บทที่ 2

องค์ประกอบของการหาตำแหน่งแบบสัมพัทธ์ด้วยวิธีสถิต

การสำรวจรังวัดด้วยดาวเทียมจีพีเอส เป็นการหาค่าพิกัดตำแหน่งโดยการรับสัญญาณดาวเทียม ถูกพัฒนาขึ้นโดยกระทรวงกลาโหมของประเทศสหรัฐอเมริกา โดยในช่วงสองทศวรรษที่ผ่านมาจนถึงปัจจุบันงานสำรวจรังวัดด้วยดาวเทียมจีพีเอสได้เป็นที่รู้จักและมีการนำไปใช้งานอย่างแพร่หลายเนื่องจากมีข้อได้เปรียบวิธีการสำรวจรังวัดแบบเดิม นั่นคือสามารถทำงานได้ทั้งกลางวันและกลางคืนตลอด 24 ชั่วโมง โดยไม่ขึ้นกับสถานที่และสภาพอากาศ มีความสะดวกในการทำงาน เนื่องจากไม่จำเป็นต้องเลือกตำแหน่งหมุดให้มองเห็นกัน อีกทั้งไม่เสียค่าใช้จ่ายในการรับสัญญาณดาวเทียมมีแต่เพียงค่าใช้จ่ายในส่วนของอุปกรณ์รับสัญญาณและซอฟต์แวร์ที่ใช้ในการประมวลผล นอกจากนั้นราคาของเครื่องรับสัญญาณในอนาคตยังมีแนวโน้มลดลงในขณะที่ประสิทธิภาพของเครื่องรับสัญญาณสูงขึ้น เนื่องจากงานสำรวจรังวัดด้วยดาวเทียมจีพีเอสได้เป็นที่รู้จักและนำไปใช้งานอย่างแพร่หลาย ทำให้ในปัจจุบันได้มีเอกสารและหนังสือเกี่ยวกับระบบดาวเทียมจีพีเอสทั้งทางทฤษฎีและปฏิบัติออกเผยแพร่ให้ผู้ที่สนใจได้ศึกษาหาความรู้ โดยผู้ที่ต้องการศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับงานสำรวจรังวัดด้วยดาวเทียมจีพีเอส สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก เฉลิมชนม์ สถิระพจน์ (2546), ชูเกียรติ วิเชียรเจริญและเฉลิมชนม์ สถิระพจน์ (2545), Hofmann-Wellenhof, Lichtengger and Collins (2001), Leick (1995), Rizos (1997) และ Teunissen and Kleusberg (1998) โดยในบทนี้จะได้อธิบายเพียงเนื้อหาและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยเท่านั้น โดยอธิบายถึงแนวคิดของการหาตำแหน่งสัมพัทธ์ด้วยวิธีสถิต ความคลาดเคลื่อนชนิดต่างๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างการรังวัดพร้อมทั้งการแก้ไข และสุดท้ายกล่าวถึงวิธีการปรับแก้ด้วยวิธีลีสท์สแควร์ด้วยสมการค่าสังเกตกับข้อมูลจีพีเอส

2.1 แนวคิดของการหาตำแหน่งแบบสัมพัทธ์ด้วยวิธีสถิต

ดังเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่าการหาตำแหน่งแบบสัมพัทธ์ด้วยวิธีสถิต (Static relative positioning) นั้นเหมาะสำหรับงานที่ต้องการความละเอียดสูง วิธีการดังกล่าวจำเป็นต้องใช้เครื่องรับสัญญาณดาวเทียมอย่างน้อยสองเครื่องในการทำงานและผลที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของค่าระยะทางระหว่างจุดสองจุดหรือที่เรียกว่า เส้นฐาน (Baseline) ค่าความถูกต้องของเส้นฐานจะดีขึ้นเป็นอย่างมากถ้าขบวนการที่เรียกว่า Ambiguity Resolution นั้นประสบความสำเร็จ ซึ่งกระบวนการ Ambiguity Resolution นั้นเป็นการเปลี่ยนข้อมูลเฟสของคลื่นส่งให้เป็นระยะทางระหว่างเครื่องรับ

สัญญาณกับดาวเทียมจีพีเอสที่มีความละเอียดถูกต้องสูงถึงระดับมิลลิเมตร และทำให้สามารถนำเอาระยะทางที่ได้ไปใช้ในการคำนวณหาเส้นฐานที่มีความถูกต้องสูง

ซึ่งค่าที่รังวัดได้จากการรับสัญญาณดาวเทียมจีพีเอส และนำมาใช้ประโยชน์ในการคำนวณหาตำแหน่งที่สำคัญมี 2 ชนิด คือ ซูโดเรนจ์ (Pseudorange) และเฟสของคลื่นส่ง (Carrier phase)

2.1.1 ซูโดเรนจ์ (Pseudorange)

ซูโดเรนจ์ คือ ระยะทางที่วัดจากดาวเทียมมายังเครื่องรับสัญญาณ ในการวัดระยะทางนี้เครื่องรับจะสร้างรหัส PRN (Pseudo Random Noise) ซึ่งใช้ในดาวเทียมขึ้นมาเปรียบเทียบกับรหัสที่ได้จากการรับสัญญาณ รหัสที่สร้างขึ้นจะเลื่อนไปมาจนกระทั่งมีสหสัมพันธ์สูงสุดเมื่อเปรียบเทียบกับรหัสที่ได้รับ ค่าเลื่อนระหว่างรหัสทั้งสองคือระยะเวลาที่คลื่นวิทยุเดินทางจากดาวเทียมในขณะที่รหัสสร้างขึ้นในเครื่องรับ โดยการเอาความเร็วของคลื่นส่งวิทยุคูณกับเวลาจะได้ระยะทางระหว่างดาวเทียมกับเครื่องรับ โดยเหตุที่รหัสที่ส่งจากดาวเทียมได้มาจากนาฬิกาของดาวเทียมในขณะที่รหัสที่สร้างขึ้นในเครื่องรับก็ได้มาจากนาฬิกาเครื่องรับ ดังนั้นจึงหลีกเลี่ยงความคลาดเคลื่อนของเวลาอันเนื่องมาจากความแตกต่างของนาฬิกาทั้งสองไม่ได้ จึงทำให้ซูโดเรนจ์ที่วัดได้นี้มีค่าคลาดเคลื่อนไปจากระยะทางจริงระหว่างดาวเทียมและเครื่องรับ นอกจากนั้นซูโดเรนจ์ยังมีผลกระทบเนื่องจากการหักเหของคลื่นในชั้นไอโอโนสเฟียร์และชั้นโทรโพสเฟียร์โดยตรงอีกด้วย โดยมีสมการของซูโดเรนจ์ที่ได้จากรหัสและมีหน่วยเป็นระยะทางดังนี้คือ

$$R^{j}_{i}(t) = \rho^{j}_{i}(t) + c\Delta\delta^{j}_{i}(t) + \Delta r^{j} + d_{ion} + d_{trop}$$

โดยที่

$R^{j}_{i}(t)$ คือ ซูโดเรนจ์ระหว่างดาวเทียม j กับตัวรับสัญญาณ i มีหน่วยเป็นเมตร

$\rho^{j}_{i}(t)$ คือ ระยะทางเรขาคณิตระหว่างดาวเทียมและเครื่องรับสัญญาณ มีหน่วยเป็นเมตร

c คือ ความเร็วของคลื่นส่งหรือความเร็วแสง มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที

$\Delta\delta^{j}_{i}(t)$ คือ ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียมและความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาเครื่องรับ มีหน่วยเป็นวินาที

Δr^{j} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากวงโคจรของดาวเทียม มีหน่วยเป็นเมตร

d_{ion} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์ มีหน่วยเป็นเมตร

d_{trop} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์ มีหน่วยเป็นเมตร

และ

$$\rho^{j}_{i}(t) = \sqrt{(X^{j}(t)-X_{i})^{2}+(Y^{j}(t)-Y_{i})^{2}+(Z^{j}(t)-Z_{i})^{2}}$$

$$\Delta\delta^{j}_{i}(t) = \delta_{i}(t) - \delta^{j}(t)$$

โดยที่

$X^{j}(t), Y^{j}(t), Z^{j}(t)$ คือ พิกัดของดาวเทียมที่เวลา t มีหน่วยเป็นเมตร

X_{i}, Y_{i}, Z_{i} คือ พิกัดของตัวรับสัญญาณ (ไม่ทราบค่า) มีหน่วยเป็นเมตร

ดังนั้นจะได้ว่า

$$R^{j}_{i}(t) + c\delta^{j}(t) = \rho^{j}_{i}(t) + c\delta_{i}(t) + \Delta r^{j} + d_{ion} + d_{trop} \tag{2.1}$$

2.1.2 เฟสของคลื่นส่ง (Carrier Phase)

การวัดเฟสของคลื่นส่งในเครื่องรับเป็นการวัดเปรียบเทียบหรือค่าต่างระหว่างเฟสของคลื่นส่งที่ดาวเทียมส่งลงมากับเฟสของคลื่นความถี่ fo ที่เครื่องรับสร้างขึ้นมา โดยคลื่นส่งที่ดาวเทียมส่งลงมานั้นแยกออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนของคลื่นจำนวนเต็มรอบ (Integer cycle part) กับส่วนที่ไม่เต็มรอบ (Fractional part) ในการรับสัญญาณนั้นเครื่องรับสัญญาณไม่สามารถจะนับจำนวนเต็มรอบของคลื่นส่งที่ส่งลงมา จำนวนเต็มรอบสามารถหาค่าได้จากการคำนวณในภายหลัง โดยจำนวนเต็มนี้มีชื่อเรียกว่า Ambiguity หรือ เลขปริศนา โดยสมการค่าสังเกตของการวัดเฟสคือ

$$\Phi^{j}_{i}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{j}_{i}(t) + N^{j}_{i} + f^{j}\Delta\delta^{j}_{i}(t) + \Delta r^{j} - d_{ion} + d_{trop}$$

โดยที่

Φ^{j}_{i} คือ ค่า carrier phase ที่วัดได้ในหน่วยของลูกคลื่น

λ คือ ความยาวคลื่น มีหน่วยเป็นเมตร

ρ^{j}_{i} คือ ระยะทางระหว่างดาวเทียมกับตัวรับสัญญาณ มีหน่วยเป็นเมตร

N^{j}_{i} คือ ค่า ambiguity

f^{j} คือ ความถี่ของสัญญาณจากดาวเทียม มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที

$\Delta\delta^{j}_{i}(t)$ คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากนาฬิกาดาวเทียมและนาฬิกาเครื่องรับสัญญาณ มีหน่วยเป็นวินาที

Δr^{j} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากวงโคจรของดาวเทียม มีหน่วยเป็นเมตร

d_{ion} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์ มีหน่วยเป็นเมตร

d_{trop} คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์ มีหน่วยเป็นเมตร

และจาก $\Delta\delta^{j}_{i}(t) = \delta_{i}(t) - \delta^{j}(t)$

จะได้ว่า

$$\Phi^{j}_{i}(t) + f^{j}\delta^{j}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{j}_{i}(t) + N^{j}_{i} + f^{j}\delta_{i}(t) + \Delta r^{j} - d_{ion} + d_{trop} \qquad (2.2)$$

2.2 ค่าคลาดเคลื่อนต่างๆ

สามารถพิจารณาความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นแยกเป็น 3 กลุ่มได้ดังนี้

2.2.1 ความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับดาวเทียม (Satellite-Dependent Biases)

2.2.1.1 ความคลาดเคลื่อนของวงโคจรดาวเทียม (Satellite Orbit Bias)

ความคลาดเคลื่อนของวงโคจรดาวเทียมมีสาเหตุมาจากวงโคจรดาวเทียมที่มาจากข้อมูลดาวเทียมในสัญญาณที่รับได้นั้นเป็นวงโคจรที่ได้จากการคำนวณล่วงหน้า โดยอาศัยรูปจำลองของแรงต่างๆที่กระทำต่อดาวเทียม รูปจำลองที่ใช้อาจจะไม่ถูกต้องหรือไม่ละเอียดเพียงพอเมื่อเทียบกับแรงจริง ๆ ที่กระทำต่อดาวเทียมในขณะที่ทำการวัด ดังนั้นตำแหน่งของดาวเทียมจากอิฟีเมอริสดาวเทียมที่ส่งกระจายลงมาพร้อมสัญญาณดาวเทียมนั้นจึงไม่ถูกต้อง เราสามารถลดความคลาดเคลื่อนของวงโคจรดาวเทียมได้โดยใช้เทคนิคของการหาค่าต่างครั้งที่สองซึ่งจะกล่าวในส่วนต่อไป หรือโดยใช้ข้อมูลวงโคจรดาวเทียมที่คำนวณหาได้หลังจากที่ดาวเทียมนั้นได้โคจรผ่านตำแหน่งนั้นๆแล้ว โดยข้อมูลดังกล่าวถูกจัดทำโดยองค์กร IGS และข้อมูลดังกล่าวก็สามารถดาวน์โหลดได้จากอินเตอร์เน็ต

2.2.1.2 ความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียม (Satellite Clock Bias)

ชูเกียรติ วิเชียรเจริญ และเฉลิมชนม์ สถิระพจน์ (2545) ได้อธิบายถึงเวลาจีพีเอส และเวลาดาวเทียมไว้ดังนี้

"เวลาจีพีเอส หมายถึง เวลาที่ใช้เป็นมาตรฐานอ้างอิงในระบบจีพีเอส โดยมีสถานีควบคุมหลัก (Master Control Station) ทำหน้าที่เป็นผู้เฝ้าระวังและรักษาเวลาจีพีเอสให้มีความถูกต้องและเที่ยงตรง โดยปกติเวลาจีพีเอสและเวลามาตรฐานสากล (UTC) จะถูกรักษาให้ต่างกันไม่เกิน 100 ns (10^{-7} วินาที)

เวลาดาวเทียม หมายถึง เวลาที่อ่านได้จากนาฬิกาดาวเทียม บนดาวเทียมแต่ละดวงจะมีมาตรฐานความถี่อะตอมที่เป็นรูบิเดียม 2 เครื่อง และซีเซียม 2 เครื่อง เวลามาตรฐานอ้างอิงมาจากค่าเฉลี่ยมาตรฐานความถี่ 4 เครื่องนี้ สถานีควบคุมหลักสามารถควบคุมเวลาดาวเทียมให้ต่างจากเวลาจีพีเอสไม่เกิน 1 ใน 1000 วินาที (1 ms) และควบคุมความถี่ให้มีความถูกต้องถึง 10^{-9}"

นอกจากความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียมจะเกิดจากการเทียบเวลา และความถี่มาตรฐานแล้วยังมีความคลาดเคลื่อนระยะยาวที่เกิดจากความไม่เสถียรของมาตรฐานความถี่ที่เรียกว่า ดริฟท์ (drift) อีกด้วย โดยข้อมูลความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียมแต่ละดวงอยู่ในข้อมูลดาวเทียมที่ส่งลงมากับสัญญาณ ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการคำนวณล่วงหน้าจากสถานีควบคุมหลักเช่นเดียวกับวงโคจรดาวเทียม โดยเราสามารถลดความคลาดเคลื่อนของนาฬิกาดาวเทียมได้โดยใช้เทคนิคของการหาค่าต่างครั้งที่สองซึ่งจะกล่าวในส่วนต่อไป หรือจากข้อมูลขององค์กร IGS เช่นเดียวกับความคลาดเคลื่อนของวงโคจรดาวเทียม

2.2.2 ความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับเครื่องรับสัญญาณ (Receiver-Dependent Biases)

ความคลาดเคลื่อนของเครื่องรับได้แก่

- Receiver Clock ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากนาฬิกาเครื่องรับ
- noise ในการวัดของเครื่องรับ โดยทั่ว ๆ ไปมีขนาดประมาณ 1% ของค่าความยาวคลื่นของสัญญาณที่กำลังวัด
- ความคลาดเคลื่อนระหว่างช่องรับสัญญาณ (Interchannel bias)

ในส่วนของค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากนาฬิกาเครื่องรับสามารถลดความคลาดเคลื่อนได้โดยใช้เทคนิคของการหาค่าต่างครั้งที่สองซึ่งจะกล่าวในส่วนต่อไป และในปัจจุบันเครื่องรับรุ่นใหม่ ๆ สามารถทำให้ทั้ง noise ในการวัดของเครื่องรับและความคลาดเคลื่อนระหว่างช่องรับสัญญาณมีค่าลดลงไปมาก

2.2.3 ความคลาดเคลื่อนที่เกี่ยวข้องกับการแพร่กระจายของสัญญาณ(Signal Propagation Biases)

2.2.3.1 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์ (Ionospheric delay)

เนื่องจากอิเล็คตรอนอิสระในชั้นบรรยากาศทำให้สัญญาณของ GPS ไม่สามารถเดินทางด้วยความเร็วแสงได้ดังนั้นซูโดเรนจ์ที่ได้จึงมีขนาดมากกว่าความเป็นจริง โดยเราสามารถลดความคลาดเคลื่อนชนิดนี้ได้จากการใช้แบบจำลองที่เหมาะสมในกรณีของเครื่องรับแบบ 2 ความถี่ แต่ในกรณีของการหาตำแหน่งแบบสัมพัทธ์ด้วยวิธีสถิตโดยวิธีการหาค่าต่างครั้งที่สองนั้น เมื่อความยาวเส้นฐานมีขนาดสั้น (ไม่เกิน 15 กิโลเมตร) ค่าความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์จะมีขนาดเล็กมากจนสามารถที่จะละเลยได้

2.2.3.2 ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์ (Tropospheric delay)

ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นโทรโพสเฟียร์ไม่ขึ้นอยู่กับความถี่ของคลื่นส่ง แต่ขึ้นอยู่กับความกดดันอุณหภูมิและความชื้นในบรรยากาศ โดยอิทธิพลของบรรยากาศที่มีต่อการวัดระยะแยก

ออกเป็นส่วนประกอบชื้นและแห้ง โดยเราจะลดค่าความคลาดเคลื่อนดังกล่าวจากการใช้แบบจำลอง Saastamoinen (Hofmann-Wellenhof,2001 : 113-116) ดังสมการ

$$\Delta^{Trop} = (0.002277/\cos z)\ (\ p + ((1255/T) + 0.05)e - B \tan^2 z) \tag{2.3}$$

โดยที่

Δ^{Trop} คือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากชั้นโทรโพสเฟียร์ มีหน่วยเป็นเมตร

z คือ มุมที่วัดจากแนวดิ่งของดาวเทียม (Zenith angle of the satellite) หน่วยเป็นองศา

p คือ ค่าความกดอากาศ หน่วยเป็น มิลลิบาร์

T คือ อุณหภูมิ หน่วยเป็น เคลวิน (Kelvin)

e คือ ค่าความชื้นในอากาศ (Partial pressure of water vapor) หน่วยเป็น มิลลิบาร์

B คือ ค่าแก้เนื่องจากความสูงของสถานีที่รับสัญญาณเหนือระดับน้ำทะเล (กิโลเมตร) มีหน่วยเป็น มิลลิบาร์ ซึ่งสามารถหาค่าแก้นี้ได้จากตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าแก้เนื่องจากความสูงของสถานีรับสัญญาณ

ความสูง (กิโลเมตร)	B (มิลลิบาร์)
0.0	1.156
0.5	1.079
1.0	1.006
1.5	0.938
2.0	0.874
2.5	0.813
3.0	0.757
4.0	0.654
5.0	0.563

2.2.3.3 ความคลาดเคลื่อนจากคลื่นหลายวิถี (Multipath)

คลื่นหลายวิถี หมายถึง การแพร่กระจายของคลื่นที่มีการสะท้อนตั้งแต่หนึ่งครั้งขึ้นไป พื้นผิวที่สะท้อนอาจอยู่ในแนวดิ่ง ราบ หรือเอียงก็ได้ ผลของคลื่นสะท้อนเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้เกิดคลื่นหลุด (Cycle Slip) โดยเราสามารถหลีกเลี่ยงการรับสัญญาณที่มีคลื่นสะท้อนได้โดย

- เลือกจุดวางเครื่องรับที่ไม่มีพื้นผิวสะท้อนอยู่ใกล้เคียง
- เลือกเสาอากาศที่ออกแบบเฉพาะ เช่น เสาอากาศที่มีแผ่นกาวน์
- ใช้วัสดุที่ดูดซับคลื่นวางรอบเสาอากาศ

2.2.3.4 ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุด (Cycle Slip)

คลื่นหลุดหมายถึง การที่เครื่องรับสัญญาณไม่สามารถจับสัญญาณดาวเทียมได้ในขณะหนึ่ง และจากนั้นก็พยายามที่จะจับสัญญาณดาวเทียมอีกครั้ง ซึ่งทำให้เลขปริศนาตั้งต้นเปลี่ยนไป เมื่อใดก็ตามที่เกิดคลื่นหลุดขึ้น ก็จะมีเลขปริศนาเกิดขึ้นใหม่อีกค่าหนึ่งและจะต้องทำการหาเลขปริศนาใหม่ดังกล่าวในขั้นตอนของการประมวลผล ซึ่งเราสามารถใช้เทคนิคการหาค่าต่างครั้งที่สามตรวจหาคลื่นหลุดได้ (เฉลิมชนม์, 2546) โดยวิธีการแก้ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุดนี้จะกล่าวถึงในส่วนถัดไป

จากที่กล่าวมาในข้างต้น เราสามารถหาค่าพิกัดของจุดต่างๆได้โดยใช้สมการ (2.1) และ (2.2) แล้วทำการปรับแก้ค่าความคลาดเคลื่อนต่างๆ ทั้งความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากดาวเทียม, ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากตัวรับสัญญาณ, และความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการแพร่กระจายของสัญญาณอยู่ โดยใช้วิธีการดังที่กล่าวมา รวมกับการใช้วิธี Least-Squares Adjustment เราก็สามารถหาค่าพิกัดของแต่ละจุดได้ ซึ่งในการขจัดค่าคลาดเคลื่อนต่างๆออกไปเพื่อให้ได้เส้นฐานที่มีความถูกต้องสูงนั้น จำเป็นต้องใช้เทคนิคการหาค่าต่าง ซึ่งก็จะมีอยู่ 3 แบบ โดยมีรายละเอียดอยู่ในหัวข้อต่อไปนี้

2.3 การหาค่าต่างครั้งที่ 1 ระหว่างเครื่องรับ

ใช้สำหรับลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากนาฬิกาดาวเทียม, ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากวงโคจรของดาวเทียม, และความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศทั้งจากไอโอโนสเฟียร์และโทรโพสเฟียร์ กล่าวคือเป็นการหาค่าระหว่างจุดสองจุดและดาวเทียมหนึ่งดวง เช่น ระหว่างจุด A และจุด B และดาวเทียม j ซึ่งจากสมการ (2.2) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Phi^{j}_{A}(t) + f^{j}\delta^{j}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{j}_{A}(t) + N^{j}_{A} + f^{j}\delta_{A}(t) + \Delta r^{j} - d_{ion} + d_{trop}$$

$$\Phi^{j}_{B}(t) + f^{j}\delta^{j}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{j}_{B}(t) + N^{j}_{B} + f^{j}\delta_{B}(t) + \Delta r^{j} - d_{ion} + d_{trop} \qquad (2.4)$$

จะได้ผลต่างระหว่างสมการทั้งสองคือ

$$\Phi^{j}_{B}(t) - \Phi^{j}_{A}(t) = \frac{1}{\lambda}[\rho^{j}_{B}(t) - \rho^{j}_{A}(t)] + N^{j}_{B} - N^{j}_{A} + f^{j}[\delta_{B}(t) - \delta_{A}(t)]$$

จะได้ $\Phi^{j}_{AB}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{j}_{AB}(t) + N^{j}_{AB} + f^{j}\delta_{AB}(t)$ (2.5)

โดยที่

$$\Phi^{j}_{AB}(t) = \Phi^{j}_{B}(t) - \Phi^{j}_{A}(t)$$

$$\rho^{j}_{AB}(t) = \rho^{j}_{B}(t) - \rho^{j}_{A}(t)$$

$$N^{j}_{AB} = N^{j}_{B} - N^{j}_{A}$$

$$\delta_{AB}(t) = \delta_{B}(t) - \delta_{A}(t)$$

2.4 การหาค่าต่างครั้งที่ 2

ใช้สำหรับลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากนาฬิกาดาวเทียม, ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากวงโคจรของดาวเทียม, ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศทั้งจากไอโอโนสเฟียร์และโทรโพสเฟียร์, และความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากนาฬิกาเครื่องรับ กล่าวคือเป็นการหาค่าระหว่างจุดสองจุดและดาวเทียมสองดวง เช่น ระหว่างจุด A, B และดาวเทียม j, k ซึ่งจากสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\Phi^{j}_{AB}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{j}_{AB}(t) + N^{j}_{AB} + f^{j}\delta_{AB}(t)$$

$$\Phi^{k}_{AB}(t) = \frac{1}{\lambda}\rho^{k}_{AB}(t) + N^{k}_{AB} + f^{k}\delta_{AB}(t) \qquad (2.6)$$

การหาค่าต่างครั้งที่ 2 นั้นได้จากการเอาค่าต่างครั้งที่ 1 มาหักลบกัน ได้ดังนี้

$$\Phi^{k}_{AB}(t) - \Phi^{j}_{AB}(t) = \frac{1}{\lambda}[\rho^{k}_{AB}(t) - \rho^{j}_{AB}(t)] + N^{k}_{AB} - N^{j}_{AB}$$

จะได้ $$\Phi^{jk}_{AB}(t) = \frac{1}{\lambda}\,\rho^{jk}_{AB}(t) + N^{jk}_{AB} \tag{2.7}$$

โดยที่

$$\Phi^{jk}_{AB}(t) = \Phi^{k}_{B}(t) - \Phi^{j}_{B}(t) - \Phi^{k}_{A}(t) + \Phi^{j}_{A}(t)$$
$$\rho^{jk}_{AB}(t) = \rho^{k}_{B}(t) - \rho^{j}_{B}(t) - \rho^{k}_{A}(t) + \rho^{j}_{A}(t)$$
$$N^{jk}_{AB} = N^{k}_{B} - N^{j}_{B} - N^{k}_{A} + N^{j}_{A}$$

2.5 การหาค่าต่างครั้งที่ 3

เป็นการหาผลต่างระหว่างค่าต่างครั้งที่ 2 สองค่า มีประโยชน์คือใช้ในการตรวจหาและประมาณค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุด (Cycle Slip) ซึ่งถ้านำข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุดมาหาค่าต่างครั้งที่ 3 จะได้ว่าค่า N^{jk}_{AB} ที่เวลา t_1 และ t_2 จะมีค่าที่ต่างกันเนื่องจากความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุดทำให้ค่า N^{jk}_{AB} ต่างกัน เมื่อนำมาหาค่าต่างก็จะได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุดดังกล่าว ซึ่งจากสมการ (3.6) ถ้าไม่มีความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุด จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Phi^{jk}_{AB}(t_1) &= \frac{1}{\lambda}\,\rho^{jk}_{AB}(t_1) + N^{jk}_{AB} \\ \Phi^{jk}_{AB}(t_2) &= \frac{1}{\lambda}\,\rho^{jk}_{AB}(t_2) + N^{jk}_{AB} \end{aligned} \tag{2.8}$$

จะได้ผลต่างคือ

$$\begin{aligned} \Phi^{jk}_{AB}(t_2) - \Phi^{jk}_{AB}(t_1) &= \frac{1}{\lambda}[\,\rho^{jk}_{AB}(t_2) - \rho^{jk}_{AB}(t_1)] \\ \Phi^{jk}_{AB}(t_{12}) &= \frac{1}{\lambda}\,\rho^{jk}_{AB}(t_{12}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \Phi^{jk}_{AB}(t_{12}) = &+ \Phi^{k}_{B}(t_2) - \Phi^{j}_{B}(t_2) - \Phi^{k}_{A}(t_2) + \Phi^{j}_{A}(t_2) \\ &- \Phi^{k}_{B}(t_1) + \Phi^{j}_{B}(t_1) + \Phi^{k}_{A}(t_1) - \Phi^{j}_{A}(t_1) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \rho^{jk}_{AB}(t_{12}) = &+ \rho^{k}_{B}(t_2) - \rho^{j}_{B}(t_2) - \rho^{k}_{A}(t_2) + \rho^{j}_{A}(t_2) \\ &- \rho^{k}_{B}(t_1) + \rho^{j}_{B}(t_1) + \rho^{k}_{A}(t_1) - \rho^{j}_{A}(t_1) \end{aligned}$$

2.6 การตรวจหาความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุด

ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากชั้นบรรยากาศโทรโพสเฟียร์นั้น สามารถที่จะขจัดออกไปได้โดยใช้แบบจำลอง Hopfield Model หรือ Saastamoinen Model ส่วนความคลาดเคลื่อนที่เกิดจาก Cycle Slip ต้องใช้วิธีการตรวจสอบข้อมูล (Pre-processing) เพื่อหาค่าคลาดเคลื่อนเหล่านั้นและทำการซ่อมแซมข้อมูลก่อน แล้วจึงจะนำข้อมูลที่ได้ไปทำการคำนวณเพื่อหาค่าพิกัดต่อไป

ลักษณะของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุด คือ ค่าสังเกตทั้งหมดที่ได้หลังจากการเกิดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุดนั้นจะมีการเลื่อนค่าไปเป็นจำนวนตัวเลขหนึ่ง ซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 3.1 จะเห็นได้ว่า ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุด (เขียนแทนด้วย Δ) เกิดกับเครื่องรับ A เมื่อรับสัญญาณจากดาวเทียม j ในระหว่างขณะเวลา i-1 และ i

ซึ่งก่อนที่จะทำการประมวลผล จะต้องทำการซ่อมแซมข้อมูลค่าสังเกตที่ได้จากการหาค่าต่างครั้งที่สองก่อนโดยการหาค่าต่างครั้งที่สาม ซึ่งเป็นการหาค่าต่างระหว่างขณะเวลาของการหาค่าต่างครั้งที่สอง จะบ่งชี้ถึงตำแหน่งของการเกิดคลื่นหลุด ส่วนขนาดของการเกิดคลื่นหลุดสามารถหาได้จากขนาดของค่าต่างครั้งที่สองที่เกิดการเลื่อนตัวขึ้น

ตารางที่ 2.2 แสดงผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนจากคลื่นหลุดที่มีต่อการหาค่าต่างในเฟสของคลื่นส่ง (Alfred Leick, 1994)

Carrier phase				Double difference	Triple difference
$\Phi^j{}_A(i\text{-}2)$	$\Phi^k{}_B(i\text{-}2)$	$\Phi^j{}_A(i\text{-}2)$	$\Phi^k{}_B(i\text{-}2)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i\text{-}2)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i\text{-}1,i\text{-}2)$
$\Phi^j{}_A(i\text{-}1)$	$\Phi^k{}_B(i\text{-}1)$	$\Phi^j{}_A(i\text{-}1)$	$\Phi^k{}_B(i\text{-}1)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i\text{-}1)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i,i\text{-}1) - \Delta$
$\Phi^j{}_A(i)$	$\Phi^k{}_B(i)$	$\Phi^j{}_A(i) + \Delta$	$\Phi^k{}_B(i)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i) + \Delta$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i+1,i)$
$\Phi^j{}_A(i+1)$	$\Phi^k{}_B(i+1)$	$\Phi^j{}_A(i+1) + \Delta$	$\Phi^k{}_B(i+1)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i+1) + \Delta$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i+2,i+1)$
$\Phi^j{}_A(i+2)$	$\Phi^k{}_B(i+2)$	$\Phi^j{}_A(i+2) + \Delta$	$\Phi^k{}_B(i+2)$	$\delta^{jk}{}_{AB}(i+2) + \Delta$	

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นได้ว่าในการหาค่าต่างครั้งที่สอง ค่าสังเกตที่ได้ตั้งแต่ขณะเวลา i เป็นต้นไป กับค่าสังเกตที่ได้ก่อนหน้านั้น มีความต่างกันอยู่เท่ากับค่าของ Δ แต่ค่าสังเกตที่ได้จากการหาค่าต่างครั้งที่สาม จะมีเพียงค่าสังเกตเดียวที่มีผลจากการเกิดคลื่นหลุด

เราจึงได้ใช้การหาค่าต่างครั้งที่สามในการตรวจหาความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากคลื่นหลุดโดยการตรวจหาค่าที่กระโดดออกจากค่าอื่นๆ ซึ่งในซอฟต์แวร์ที่ได้พัฒนาขึ้นได้ใช้วิธีของการ moving window ในการหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) โดยใช้ขนาดของ window ให้มีขนาดเท่ากับ 5 ช่วงข้อมูล แล้วหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในแต่ละ 5 ช่วงข้อมูลโดย

เลื่อนไปทีละ 1 ข้อมูลและทำเช่นนี้จนสิ้นสุดข้อมูล จากนั้นจึงวิเคราะห์ค่าที่ได้ว่าค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานใดที่มีค่ามากกว่าค่าที่กำหนด ค่าที่ได้จากขณะเวลานั้นก็จะเป็นค่าที่เกิดคลื่นหลุดขึ้น ดังเช่นตารางที่ 2.2 ขณะเวลาที่เกิดคลื่นหลุดก็คือ ช่วงเวลาที่อยู่ระหว่างขณะเวลา *i-1* กับขณะเวลา *i*

เมื่อหาขณะเวลาที่เกิดคลื่นหลุดได้แล้ว ก็ทำการหาขนาดของคลื่นหลุดต่อไป ซึ่งในซอฟต์แวร์ที่ได้พัฒนาขึ้นนั้นได้ใช้วิธีอย่างง่ายในการหาขนาดของคลื่นหลุด โดยการหาความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตที่ได้จากการหาค่าต่างครั้งที่สองในช่วงเวลาที่เกิดคลื่นหลุด ซึ่งจากตารางที่ 2.2 จะได้ว่าขนาดของคลื่นหลุดเท่ากับค่าสังเกตของการหาค่าต่างครั้งที่สอง ณ ขณะเวลาหลังเกิดคลื่นหลุด ($\delta^{jk}_{AB}(i) + \Delta$) ลบด้วยค่าสังเกตของการหาค่าต่างครั้งที่สอง ณ ขณะเวลาก่อนเกิดคลื่นหลุด ($\delta^{jk}_{AB}(i\text{-}1)$) ค่าที่ได้จะเป็นผลรวมของขนาดของค่าสังเกตของการหาค่าต่างครั้งที่สองที่เพิ่มขึ้น ณ ขณะเวลาหนึ่ง (มีขนาดใกล้เคียงกับขณะเวลาที่ใกล้ๆกัน) กับค่าขนาดของคลื่นหลุด แล้วจึงนำค่าสังเกตของการหาค่าต่างครั้งที่สองที่เพิ่มขึ้น ณ ขณะเวลาหนึ่งของขณะเวลาที่ใกล้ๆกันมาลบออก ก็จะได้ขนาดของคลื่นหลุดเพียงอย่างเดียว

แต่เนื่องจากค่าของคลื่นหลุดที่ได้จากที่กล่าวไปแล้วนั้น จะมีค่าเป็นตัวเลขไม่เต็มจำนวนคือมีเศษทศนิยมอยู่ จึงต้องทำการประมาณค่าให้อยู่ในรูปของตัวเลขจำนวนเต็ม โดยเลือกค่าจำนวนเต็มที่ใกล้กับค่าที่ได้มากที่สุด ก็จะได้ค่าขนาดของคลื่นหลุดตามต้องการ จากนั้นจึงทำการลบค่าขนาดของคลื่นหลุดลงในค่าสังเกตของการหาค่าต่างครั้งที่สองตั้งแต่ขณะเวลาหลังจากการเกิดคลื่นหลุด (ขณะเวลา *i* ตามตารางที่ 2.2) จนถึงขณะเวลาสุดท้ายของค่าสังเกต แล้วนำค่าสังเกตของการหาค่าต่างครั้งที่สองที่ได้ลบขนาดของคลื่นหลุดแล้วไปทำการปรับแก้ด้วยวิธีลีสท์สแควร์ต่อไป

แต่วิธีการของการหาขนาดของคลื่นหลุดนี้มีข้อด้อยคือ สามารถใช้ได้กับข้อมูลที่ไม่มีความคลาดเคลื่อนมากๆ เนื่องจากเมื่อข้อมูลมีความคลาดเคลื่อนมากๆแล้ว การหาผลต่างดังกล่าว จะได้รับผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนด้วย ทำให้การหาขนาดของคลื่นหลุดผิดพลาดได้

2.7 การปรับแก้ด้วยวิธีลีสท์สแควร์ด้วยสมการค่าสังเกตกับข้อมูลจีพีเอส

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้น เราจะต้องมีจำนวนข้อมูลที่มากกว่าหรือเท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องการทราบ นอกจากนี้เราต้องสามารถกำหนดความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างข้อมูลกับพารามิเตอร์ให้ได้ และในโลกของความเป็นจริง ข้อมูลที่เรารังวัดได้ก็ไม่ได้ถูกต้องสมบูรณ์ 100% เพราะมีค่าคลาดเคลื่อนเจอปนอยู่เสมอ ก่อนที่จะเริ่มขบวนการประมาณค่าของพารามิเตอร์จะต้องทำการปรับแก้ค่าคลาดเคลื่อนที่มีอยู่ในข้อมูล แล้วจึงนำข้อมูลที่ได้ปรับแก้ค่าคลาดเคลื่อนแล้วไปทำการประมาณค่าต่อไป ซึ่งขั้นตอนของการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ด้วยสมการค่าสังเกตสามารถแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u>

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Functional or Mathematical model) และแบบจำลองสโตคาสติก (Stochastic model) โดยที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างข้อมูลที่รังวัดได้กับค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่า ในขณะที่แบบจำลองสโตคาสติกจะเป็นการนำเอาค่าคลาดเคลื่อนที่หลงเหลืออยู่หรือไม่สามารถอธิบายไว้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาอธิบายไว้ในเมตริกซ์ค่าน้ำหนักของข้อมูล (Weight matrix)

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์โดยวิธีสมการค่าสังเกต หากสมมติว่ามีจำนวนข้อมูลรังวัดทั้งหมด n ข้อมูล จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ n แบบจำลองดังนี้

$$
\begin{aligned}
f_1(\bar{x}) &= \bar{l}_1 \\
f_2(\bar{x}) &= \bar{l}_2 \\
&\;\;\vdots \\
f_n(\bar{x}) &= \bar{l}_n
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

โดยที่ $\bar{x}$ คือค่าจริงของพารามิเตอร์ และ $\bar{l}$ คือค่าจริงของข้อมูลรังวัด

ในการสร้างแบบจำลองสโตคาสติก จะเริ่มจากการกำหนดค่าความคาดหวังของคุณภาพของข้อมูล (Expected quality of observations) และความเกี่ยวพันระหว่างข้อมูลแต่ละตัว (Covariance marix) ของข้อมูล รายละเอียดของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของข้อมูลแสดงได้ดังนี้

$$
C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \tag{2.11}
$$

โดยที่ C คือ เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของข้อมูลและมีขนาด n x n

สำหรับองค์ประกอบตามแนวเส้นทแยงของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (เช่น σ_n^2) คือ ค่าความแปรปรวนของข้อมูลแต่ละตัว ส่วนองค์ประกอบนอกแนวเส้นทแยงของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (เช่น σ_{n1}) คือ ค่าความเกี่ยวพันระหว่างข้อมูล (Correlation between observation)

และเมื่อนำเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมมาหาส่วนกลับ (Inverse) ก็จะได้เมตริกซ์ค่าน้ำหนักของข้อมูล (P) ดังความสัมพันธ์

$$P = C^{-1} \tag{2.12}$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u>

การกำหนดค่าประมาณเริ่มต้นให้กับพารามิเตอร์ ซึ่งในการกำหนดค่าประมาณเริ่มต้นมักทำได้หลายวิธี เช่น การคำนวณแบบหยาบๆจากข้อมูลที่มีอยู่ การใช้ค่าที่ได้จากการปรับแก้ด้วยลีทธ์สแควร์ก่อนหน้านี้ หรือการคาดเดา เป็นต้น สิ่งที่ควรระวังในการกำหนดค่าประมาณเริ่มต้นคือ หากมีการให้ค่าประมาณเริ่มต้นที่แย่มากๆ อาจจะมีผลให้ผลที่ได้จากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ ซึ่งจะมีการวนซ้ำ ไม่เกิดการลู่เข้า (Convergence) หากสมมติว่ามีจำนวนพารามิเตอร์ทั้งหมด m ตัว จะต้องทำการกำหนดค่าประมาณเริ่มต้นให้กับค่าพารามิเตอร์ m ตัวดังนี้

$$\begin{aligned} x_1^o &\cong \bar{x}_1 \\ x_2^o &\cong \bar{x}_2 \\ &. \\ &. \\ x_m^o &\cong \bar{x}_m \end{aligned} \tag{2.13}$$

โดยที่ x^o คือค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์

<u>ขั้นตอนที่ 3</u>

การทำให้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นในขั้นตอนที่ 1 เป็นสมการเชิงเส้น (Linearise function model) เพื่อทำให้ขั้นตอนการคำนวณต่างๆที่ตามมา สามารถใช้สมการทางพีชคณิตเชิงเส้น (Linear algebra) คำนวณได้ และโดยทั่วไปการทำให้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นสมการเชิงเส้นนั้น จะอาศัยวิธีการกระจายแบบอนุกรมของเทย์เลอร์ลำดับแรก (First order Taylor’s series expansion) โดยที่จะทำการตัดเทอมลำดับสูงออกไป ในที่นี้จะขอยกสมการที่ผ่านการทำให้เป็นเชิงเส้นของการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ดดยวิธีการสมการค่าสังเกตมาดังนี้

$$Ax = L + V \tag{2.14}$$

โดยที่ A คือ Design matrix มีขนาด n x m โดยเมตริกซ์นี้จะประกอบไปด้วยการหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial derivative) ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัว ซึ่งแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots\ \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots\ \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots\ \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

L คือ เวคเตอร์ค่าสังเกต (Observation vector) มีขนาด n x 1 โดยเวคเตอร์นี้จะคำนวณได้จากการนำข้อมูลหรือค่าสังเกต (l) มาลบกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้แทนค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์เข้าไป ($f(x^o)$) ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$L = \begin{pmatrix} l_1 - f_1(x^o) \\ l_2 - f_2(x^o) \\ \cdot \\ l_n - f_n(x^o) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

x คือ เวคเตอร์ค่าพารามิเตอร์ (Parameter vector) มีขนาด m x 1

และ V คือ เวคเตอร์ค่าเศษเหลือ (Residual vector) มีขนาด n x 1

<u>ขั้นตอนที่ 4</u>

การสร้างและคำนวณสมการปกติ (Normal equation) ในที่นี้จะขอละขั้นตอนการพิสูจน์หาที่มาของสมการปกติ โดยสมการปกติสามารถแสดงได้ดังนี้

$$(A^T PA)\hat{x} = A^T PL \tag{2.17}$$

โดยที่ $\hat{x}$ คือเวคเตอร์ขนาด m x 1 ที่เป็นค่าแก้สำหรับค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์ จากสมการ (2.15) เราสามารถคำนวณเวคเตอร์ $\hat{x}$ ได้ดังนี้

$$\hat{x} = (A^T PA)^{-1} A^T PL \qquad (2.18)$$

เมื่อนำ $\hat{x}$ ที่คำนวณได้ไปบวกกับค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์ เราก็สามารถคำนวณค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ดังนี้

$$x^{ls} = x^o + \hat{x} \qquad (2.19)$$

โดยที่ x^{ls} คือ ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์

ในทางปฏิบัติมักจะมีการวนซ้ำ (Iteration) เนื่องจากค่า $\hat{x}$ มักจะมีขนาดใหญ่ในการคำนวณรอบแรก ในกรณีที่ต้องมีการวนซ้ำของการคำนวณ การคำนวณจะกลับไปที่ขั้นตอนที่ 3 โดยใช้ค่า x^{ls} ที่คำนวณได้ไปใช้เป็นค่าประมาณเริ่มต้นของพารามิเตอร์ โดยทั่วไปจะมีการกำหนดค่าขอบเขตของการลู่เข้า (Convergence limit) ไว้ค่าหนึ่งและนำค่า $\hat{x}$ มาเปรียบเทียบกับค่าขอบเขตของการลู่เข้า หากพบว่าค่า $\hat{x}$ มีขนาดเล็กกว่าค่าขอบเขตของการลู่เข้าก็จะหยุดวนซ้ำ

<u>ขั้นตอนที่ 5</u>

การคำนวณเวคเตอร์ค่าประมาณของเศษเหลือ (Estimate residual vector, $\hat{V}$) เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเศษเหลือ (Covariance matrix of residuals, $C_{\hat{V}}$) และค่า Unit variance (σ_o^2) จากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์

เราสามารถคำนวณเวคเตอร์ค่าประมาณของเศษเหลือได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\hat{V} = A\hat{x} - L \qquad (2.20)$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเศษเหลือสามารถคำนวณได้จาก

$$C_{\hat{V}} = P^{-1} - A(A^T PA)^{-1} A^T \qquad (2.21)$$

และสามารถคำนวณค่า Unit variance ได้จาก

$$\sigma_o^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{n - m} \tag{2.22}$$

โดยที่ค่าความคาดหวัง (Expectation value) ของค่า Unit variance คือ 1

<u>ขั้นตอนที่ 6</u>

การคำนวณค่าความละเอียดถูกต้องและตัวบ่งชี้คุณภาพ ค่าความละเอียดถูกต้องของพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่า สามารถตรวจสอบได้จากเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ (Covariance matrix of parameters, $C_{\hat{X}}$) โดยเราสามารถคำนวณเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ได้จาก

$$C_{\hat{X}} = (A^T P A)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_m} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{X_mX_1} & \sigma_{X_mX_2} & \cdots & \sigma_{X_m}^2 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

โดยที่องค์ประกอบตามแนวเส้นทแยงของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์คือค่าความแปรปรวนของพารามิเตอร์แต่ละตัว ส่วนองค์ประกอบนอกแนวเส้นทแยงของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์คือ ค่าความเกี่ยวพันระหว่างพารามิเตอร์ (Correlation between parameters)

ในการประมวลผลเส้นฐานจีพีเอสด้วยข้อมูลเฟสของคลื่นส่ง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์โดยวิธีสมการค่าสังเกตจะเป็นการนำข้อมูลเฟสของคลื่นส่งมาหาค่าต่างครั้งที่สอง โดยจะขอยกสมการ (2.7) ซึ่งเป็นสมการค่าต่างครั้งที่สองมาแสดงอีกครั้ง

$$\Phi^{jk}_{AB}(t) = \frac{1}{\lambda} \rho^{jk}_{AB}(t) + N^{jk}_{AB} \tag{2.24}$$

โดยที่

$$\rho^{jk}_{AB}(t) = \rho^{k}_{B}(t) - \rho^{j}_{B}(t) - \rho^{k}_{A}(t) + \rho^{j}_{A}(t) \tag{2.25}$$

และเมื่อพิจารณาถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการหาตำแหน่งด้วยจีพีเอสในสมการค่าต่างครั้งที่สองนั้น จะพบว่ามีเพียงเทอม ρ เท่านั้นที่ยังอยู่ในรูปแบบที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นจะอธิบายถึงการทำให้สมการของ ρ ให้เป็นสมการเชิงเส้นดังนี้

จาก $$\rho = \sqrt{(X^j - X_i)^2 + (Y^j - Y_i)^2 + (Z^j - Z_i)^2} \equiv f(X_i, Y_i, Z_i) \qquad (2.26)$$

สมการข้างต้นแสดงให้เห็นว่า ค่าพิกัดของเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม ($X_i, Y_i,$ และ Z_i) ยังอยู่ในรูปแบบที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น หากสมมติให้ $X_{i0}, Y_{i0},$ และ Z_{i0} เป็นค่าประมาณเริ่มต้นของค่าพิกัดของเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม ดังนั้นค่าประมาณของระยะทางระหว่างเครื่องรับกับดาวเทียม สามารถคำนวณได้จาก

$$\rho_0 = \sqrt{(X^j - X_{i0})^2 + (Y^j - Y_{i0})^2 + (Z^j - Z_{i0})^2} \equiv f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}) \qquad (2.27)$$

หากแยกเทอม $X_i, Y_i,$ และ Z_i เป็นสองส่วนดังนี้

$$\begin{aligned} X_i &= X_{i0} + \Delta X_i \\ Y_i &= Y_{i0} + \Delta Y_i \\ Z_i &= Z_{i0} + \Delta Z_i \end{aligned} \qquad (2.28)$$

โดยถือว่า $\Delta X_i, \Delta Y_i,$ และ ΔZ_i เป็นพารามิเตอร์ใหม่ ซึ่งจะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์เดิมได้ถูกแยกออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่ทราบค่า ($X_{i0}, Y_{i0},$ และ Z_{i0}) และส่วนที่ไม่ทราบค่า ($\Delta X_i, \Delta Y_i,$ และ ΔZ_i) ข้อดีของการแยกในลักษณะนี้ก็คือ เราสามารถแทนฟังก์ชัน $f(X_i, Y_i, Z_i)$ ได้ด้วยฟังก์ชัน $f(X_{i0} + \Delta X_i, Y_{i0} + \Delta Y_i, Z_{i0} + \Delta Z_i)$ ที่มีค่าเท่ากัน และเราสามารถทำการกระจายฟังก์ชันนี้ได้ด้วยวิธีการกระจายแบบอนุกรมเทย์เลอร์ ดังแสดงได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} f(X_i, Y_i, Z_i) &= f(X_{i0} + \Delta X_i, Y_{i0} + \Delta Y_i, Z_{i0} + \Delta Z_i) \\ &= f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0}) + \frac{\partial f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}{\partial_{X_{i0}}} \Delta X_i \\ &\quad + \frac{\partial f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}{\partial Y_{i0}} \Delta Y_i + \frac{\partial f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}{\partial Z_{i0}} \Delta Z_i + \ldots \end{aligned} \qquad (2.29)$$

โดยที่จะหยุดการกระจายไว้ที่การกระจายลำดับแรก เนื่องจากการกระจายของเทอม $\Delta X_i , \Delta Y_i$, และ ΔZ_i ในลำดับถัดไปจะไม่อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น และจากการหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial derivative) ในสมการ (2.27) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}{\partial X_{i0}} &= -\frac{X^j - X_{i0}}{\rho_0} \\
\frac{\partial f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}{\partial Y_{i0}} &= -\frac{Y^j - Y_{i0}}{\rho_0} \\
\frac{\partial f(X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0})}{\partial Z_{i0}} &= -\frac{Z^j - Z_{i0}}{\rho_0}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

เมื่อแทนสมการ (2.27) และ (2.30) ลงในสมการ (2.29) จะได้

$$\rho = \rho_0 - \frac{X^j - X_{i0}}{\rho_0}\Delta X_i - \frac{Y^j - Y_{i0}}{\rho_0}\Delta Y_i - \frac{Z^j - Z_{i0}}{\rho_0}\Delta Z_i \tag{2.31}$$

จะพบว่าสมการ (2.31) เป็นสมการเชิงเส้นเมื่อเทียบกับพารามิเตอร์ $\Delta X_i , \Delta Y_i$, และ ΔZ_i

และจากสมการ (2.25) จะได้ว่า เทอม $\rho^{jk}_{AB}(t)$ นั้นจะประกอบไปด้วยระยะทางสี่เส้น และเมื่อทำให้ระยะทางแต่ละเส้นเป็นสมการเชิงเส้นทำนองเดียวกับสมการ (2.31) เราสามารถเขียนสมการ (2.25) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\rho^{jk}_{AB} = \rho^k_{B0} &- \frac{X^k - X_{B0}}{\rho^k_{B0}}\Delta X_B - \frac{Y^k - Y_{B0}}{\rho^k_{B0}}\Delta Y_B - \frac{Z^k - Z_{B0}}{\rho^k_{B0}}\Delta Z_B \\
- \rho^j_{B0} &+ \frac{X^j - X_{B0}}{\rho^k_{B0}}\Delta X_B + \frac{Y^j - Y_{B0}}{\rho^k_{B0}}\Delta Y_B + \frac{Z^j - Z_{B0}}{\rho^k_{B0}}\Delta Z_B \\
- \rho^k_{A0} &+ \frac{X^k - X_{A0}}{\rho^k_{A0}}\Delta X_A + \frac{Y^k - Y_{A0}}{\rho^k_{A0}}\Delta Y_A + \frac{Z^k - Z_{A0}}{\rho^k_{A0}}\Delta Z_A \\
+ \rho^j_{A0} &- \frac{X^j - X_{A0}}{\rho^k_{A0}}\Delta X_A - \frac{Y^j - Y_{A0}}{\rho^k_{A0}}\Delta Y_A - \frac{Z^j - Z_{A0}}{\rho^k_{A0}}\Delta Z_A
\end{aligned} \tag{2.32}$$

แทนสมการ (2.32) ลงในสมการ (2.24) จะได้

$$\Phi_{AB}^{jk} + \frac{1}{\lambda}(-\rho_{B0}^{k} + \rho_{B0}^{j} + \rho_{A0}^{k} - \rho_{A0}^{j}) = \frac{1}{\lambda}(a_{XA}^{jk}\Delta X_A + a_{YA}^{jk}\Delta Y_A + a_{ZA}^{jk}\Delta Z_A + a_{XB}^{jk}\Delta X_B + a_{YB}^{jk}\Delta Y_B + a_{ZB}^{jk}\Delta Z_B) + N_{AB}^{jk} \quad (2.33)$$

โดยที่

$$a_{XA}^{jk} = \frac{X^k - X_{A0}}{\rho_{A0}^k} - \frac{X^j - X_{A0}}{\rho_{A0}^j}$$

$$a_{YA}^{jk} = \frac{Y^k - Y_{A0}}{\rho_{A0}^k} - \frac{Y^j - Y_{A0}}{\rho_{A0}^j}$$

$$a_{ZA}^{jk} = \frac{Z^k - Z_{A0}}{\rho_{A0}^k} - \frac{Z^j - Z_{A0}}{\rho_{A0}^j}$$

$$a_{XB}^{jk} = -\frac{X^k - X_{B0}}{\rho_{B0}^k} + \frac{X^j - X_{B0}}{\rho_{B0}^j}$$

$$a_{YB}^{jk} = -\frac{Y^k - Y_{B0}}{\rho_{B0}^k} + \frac{Y^j - Y_{B0}}{\rho_{B0}^j}$$

$$a_{ZB}^{jk} = -\frac{Z^k - Z_{B0}}{\rho_{B0}^k} + \frac{Z^j - Z_{B0}}{\rho_{B0}^j}$$

ในกรณีของการหาตำแหน่งแบบสัมพัทธ์ จะต้องทราบค่าพิกัดของสถานีฐาน สมมติว่าจุด A เป็นสถานีฐาน ดังนั้นจำนวนพารามิเตอร์ที่ปรากฏในสมการ (2.33) จะหายไปสามตัว เนื่องจาก

$$\Delta X_A = \Delta Y_A = \Delta Z_A = 0$$

เทอมด้านขวามือของสมการ (2.33) จึงลดลง ส่วนเทอมซ้ายมือก็ปรับค่าจากค่าประมาณเป็นค่าจริง ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการ (2.33) ได้ใหม่ดังนี้

$$\Phi_{AB}^{jk} + \frac{1}{\lambda}(-\rho_{B0}^{k} + \rho_{B0}^{j} + \rho_{A}^{k} - \rho_{A}^{j}) = \frac{1}{\lambda}(a_{XB}^{jk}\Delta X_B + a_{YB}^{jk}\Delta Y_B + a_{ZB}^{jk}\Delta Z_B) + N_{AB}^{jk} \quad (2.34)$$

หากสมมติว่าในขณะเวลาที่รับสัญญาณ สามารถรับสัญญาณได้จากดาวเทียม 4 ดวงพร้อมกัน คือ ดาวเทียมหมายเลข 1, 2, 3, และ 4 และรับสัญญาณเพียง 1 ขณะเวลา(epoch) เราสามารถเขียน Design matrix (A), เวคเตอร์ค่าสังเกต (L) และเวคเตอร์ค่าพารามิเตอร์ (x) ได้ดังนี้

$$A = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} a_{XB}^{12} & a_{YB}^{12} & a_{ZB}^{12} & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{13} & a_{YB}^{13} & a_{ZB}^{13} & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{14} & a_{YB}^{14} & a_{ZB}^{14} & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

$$L = \begin{pmatrix} \Phi_{AB}^{12} + \frac{1}{\lambda}(-\rho_{B0}^{2} + \rho_{B0}^{1} + \rho_{A}^{2} - \rho_{A}^{1}) \\ \Phi_{AB}^{13} + \frac{1}{\lambda}(-\rho_{B0}^{3} + \rho_{B0}^{1} + \rho_{A}^{3} - \rho_{A}^{1}) \\ \Phi_{AB}^{14} + \frac{1}{\lambda}(-\rho_{B0}^{4} + \rho_{B0}^{1} + \rho_{A}^{4} - \rho_{A}^{1}) \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

$$x = \begin{pmatrix} \Delta X_{B} \\ \Delta Y_{B} \\ \Delta Z_{B} \\ N_{AB}^{12} \\ N_{AB}^{13} \\ N_{AB}^{14} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

จากสมการข้างต้น จะเห็นได้ว่า เราสามารถสร้างสมการค่าสังเกตได้เพียง 3 สมการ แต่มีจำนวนพารามิเตอร์มากถึง 6 ตัว ดังนั้นจึงต้องมีการรับสัญญาณอย่างน้อย 2 ขณะเวลาขึ้นไป เพื่อให้จำนวนสมการค่าสังเกตเท่ากับหรือมากกว่าจำนวนพารามิเตอร์ เมื่อนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นข้างต้นร่วมกับการกำหนดแบบจำลองสโตคาสติกอย่างง่าย ไปทำการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์โดยวิธีสมการค่าสังเกตตามที่ได้อธิบายไว้ต่อไปได้

ในการประมวลผลด้วยซอฟต์แวร์ การสร้างเมตริกซ์ขนาดใหญ่เช่น เมตริกซ์ A หรือเมตริกซ์ L แล้วนำเมตริกซ์ดังกล่าวมาทำการคำนวณหาค่าต่างๆนั้น เป็นการสิ้นเปลืองเวลาและทรัพยากรของเครื่องคอมพิวเตอร์เป็นอย่างมาก ดังนั้นในซอฟต์แวร์ที่ได้พัฒนาขึ้นจึงได้มีการลดทอนขนาดของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ L ของจำนวนค่าสังเกตทั้งหมด ให้เหลือขนาดเท่ากับขนาดของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ L ของจำนวนค่าสังเกตของหนึ่งขณะเวลา แล้วจึงทำการสะสมค่าของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ L ตั้งแต่ขณะเวลาแรกของการรังวัดจนถึงขณะเวลาสุดท้ายของการรังวัด โดยในการสะสมค่าของเมตริกซ์นั้น ต้องมีการควบคุมให้ค่าสัมประสิทธิ์(องค์ประกอบของเมตริกซ์)ที่มาจากที่เดียวกันมารวมกัน ห้ามไม่ให้มีการสะสมค่าสัมประสิทธิ์ที่มาจากต่างที่กัน เช่น ค่าสัมประสิทธิ์ระหว่างดาวเทียมหมายเลข 1 กับหมายเลข 2 ณ ขณะเวลาที่ 1 ก็ต้องมารวมกับค่า

สัมประสิทธิ์ระหว่างดาวเทียมหมายเลข 2 ณ ขณะเวลาที่ 2 และก็ต้องมารวมกับค่าสัมประสิทธิ์ระหว่างดาวเทียมหมายเลข 1 กับหมายเลข 2 ณ ขณะเวลาที่ 3 เป็นเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนสิ้นสุดการรังวัด ซึ่งตัวอย่างของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ L ได้แสดงอยู่ในบทที่ 3

หลังจากที่ได้ค่าสะสมของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ L แล้ว จึงทำการหาค่าต่างๆตามขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยลีสท์สแควร์ที่ได้กล่าวไปแล้วต่อไป

แต่ในการลดทอนเมตริกซ์ของการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ดังวิธีที่กล่าวมานั้น เมื่อจำนวนดาวเทียมมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นในระหว่างการรังวัด เช่น จำนวนดาวเทียมเพิ่มจาก 5 ดวง เป็น 6 ดวง ในช่วงขณะเวลาที่ 25 จนถึงขณะเวลาสุดท้ายของการรังวัด เป็นต้น จะทำให้เกิดปัญหาขึ้น อันเนื่องมาจากขนาดของเมตริกซ์ที่จะนำมาสะสมต่อในขณะเวลาที่ 26 นั้นไม่เท่ากับขนาดของเมตริกซ์ในขณะเวลาที่ 25 กล่าวคือ จำนวนแถวของเมตริกซ์ A ในขณะเวลาที่ 25 จะเท่ากับ 4 แถว แต่จำนวนแถวของเมตริกซ์ A ในขณะเวลาที่ 26 จะเท่ากับ 5 แถว จึงทำให้ไม่สามารถนำมารวมกันได้

การแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นนั้นสามารถทำได้โดย การสำรวจจำนวนข้อมูลค่าสังเกตทั้งหมดก่อนว่ามีจำนวนดาวเทียมที่สามารถนำมาประมวลผลด้วยการหาค่าต่างครั้งที่สองกี่ดวง แล้วทำการกำหนดขนาดของเมตริกซ์ A ล่วงหน้า ให้มีขนาดของแถวเท่ากับจำนวนดาวเทียมทั้งหมดลบออกด้วย 1 ส่วนจำนวนคอลัมน์ของเมตริกซ์ A ก็ทำการกำหนดล่วงหน้าให้มีขนาดเท่ากับจำนวนดาวเทียมบวกด้วย 2 (เท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ค่าพิกัดคือ 3 บวกกับจำนวนดาวเทียมลบออกด้วย 1) หรือกำหนดล่วงหน้าแบบเผื่อไว้ก็ได้ เช่นให้เท่ากับ 15 หรือ 20 ก็ได้ เนื่องจากเมื่อทำการคูณเพื่อหาค่าของเมตริกซ์ N แล้วจำนวนคอลัมน์ที่เกินออกมาจะถูกตัดไปโดยอัตโนมัติ

หลังจากนั้น จึงทำการหาค่าต่างครั้งที่สอง, ทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ในแต่ละขณะเวลา ซึ่งในขณะเวลาใดที่ไม่มีค่าสังเกตจากดาวเทียมดวงที่ยังไม่ได้รังวัด ค่าสัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ในแถวนั้นจะมีค่าเป็น 0 ทั้งแถว แล้วจึงทำการสะสมค่าสัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ที่ได้ และต้องมีการควบคุมให้ค่าสัมประสิทธิ์ที่มาจากที่เดียวกันมารวมกัน ห้ามไม่ให้มีการสะสมค่าสัมประสิทธิ์ที่มาจากต่างที่กันดังที่กล่าวไปแล้วข้างต้น ซึ่งตัวอย่างของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ L ในกรณีนี้ได้แสดงอยู่ในบทที่ 3