บทที่ 4

ตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญโดยกำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Autoregressive และ Moving Average

จากบทที่กล่าวมาได้แสดงฟังก์ชันที่ให้โมเมนต์ของ $F(t)$ และ $C(t)$ โดยวิธีระดมทุนรายสามัญ และวิธีระดมทุนคิดรวมทั้งหมด โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และอิสระจากกันในรูปทั่วไป แต่ในบทนี้จะอธิบายถึงวิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญ โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Autoregressive ลำดับที่ 1 และ 2 และ Moving Average ลำดับที่ 1 และ 2 โดยใช้วิธี Spread ในการกำหนดค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ $(ADJ(t))$ เฉพาะวิธีระดมทุนรายสามัญเท่านั้น ซึ่งวิธีนี้จะเป็นระบบสะสมเงินล่วงหน้าเต็มจำนวน(Fully Funded) และจะพิจารณาจากค่า Force of Interest (δ) โดยตรงเท่านั้น

4.1 อัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Autoregressive

4.1.1 ตัวแบบ Autoregressive ลำดับที่ 1

กำหนดให้ Force of interest มีรูปแบบเป็น Stationary ตามกระบวนการ Autoregressive ลำดับที่ 1 (AR(1)) ดังนี้

$$\delta(t) = \theta + \varphi(\delta(t-1) - \theta) + e(t) \tag{4.1.1.1}$$

เมื่อ $e(t)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกัน และอิสระจากกัน

ซึ่ง $E[e(t)] = 0$ และ $Var[e(t)] = \gamma^2$, $t = 1, 2, \ldots$

ตัวแบบนี้ค่า Force of Interest ณ ปัจจุบัน จะขึ้นอยู่กับ Force of Interest และค่าสัมประสิทธิ์(φ) ของปีที่ก่อนหน้า ตามหลักการของ Box and Jenkins แล้วจะได้ว่า

$$E[\delta(t)] = \theta$$

$$Var[\delta(t)] = \frac{\gamma^2}{1-\varphi^2} = \nu^2$$

$$Cov[\delta(t),\ \delta(s)] = \nu^2\varphi^{|t-s|} = \gamma(t,s)$$

เงื่อนไขที่จะทำให้การดำเนินการนี้เป็น Stationary คือ $|\varphi| < 1$ ซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังต่อไปนี้

$$E[e^{\delta(t)}] = e^{\theta+\frac{1}{2}\nu^2} = 1 + i$$

$$\begin{aligned} Var[e^{\delta(t)}] &= E[e^{2\delta(t)}] - (E[e^{\delta(t)}])^2 \\ &= e^{2\theta+2\nu^2} - e^{2\theta+\nu^2} \\ &= e^{2\theta+\nu^2}(e^{\nu^2} - 1) \end{aligned}$$

ในขั้นแรกจากวิธีระดมทุนรายสามัญ โดยวิธี Spread เพื่อใช้ในการเลือกค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ ($ADJ(t)$) เพื่อความสะดวก จึงจัดสมการ (3.2.1.1.5) จึงจัดให้อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F(t+1) &= (1 + i(t+1))(QF(t) + R) \\ &= e^{\delta(t+1)}(QF(t) + R) \end{aligned} \qquad (4.1.1.2)$$

เมื่อ $Q = 1 - k = 1 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$

$R = NC - B + kAL = AL(k - d)$

ผลจากการดำเนินการของสมการ (4.1.1.2) จะได้

$$F(0) = F_0$$

$$F(1) = F_0Q\,e^{\delta(1)} + R\,e^{\delta(1)}$$

$$F(2) = F_0Q^2\,e^{\delta(1)+\delta(2)} + QR\,e^{\delta(1)+\delta(2)} + R\,e^{\delta(2)}$$

……………………………………………………………………………

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0Q^t\,e^{\delta(1)+\delta(2)+\ldots+\delta(t)} + Q^{t-1}R\,e^{\delta(1)+\delta(2)+\ldots+\delta(t)} + \ldots + R\,e^{\delta(t)} \\ &= F_0Q^t\,e^{\Delta(t)} + Q^{t-1}R\,e^{\Delta(t)} + Q^{t-2}R\,e^{\Delta(t)-\Delta(1)} + \ldots + Re^{\Delta(t)-\Delta(t-1)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $$F(t) = F_0Q^t e^{\Delta(t)} + R\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s-1}\, e^{\Delta(t)-\Delta(s)} \tag{4.1.1.3}$$

เมื่อ $\Delta(t) = \sum_{u=1}^{t}\delta(u)$ และกำหนดให้ $\Delta(0) = 0$

กำหนดให้การแจกแจงความน่าจะเป็น $e(t)$ เป็นไปตามสมมติฐาน ซึ่งจะสามารถแสดงค่า $EF(t)$ ได้ดังต่อไปนี้

$$E[\Delta(t)] = E[\sum_{u=1}^{t}\delta(u)] = t\theta \tag{4.1.1.4}$$

$$Var[\Delta(t)] = Var[\sum_{u=1}^{t}\delta(u)] = \sum_{u=1}^{t}\sum_{w=1}^{t}\gamma(u,w) = \sum_{u=1}^{t}\sum_{w=1}^{t}\nu^2\ \varphi^{|u-w|} \tag{4.1.1.5}$$

แล้ว $$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = exp\{E[\Delta(t)-\Delta(s)] + \frac{1}{2}Var[\Delta(t)-\Delta(s)]\} \tag{4.1.1.6}$$

โดยที่ $E[\Delta(t)-\Delta(s)] = (t-s)\theta$

$$Var[\Delta(t)-\Delta(s)] = 2\nu^2 G(t,s)$$

เมื่อ $$G(t,s) = \frac{1}{2}\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=s+1}^{t}\varphi^{|u-w|}$$

$$\begin{aligned} 2G(t,s) = {} & 1 + \varphi^{(s+2)-(s+1)} + \dots + \varphi^{t-(s+1)} \\ & + \varphi^{(s+2)-(s+1)} + 1 + \dots + \varphi^{t-(s+2)} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \varphi^{t-(s+1)} + \varphi^{t-(s+2)} + \dots + 1 \end{aligned}$$

$$G(t,s) = \frac{1}{2}\{(t-s) + 2\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=u+1}^{t}\varphi^{w-u}\}$$

$$= \frac{1}{2}(t-s) + \sum_{u=s+1}^{t}\sum_{x=1}^{t-u}\varphi^{x}$$ เมื่อ $x = w-u$

และ $$\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{x=1}^{t-u}\varphi^{x} = \varphi + \varphi^{2} + \dots + \varphi^{t-s-2} + \varphi^{t-s-1}$$

$$+\varphi + \varphi^{2} + \dots + \varphi^{t-s-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\varphi$$

$$= (t-s-1)\varphi + (t-s-2)\varphi^{2} + \dots + \varphi^{t-s-1}$$

$$= \sum_{x=1}^{t-s-1}(t-s-x)\varphi^{x}$$

$$= \sum_{x=1}^{t-s}(t-s-x)\varphi^{x}$$

$$= (t-s)\varphi + (t-s)\varphi^{2} + \dots + (t-s)\varphi^{t-s}$$

$$-(\varphi + 2\varphi^{2} + \dots + (t-s)\varphi^{t-s})^{*}$$

$$= (t-s)\frac{\varphi(1-\varphi^{t-s})}{1-\varphi} - \frac{\varphi(1-\varphi^{t-s})}{(1-\varphi)^{2}} + (t-s)\frac{\varphi^{t-s+1}}{1-\varphi}$$

$$G(t,s) = \frac{1}{2}(t-s)\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) - \frac{\varphi(1-\varphi^{t-s})}{(1-\varphi)^{2}} \qquad (4.1.1.7)$$

ดังนั้น จากสมการ (4.1.1.6)

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = exp\{(t-s)\theta + \nu^{2}[\frac{1}{2}(t-s)\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) - \frac{\varphi(1-\varphi^{t-s})}{1-\varphi}]\}$$

$$= exp\{(t-s)(\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)\nu^{2}) - \nu^{2}\frac{\varphi(1-\varphi^{t-s})}{(1-\varphi)^{2}}\}$$

$$= c^{t-s}e^{-z(1-\varphi^{t-s})} \qquad (4.1.1.8)$$

---

* กำหนดให้ $S_{t-s} = \varphi + 2\varphi^{2} + \dots + (t-s)\varphi^{t-s}$ (1)

$\varphi S_{t-s} = \varphi^{2} + \dots + (t-s-1)\varphi^{t-s} + (t-s)\varphi^{t-s+1}$ (2)

(1) − (2); $(1-\varphi)S_{t-s} = \varphi + \varphi^{2} + \dots + \varphi^{t-s} + (t-s)\varphi^{t-s+1}$

$S_{t-s} = \varphi(1-\varphi^{t-s})/(1-\varphi)^{2} + (t-s)\varphi^{t-s+1}/(1-\varphi)$

เมื่อ $c = exp\{\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)\nu^2\}$

และ $z = \nu^2 \frac{\varphi}{(1-\varphi)^2}$

ดังนั้นจากสมการ (4.1.1.3)

$$EF(t) = F_0 Q^t E[e^{\Delta_{(t)}}] + R\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s-1} E[e^{\Delta_{(t)}-\Delta_{(s)}}]$$

$$= F_0 Q^t c^t e^{-z(1-\varphi^t)} + \frac{R}{Q}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s} c^{t-s} e^{-z(1-\varphi^{t-s})} \qquad (4.1.1.9)$$

ถ้ากำหนดให้ $Qc < 1$ แล้ว $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ จะสามารถหาค่าได้ ในการทดสอบว่า $EF(t)$ นั้นลู่เข้าหรือไม่ทำได้โดยพิจารณาจาก $\sum_{s=1}^{t} Q^s c^s e^{z\varphi^s}$ และพิจารณาในกรณีที่ $|\varphi| < 1$ เท่านั้น ในที่นี้เราจะสนใจค่าประมาณของ $\lim_{t\to\infty} \sum_{s=1}^{t} Q^s c^s e^{z\varphi^s}$ และประมาณค่านี้ได้ด้วย Maclaurin Series ดังนี้

$$f(z) = e^{z\varphi^s} \quad \rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(z) = \varphi^s e^{z\varphi^s} \quad \rightarrow \quad f'(0) = \varphi^s$$

$$f''(z) = \varphi^{2s} e^{z\varphi^s} \quad \rightarrow \quad f''(0) = \varphi^{2s}$$

……………………………………………

$$\therefore\ e^{z\varphi^s} = 1 + \varphi^s z + \frac{\varphi^{2s} z^2}{2!} + \frac{\varphi^{3s} z^3}{3!} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{ks} z^k}{k!}$$

ดังนั้น $$\lim_{t\to\infty} \sum_{s=1}^{t} Q^s c^s e^{z\varphi^s} = \sum_{s=1}^{\infty} Q^s c^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{ks} z^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi^{ks} Q^s c^s$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{Qc\varphi^k}{1-Qc\varphi^k}$$

$$= \frac{Qc}{1-Qc} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{Qc\varphi^k}{1-Qc\varphi^k}$$

$$= \frac{Qc}{1-Qc}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{R}{Q}\frac{Qc}{1-Qc}e^{-z} = \frac{AL(k-d)c}{1-Qc}e^{-z} \qquad (4.1.1.10)$$

การประมาณค่าโดยวิธีที่ผ่านมาเราจะใช้ค่า φ ที่ไม่เกิน ± 1.0 และใช้ค่า v ที่ไม่ใหญ่จนเกินไป ส่วนค่าของ i และM จะต้องกำหนดขึ้นมาให้เหมาะสม(Haberman, 1994: 224)

ข้อสังเกตจากผลลัพธ์ที่ได้ คือ

1) ค่าลิมิตของ $EF(t)$ จะไม่เท่ากับ AL (ไม่เหมือนกรณีที่อัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกันในรูปแบบทั่วไป) เพราะว่า เงื่อนไขของอัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Exponential ของ $\delta(t)$

2) ถ้า $\varphi = 0$ กรณีนี้จะเป็นตัวแบบที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน ผลลัพธ์จากสมการ(4.1.1.10) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{R(1+i)}{1-Q(1+i)} = AL$$

3) การทดสอบการลู่เข้าของ $\lim_{t\to\infty} EF(t)$เราต้องกำหนดให้ $Qc<1$ ซึ่งจะสมมูลกับ

$$(1-k)exp\{\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)v^2\} < 1$$

$$\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)v^2 < -ln(1-k)$$

หรือว่าจะได้

$$Qc < 1$$

$$c < \frac{1-\upsilon^m}{1-\upsilon^m - d}$$

$$c\upsilon - 1 < \upsilon(c-1)$$

$$ln\left(\frac{c\upsilon - 1}{c-1}\right) < m \, ln\upsilon$$

$$M_1 = \frac{1}{\delta}\, ln\left(\frac{c-1}{c\upsilon - 1}\right) > m = M$$

เมื่อ $\upsilon = (1+i)^{-1}$

ซึ่งจะเป็นการกำหนดค่า φ, υ และ i ที่ทำให้ช่วงเวลาที่เหมาะสมกับค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ (Spread Period: M) มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะสามารถลู่เข้าได้ อันเป็นข้อจำกัดที่สำคัญในการกำหนดค่า M ที่เหมาะสม ส่วนเมื่อค่า φ ที่น้อยกว่าศูนย์ จะไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของ $Qc < 1$ และผลที่ได้ M_1 จะลดลง เมื่อ φ , υ และ i เพิ่มขึ้น (Haberman, 1994: 224)

จาก $EF(t)$ เราสามารถจะนำไปสู่ $EC(t)$ ได้จากสมการ(3.2.1.1.4)

$$EC(t) = NC + k(AL - EF(t))$$

$$\lim_{t\to\infty} EC(t) \cong NC + AL\,\frac{k(1-\upsilon c)}{1-Qc}\,e^{-z}$$

การหาค่า $VarF(t)$ เราต้องพิจารณาหาค่า $E[F(t)^2]$ ซึ่งค่าดังกล่าวจะต้องขึ้นอยู่กับเทอมของ $E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}]$ สำหรับ $r, s = 0, 1, ..., t-1$ เราเริ่มพิจารณาค่าของ $Var[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)]$

กำหนดให้ $r > s$ และสามารถเขียน Argument นี้ใหม่ได้เป็น $\Delta(r) - \Delta(s) + 2(\Delta(t) - \Delta(r))$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} Var[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)] &= Var[\Delta(r) - \Delta(s) + 2(\Delta(t) - \Delta(r))] \\ &= Var[\Delta(r) - \Delta(s)] + 4\,Var[\Delta(t) - \Delta(r)] \\ &\quad + 4Cov[\Delta(r) - \Delta(s), \Delta(t) - \Delta(r)] \end{aligned}$$

$$= \sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=s+1}^{r}\gamma(u,w) + \{4\sum_{u=r+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\gamma(u,w)$$

$$+ 4\sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=r+1}^{t}\gamma(u,w)\}$$

$$= \sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=s+1}^{r}\gamma(u,w) + 4\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\gamma(u,w)$$

ให้การแจกแจงความน่าจะเป็น เป็นไปตามสมมติฐานของ $e(t)$ จะได้

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] = exp\{(t-s)\theta+(t-r)\theta+\frac{1}{2}Var[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)]\}$$

$$= exp\{(t-s)\theta+(t-r)\theta+\frac{1}{2}\sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=s+1}^{r}\gamma(u,w)+2\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\gamma(u,w)\}$$

$$= exp\{(t-s)\theta+(t-r)\theta+v^{2}[H(t,r,s)]\} \qquad (4.1.1.11)$$

เมื่อ $H(t,r,s) = \frac{1}{2}\sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=s+1}^{r}\varphi^{|u-w|} + 2\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|}$

โดยที่ $\sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=s+1}^{r}\varphi^{|u-w|}$ สามารถจัดรูปแบบได้เช่นเดียวกับสมการ (4.1.1.7) และ

$$\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|} = \sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|} + \sum_{u=r+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|} \qquad (4.1.1.12)$$

โดยที่ $\sum_{u=r+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|}$ สามารถจัดรูปแบบได้เช่นเดียวกับสมการ (4.1.1.7)

และ $\sum_{u=s+1}^{r}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|} = \varphi^{(r+1)-(s+1)} + \varphi^{(r+2)-(s+1)} + ... + \varphi^{t-(s+1)}$

$$+ \varphi^{(r+1)-(s+2)} + \varphi^{(r+2)-(s+2)} + ... + \varphi^{t-(s+2)}$$

....

$$+ \varphi^{(r+1)-r} + \varphi^{(r+2)-r} + ... + \varphi^{t-r}$$

$$= (\varphi^{r+1} + \varphi^{r+2} + ... + \varphi^{t})(\varphi^{-(s+1)} + \varphi^{-(s+2)} + ... + \varphi^{-r})$$

$$= \frac{\varphi^{r+1}(1-\varphi^{t-r})}{1-\varphi}\ \frac{1}{\varphi^{s+1}}\ \frac{\varphi}{\varphi^{r-s}}\ \frac{\varphi^{r-s}-1}{\varphi-1}$$

$$= \frac{\varphi(1-\varphi^{t-r})(1-\varphi^{r-s})}{(1-\varphi)^2}$$

$$= \frac{\varphi(1-\varphi^{t-r}-\varphi^{r-s}+\varphi^{t-s})}{(1-\varphi)^2}$$

ดังนั้น จากสมการ (4.1.1.12) จะได้

$$\sum_{u=s+1}^{t}\sum_{w=r+1}^{t}\varphi^{|u-w|} = \frac{\varphi(1-\varphi^{t-r}-\varphi^{r-s}+\varphi^{t-s})}{(1-\varphi)^2}+(t-r)$$

$$+2[(t-r)\frac{\varphi(1-\varphi^{t-r})}{1-\varphi}-\frac{\varphi(1-\varphi^{t-r})}{(1-\varphi)^2}+(t-r)\frac{\varphi^{t-r+1}}{1-\varphi}]$$

$$= \frac{\varphi(\varphi^{t-r}+\varphi^{t-s}-\varphi^{r-s}-1)}{(1-\varphi)^2}+(t-r)\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)$$

$$\therefore\ H(t,r,s) = \frac{1}{2}(r-s)\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)-\frac{\varphi(1-\varphi^{r-s})}{(1-\varphi)^2}$$

$$+2[\frac{\varphi(\varphi^{t-r}+\varphi^{t-s}-\varphi^{r-s}-1)}{(1-\varphi)^2}+(t-r)\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)(r-s+4(t-r))+\frac{\varphi(2\varphi^{t-r}+2\varphi^{t-s}-\varphi^{r-s}-3)}{(1-\varphi)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)(t-s+3(t-r))-\frac{\varphi(3-2\varphi^{t-r}-2\varphi^{t-s}+\varphi^{r-s})}{(1-\varphi)^2} \tag{4.1.1.13}$$

จากสมการ (4.1.1.3) จะได้

$$F(t) = (Q^{t}+Q^{t-1}R)\,e^{\Delta(t)}+Q^{t-2}R\,e^{\Delta(t)-\Delta(1)}+\ldots+R\,e^{\Delta(t)-\Delta(t-1)}$$

เพื่อให้สมการลู่เข้า จะกำหนดให้ $F_0 = 0$ แล้ว

$$E[F(t)^2] = E[\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{r=0}^{t-1} e^{\Delta(t)-\Delta(s)} e^{\Delta(t)-\Delta(r)} Q^{t-1-s} Q^{t-1-r} R^2]$$

$$= E[\frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=0}^{t-1}\sum_{r=0}^{t-1} e^{\Delta(t)-\Delta(s)} e^{\Delta(t)-\Delta(r)} Q^{t-s} Q^{t-r}]$$

$$= \frac{2R^2}{Q^2}\sum_{r=1}^{t-1}\sum_{s=0}^{r-1} Q^{t-s} Q^{t-r} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}]$$

$$+ \frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{2(t-s)} E[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s))}] \qquad (4.1.1.14)$$

จากสมการ (4.1.1.13) และ (4.1.1.8) จะได้

$$E[F(t)^2] = \frac{2R^2}{Q^2}\sum_{r=0}^{t-1}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{(t-s)+(t-r)} c^{t-s} w^{t-r} exp[-3z + 2\varphi^{t-r}z + 2\varphi^{t-s}z - \varphi^{t-s}z]$$

$$+ \frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{2(t-s)} c^{t-s} w^{t-s} exp[-4z + 4\varphi^{t-s}z] \qquad (4.1.1.15)$$

เมื่อ $z = \dfrac{V^2\varphi}{(1-\varphi)^2}$

$$c = exp[\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)V^2]$$

$$w = exp[\theta + \frac{3}{2}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)V^2]$$

$$Q = 1-k$$

$$R = AL(k-d)$$

ถ้า $Qc < 1$ และ $Q^2cw < 1$ แล้วจากสมการ (4.1.1.10) จะได้ (Haberman, 1990, cited in Haberman, 1994: 226)

$$\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2] \cong e^{-3z}\frac{2R^2Qc^2w}{(1-Qc)(1-Q^2cw)} + e^{-4z}\frac{R^2cw}{(1-Q^2cw)} \qquad (4.1.1.16)$$

ซึ่งสมการดังกล่าวจะลู่เข้า ที่ $t \rightarrow \infty$ เมื่อ $Qc < 1$ และ $Q^2cw < 1$ ซึ่งจะสมมูลกับ

$$Q^2cw < 1$$

$$cw < \left(\frac{1-\upsilon^m}{1-\upsilon^m-d} \right)$$

$$\frac{\upsilon\sqrt{cw}-1}{\sqrt{cw}-1} < \upsilon^m$$

$$ln\left(\frac{\upsilon\sqrt{cw}-1}{\sqrt{cw}-1} \right) < m\, ln\,\upsilon$$

$$M_2 = \frac{1}{\delta}\, ln\left(\frac{\sqrt{cw}-1}{\upsilon\sqrt{cw}-1} \right) > m = M$$

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to\infty} Var\,F(t) \cong \lim\limits_{t\to\infty} E[F(t)^2] - \lim\limits_{t\to\infty} E[F(t)]^2$

$$\cong e^{-3z} \frac{2R^2Qc^2w}{(1-Qc)(1-Q^2cw)} + e^{-4z} \frac{R^2cw}{(1-Q^2cw)} - \frac{R^2c^2}{(1-Qc)^2} e^{-2z} \qquad (4.1.1.17)$$

และ $\lim\limits_{t\to\infty} Var\,C(t) \cong k^2 \lim\limits_{t\to\infty} Var\,F(t)$

สำหรับตัวแบบที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน(IID) ($\varphi = 0$) จะสามารถหาสูตร Asymptotic สำหรับ $\lim\limits_{t\to\infty} VarF(t)$ และ $\lim\limits_{t\to\infty} VarC(t)$ ได้ และสูตรอย่างง่าย ในกรณีที่ $i = 0$ จะสามารถหาได้จากสมการ (4.1.1.10) และ (4.1.1.17) ดังนี้

$$\frac{\lim\limits_{t\to\infty} Var\,F(t)}{(\lim\limits_{t\to\infty} EF(t))^2} \cong e^{-z} 2Qw \frac{1-Qc}{1-Q^2cw} + e^{-2z} \frac{w}{c} \frac{(1-Qc)^2}{1-Q^2cw} - 1$$

เมื่อ $c = exp\left(\frac{\nu^2\varphi}{1-\varphi} \right)$

$$w = exp\left(\frac{\nu^2(1+2\varphi)}{1-\varphi} \right)$$

$$z = \frac{V^2\varphi}{(1-\varphi)^2}$$

$$Q = 1 - \frac{1}{M}$$

เราให้ $V^2 \to \infty$ และ $M \to \infty$ นั่นคือ $MV^2 \to 0$ แล้ว

$$\frac{\lim\limits_{t\to\infty} Var\,F(t)}{(\lim\limits_{t\to\infty} EF(t))^2} \cong 2Q\left(\frac{1-Qc}{1-Q^2cw}\right)(1-z+O(z^2)) + \frac{w}{c}\frac{(1-Qc)^2}{1-Q^2cw}(1-2z+O(z^2)) - 1$$

$$\cong \frac{2Qcwz + w - 2wz - c}{c(1-Q^2cw)} + O(z^2)$$

$$\cong \frac{w-c}{c(1-Q^2cw)} - \frac{2wz(1-Qc)}{c(1-Q^2cw)} + O(z^2)$$

จัด w และ c ให้อยู่ในเทอมของ V และ $Q = 1 - \frac{1}{M}$ จะได้

$$\cong \frac{1}{2}MV^2\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) + O(V^2) + O\left(\frac{V^2}{M}\right)$$

ดังนั้น $$\frac{Var\,F(\infty)}{(EF(\infty))^2} \approx \frac{1}{2}MV^2\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) \tag{4.1.1.18}$$

และ $$\frac{Var\,C(\infty)}{(EC(\infty))^2} \approx \frac{1}{2}\frac{V^2}{M}\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) \tag{4.1.1.19}$$

จากสมการที่ได้นี้เราสามารถอธิบายได้ว่า ในกรณีที่ $i = 0$ แล้ว เมื่อ M เพิ่มขึ้น $\lim\limits_{t\to\infty} Var\,F(t)$ จะเพิ่มขึ้น แต่ในทางตรงกันข้าม $\lim\limits_{t\to\infty} Var\,C(t)$ จะลดลง เมื่อ M เพิ่มขึ้น

4.1.2 ตัวแบบ Autoregressive ลำดับที่ 2

กำหนดให้ Force of interest มีรูปแบบเป็น Stationary ตามกระบวนการ Autoregressive ลำดับที่ 2 (AR(2)) ดังนี้

$$\delta(t) = \theta + \varphi_1(\delta(t-1) - \theta) + \varphi_2(\delta(t-2) - \theta) + e(t) \tag{4.1.2.1}$$

เมื่อ $e(t)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกัน และอิสระจากกัน ซึ่ง $E[e(t)] = 0$ และ $Var[e(t)] = \gamma^2$, $t = 1, 2, \ldots$

ในลักษณะเดียวกับ AR(1) ดังนั้น

$$E[\delta(t)] = \theta$$

$$Var[\delta(t)] = \left(\frac{1-\varphi_2}{1+\varphi_2}\right)\left(\frac{\gamma^2}{(1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2}\right) = \nu^2$$

$$Cov[\delta(t), \delta(s)] = \nu^2(\lambda\psi_1^{|t-s|} + (1-\lambda)\psi_2^{|t-s|})$$

เมื่อ $\lambda = \dfrac{\psi_1(1-\psi_2^2)}{(\psi_1-\psi_2)(1+\psi_1\psi_2)}$

และ $1-\lambda = \dfrac{\psi_2(\psi_1^2-1)}{(\psi_1-\psi_2)(1+\psi_1\psi_2)}$

และ ψ_1^{-1} และ ψ_2^{-1} เป็นผลเฉลยของสมการ Characteristic: $1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 = 0$ (ถ้า $\varphi_2 = 0$ ผลลัพธ์ที่ได้จะกลายเป็น AR(1) model)

เงื่อนไขที่จะทำให้การดำเนินการนี้เป็น Stationary ได้ก็ต่อเมื่อ รากของสมการ Characteristic ดังกล่าวอยู่นอกวงกลมรัศมี 1 หน่วย นั่นคือ

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 < 1$$
$$-1 < \varphi_2 < 1$$

เช่นเดียวกันกับ AR(1) จะได้

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = exp\{(t-s)\theta + \nu^2 G(t,s)\} \tag{4.1.2.2}$$

เมื่อ $G(t,s) = \lambda G_1(t,s) + (1-\lambda)G_2(t,s)$

และ $G_i(t,s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\psi_i}{1-\psi_i}\right)(t-s) - \psi_i \frac{1-\psi_i^{t-s}}{(1-\psi_i)^2}$ สำหรับ $i = 1, 2$

ดังนั้น
$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = exp\{(t-s)\theta + \frac{1}{2}(t-s)\lambda\,\nu^2\left(\frac{1+\psi_1}{1-\psi_1}\right) + \frac{1}{2}(t-s)(1-\lambda)\nu^2\left(\frac{1+\psi_2}{1-\psi_2}\right)$$
$$-\lambda\,\nu^2\psi_1\frac{1-\psi_1^{t-s}}{(1-\psi_1)^2} - (1-\lambda)\nu^2\,\psi_2\frac{1-\psi_2^{t-s}}{(1-\psi_2)^2}\}$$
$$= c^{t-s} exp\{-z_1 + z_1\psi_1^{t-s} - z_2 + z_2\,\psi_2^{t-s}\} \tag{4.1.2.3}$$

เมื่อ $c = exp\{\theta + \frac{1}{2}\lambda\nu^2\left(\frac{1+\psi_1}{1-\psi_1}\right) + \frac{1}{2}(1-\lambda)\nu^2\left(\frac{1+\psi_2}{1-\psi_2}\right)\}$

$z_1 = \lambda\,\nu^2\frac{\psi_1}{(1-\psi_1)^2}$

$z_2 = (1-\lambda)\nu^2\frac{\psi_2}{(1-\psi_2)^2}$

จากสมการ(4.1.1.9) จะได้ว่า

$$EF(t) = F_0 Q^t E[e^{\Delta(t)}] + \frac{R}{Q}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s}\,E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}]$$

และในทำนองเดียวกันกับ AR(1) ถ้า $Qc < 1$ แล้ว $\lim_{t\to\infty} EF(t)$จะมีค่าดังนี้

$$\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{R}{Q}\,\frac{Qc}{1-Qc}\,e^{-z_1-z_2} = \frac{AL(k-d)c}{1-Qc}\,e^{-z_1-z_2} \tag{4.1.2.4}$$

เช่นเดียวกันกับสมการ(4.1.1.11)

$$E[e^{\Delta_{(t)}-\Delta_{(s)}+\Delta_{(t)}-\Delta_{(r)}}] = exp\{(t-s)\theta+(t-r)\theta+v^2H(t,r,s)\} \qquad (4.1.2.5)$$

เมื่อ $$H(t,r,s) = \frac{1}{2}\lambda\sum_{w=s+1}^{r}\sum_{u=s+1}^{r}\psi_1^{|u-w|}+\frac{1}{2}(1-\lambda)\sum_{w=s+1}^{r}\sum_{u=s+1}^{r}\psi_2^{|u-w|}$$

$$+2\lambda\sum_{w=s+1}^{t}\sum_{u=s+1}^{t}\psi_1^{|u-w|}+2(1-\lambda)\sum_{w=s+1}^{t}\sum_{u=s+1}^{t}\psi_2^{|u-w|}$$

$$=\lambda\left[\frac{1}{2}(t-s+3(t-r))\left(\frac{1+\psi_1}{1-\psi_1}\right)-\psi_1\left(\frac{3-2\psi_1^{t-r}-2\psi_1^{t-s}+\psi_1^{r-s}}{(1-\psi_1)^2}\right)\right]$$

$$+(1-\lambda)\left[\frac{1}{2}(t-s+3(t-r))\left(\frac{1+\psi_2}{1-\psi_2}\right)-\psi_2\left(\frac{3-2\psi_2^{t-r}-2\psi_2^{t-s}+\psi_2^{r-s}}{(1-\psi_2)^2}\right)\right]$$

แล้ว

$$E[F(t)^2] = \frac{2R^2}{Q^2}\sum_{r=1}^{t-1}\sum_{s=0}^{r-1}Q^{t-s}Q^{t-r}E[e^{\Delta_{(t)}-\Delta_{(s)}+\Delta_{(t)}-\Delta_{(r)}}]+\frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=0}^{t-1}Q^{2(t-s)}\;E[e^{2(\Delta_{(t)}-\Delta_{(s)})}]$$

จากสมการ (4.1.2.5) จะได้ผลลัพธ์ในลักษณะเดียวกันกับสมการ (4.1.2.3) แต่จะได้พารามิเตอร์ w เพิ่มขึ้นดังนี้

$$w = exp\{\theta+\frac{3}{2}\lambda v^2\left(\frac{1+\psi_1}{1-\psi_1}\right)+\frac{3}{2}(1-\lambda)v^2\left(\frac{1+\psi_2}{1-\psi_2}\right)\}$$

และสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ถ้า $Qc < 1$ และ $Q^2cw < 1$ แล้ว $\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2]$ จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2] \cong e^{-3z_1-3z_2}\frac{2R^2Qc^2w}{(1-Qc)(1-Q^2cw)}+e^{-4z_1-4z_2}\frac{R^2cw}{(1-Q^2cw)} \qquad (4.1.2.6)$$

ซึ่งจะสามารถขยายผลไปสู่ $\lim_{t\to\infty} Var\,F(t)$ ตามต้องการ และจะได้ว่า

$$\lim_{t\to\infty} Var\,C(t) \cong k^2 \lim_{t\to\infty} Var\,F(t)$$

จากสมการ (4.1.2.2) ถึงสมการ (4.1.2.6) สามารถขยายผลได้ในลักษณะเดียวกับ AR(1)

สำหรับสูตร Asymptotic ของ $\lim_{t\to\infty} Var\,F(t)$ และ $\lim_{t\to\infty} Var\,C(t)$ ของ AR(2) จะมีลักษณะเดียวกันกับสมการ (4.1.1.18) และ (4.1.1.19) ดังนี้

$$\frac{Var\,F(\infty)}{(EF(\infty))^2} \approx \frac{1}{2} M V^2 [\lambda\left(\frac{1+\psi_1}{1-\psi_1}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1+\psi_2}{1-\psi_2}\right)] \qquad (4.1.2.7)$$

และ

$$\frac{Var\,C(\infty)}{(EC(\infty))^2} \approx \frac{1}{2} \frac{V^2}{M} [\lambda\left(\frac{1+\psi_1}{1-\psi_1}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1+\psi_2}{1-\psi_2}\right)] \qquad (4.1.2.2)$$

4.2 อัตราผลตอบแทนที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นในรูปแบบของ Moving Average

4.2.1 ตัวแบบ Moving Average ลำดับที่ 1

กำหนดให้ Force of interest มีรูปแบบเป็น Stationary ตามกระบวนการ Moving Average ลำดับที่ 1 (MA(1)) ดังนี้

$$\delta(t) = \theta + e(t) - \varphi\, e(t-1) \qquad (4.2.1.1)$$

เมื่อ $e(t)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกัน และอิสระจากกัน ซึ่ง $E[e(t)] = 0$ และ $Var[e(t)] = \gamma^2$, $t = 1, 2, \ldots$

เช่นเดียวกัน ภายใต้ตัวแบบข้างต้นตามหลักการ Box and Jenkins เราสามารถแสดงได้ว่า

$$E[\delta(t)] = \theta$$

$$Var[\delta(t)] = (1 + \varphi^2)\gamma^2 = \nu^2$$

$$Cov[\delta(t), \delta(s)] = \begin{cases} -\varphi\gamma^2 & ,|t-s|=1 \\ 0 & ,|t-s|>1 \end{cases}$$

การดำเนินการแบบ Moving Average และเงื่อนไขการเป็น Stationary คือ $-1 < \varphi < 1$ ดังนั้นอินเวอร์สของ Moving Average สามารถเขียนในเทอมของ Autoregressive ได้จากสมการ (4.2.1.1) ดังนี้

$$\delta(t) - \theta = (1 - \varphi B)e(t)$$

เมื่อ B คือ Backward Operator

$$(1 - \varphi B)^{-1}(\delta(t) - \theta) = e(t)$$

$$\delta(t) - \theta = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j (\delta(t-1) - \theta) + e(t)$$

เมื่อ $(1 - \varphi B)^{-1} = 1 + \varphi B + \varphi^2 B^2 + \ldots$

และให้ $\pi_j = -\varphi^j$

จากคุณสมบัติของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบ Lognormal จะได้ว่า

$$E[e^{\delta(t)}] = e^{\theta + \frac{1}{2}\nu^2} = 1 + i$$

$$Var[e^{\delta(t)}] = e^{2\theta+\nu^2}(e^{\nu^2} - 1)$$

จากนั้นในลักษณะเดียวกันกับสมการ (4.1.1.4) และ (4.1.1.5) ดังนั้น

$$E[\Delta(t)] = t\theta$$

$$Var[\Delta(t)] = t\nu^2 + 2(t-1)(-\varphi\gamma^2)$$

$$E[e^{\Delta(t)}] = exp\{(\theta + \frac{1}{2}\nu^2)t - (t-1)\varphi\gamma^2\}$$

$$= c^t e^{-(t-1)\varphi\gamma^2} \qquad (4.2.1.2)$$

เมื่อ $c = exp\{\theta + \frac{1}{2}\nu^2\} = 1 + i$

ดังนั้น $E[\Delta(t) - \Delta(s)] = (t-s)\theta$

$Var[\Delta(t) - \Delta(s)] = (t-s)n^2 + 2(t-s-1)(-jg^2)$

$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = c^{t-s} e^{-(t-s-1)\varphi\gamma^2}$

แล้วจากสมการ (4.1.1.9)

$$EF(t) = F_0 Q^t E[e^{\Delta(t)}] + R\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s-1} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}]$$

โดยที่ $\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s-1} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = \frac{e^{\varphi\gamma^2}}{Q}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s} c^{t-s} e^{-(t-s)\varphi\gamma^2}$

$$= \frac{e^{\varphi\gamma^2}}{Q}\sum_{s=1}^{t} Q^s c^s e^{-s\varphi\gamma^2}$$

$$= \frac{e^{\varphi\gamma^2}}{Q} Qc\, e^{-\varphi\gamma^2}\left(\frac{1 - Q^t c^t e^{-\varphi\gamma^2 t}}{1 - Qce^{-\varphi\gamma^2}}\right)$$

$$\therefore \quad EF(t) = F_0 Q^t c^t e^{-(t-1)\varphi\gamma^2} + \frac{Re^{\varphi\gamma^2}}{Q} Qc\, e^{-\varphi\gamma^2}\left(\frac{1 - Q^t c^t e^{-\varphi\gamma^2 t}}{1 - Qce^{-\varphi\gamma^2}}\right) \qquad (4.2.1.3)$$

ถ้า $Qc\,e^{-\varphi\gamma^2} < 1$ แล้ว $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ จะมีค่าดังนี้

$$\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{Re^{\varphi\gamma^2}}{Q}\ \frac{Qce^{-\varphi\gamma^2}}{1-Qce^{-\varphi\gamma^2}} = \frac{AL(k-d)\alpha e^{\varphi\gamma^2}}{1-Q\alpha} \qquad (4.2.1.4)$$

เมื่อ $\quad \alpha = c\,e^{-\varphi\gamma^2} = exp\{\theta + \frac{1}{2}\nu^2 - \varphi\gamma^2\} = (1+i)exp\{-\varphi\nu^2/(1+\varphi^2)\}$

ข้อสังเกตของผลลัพธ์ที่ได้ คือ

1) ค่าลิมิตของ $EF(t)$ มีค่าในลักษณะเดียวกันกับ AR(1) แต่ผลลัพธ์ในสมการ (4.2.1.4) มีความแม่นยำกว่า ในกรณีของ AR(1) ค่าลิมิตของ $EF(t)$ ไม่เท่ากับ AL (ไม่เหมือนกรณีที่เป็นตัวแบบมีอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกันในรูปแบบทั่วไป) เพราะว่า เงื่อนไขของอัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Exponential ของ $\delta(t)$

2) ถ้า $\varphi = 0$ กรณีนี้จะเป็นตัวแบบที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน ผลลัพธ์จากสมการ(4.2.1.4) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{R(1+i)}{1-Q(1+i)} = AL$$

3) การทดสอบการลู่เข้าของ $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ จะต้องมีเงื่อนไขดังนี้ คือ

$$Q\alpha < 1$$

$$\frac{\alpha\upsilon - 1}{\alpha - 1} < \upsilon^m$$

$$M_1 = \frac{1}{\delta} ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha\upsilon - 1}\right) > m = M \qquad (4.2.1.5)$$

ซึ่งจะให้ค่า φ, ν และ i เป็นค่าที่ทำให้ค่า M มีค่ามากที่สุดที่จะสามารถทำให้สมการ $EF(t)$ ลู่เข้า และผลลัพธ์ที่ได้ M_1 จะลดลง เมื่อกำหนด φ ให้คงที่ , ν เพิ่มขึ้น และ M_1 จะลดลงเช่นกัน เมื่อ i และ φ เพิ่มขึ้น ซึ่ง φ ที่เป็นค่าที่มากกว่าศูนย์จะไม่เป็นไปตามเงื่อนไข $Q\alpha < 1$ (Haberman and Wong, 1997: 121)

เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์กับ AR(1) จะเห็นว่าค่า M_f เพิ่มขึ้นสูงกว่า MA(1) และลดลงในลักษณะเดียวกัน (Haberman and Wong, 1997: 122) และจาก $EF(t)$เราสามารถนำไปสู่ $EC(t)$ จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$EC(t) = NC + k(AL - EF(t))$$

$$\lim_{t \to \infty} EC(t) \cong NC + AL\frac{k(1-\upsilon\alpha)e^{\varphi\gamma^2}}{1-Q\alpha}$$

การหาค่า $Var\,F(t)$ จะเป็นไปในลักษณะเดียวกันกับ AR(1) ดังนี้

$$\begin{aligned} Var[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)] &= Var[\Delta(r) - \Delta(s)] + 4\,Var[\Delta(t) - \Delta(r)] \\ &\quad + 4Cov[\Delta(r) - \Delta(s), \Delta(t) - \Delta(r)] \end{aligned}$$

สำหรับ $t > r > s \geq 0$

$$Cov[\Delta(r) - \Delta(s), \Delta(t) - \Delta(r)] = -\varphi\gamma^2$$

$$\begin{aligned} Var[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)] &= (r-s)v^2 - 2(r-s-1)\varphi\gamma^2 + 4(t-r)v^2 \\ &\quad - 8(t-r-1)\varphi\gamma^2 - 4\varphi\gamma^2 \\ &= [3(t-r) + (t-s)]v^2 - 2\varphi\gamma^2[3(t-r) + (t-s) - 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[e^{\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)}] &= exp\{(t-s)(\theta + \frac{1}{2}v^2 - \varphi\gamma^2) + (t-r)(\theta + \frac{3}{2}v^2 - 3\varphi\gamma^2) + 3\varphi\gamma^2\} \\ &= exp\{(t-s)(\theta + \frac{1}{2}v^2 - \varphi\gamma^2)\}exp\{(t-r)(\theta + \frac{3}{2}v^2 - 3\varphi\gamma^2)\}exp\{3\varphi\gamma^2\} \\ &= \alpha^{t-s}\beta^{t-r}\varepsilon \end{aligned} \qquad (4.2.1.6)$$

เมื่อ $\beta = exp\{\theta + \frac{3}{2}v^2 - 3\varphi\gamma^2\}$

$$\varepsilon = exp\{3\varphi\gamma^2\}$$

ในกรณีที่ $r = s$,

$$Var[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)] = 4\,Var[\Delta(t) - \Delta(s)]$$

$$E[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s))}] = exp\{2(t-s)\theta + 2\,Var[\Delta(t) - \Delta(s)]\}$$
$$= exp\{(t-s)(\theta + \frac{1}{2}\nu^2 - \varphi\gamma^2) + (t-s)(\theta + \frac{3}{2}\nu^2 - 3\varphi\gamma^2) + 4\varphi\gamma^2\}$$
$$= (\alpha\beta)^{t-s}\,\varepsilon e^{\varphi\gamma^2} \qquad (4.2.1.7)$$

เรากำหนดให้ $F_0 = 0$ และเช่นเดียวกับ AR(1) จากสมการ(4.1.1.14) และ (4.1.1.15) จะได้

$$E[F(t)^2] = \frac{2R^2}{Q^2}\sum_{r=1}^{t-1}\sum_{s=0}^{r-1} Q^{(t-s)+(t-r)}\,\alpha^{t-s}\beta^{t-r}\varepsilon + \frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=0}^{t-1} Q^{2(t-s)}\,(\alpha\beta)^{t-s}\,\varepsilon e^{\varphi\gamma^2}$$
$$= \frac{2R^2\varepsilon\alpha}{Q(1-Q\alpha)}\left[\frac{Q^2\alpha\beta(1-Q^{2t}\alpha^t\beta^t)}{1-Q^2\alpha\beta} - \frac{Q\alpha^t\beta Q^t(1-Q^t\beta^t)}{1-Q\beta}\right]$$
$$+ \frac{R^2\varepsilon e^{\varphi\gamma^2}}{Q^2}\,\frac{Q^2\alpha\beta(1-Q^{2t}\alpha^t\beta^t)}{1-Q^2\alpha\beta} \qquad (4.2.1.8)$$

ถ้า $Q\alpha < 1$ และ $Q^2\alpha\beta < 1$ แล้ว $\lim\limits_{t\to\infty} E[F(t)^2]$ จะสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2] \cong \frac{2R^2\varepsilon\alpha}{Q(1-Q\alpha)}\,\frac{Q^2\alpha\beta}{(1-Q^2\alpha\beta)} + \frac{R^2\varepsilon e^{\varphi\gamma^2}}{Q^2}\,\frac{Q^2\alpha\beta}{(1-Q^2\alpha\beta)}$$

$$\lim_{t\to\infty} Var\,F(t) \cong \frac{2R^2\varepsilon\alpha^2 Q\beta}{(1-Q\alpha)(1-Q^2\alpha\beta)} + \frac{R^2\varepsilon e^{\varphi\gamma^2}\alpha\beta}{1-Q\alpha\beta} - \frac{R^2\alpha^2 e^{2\varphi\gamma^2}}{(1-Q\alpha)^2} \qquad (4.2.1.9)$$

ข้อสังเกตของผลลัพธ์ที่ได้ คือ

1) โครงสร้างของสมการมีความใกล้เคียงกับ AR(1) แต่จะมีความแม่นยำในการประมาณค่ามากกว่า

2) สำหรับการลู่เข้าของ $\lim_{t\to\infty} Var\,F(t)$ นั้นจะต้องให้ $Q\alpha < 1$ และ

$$Q^2\alpha\beta < 1$$

$$\alpha\beta < \left(\frac{1-\upsilon^m}{1-\upsilon^m-d}\right)^2$$

$$M_2 = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}-1}{\upsilon\sqrt{\alpha\beta}-1}\right) > m = M \tag{4.2.1.10}$$

3) ถ้า $\varphi = 0$ เราจะได้ตัวแบบที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนที่มีคุณสมบัติ IID และได้ผลลัพธ์ตามที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 3

สำหรับตัวแบบที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน $(\varphi = 0)$ จะสามารถหาสูตร Asymptotic สำหรับ $\lim_{t\to\infty} Var\,F(t)$ และ $\lim_{t\to\infty} Var\,C(t)$ สูตรอย่างง่ายในกรณี $i = 0$ จากเงื่อนไข $Var\,[\delta(t)] \to 0$ (อย่างเช่น $\nu^2 \to 0$), $Cov[\delta(t), \delta(s)] \to 0$ และ $M \to \infty$ (ซึ่ง $M\nu^2 \to 0$ และ $M\varphi\gamma^2 \to 0$)

$$\frac{Var\,F(\infty)}{(EF(\infty))^2} \approx \frac{1}{2}M(\nu^2 - 2\varphi\gamma^2) \tag{4.2.1.11}$$

$$\frac{Var\,C(\infty)}{(EC(\infty))^2} \approx \frac{1}{2M}(\nu^2 - 2\varphi\gamma^2) \tag{4.2.1.12}$$

4.2.2 ตัวแบบ Moving Average ลำดับที่ 2

กำหนดให้ Force of interest มีรูปแบบเป็น Stationary ตามกระบวนการ Moving Average ลำดับที่ 2 (MA(2)) ดังนี้

$$\delta(t) = \theta + e(t) - \varphi_1\, e(t-1) - \varphi_2\, e(t-2) \tag{4.2.2.1}$$

เมื่อ $e(t)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกัน และอิสระจากกัน ซึ่ง $E[e(t)] = 0$ และ $Var[e(t)] = \gamma^2$, $t = 1, 2, \ldots$

ภายใต้ตัวแบบข้างต้น และตามหลักการ Box and Jenkins เราสามารถแสดงได้ว่า

$$E[\delta(t)] = \theta$$

$$Var[\delta(t)] = (1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2)\gamma^2 = \nu^2$$

$$Cov[\delta(t), \delta(s)] =$$

สมการ Characteristic: $1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 = 0$ เงื่อนไขการเป็น Stationary ได้ก็ต่อเมื่อ รากของ สมการ Characteristic ดังกล่าวอยู่นอกวงกลมรัศมี 1 หน่วย นั่นคือ

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 < 1$$
$$-1 < \varphi_2 < 1$$

และจากเงื่อนไขดังกล่าวจะได้ว่า

$$E[\Delta(t)] = t\theta$$

กรณี $t = 1$ ดังนั้น

$$Var[\Delta(t)] = Var[\delta(t)] = \nu^2$$

กรณี $t \geq 2$ ดังนั้น

$$Var[\Delta(t)] = t\nu^2 + 2(t-1)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\gamma^2 + 2\varphi_2\gamma^2$$

$$E[e^{\Delta(t)}] = exp\{ t\theta + \frac{1}{2}(t\nu^2 + 2(t-1)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\gamma^2 + 2\varphi_2\gamma^2)\}$$

$$= exp\{ t(\theta + \frac{1}{2}\nu^2) + (t-1)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\gamma^2 + \varphi_2\gamma^2\}$$

$$= c^t w^{t-1} e^{\varphi_2\gamma^2} \qquad (4.2.2.2)$$

เมื่อกำหนดให้ $w = exp\{(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\gamma^2\}$

กรณี $s < t-1$ และ $t \geq 2$ ดังนั้น

$$E[\Delta(t) - \Delta(s)] = (t-s)\theta$$

$$Var[\Delta(t) - \Delta(s)] = (t-s)\nu^2 + 2(t-s-1)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\gamma^2 + 2\varphi_2\gamma^2$$

เมื่อ $s = t-1$,

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = E[e^{\delta(t)}] = exp\{\theta + \frac{1}{2}\nu^2\} = 1 + i = c \qquad (4.2.2.3)$$

เมื่อ $t \geq 2$ และ $s < t-1$,

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = exp\{(t-s)(\theta + \frac{1}{2}\nu^2) + (t-s-1)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\gamma^2 + \varphi_2\gamma^2\}$$

$$= c^{t-s} w^{t-s-1} e^{\varphi_2\gamma^2} \qquad (4.2.2.4)$$

ในกรณีเดียวกันกับ AR(2) จากสมการ(4.2.2.2) และ (4.2.2.4) จะได้

$$EF(t) = F_0 Q^t c^t w^{t-1} e^{\varphi_2\gamma^2} + R\sum_{s=0}^{t-2} Q^{t-s-1} c^{t-s} w^{t-s-1} e^{\varphi_2\gamma^2} + R(1+i)$$

$$= F_0 Q^t c^t w^{t-1} e^{\varphi_2\gamma^2} + \frac{Re^{\varphi_2\gamma^2}}{Qw}[\frac{Qcw(1-(Qcw)^t)}{1-Qcw} - Qcw] + Rc \qquad (4.2.2.5)$$

ถ้า $Qcw < 1$ แล้ว $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ จะมีค่าดังนี้

$$\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{Rce^{\varphi_2\gamma^2}}{1-Qcw} - Rc(e^{\varphi_2\gamma^2}-1)$$

$$\cong \frac{AL(k-d)ce^{\varphi_2\gamma^2}}{1-Qcw} - AL(k-d)c(e^{\varphi_2\gamma^2}-1) \qquad (4.2.2.6)$$

ข้อสังเกตจากผลลัพธ์ที่ได้ คือ

1) ค่าลิมิตของ $EF(t)$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่ซับซ้อนเช่นเดียวกับ AR(2) ซึ่งทั้งสองแบบเป็น Covariance function อย่างง่าย

2) การทดสอบการลู่เข้าของ $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ จะต้องมีเงื่อนไข $Qcw < 1$ (ซึ่งอยู่ในรูปแบบเดียวกันกับสมการ(4.2.1.10)) เมื่อ

$$M_1 = \frac{1}{\delta} ln\left(\frac{cw-1}{cwU-1}\right) > M$$

3) ผลลัพธ์ของ MA(1) และ MA(2) จะเหมือนกันก็ต่อเมื่อ $\varphi_2 = 0$ และค่าคาดหวังของ $C(t)$ สามารถหาค่าได้จากความสัมพันธ์ $EC(t) = NC + k(AL - EF(t))$

การหาค่า Variance ของ $F(t)$ จะอยู่ในลักษณะเดียวกันกับหัวข้อที่ผ่านมาดังนี้คือ

$$Var[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)] = Var[\Delta(r)-\Delta(s)]+4\,Var[\Delta(t)-\Delta(r)] + 4Cov[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)]$$

กำหนดให้ $t > r > s \geq 0$ และ $e(0)$ เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้า $r = 1$

เมื่อ $r = t-1$ และ $s = t-2$,

$$Cov[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)] = Cov[\delta(t-1), \delta(t)] = (\varphi_2\varphi_1 - \varphi_1)\gamma^2 = a \qquad (4.2.2.7)$$

เมื่อ $r = t-1$ และ $s = t-3, t-4, \ldots$

$$Cov[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)] = (\varphi_2\varphi_1 - \varphi_1)\gamma^2 - \varphi_2\gamma^2 = b \qquad (4.2.2.8)$$

เมื่อ $r = t-2, t-3, \ldots$ และ $s = r-1$,

$$Cov[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)] = (\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2 = b$$

เมื่อ $r = t-2, t-3, \ldots$ และ $s = r-2, r-3, \ldots$

$$Cov[\Delta(r)-\Delta(s), \Delta(t)-\Delta(r)] = (\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2-\varphi_2\gamma^2 = d \qquad (4.2.2.9)$$

ซึ่งจากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของตารางได้ดังนี้

		R					
		$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$	$t-5$	…
	$t-1$	0	0	0	0	0	0
	$t-2$	a	0	0	0	0	0
S	$t-3$	b	b	0	0	0	0
	$t-4$	b	d	b	0	0	0
	$t-5$	b	d	d	b	0	0
	…	b	d	d	d	b	0

กำหนดพารามิเตอร์ต่างๆ ได้ดังนี้

$$\alpha = exp\{\theta + \frac{1}{2}\nu^2 + (\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2\}$$

$$\beta = exp\{\theta + \frac{3}{2}\nu^2 + 3(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2\}$$

จากตารางข้างต้น และ

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] = exp\{E[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)]+\frac{1}{2}Var[\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)]\}$$

สำหรับการนำ *"a"* เข้าสู่สมการ

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] = exp\{3\theta+\frac{5}{2}\nu^2+2(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1)\gamma^2\} = x \tag{4.2.2.10}$$

สำหรับการนำ *"b"* ในคอลัมแรกเข้าสู่สมการ

$$\begin{aligned} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] &= exp\{(t-s)(\theta+\frac{1}{2}\nu^2+(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2)+\theta+\frac{3}{2}\nu^2+\varphi_2\gamma^2\} \\ &= \alpha^{t-s}y \end{aligned} \tag{4.2.2.11}$$

สำหรับการนำ *"b"* ในคอลัมอื่นๆ เข้าสู่สมการ

$$\begin{aligned} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] &= exp\{2(t-r)\theta+4(t-r)(\frac{1}{2}\nu^2+(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2)+\theta+\frac{1}{2}\nu^2 \\ &\quad -2(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2+4\varphi_2\gamma^2\} \\ &= (\alpha\beta)^{t-r}z \end{aligned} \tag{4.2.2.12}$$

สำหรับการนำ *"d"* เข้าสู่สมการ

$$\begin{aligned} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] &= exp\{(t-s)(\theta+\frac{1}{2}\nu^2+(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2)\} \\ &\quad \times exp\{(t-r)(\theta+\frac{3}{2}\nu^2+3(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2\} \\ &\quad \times exp\{-3(\varphi_2\varphi_1-\varphi_1-\varphi_2)\gamma^2\}e^{3\varphi_2\gamma^2} \\ &= \alpha^{t-s}\beta^{t-r}w^{-3}e^{3\varphi_2\gamma^2} \end{aligned} \tag{4.2.2.13}$$

กำหนดให้ $F_0 = 0$ จากหัวข้อที่ผ่านมาจะได้ว่า

$$E[F(t)^2] = \frac{2R^2}{Q^2}\sum_{r=1}^{t-1}\sum_{s=0}^{r-1} Q^{t-s}\, Q^{t-r} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] + \frac{R^2}{Q^2}\sum_{s=1}^{t-1} Q^{2(t-s)}\; E[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s))}]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2] = {} & \frac{2R^2 y\alpha^2 Q}{1-Q\alpha} - 2R^2 Q\alpha^2 y + 2R^2 Qx + \frac{2R^2\alpha}{Q(1-Q\alpha)}\,\frac{e^{3\varphi_2\gamma^2}}{w^3}\,\frac{\alpha^2\beta^2 Q^4}{1-\alpha\beta Q^2} \\ & - \frac{2R^2\alpha}{Q}\,\frac{e^{3\varphi_2\gamma^2}}{w^3}\,\frac{\alpha^2\beta^2 Q^4}{1-\alpha\beta Q^2} + \frac{2R^2 z}{Q}\,\frac{\alpha^2\beta^2 Q^4}{1-\alpha\beta Q^2} \\ & + \frac{R^2}{Q^2}\,\frac{e^{4\varphi_2\gamma^2}}{w^4}\,\frac{\alpha\beta Q^2}{1-\alpha\beta Q^2} - R^2\alpha\beta\frac{e^{4\varphi_2\gamma^2}}{w^4} + R^2 e^{2\theta+2\nu^2}\end{aligned} \qquad (4.2.2.14)$$

ถ้า $Q\alpha < 1$ และ $Q^2\alpha\beta < 1$ และ $\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2]$ จะสามารถหาค่าได้ ซึ่งจากผลลัพธ์ในข้างต้น และค่า $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ ที่ผ่านมาจะทำให้สามารถหาค่า $Var\,F(t)$ และ $\lim_{t\to\infty} Var\,F(t)$ ได้

ข้อสังเกตของผลลัพธ์ที่ได้ คือ

1) การทดสอบการลู่เข้าเมื่อ $t \to \infty$ จะต้องกำหนดให้ $Q^2\alpha\beta < 1$ และจาก $Q^2\alpha\beta < 1$ จะทำให้ $Q\alpha < 1$ ตามไปด้วยเมื่อ $\beta > \alpha$ ซึ่งจะสมมูลกับ

$$M_2 = \frac{1}{\delta}\ln\left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}-1}{\upsilon\sqrt{\alpha\beta}-1}\right) > m = M \qquad (4.2.2.15)$$

เราจะเห็นว่าโครงสร้างของสมการ(4.2.2.15) จะมีลักษณะเดียวกันกับสมการ(4.2.1.10) จากการคำนวณจึงทำให้เห็นว่า M_2 สามารถแสดงออกมาในรูปแบบเดียวกันกับกรณี MA(1) ซึ่งค่า M_2 จะเล็กกว่า M_1

2) ถ้า $M = 1$ สำหรับตัวแบบ MA(2) แล้ว $Q = 0$ ดังนั้น

$$F(t+1) = (1 + i(t+1))R$$

เมื่อ $R = \upsilon AL$ เป็นค่าคงที่ แล้ว $EF(t) = AL$ และ $EC(t) = NC$

$$Var\,F(t) = AL^2 \upsilon^2 e^{2\theta+v^2} (e^{v^2} - 1) \quad \text{สำหรับทุกค่า } t$$

และ $Var\,C(t) = Var\,F(t)$

3) ค่าผลลัพธ์ของตัวแบบ MA(1) และ MA(2) จะกลับมาเหมือนกัน เมื่อ $\varphi_2 = 0$

ในบทนี้เรากล่าวถึงวิธีระดมทุน โดยกำหนดให้ค่า Force of Interest ($\delta(t)$) อยู่ในรูปแบบ Autoregressive และ Moving Average ลำดับที่ 1 และ 2 และใช้วิธี Spread เพียงวิธีเดียวเท่านั้น โดยกำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อน ($e(t)$) มีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกัน และอิสระจากกัน เนื่องจากค่า Force of Interest ไม่คงที่ตลอดทุกช่วงเวลา และมีรูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนั้นจึงต้องมีการคำนวณค่า $E[\delta(t)]$, $Var[\delta(t)]$ และ $Cov[\delta(t), \delta(s)]$ โดยสามารถคำนวณหาอัตราผลตอบแทนการลงทุนที่แท้จริงได้จาก $E[e^{\delta(t)}] = 1 + i$ ดังนั้นจึงต้องมีการจัดตัวแบบการระดมทุน ($F(t)$) ใหม่ให้อยู่ในรูปของ $e^{\delta(t)}$ (ซึ่งต่างจากบทที่ 3 ที่กำหนดตัวแบบการระดมทุนอยู่ในรูปของ $1+i$) แล้วจึงหาตัวแบบ $EF(t)$ จากนั้นจึงทดสอบการลู่เข้าของตัวแบบ $EF(t)$ จาก $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้คือว่า $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ ไม่เท่ากับ AL เมื่อเทียบกับ $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ ในบทที่ 3 เนื่องจากเงื่อนไขของตัวแบบที่อยู่ในรูปแบบ Exponential ของ $\delta(t)$ (แต่ในกรณีที่ $\varphi = 0$ ทั้ง AR(1) และ MA(1) จะได้ผลลัพธ์เหมือนกับบทที่ 3) และจากเงื่อนไขของอนุกรมเรขาคณิตในตัวแบบ $EF(t)$จึงสามารถหาค่าช่วงเวลาที่เหมาะสมกับค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ (M) ซึ่งจะเป็นค่า M ที่มากที่สุดที่จะทำให้ $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ ลู่เข้าได้จากความสัมพันธ์ระหว่าง $F(t)$ กับ $C(t)$ จึงทำให้สามารถหาตัวแบบ $\lim_{t\to\infty} EC(t)$ ได้ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มีค่าไม่เท่ากับ NC เมื่อเทียบกับ $\lim_{t\to\infty} EC(t)$ ในบทที่ 3

จากตัวแบบที่ระบุค่า $\lim_{t\to\infty} EF(t)$ ที่ได้สามารถนำมาหาตัวแบบ $\lim_{t\to\infty} VarF(t)$ ได้โดยเริ่มจากการหาตัวแบบ $\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2]$ ซึ่งจากเงื่อนไขของอนุกรมเรขาคณิตในตัวแบบ $E[F(t)^2]$ จึงสามารถหาค่าช่วงเวลาที่เหมาะสมกับค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ (M) ซึ่งจะเป็นค่า M ที่มากที่สุดที่จะทำให้ $\lim_{t\to\infty} E[F(t)^2]$ ลู่เข้าได้ จากนั้นจะได้ $\lim_{t\to\infty} VarF(t) = \lim_{t\to\infty} E[F(t)^2] - [\lim_{t\to\infty} EF(t)]^2$ และจากความสัมพันธ์ระหว่าง $F(t)$ กับ $C(t)$ จึงทำให้สามารถหาตัวแบบ $\lim_{t\to\infty} VarC(t)$ ได้ รูป

แบบของอัตราผลตอบแทนการลงทุนทั้ง 2 แบบ อาจจะไม่ครอบคลุม และไม่เพียงพอกับการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนการลงทุนที่แท้จริงในปัจจุบัน เพราะการระดมทุนในกองทุนบำนาญนั้นจะต้องใช้เวลาในการลงทุนมาก ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนการลงทุน จึงมีโอกาสเปลี่ยนแปลงได้หลายรูปแบบ ในบทต่อไปจึงทั้งการสร้างตัวแบบการระดมทุน โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบของ Autoregressive Moving Average เพิ่มเติม เพื่อเป็นการรองรับรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนการลงทุนในอนาคตต่อไป