C. Powers ได้แสดงใน [2] ให้เห็นว่าสำหรับขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เท่ากันทุกประการสองรูปจะเป็นไปได้ตั้งแต่ $\frac{1}{2}$ ถึง 2 เมื่อได้ลองศึกษาปัญหาดังกล่าวกระผมจึงสงสัยว่าหากนำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการมาเลื่อนขนานให้ซ้อนทับกันจะมีขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในที่เกิดจากการตัดของรูปทั้งสองนั้นเป็นอย่างไร

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ......พงศกร เกสรินทร์......

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก ......กีรติ ศรีอมร......

ปีการศึกษา 2561

5833513223: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: CONJECTURE / TRAPZOID

Mr.Pongsakon Ketsarin : INTERSECTION OF TRAPZOIDS. ADVISOR: Kirati Sriamorn, Ph.D.,54 pp.

In 1980, J. W. Fickett proposed the following conjecture: Assume R_1 and R_2 be congruent rectangular regions in the Euclidean plane whose interiors intersect. Then the ratio between the length of ∂R_1 that lies in R_2 and the length of ∂R_2 that lies in R_1 must lie between $\frac{1}{3}$ and 3 where ∂R_1 and ∂R_2 are the boundary of R_1 and R_2, respectively. Later on, in 2013, C. Nielsen and C. Powers showed that, in the case of R_1 and R_2 are two congruent equilaterals, the ratio has values between $\frac{1}{2}$ and 2. In this study, we are interested in solving the conjecture when R_1 and R_2 are two translative trapezoids.

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature ....Pongsakon Ketsarin....

Field of Study: Mathematics Advisor's Signature ....Kirati Sriamorn....

Academic Year: 2018

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานฉบับนี้จะไม่สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี หากไม่ได้รับความอนุเคราะห์และช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่าน ดังต่อไปนี้ ดร.กีรติ ศรีอมร ซึ่งท่านได้ให้คำปรึกษาและคำแนะนำ รวมถึงข้อคิดเห็นต่าง ๆ อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง ทั้งยังช่วยแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างดาเนินงานอีกด้วย

ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน และรองศาสตราจารย์ จิตจวบ เปาอินทร์ คณะกรรมการที่ทำให้โครงงานนี้ได้รับการพัฒนาให้ดีขึ้น

สุดท้ายขอขอบคุณบิดา มารดา และครอบครัวที่เป็นกำลังใจและคอยสนับสนุนในการทำโครงงานมาโดยตลอด

สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ประวัติความเป็นมา

ในปี ค.ศ. 1980, J.W. Fickett ได้เสนอการคาดคะเนเกี่ยวกับขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการที่ตัดกันสองรูปว่าจะมีขอบเขตที่เป็นไปได้ตั้งแต่ $\frac{1}{3}$ ถึง 3 และในปี 2013 C.Nielsen and C. Powers ได้แสดงให้เห็นว่าสำหรับขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เท่ากันทุกประการสองรูปจะเป็นไปได้ตั้งแต่ $\frac{1}{2}$ ถึง 2 เมื่อได้ลองศึกษาปัญหาดังกล่าวกระผมจึงสงสัยว่าหากนำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการมาเลื่อนขนานให้ซ้อนทับกันจะมีขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในที่เกิดจากการตัดของรูปทั้งสองนั้นเป็นอย่างไร

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการ

1.3 ขอบเขตโครงงาน

สนใจเฉพาะกรณีที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปห้าเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการเท่านั้น

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงานจาก [1] และ [2]
3. หาและพิสูจน์ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการ
4. ตรวจสอบผลที่ได้ สรุปผลและจัดทำรูปเล่มรายงาน
5. นำเสนอผลงาน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รู้ถึงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

2. สามารถนำความรู้ในเรื่องนี้ไปประยุกต์ใช้กับรูปเรขาคณิตรูปอื่น ๆเพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปเรขาคณิตรูปอื่น ๆได้

1.6 โครงสร้างของรายงาน

รายงานฉบับนี้จะกล่าวถึงภาพรวมของการพัฒนาโครงงานนี้ตามลำดับ

บทที่ 2 บทนี้กล่าวถึงความรู้เบื้องต้นที่สำคัญ เพื่อใช้อธิบายโครงงานในส่วนต่าง ๆ

บทที่ 3 บทนี้กล่าวถึงการหาแบบรูปทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

บทที่ 4 บทนี้กล่าวถึงผลจากการดำเนินงาน

บทที่ 5 บทนี้กล่าวถึงข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2
ความรู้เบื้องต้น

บทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้เบื้อต้นที่สำคัญเพื่อใช้อธิบายโครงงานได้แก่ บทนิยาม ทฤษฎี และสูตรการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน

2.1 บทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามที่2.1.1 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า
f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x, y \in A$ ถ้า $x < y$ แล้ว
$f(x) \leq f(y)$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.2ให้ $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีนุพันธ์ที่ทุกจุดบน (a, b)

$f'(x) \geq 0$ ทุก $x \in (a, b)$ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

พิสูจน์ : สมมติว่า $f'(x) \geq 0$ ทุก $x \in (a, b)$

ให้ $x, y \in (a, b)$ ซึ่ง $x \leq y$

โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม จะได้ว่า มี $c \in (x, y)$ ซึ่ง $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$

เนื่องจาก $f'(c) \geq 0$ และ $y - x \geq 0$

ดังนั้น $f(y) \geq f(x)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ต่อไป สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและมีอนุพันธ์ที่ทุกจุดบน (a, b)

ให้ $c \in (a, b)$สำหรับ x ใด ๆในช่วง (a, b) ซึ่ง $x \neq c$ จะได้ว่า

$(f(x) - f(c))/(x - c) \geq 0$ จากการที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}) \geq 0$

นั่นคือ $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in (a, b)$

บทนิยาม 2.1.3 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$

เรียกจำนวนจริง u ว่า**ขอบเขตบน (upper bound)** ของเซต A ถ้า $u \geq a$ ทุก $a \epsilon A$ และจะกล่าวว่า A **มีขอบเขตบน (bounded above)** ถ้ามีจำนวนจริง u ที่เป็นขอบเขตบนของ A

บทนิยาม 2.1.4 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ จะเรียกขอบเขตบนตัวที่มีค่าน้อยสุดของเซต A ว่า **ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound)** หรือ **ซูพรีมัม(supremum)** เขียนแทนด้วย $\sup A$ นั่นคือ จำนวนจริง x เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ A ถ้า

(i) x เป็นขอบเขตบนของ A และ

(ii) ถ้า y เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $x \leq y$

ทฤษฎีบทที่2.1.5 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ s เป็นขอบเขตบนของ A จะได้ว่า $s = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A, s - \varepsilon < a$

พิสูจน์: ($\rightarrow$) ให้ $s = \sup A$ และ $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $s - \varepsilon$ ไม่ใช่ขอบเขตบนของ A

นั่นคือ จะมี $a \in A$ ซึ่ง $s - \varepsilon < a$

($\leftarrow$) สมมติว่า $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A, s - \varepsilon < a$

ให้ v เป็นขอบเขตบนของ A

จะแสดงว่า $s \leq v$

สมมติว่า $s > v$

ดังนั้น $s - v > 0$

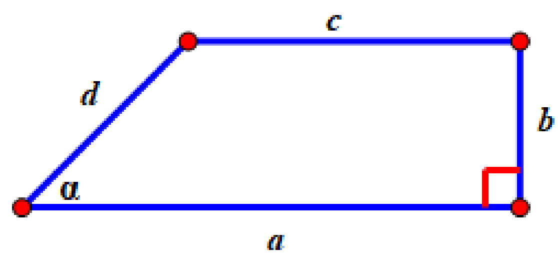
จากสมมติฐาน จะได้ว่า มี $a \in A$ ซึ่ง $s - (s - v) < a$

นั่นคือ $v < a$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ v เป็นขอบเขตบนของ A

บทที่ 3
ขั้นตอนการดำเนินงาน

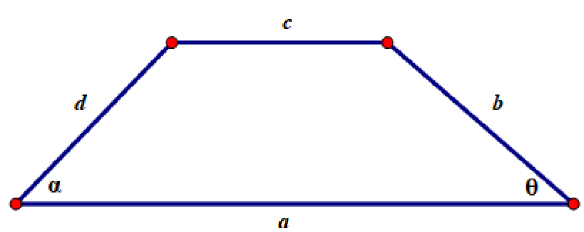
จากการศึกษารูปสี่เหลี่ยมคางหมูพบว่ามีสี่เหลี่ยมคางหมูต่าง ๆ พบว่าสามารถจัดกลุ่มรูปสี่เหลี่ยมคางหมูออกเป็นสามแบบหลัก ๆ คือ

(i) สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมฉาก



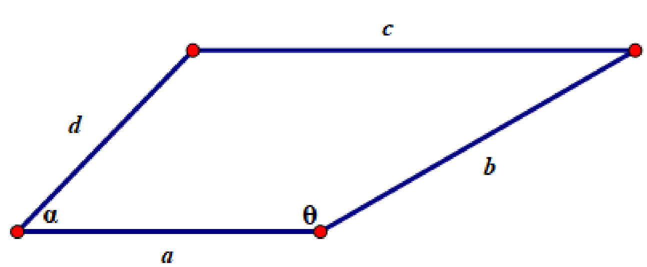
รูปที่ 3.1 กรณีที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมฉาก

(ii) สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมแหลมทั้งสองมุมอยู่บนด้านเดียวกัน



รูปที่ 3.2 สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมแหลมทั้งสองมุมอยู่บนด้านเดียวกัน

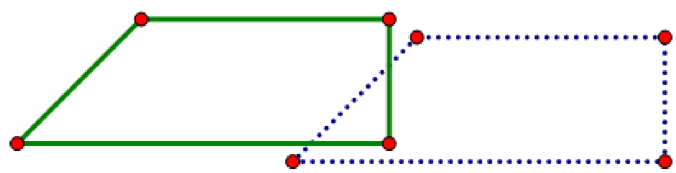
(iii)สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมแหลมและมุมป้านอยู่บนด้านเดียวกัน



รูปที่ 3.3 สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมแหลมและมุมป้านอยู่บนด้านเดียวกัน

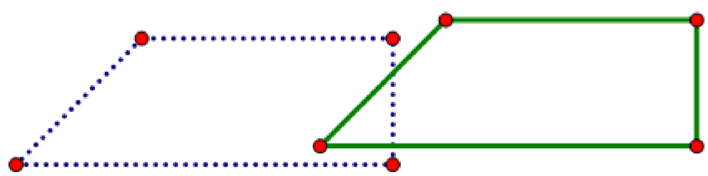
ซึ่งเมื่อพิจารณาการทับกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูกรณี (i) ที่เท่ากันทุกประการมาเลื่อนขนานให้ทับกัน จะเกิดเป็นกรณีต่าง ๆได้ดังนี้

3.1.1) กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านมาจากรูปเดียวกัน



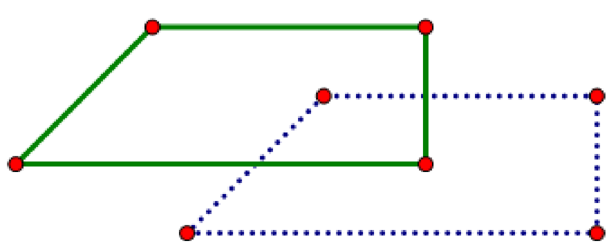
รูปที่ 3.1.1 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านมาจากรูปเดียวกัน

3.1.2) กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน



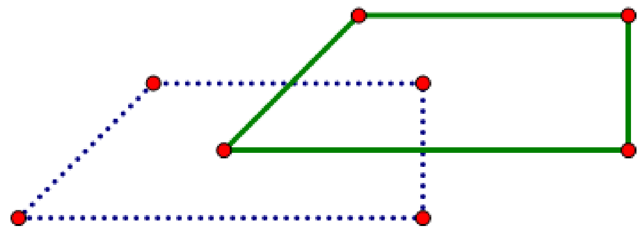
รูปที่3.1.2 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน

3.1.3) กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากโดยที่ฐานด้านที่สั้นและด้านที่ไม่เป็นมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน



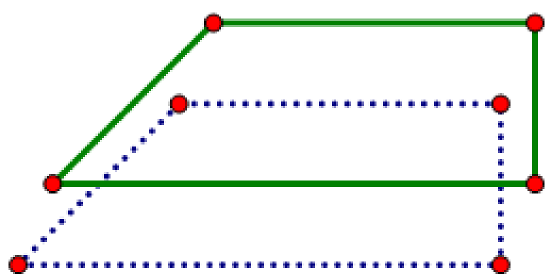
รูปที่3.1.3 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากโดยที่ฐานด้านที่สั้นและด้านที่ไม่เป็นมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน

3.1.4) กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากโดยที่ฐานด้านที่ยาวและด้านที่ไม่เป็นมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน



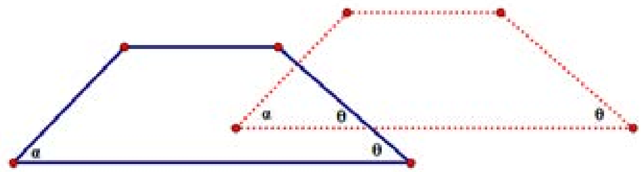
รูปที่3.1.4 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากโดยที่ฐานด้านที่ยาวและด้านที่ไม่เป็นมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน

3.1.5) กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากโดยมีด้านสามด้านมาจากรูปเดียวกัน

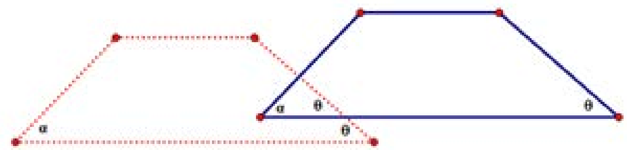


รูปที่3.1.5 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากโดยมีด้านสามด้านมาจากรูปเดียวกัน

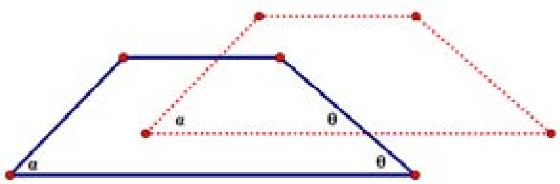
และเมื่อพิจารณาการทับกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูกรณี (ii) ที่เท่ากันทุกประการมาเลื่อนขนานให้ทับกันจะเกิดเป็นกรณีต่าง ๆได้ดังนี้



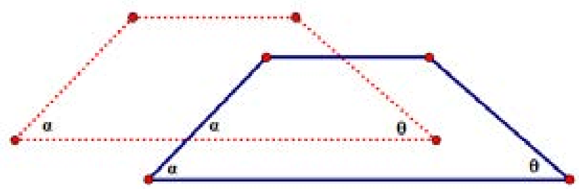
รูปที่3.2.1 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู



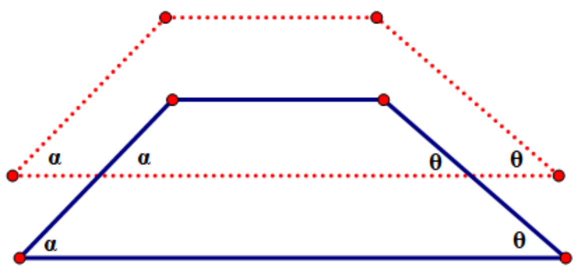
รูปที่3.2.2 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปที่3.2.3 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู

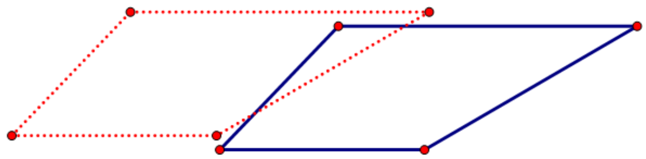


รูปที่3.2.4 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู

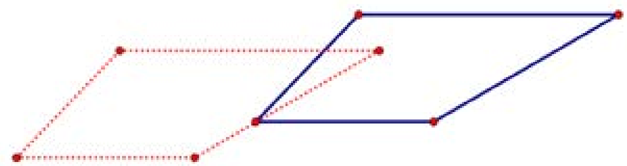


รูปที่3.2.5การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู

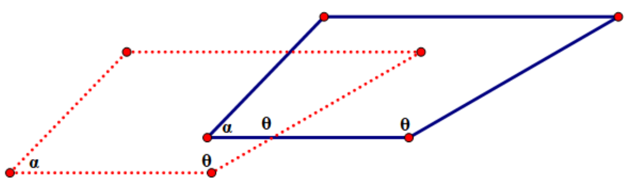
และเมื่อพิจารณาการทับกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูกรณี (iii) ที่เท่ากันทุกประการมาเลื่อนขนานให้ทับกันจะเกิดเป็นกรณีต่าง ๆได้ดังนี้



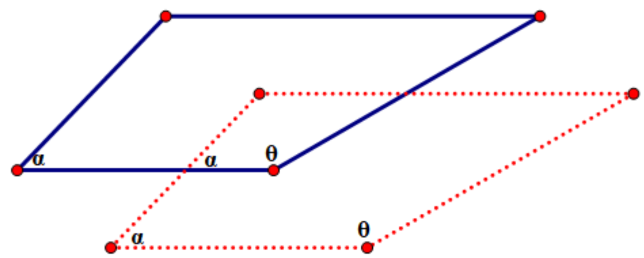
รูปที่3.3.1 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู



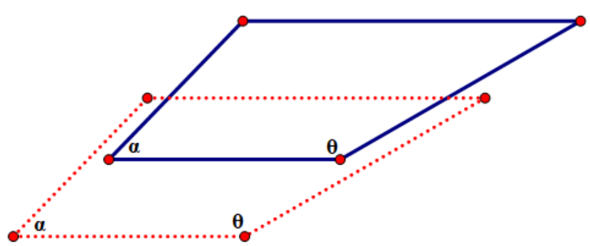
รูปที่3.3.2 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปที่3.3.3 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู



รูปที่3.3.4 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู

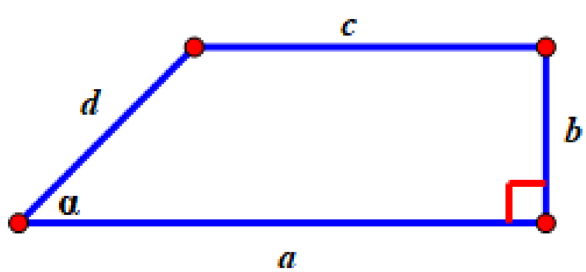


รูปที่3.3.5 การตัดกันกรณีต่าง ๆของสี่เหลี่ยมคางหมู

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

สำหรับกรณีที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีมุมฉาก

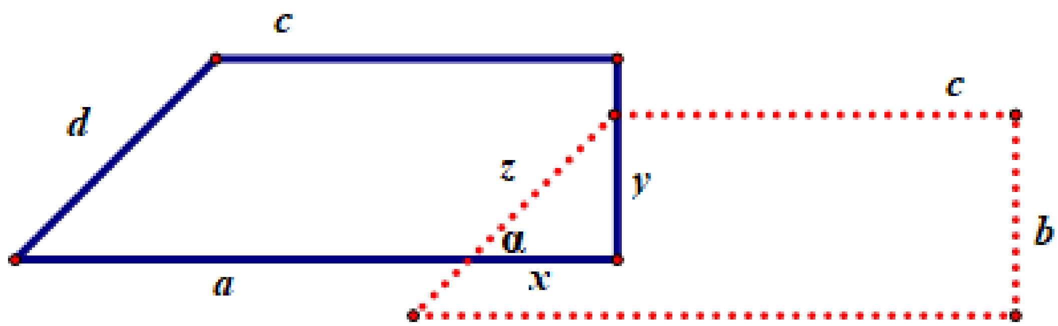


รูปภาพที่ 4.1 รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉาก

จะได้ว่า $0° < \alpha < 90°$

$b = d\sin\alpha$ และ $a = c + dcos\alpha$

พิจารณากรณีที่ 3.1.1



รูปที่ 4.1.1 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านมาจากรูปเดียวกัน

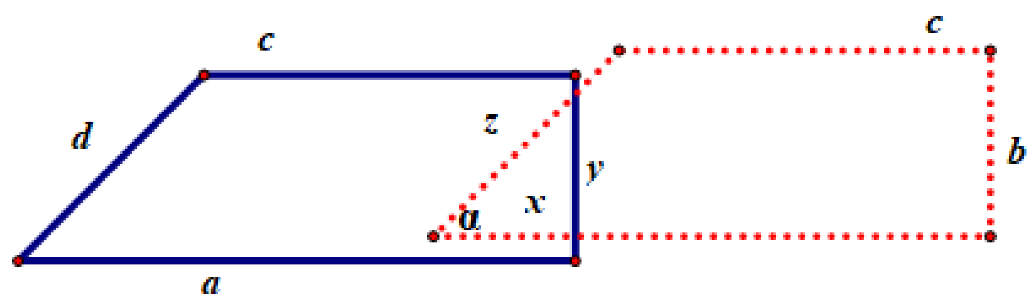
เนื่องจาก $x = z(\cos\alpha)$ และ $y = z(\sin\alpha)$

จะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวด้าน คือ $\frac{x+y}{z} = \frac{z(\cos\alpha)+z(\sin\alpha)}{z}$

$$= cos\alpha + \sin\alpha$$

เพราะฉะนั้นเราจะใช้อัตราส่วนของความยาวด้านเป็น $cos\alpha + \sin\alpha$ ในการเปรียบเทียบกับกรณีอื่น ๆ

พิจารณากรณีที่ 3.1.2



รูปที่4.1.2 กรณีที่เส้นตัดกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉากมาจากรูปเดียวกัน

เนื่องจาก $x = z(\cos\alpha)$ และ $y = z(\sin\alpha)$

จะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวด้าน คือ $\frac{x+z}{y} = \frac{z(\cos\alpha)+z}{z(\sin\alpha)}$

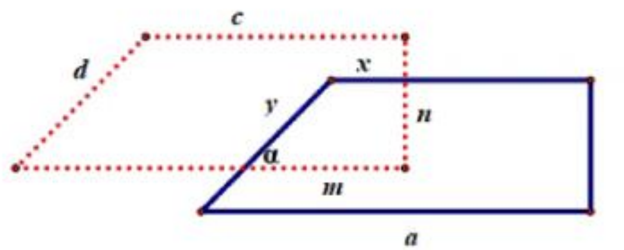
$$= \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$$

เพราะฉะนั้นเราจะใช้อัตราส่วนของความยาวด้านเป็น $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ ในการเปรียบเทียบกับกรณีอื่น ๆ

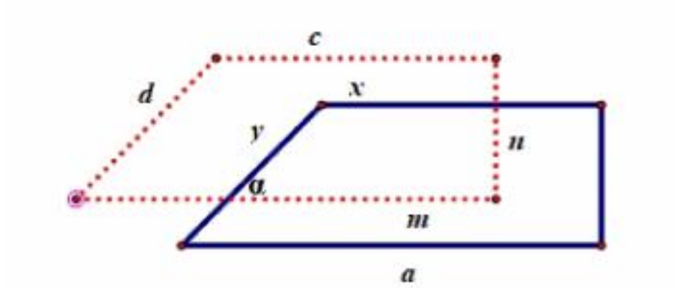
พิจารณากรณีที่ 3.1.3

เราจะพิจารณาเมื่อให้ y, α เป็นค่าคงที่

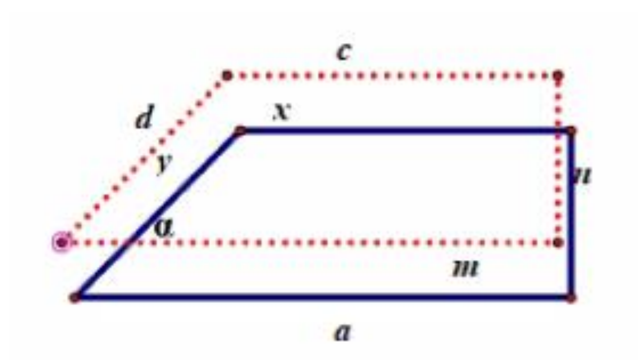
และ $0 < x < c$ เพื่อหาว่า x เท่าไรที่ทำให้อัตราส่วนนี้เกิดค่าสูงสุด



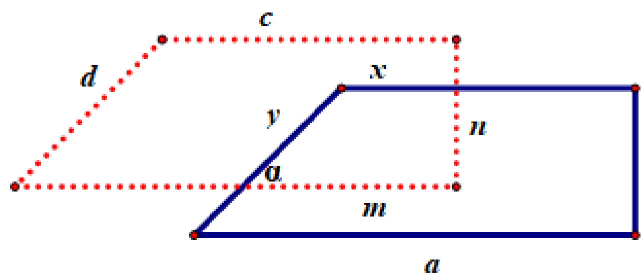
รูปที่4.2.1 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่



รูปที่4.2.2 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่



รูปที่4.2.3 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่



รูปที่4.2.4 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการโดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่

จะได้ว่า $n = y\sin\alpha$ และ $m = x + y\cos\alpha$

และ $0° < \alpha < 90°$

พิจารณาอัตราส่วน $\frac{m+n}{x+y} = \frac{x+y\cos\alpha+y\sin\alpha}{x+y}$ เมื่อ y, α เป็นค่าคงที่

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+y\cos\alpha+y\sin\alpha}{x+y}\right) = \frac{(x+y)-(x+y\cos\alpha+y\sin\alpha)}{(x+y)^2}$

$$= \frac{y(1-\cos\alpha-\sin\alpha)}{(x+y)^2}$$

จะเห็นได้ว่าไม่มีจุดวิกฤต จุดไม่สามารถหาจุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดได้

พิจารณาว่า $\frac{x+y\cos\alpha+y\sin\alpha}{x+y}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือไม่

โดย **ทฤษฎีบทที่ 2.1.2** จะได้ว่าว่า

$\frac{x+y\cos\alpha+y\sin\alpha}{x+y}$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $\frac{y(1-\cos\alpha-\sin\alpha)}{(x+y)^2} \geq 0$ และ

$\frac{x+y\cos\alpha+y\sin\alpha}{x+y}$ จะเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $\frac{y(1-\cos\alpha-\sin\alpha)}{(x+y)^2} \leq 0$

เนื่องจาก $y > 0$ และ $(x+y)^2 \geq 0$

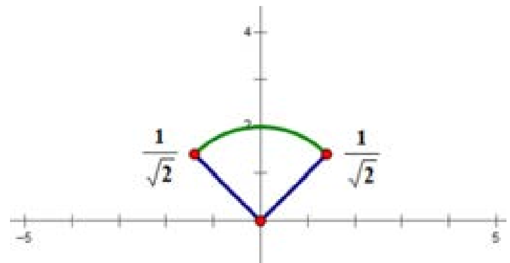
และ $(1 - cos\alpha - sin\alpha) \quad = \quad -(cos\alpha + sin\alpha - 1)$

และ $cos\alpha + sin\alpha - 1 \quad = \quad \sqrt{2}\left(sin\alpha\frac{1}{\sqrt{2}} + cos\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1$

$$= \quad \sqrt{2}(sin(\alpha + 45°)) - 1$$

เนื่องจาก $0° < \alpha < 90°$ ดังนั้น $45° < \alpha + 45° < 135°$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$



รูปภาพที่ 4.3 ค่าของ $\sin 45°$ ถึง $\sin 135°$

จากกราฟจะเห็นว่า $\sqrt{2}(\sin(\alpha + 45°)) > 1$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

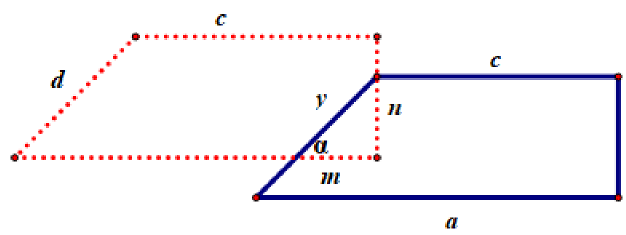
$\therefore \sqrt{2}(\sin(\alpha + 45°)) - 1 > 0$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

$\therefore 1 - \cos\alpha - \sin\alpha < 0$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

$\therefore \frac{x + ycos\alpha + ysin\alpha}{x + y}$ เป็นฟังก์ชันลด

$\therefore \frac{x + ycos\alpha + ysin\alpha}{x + y}$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = 0$

จะได้รูปดังนี้



รูปภาพที่ 4.3.1 ภาพกรณีที่เกิดอัตราส่วนที่มีค่ามากที่สุดของกรณีที่ 3.1.3

จะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวด้าน คือ $\frac{m+n}{y} = \frac{y(\cos\alpha)+y(\sin\alpha)}{y}$

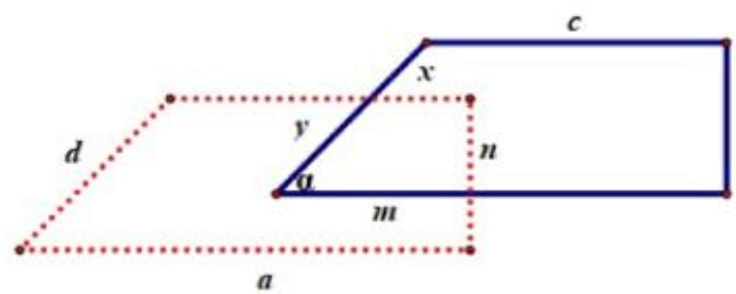
$$= \cos\alpha + \sin\alpha$$

ซึ่งเหมือนกับกรณีที่ 3.1.1

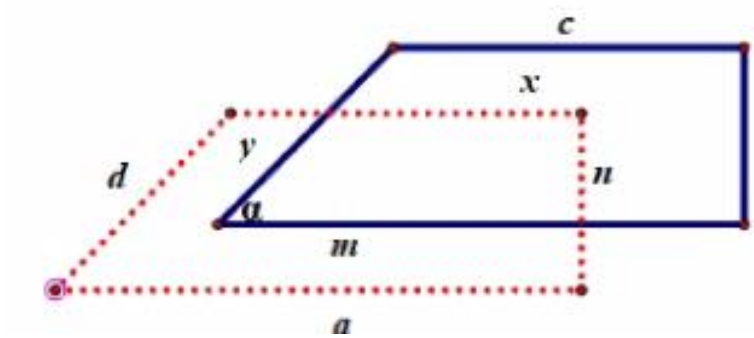
พิจารณากรณีที่ 3.1.4

เราจะพิจารณาเมื่อให้ y, α เป็นค่าคงที่

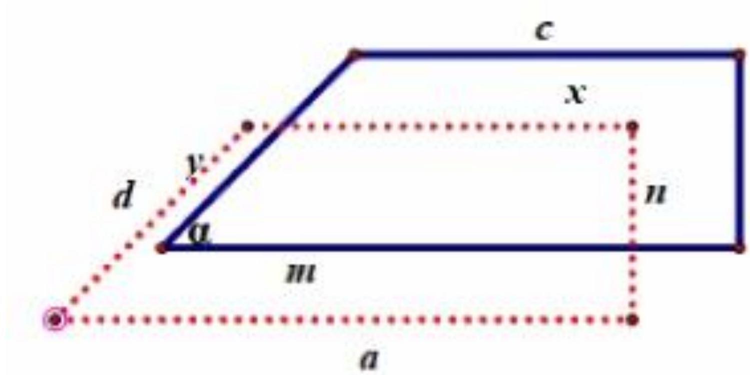
และ $0 < x < c$ เพื่อหาว่า x เท่าไรที่ทำให้อัตราส่วนนี้เกิดค่าสูงสุด



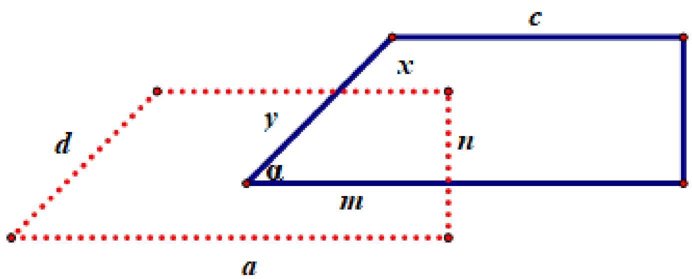
รูปที่4.4.1 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่



รูปที่4.4.2 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่



รูปที่4.4.3 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่



รูปที่4.4.4 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน y และมุม α คงที่

จะได้ว่า $n = ysin\alpha$ และ $m = x + ycos\alpha$

และ $0° < \alpha < 90°$

พิจารณาอัตราส่วน $\frac{m+y}{n+x} = \frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}$ เมื่อ y, α เป็นค่าคงที่

พิจารณา $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}\right) = \frac{(x+ysin\alpha)-(x+ycos\alpha+y)}{(x+ysin\alpha)^2}$

$$= \frac{y(sin\alpha-cos\alpha-1)}{(x+ysin\alpha)^2}$$

จะเห็นได้ว่าไม่มีจุดวิกฤต จุดไม่สามารถหาจุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดได้

พิจารณาว่า $\frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือไม่

โดย **ทฤษฎีบทที่ 2.1.2** จะได้ว่าว่า

$\frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $\frac{y(sin\alpha-cos\alpha-1)}{(x+ysin\alpha)^2} \geq 0$ และ

$\frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}$ จะเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $\frac{y(sin\alpha-cos\alpha-1)}{(x+ysin\alpha)^2} \leq 0$

เนื่องจาก $y > 0$ และ $(x + ysin\alpha)^2 \geq 0$

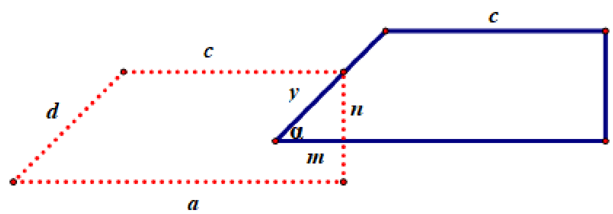
และเนื่องจาก $sin\alpha - 1 < 0$ และ $cos\alpha > 0$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

ดังนั้น $sin\alpha - cos\alpha - 1 < 0$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

$\therefore \frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}$ จะเป็นฟังก์ชันลด

$\therefore \frac{x+ycos\alpha+ysin\alpha}{x+y}$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = 0$

จะได้รูปดังนี้



รูปภาพที่ 4.5 ภาพกรณีที่เกิดอัตราส่วนที่มีค่ามากที่สุดของกรณีที่ 3.1.4

จะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวด้าน คือ $\frac{y+m}{n} = \frac{y(cos\alpha)+y}{y(sin\alpha)}$

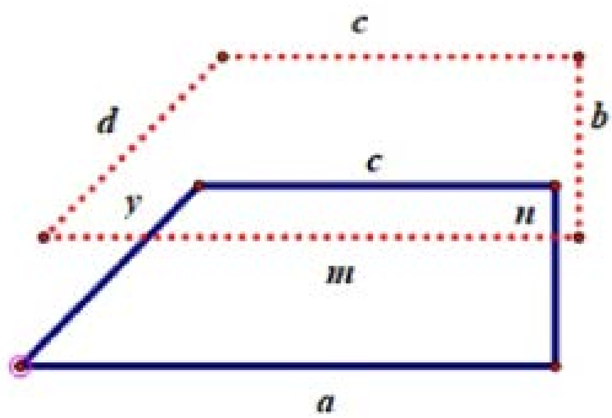
$$= \frac{cos\alpha+1}{sin\alpha}$$

ซึ่งเหมือนกับกรณีที่ 3.1.2

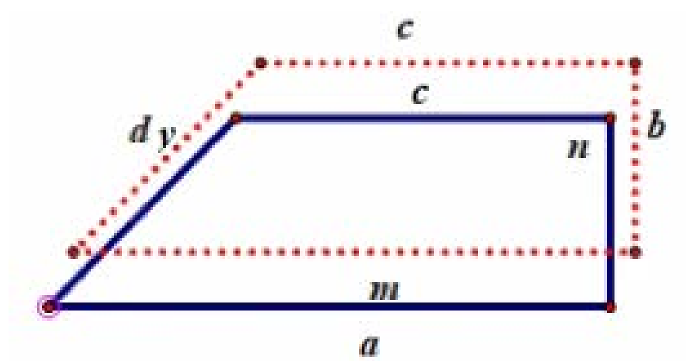
พิจารณากรณีที่ 3.1.5

เราจะพิจารณาเมื่อให้ c, α เป็นค่าคงที่

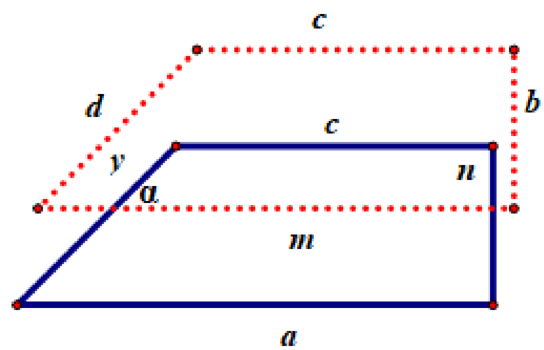
และ $0 < y < d$ เพื่อหาว่า y เท่าไรที่ทำให้อัตราส่วนนี้เกิดค่าสูงสุด



รูปที่4.6.1 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน C และมุม α คงที่



รูปที่4.6.2 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน C และมุม α คงที่



รูปที่4.6.2 รูปแสดงการเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ โดยกำหนดด้าน C และมุม α คงที่

พิจารณาอัตราส่วน $\frac{m+y}{n+x} = \frac{x+ycos\alpha+y}{x+ysin\alpha}$ เมื่อ y, α เป็นค่าคงที่

พิจารณา $\frac{d}{dy}\left(\frac{y+c+ysin\alpha}{ycos\alpha+c}\right) = \frac{(ycos\alpha+c)(1+sin\alpha)-(y+c+ysin\alpha)(cos\alpha)}{(ycos\alpha+c)^2}$

$$= \frac{ycos\alpha+ycos\alpha sin\alpha+c+csin\alpha-ycos\alpha-ccos\alpha-ycos\alpha sin\alpha}{(ycos\alpha+c)^2}$$

$$= \frac{c(1+sin\alpha-cos\alpha)}{(ycos\alpha+c)^2}$$

จะเห็นได้ว่าไม่มีจุดวิกฤต จุดไม่สามารถหาจุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดได้

พิจารณาว่า $\frac{y+c+ysin\alpha}{ycos\alpha+c}$ เป็น ฟังก์ชันเพิ่มหรือไม่

โดย **ทฤษฎีบทที่ 2.1.2** จะได้ว่า $\frac{y+c+ysin\alpha}{ycos\alpha+c}$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $\frac{c(1+sin\alpha-cos\alpha)}{(ycos\alpha+c)^2} \geq 0$

และ $\frac{y+c+ysin\alpha}{ycos\alpha+c}$ จะเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $\frac{c(1+sin\alpha-cos\alpha)}{(ycos\alpha+c)^2} \leq 0$

เนื่องจาก $c > 0$ และ $(ycos\alpha + c)^2 \geq 0$

และเนื่องจาก $0 < sin\alpha, cos\alpha < 1$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

ดังนั้น $1 - \cos\alpha > 0$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

และ $1 + \sin\alpha - \cos\alpha > 0$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

$\therefore \frac{y+c+y\sin\alpha}{y\cos\alpha+c}$ เป็น ฟังก์ชันเพิ่ม

$\therefore \frac{y+c+y\sin\alpha}{y\cos\alpha+c}$ จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $y = d$

เพราะฉะนั้นเราจะใช้อัตราส่วนของความยาวด้านเป็น $\frac{y+c+y\sin\alpha}{y\cos\alpha+c}$ ในการเปรียบเทียบกับกรณีอื่น ๆ

บทที่ 5

ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

เมื่อพิจารณาค่าของ $cos\alpha + \sin\alpha$, $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$, $\frac{\text{d+c+ dsin}\alpha}{\text{dcos}\alpha\text{+c}}$ ที่ $0° < \alpha < 90°$

พิจารณาระหว่าง $cos\alpha + \sin\alpha$ และ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{2\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{2\sin(\frac{\alpha}{2})cos(\frac{\alpha}{2})}$$

$$= cot(\frac{\alpha}{2})$$

$$\text{และ } cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}(\sin(\alpha + 45°))$$

พิจารณาเมื่อ $0° < \alpha < 90°$

พิจารณาค่าของ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} - (cos\alpha + \sin\alpha) = cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{2}(\sin(\alpha + 45°))$

$$= csc\left(\frac{\alpha}{2}\right)(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^2(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))$$

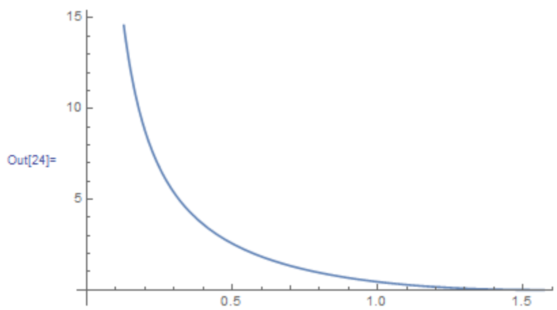
และเนื่องจาก $csc\left(\frac{\alpha}{2}\right), (sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^2, \left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) > 0$

เพราะฉะนั้น $csc\left(\frac{\alpha}{2}\right)(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^2\left(sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) > 0$

ทำให้ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} > cos\alpha + \sin\alpha$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

หรือเมื่อพิจารณากราฟของ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}-(\cos\alpha+\sin\alpha)$

```
In[24]:= Plot[Cot[α/2] - (Sin[α] + Cos[α]), {α, 0, π/2}]
```



รูปภาพที่ 5.1 แสดงกราฟของ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}-(\cos\alpha+\sin\alpha)$ เมื่อ $0° < \alpha < 90°$

จะเห็นว่ากราฟมีค่ามากกว่า 0 สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

ทำให้ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} > \cos\alpha+\sin\alpha$ สำหรับทุก $0° < \alpha < 90°$

ทำให้ได้ว่าหาก $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} > \frac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c}$

จะได้ว่า $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เป็นอัตราส่วนที่ทำให้เกิดค่าสูงสุด

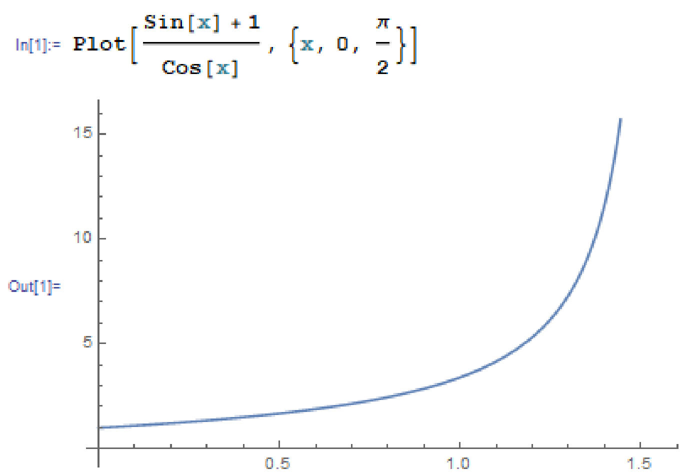
และหาก $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} < \frac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c}$

จะได้ว่า $\frac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c}$ เป็นอัตราส่วนที่ทำให้เกิดค่าสูงสุด

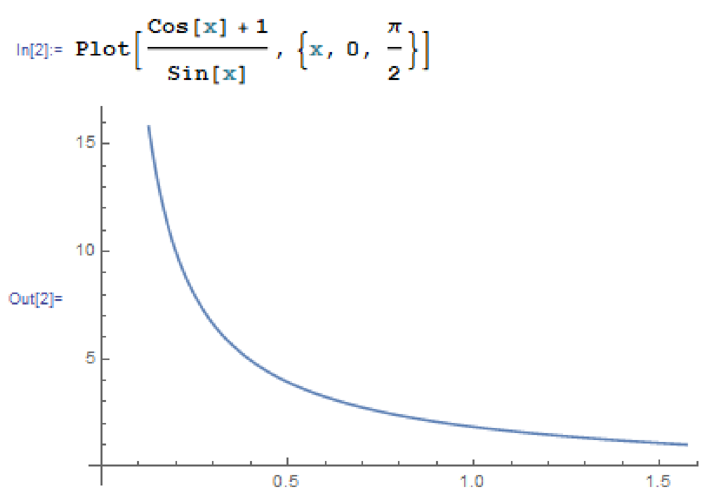
กรณี (1) พิจารณาเมื่อ $c \to 0$, d เป็นค่าคงที่จะทำให้ได้ว่า

$$\frac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c} \to \frac{d+d\sin\alpha}{d\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$$

นั่นคือเราจะพิจารณาเปรียบเทียบระหว่าง $\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$ และ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$



รูปภาพที่ 5.2 แสดงกราฟของ $\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$ เมื่อ $0° < \alpha < 90°$



รูปภาพที่ 5.3 แสดงกราฟของ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $0° < \alpha < 90°$

จากกราฟจะเห็นว่า

$\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $0° < \alpha < 90°$ และ

$\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ $0° < \alpha < 90°$

และเนื่องจาก $\sin\alpha = cos\alpha$ เมื่อ $\alpha = 45°$

ดังนั้นจะได้ว่า $\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$

และ $\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha} < \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\alpha > 45°$

และ $\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha} > \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\alpha > 45°$

กรณี (2) พิจารณาเมื่อ $d \to 0\,, c$ เป็นค่าคงที่จะทำให้ได้ว่า

$\frac{\mathrm{d+c+\ dsin\alpha}}{\mathrm{dcos\alpha+c}} \to \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}} \quad = 1$

นั่นคือเราจะพิจารณาเปรียบเทียบระหว่าง 1 และ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$

จากกราฟในรูปภาพที่5.3ทำให้ได้ว่า $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} > 1$ทุกเมื่อ $0° < \alpha < 90°$

กรณี (3) พิจารณาเมื่อ $d \to \infty, c$ เป็นค่าคงที่

$\frac{d+c+\ d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c} \to \frac{d+\ d\sin\alpha}{d\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$

นั่นคือเราจะพิจารณาเปรียบเทียบระหว่าง $\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$ และ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$

จะทำให้ได้ผลลัพธ์เหมือนกรณี (1)

กรณี (4) พิจารณาเมื่อ $c \to \infty, d$ เป็นค่าคงที่

จะทำให้ได้ว่า

$$\frac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c} \to \frac{c}{c} \quad = 1$$

นั่นคือเราจะพิจารณาเปรียบเทียบระหว่าง 1 และ$\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$

จะทำให้ได้ผลลัพธ์เหมือนกรณี (2)

กรณีอื่น ๆจะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของ c และ d
อัตราส่วนต่างกันจะทำให้ได้ผลสรุปที่ต่างกันออกไป

เช่น หาก $c: d = 2: 1$

จะได้ว่า $c = 2d$

จะทำให้ $\frac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c} = \frac{d+2d+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+2d}$

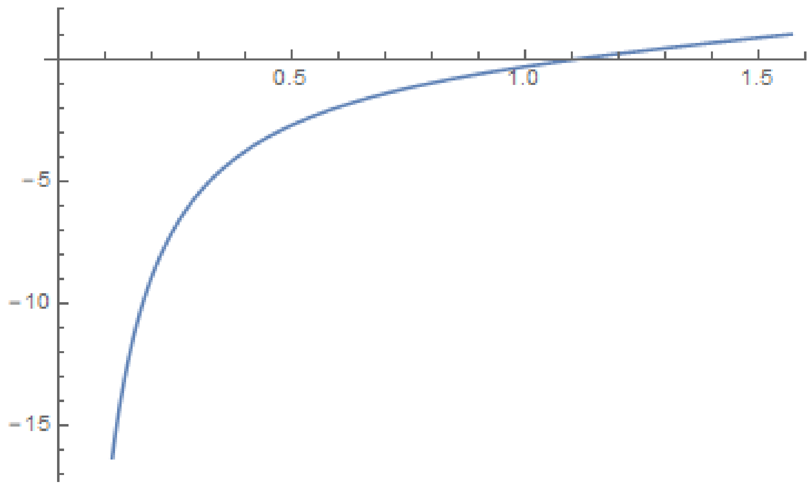
$$= \frac{d(\sin\alpha + 3)}{d(\cos\alpha + 2)}$$

$$= \frac{(\sin\alpha + 3)}{(\cos\alpha + 2)}$$

เมื่อพิจารณา $\frac{(\sin\alpha+3)}{(\cos\alpha+2)}$ เทียบกับ $\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ จะได้ว่า

In[17]:= $\text{Plot}\left[\dfrac{\text{Sin}[\alpha]+3}{\text{Cos}[\alpha]+2}-\text{Cot}\left[\dfrac{\alpha}{2}\right],\ \left\{\alpha,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\right\}\right]$

Out[17]=



In[18]:= $\text{FindRoot}\left[\dfrac{\text{Sin}[\alpha]+3}{\text{Cos}[\alpha]+2} == \text{Cot}\left[\dfrac{\alpha}{2}\right],\ \left\{\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}\right\}\right]$

Out[18]= $\{\alpha \to 1.11756\}$

In[19]:= $\alpha \to 1.1175602331154015\text{`} * \dfrac{180}{\pi}$

Out[19]= $\alpha \to 64.0315$

รูปภาพที่ 5.4 แสดงการเปรียบเทียบระหว่าง $\dfrac{(\sin\alpha+3)}{(\cos\alpha+2)}$ กับ $\dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $0° < \alpha < 90°$

ทำให้ได้ว่า $\dfrac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c} < \dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\alpha < 64.0315°$

และ $\dfrac{d+c+d\sin\alpha}{d\cos\alpha+c} > \dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\alpha > 64.0315°$

หาก $c : d = 1 : 2$

จะได้ว่า $d = 2c$

จะทำให้ $\dfrac{d + c + d\sin\alpha}{d\cos\alpha + c} = \dfrac{2c + c + 2c\sin\alpha}{2c(\cos\alpha) + c}$

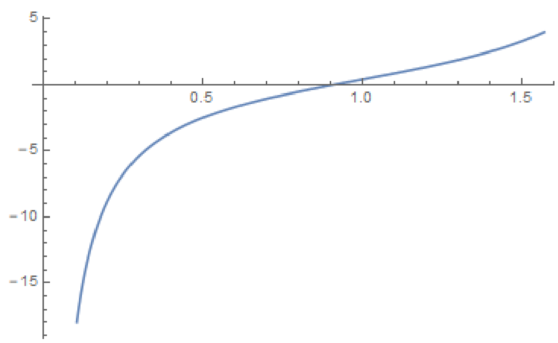
$$= \frac{c(2\sin\alpha + 3)}{c(2\cos\alpha + 1)}$$

$$= \frac{2\sin\alpha + 3}{2\cos\alpha + 1}$$

เมื่อพิจารณา $\dfrac{2\sin\alpha + 3}{2\cos\alpha + 1}$ เทียบกับ $\dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$ จะได้ว่า

In[27]:= $\texttt{Plot}\left[\dfrac{2\,\texttt{Sin}[\alpha] + 3}{2\,\texttt{Cos}[\alpha] + 1} - \texttt{Cot}\left[\dfrac{\alpha}{2}\right],\ \left\{\alpha,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\right\}\right]$

Out[27]=



In[31]:= $\texttt{FindRoot}\left[\dfrac{2\,\texttt{Sin}[\alpha] + 3}{2\,\texttt{Cos}[\alpha] + 1} == \texttt{Cot}\left[\dfrac{\alpha}{2}\right],\ \left\{\alpha,\ \dfrac{\pi}{2}\right\}\right]$

Out[31]= $\{\alpha \to 0.907461\}$

In[32]:= $\alpha \to 0.907461029478796` * \dfrac{180}{\pi}$

Out[32]= $\alpha \to 51.9937$

รูปภาพที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบระหว่าง $\dfrac{(2\sin\alpha + 3)}{(2\cos\alpha + 1)}$ กับ $\dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $0° < \alpha < 90°$

ทำให้ได้ว่า $\dfrac{d + c + d\sin\alpha}{d\cos\alpha + c} < \dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\alpha < 51.9937°$

และ $\dfrac{d + c + d\sin\alpha}{d\cos\alpha + c} > \dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\alpha > 51.9937°$

เอกสารอ้างอิง

[1] Fickett, J.W. Overlapping congruent convex bodies. **The American Mathematical Monthly** 87 (December 1980): 814-815.

[2] Nielsen, C. and Powers, C. Intersecting equilateral triangles. **Forum Geometricorum** 13 (2013): 219-225.

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) ปัญหาการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) Intersection of trapezoid

อาจารย์ที่ปรึกษา อ.ดร.กีรติ ศรีอมร

ผู้ดำเนินการ 1. นายพงศกร เกสรินทร์ 5833533823

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในปี ค.ศ. 1980, J.W. Fickett ได้เสนอการคาดคะเนเกี่ยวกับขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการที่ตัดกันสองรูปว่าจะมีขอบเขตที่เป็นไปได้ตั้งแต่ $\frac{1}{3}$ ถึง 3 และในปี 2013 C.Nielsen and C. Powers ได้แสดงใน [2] ให้เห็นว่าสำหรับขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เท่ากันทุกประการสองรูปจะเป็นไปได้ตั้งแต่ $\frac{1}{2}$ ถึง 2 เมื่อได้ลองศึกษาปัญหาดังกล่าวกระผมจึงสงสัยว่าหากนำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการมาเลื่อนขนานให้ซ้อนทับกันจะมีขอบเขตของอัตราส่วนของด้านที่อยู่ภายในที่เกิดจากการตัดของรูปทั้งสองนั้นเป็นอย่างไร

วัตถุประสงค์

เพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการ

ขอบเขตของโครงงาน

สนใจเฉพาะกรณีที่เกิดจากการเลื่อนขนานรูปห้าเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการเท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

ก.แผนการศึกษา

1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงานจาก [1] และ [2]
3. หาและพิสูจน์ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการ
4. ตรวจสอบผลที่ได้ สรุปผลและจัดทำรูปเล่มรายงาน
5. นำเสนอผลงาน

ข.ระยะเวลาการศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ปี 2561					ปี 2562			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน									
ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงานจาก [1] และ [2]									
หาและพิสูจน์ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่เท่ากันทุกประการ									
ตรวจสอบผลที่ได้ สรุปผลและจัดทำรูปเล่มรายงาน									
นำเสนอผลงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

1. ได้รับความรู้เรื่องขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสามเหลี่ยมด้านเท่า
2. ได้รู้ถึงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ประโยชน์ต่อผู้ที่มาศึกษาโครงงาน

3. ได้รู้ถึงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู
4. สามารถนำความรู้ในเรื่องนี้ไปประยุกต์ใช้กับรูปเรขาคณิตรูปอื่น ๆเพื่อหาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอัตราส่วนของด้านภายในที่เกิดจากการตัดกันของรูปเรขาคณิตรูปอื่น ๆได้

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

วัสดุอุปกรณ์

1. กระดาษ A4
2. เครื่องเขียน
3. External Hard Disk

ฮาร์ดแวร์

1. เครื่องพิมพ์
2. เครื่องคอมพิวเตอร์

ซอฟต์แวร์

1. โปรแกรม Microsoft Word
2. โปรแกรม Wolfram Mathematica
3. โปรแกรม Adobe PDF
4. โปรแกรม Microsoft Power Point

งบประมาณ

วัสดุ-อุปกรณ์	ราคา (บาท)
1. กระดาษ A4	300
2. External Harddisk	2500
3. เครื่องเขียน	200

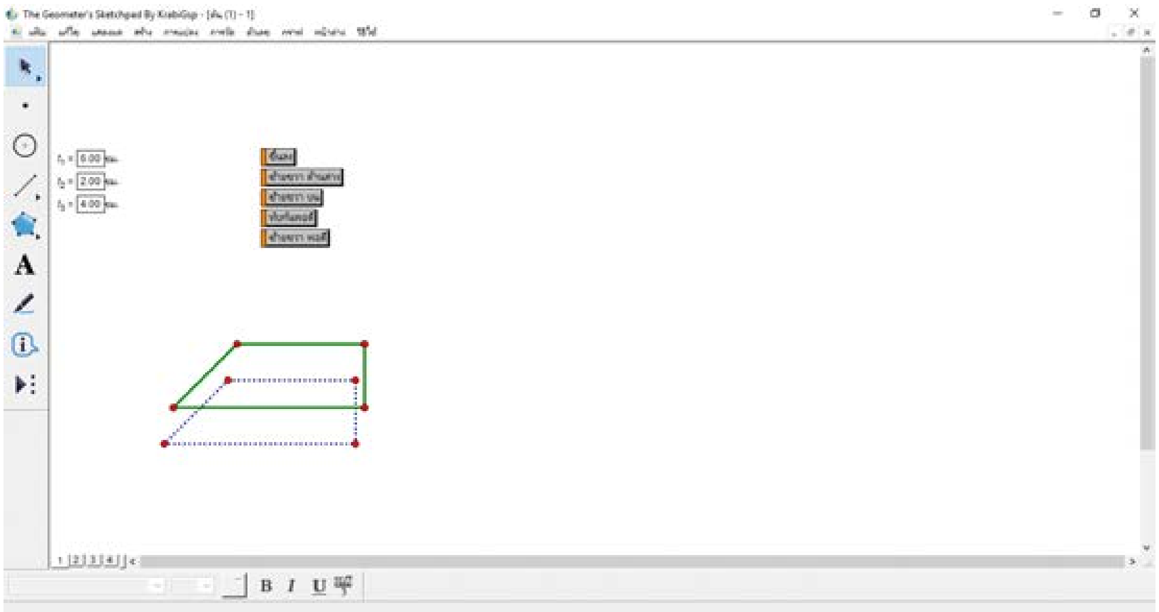
เอกสารอ้างอิง

[1] Fickett, J.W. Overlapping congruent convex bodies. **The American Mathematical Monthly** 87 (December 1980): 814-815.

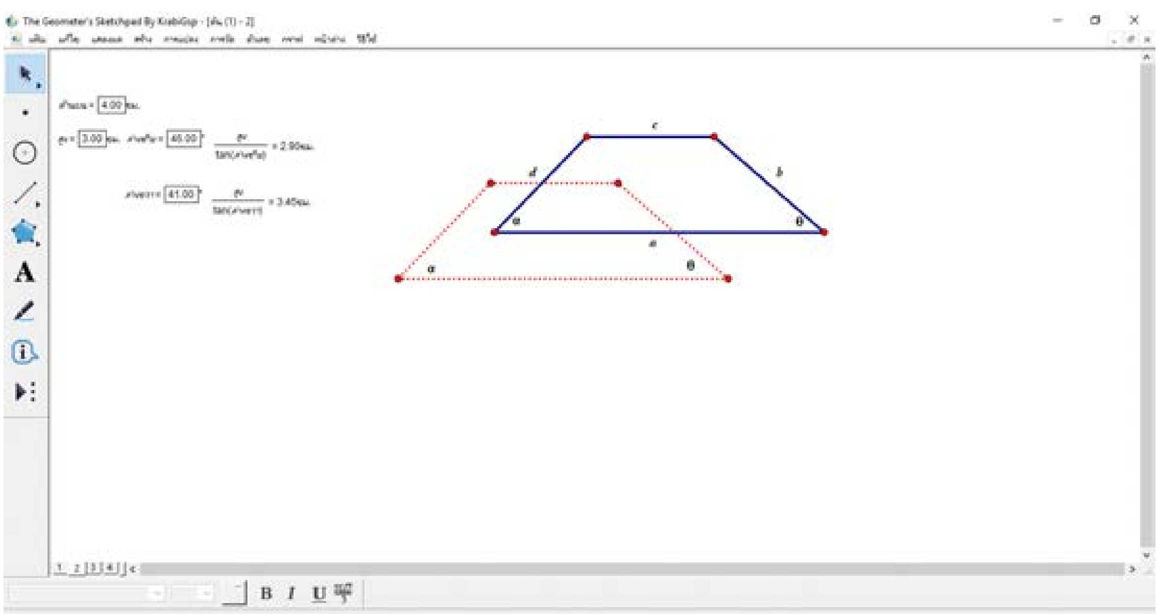
[2] Nielsen, C. and Powers, C. Intersecting equilateral triangles. **Forum Geometricorum** 13 (2013): 219-225.

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างโปรแกรม GSP v.5.06



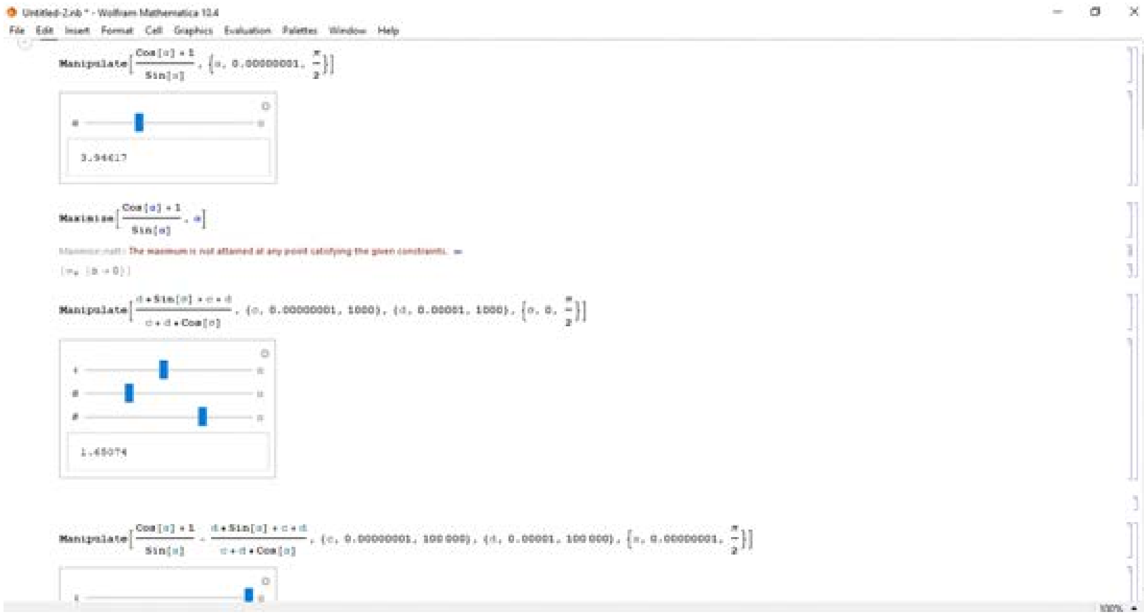
รูปที่ 6.1 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการเลื่อนขนานสี่เหลี่ยมคางหมู



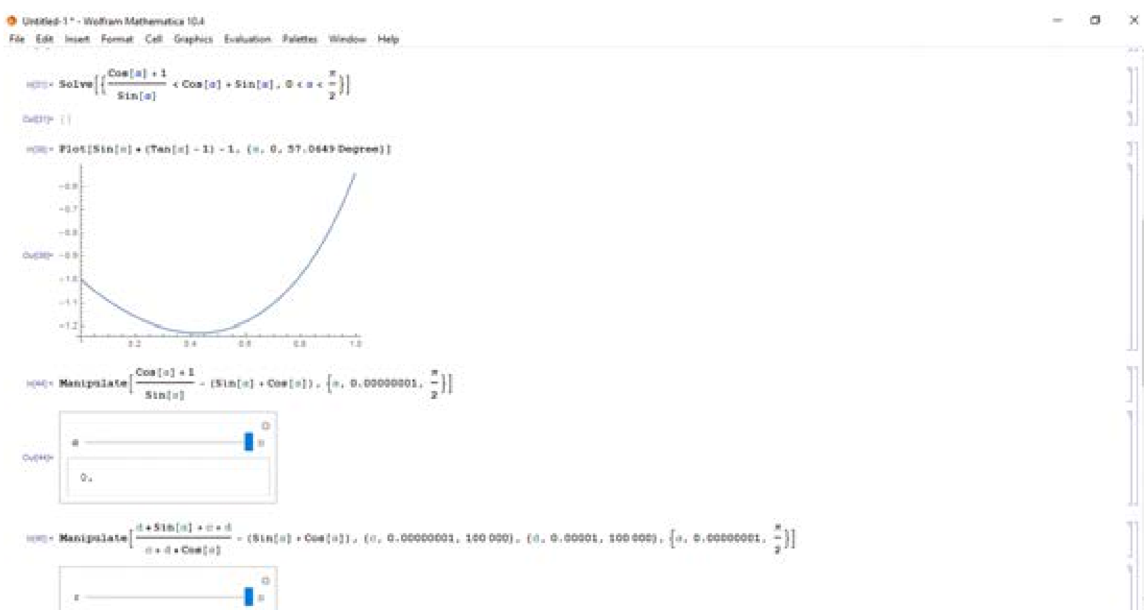
รูปที่ 6.2 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม GSP ในการเลื่อนขนานสี่เหลี่ยมคางหมู

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างโปรแกรม Wolfram Mathematica10.4



รูปที่ 6.3 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม Mathematica ในการปรับค่าตัวแปรเพื่อสังเกตค่าของอัตราส่วนของด้านที่ตัดกัน



รูปที่ 6.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม Mathematica ในการเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวด้านที่ตัดกัน

ประวัติผู้เขียน

นายพงศกร เกสรินทร์ รหัสประจำตัวนิสิต 5833533823

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย