



บทที่ 5

ผลการวิจัย และ สรุปผล

5.1 ผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ใช้วิเคราะห์ผลการคำนวณของทฤษฎีของทีมงานเดอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์ และ ทฤษฎีทีมงานของ โกลด์ริช และ ทริเมนกล่าวมานั้นเป็นทฤษฎีที่ใช้ในการทำนายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ ข้อมูลจากตารางในบทที่4เพื่อจำลองภาพหาผลการสำรวจของยานวอยเอเจอร์2 และ ยานโพเนียว11 โดยสมมุติว่าเราอยู่ภายในยานอวกาศควรจะพบเหตุการณ์ใดที่เกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขเดียวกับผู้สังเกตภายในยานอวกาศ(กรอบอ้างอิงหมุน) การเคลื่อนที่รอบจุดสมมูลที่เสถียรเกิดการเคลื่อนที่เชิงคาบมีเหตุผลทางฟิสิกส์ที่สนับสนุนว่าถ้ามีเหตุการณ์ที่สามารถเกิดเป็นวงโคจรได้แสดงว่าเหตุการณ์นี้สามารถปรากฏได้ในธรรมชาติ การเคลื่อนที่รอบจุดสมมูลไม่เสถียรมีเหตุผลทางฟิสิกส์ที่สนับสนุนว่าถ้ามีเหตุการณ์ที่ไม่เกิดการเคลื่อนที่เป็นวงโคจรแสดงว่าไม่น่าพบเหตุการณ์นี้ได้ตลอดกาลในธรรมชาตินอกจากบังเอิญเจอเหตุการณ์นี้พอดี

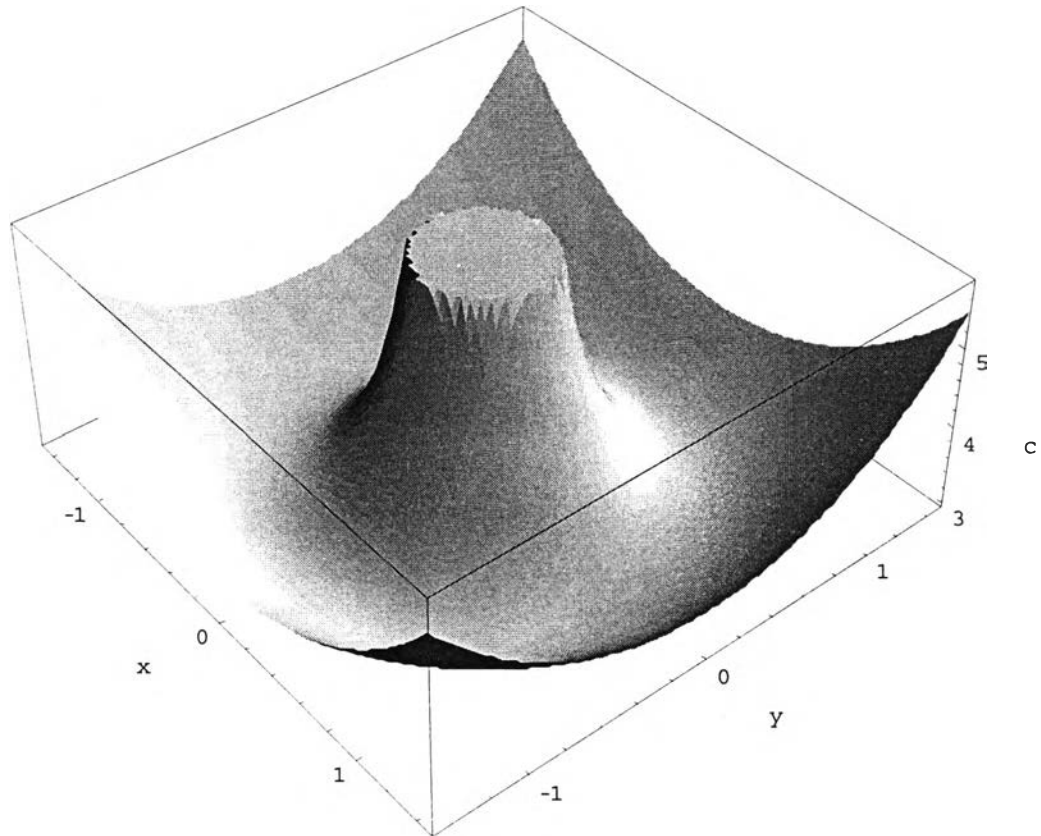
5.1.1 การทดสอบทฤษฎีของทีมงานเดอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์

ข้อมูลของยานอวกาศวอยเอเจอร์2 พบดวงจันทร์เป็นไปตามทฤษฎีนี้คือ เททิส และ ไคโอนิ การตรวจสอบทฤษฎีนี้เพื่อหาโอกาสกลายเป็นวงโคจรรูปเกือบมาของระบบของดาวเสาร์กับเททิส และ ดาวเสาร์กับไคโอนิ เมื่อมีการรบกวนที่เพิ่มขึ้นจะสามารถเกิดวงโคจรดังกล่าวได้หรือไม่

ผลเฉลยของลากรานจ์ให้คำตอบวงโคจรที่เป็นไปได้รอบบริเวณจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า เกิดวงโคจรคือวงโคจรรูปลูกอ้อด และ วงโคจรรูปเกือบมา วงโคจรทั้งสองนี้มีเงื่อนไขที่แตกต่างกันคือวงโคจรรูปลูกอ้อดจะสามารถปรากฏออกมาได้ก่อน เพราะว่า เป็นวงโคจรที่มีการรบกวนน้อยที่สุดของระบบ แต่ วงโคจรรูปเกือบมาจะปรากฏได้ก็ต่อเมื่อมีการรบกวนระบบที่เพิ่มมากขึ้น หรือ ตัวของระบบเองก็มีค่ามากในช่วงที่กำหนดในบทที่2จนทำให้สามารถข้ามจุดลากรานจ์ที่สามได้

ทฤษฎีของเดอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์ สนใจระบบที่มีการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนเกิดเป็นวงโคจรแบบเต็มวง(วงโคจรรูปเกือบมา)ได้ แต่ถ้าไม่สามารถเกิดวงโคจรนี้ได้ก็ไม่เป็นไรเพราะแสดงให้เห็นว่าการเกิดวงแหวนของดาวเสาร์อาจมีความร่วมมือกันของดวงจันทร์ภายในระบบทำหน้าที่เป็นดาวผู้ให้กำเนิดจนทำให้เกิดเป็นวงแหวนของดาวเสาร์ได้

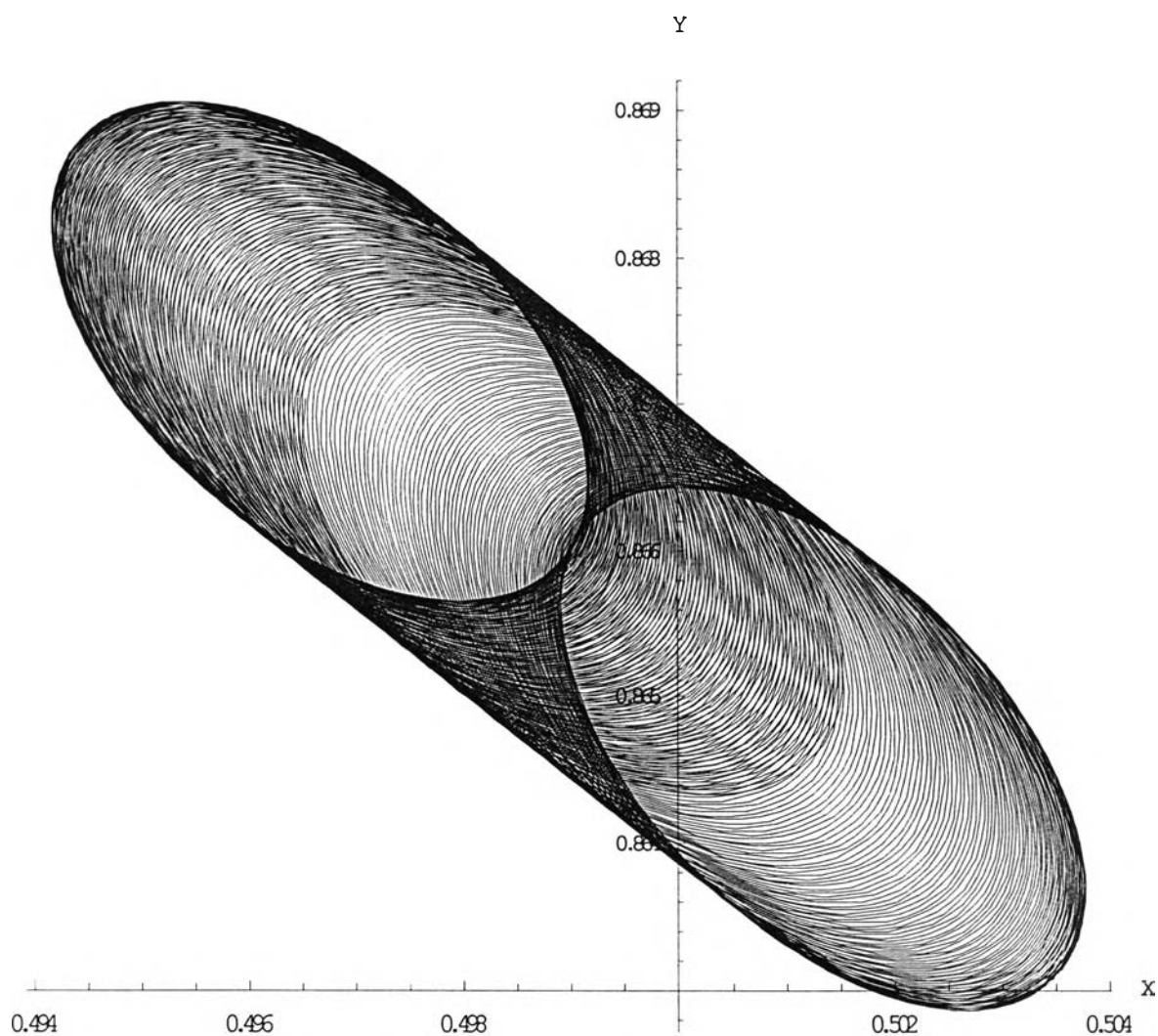
5.1.1.1 ระบบดาวเสาร์กับเททิส



รูปที่ 16 แสดงสมการจาโคบีของระบบดาวเสาร์ กับ เททิส (ภาคผนวก ค หัวข้อ 1.1)

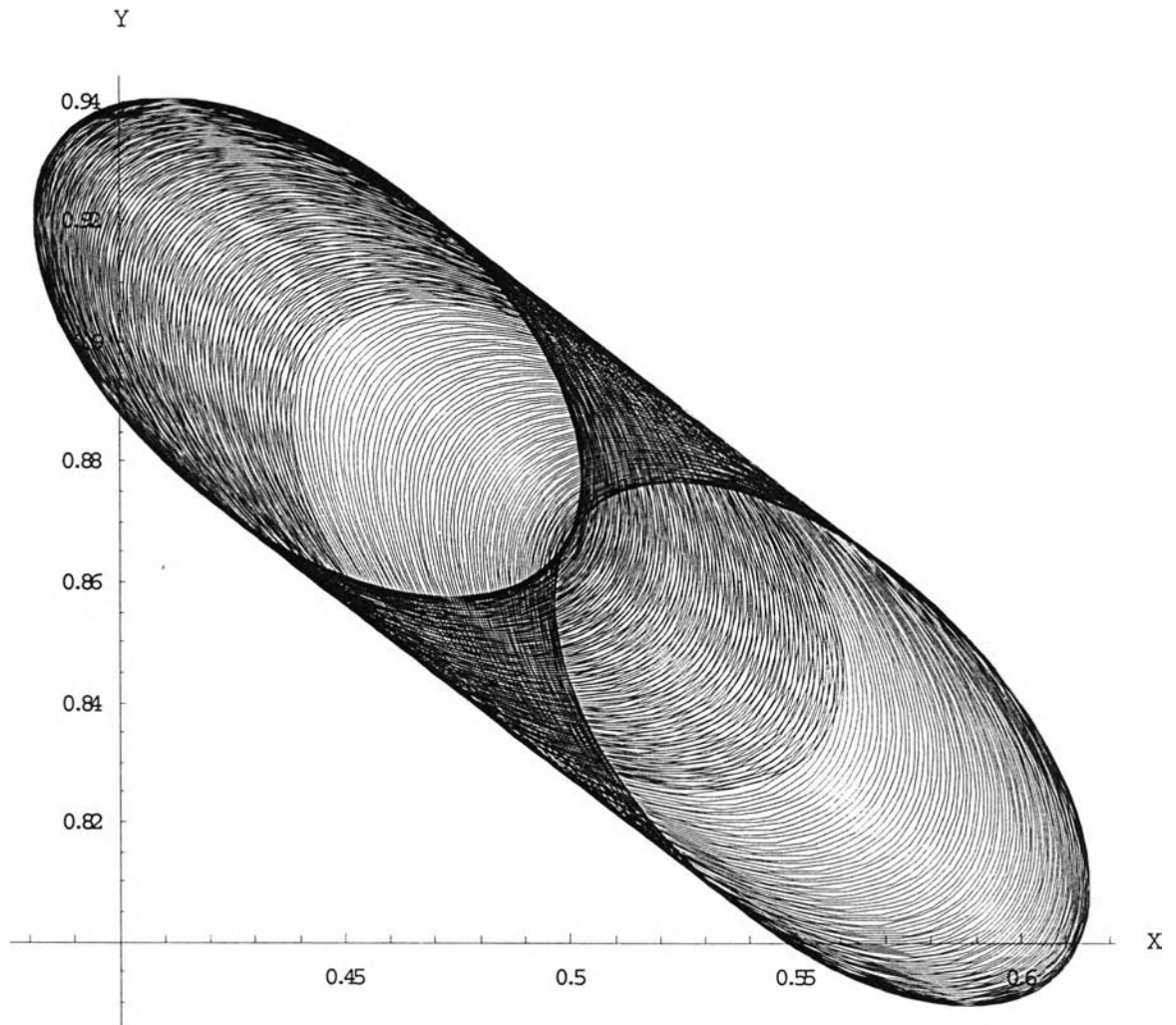
เส้นโค้งที่ได้มาจากระบบของดาวเสาร์กับเททิส พบว่า ไม่สามารถปรากฏศักย์ของเททิสได้โดยมีตำแหน่งประมาณ(1,0) แสดงว่า เททิสเสมือนว่าไม่มีผลต่อระบบนี้ พื้นที่รอบจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม มีลักษณะของภูเขาแสดงว่าถ้าเกิดการรบกวนศักย์ในบริเวณนี้ทำให้วัตถุหนีหายไปออกจากระบบทำให้หรือลบริเวณนี้ไม่สามารถพบวัตถุในธรรมชาติได้ พื้นที่รอบบริเวณจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้า มีลักษณะเป็นหุบเขาแสดงว่าเป็นบริเวณที่มีความอ่อนคลายของระบบมากที่สุดจึงพบวัตถุในระบบนี้ และ อาจเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่เชิงคาบ(วงโคจรรูปลูกธนูหรือ วงโคจรรูปเกือบม้า)

5.1.1.1.1 การเคลื่อนที่รอบบริเวณจุดลากรางจ์ที่สี่



รูปที่ 17 แสดงดวงจันทร์ชื่อ เทเลสโต โคจรรอบจุดลากรางจ์ที่สี่ (ภาคผนวก ก หัวข้อ 1.2.1)

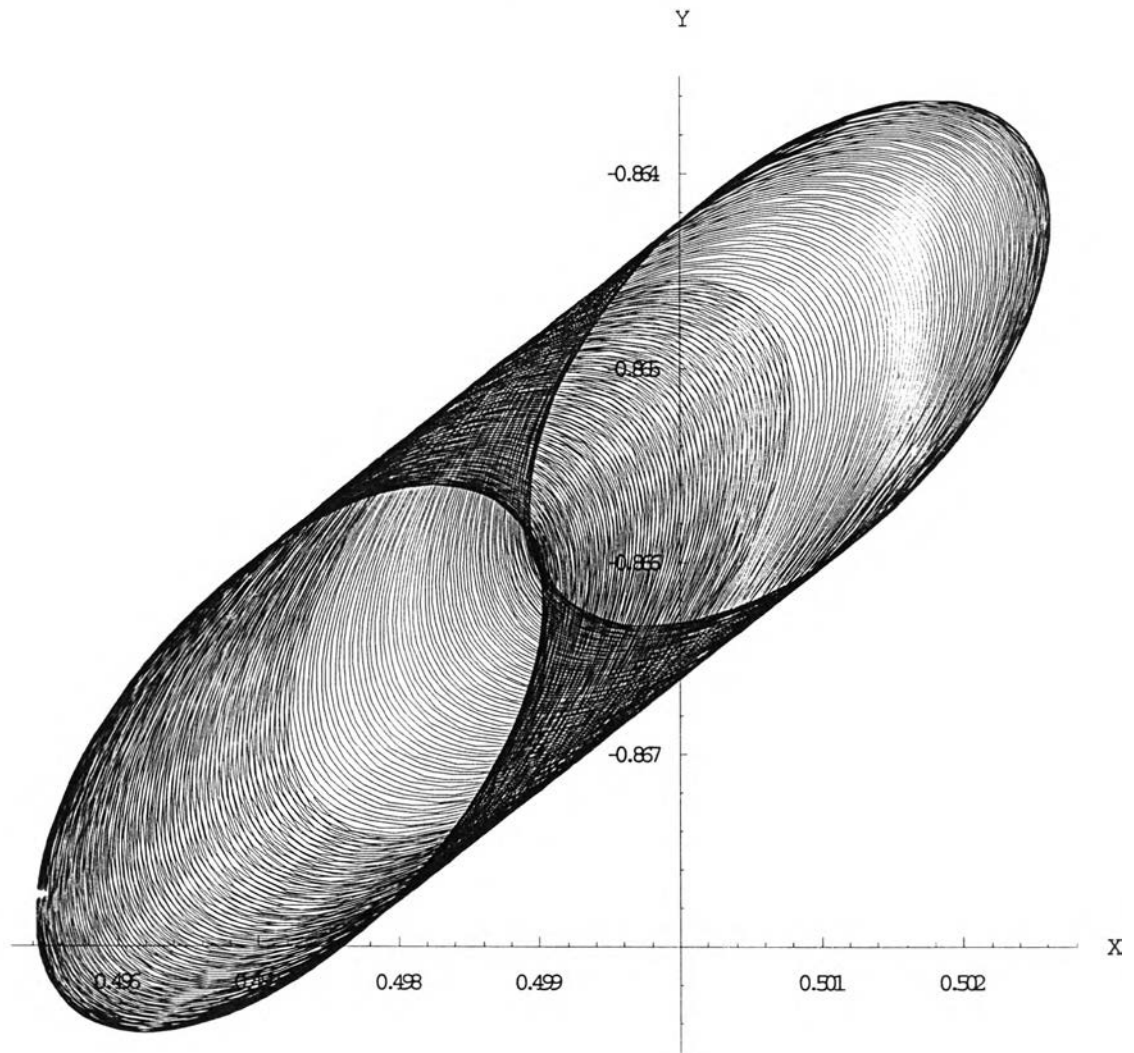
ดวงจันทร์เทเลสโตทำหน้าที่เป็นวัตถุชิ้นที่สามมีทางโคจรเป็นวงโคจรรูปลูกอ้อขนาดเล็ก จึงเกิดความคิดว่าถ้าเพิ่มระยะทางน้อยยิ่งของระบบซึ่งเป็นกรณีการรบกวนเพิ่มขึ้นจนทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนที่เป็นไปได้จนอาจกลายเป็นวงโคจรรูปเกือบมาได้



รูปที่ 18 แสดงอนุภาควงแหวนโคจรอบบริเวณจุดลากรางจ์ที่สี่ (ภาคผนวก ค หัวข้อ 1.2.2)

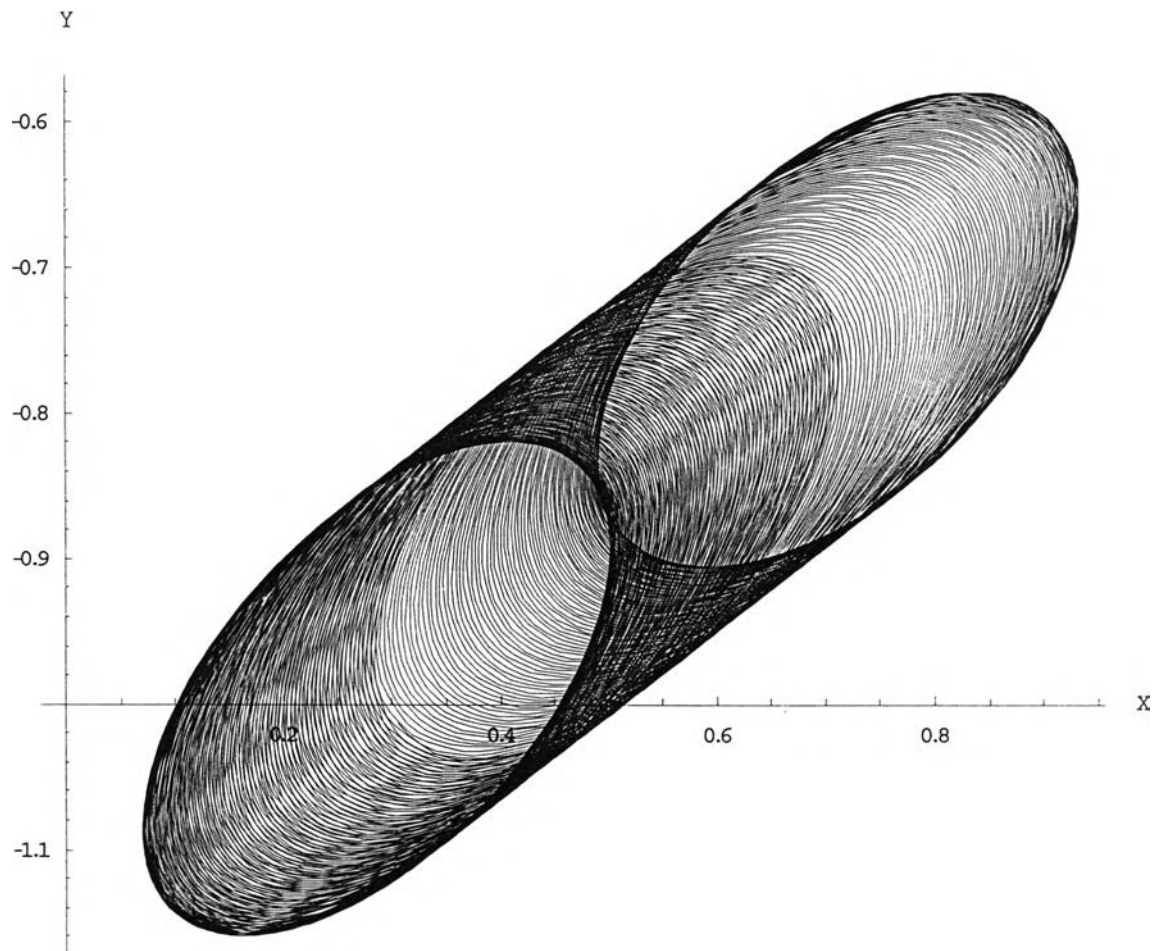
การเพิ่มระยะทางน้อยยิ่งเพิ่มขึ้นจะทำให้มีพลังงานต่อมวลของระบบเพิ่มขึ้นจนมีทางโคจรที่เปลี่ยนไปในที่นี้ก็เกิดเป็นวงโคจรรูปลูกร้อค แสดงว่า การเพิ่มเงื่อนใจของการเคลื่อนที่ไม่สามารถกลายเป็นวงโคจรรูปเกือบมา แต่วงโคจรที่เกิดขึ้นนี้เรียกว่าวงแหวนไม่ครบรอบ ถ้าตรวจสอบจุดลากรางจ์ที่ห้าจะได้ผลเหมือนกัน หรือ ไม่

5.1.1.1.2 การเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่ห้า



รูปที่ 19 แสดงดวงจันทร์ชื่อ คาลิปโซ รอบจุดลากรางจ์ที่ห้า (ภาคผนวก ค หัวข้อ 1.2.3)

การเคลื่อนที่ของ คาลิปโซ มีการเคลื่อนที่ไกลกว่า เทเลสโต จึงคิดว่า การรบกวนในบริเวณของจุดลากรางจ์ที่ห้ามีมากกว่าบริเวณจุดลากรางจ์ที่สี่โดยพบว่าการเคลื่อนที่ของดวงจันทร์เกิดเป็นวงโคจรรูปลูกอ้อค ถ้ามีการรบกวนในบริเวณของจุดลากรางจ์ที่ห้าเพิ่มขึ้นจะสามารถเกิดวงโคจรรูปเกือกม้าได้ หรือไม่

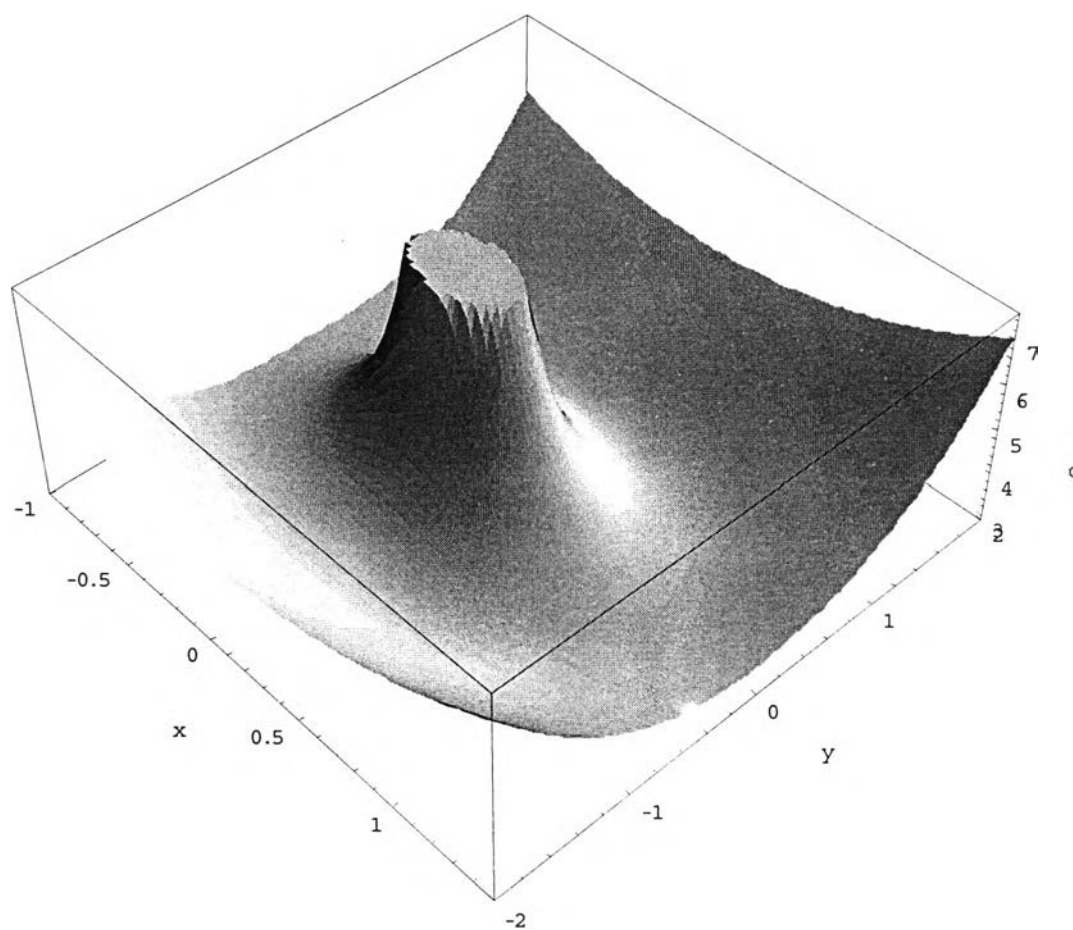


รูปที่ 20 แสดงอนุภาควงแหวนโคจรรอบจุดลากรางจ์ที่ห้า (ภาคผนวก ค หัวข้อ 1.2.3)

การรบกวนในบริเวณจุดลากรางจ์ที่ห้าเป็นการเพิ่มพลังงานให้กับระบบดาวเสาร์กับเททิสทำให้อนุภาควงแหวนมีทางโคจรเปลี่ยนไปเนื่องจากการรบกวนที่เพิ่มขึ้นให้กับระบบก็ไม่สามารถทำให้อนุภาควงแหวนกลายเป็นวงโคจรรูปเกือกม้าที่ต้องการในทางทฤษฎีของทีมงาน เดอ โมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์ ได้ ถ้าทดสอบใหม่โดยใช้ค่า μ เพิ่มขึ้นโดยใช้ระบบของดาวเสาร์ กับ ไดโอนีเป็นตัวตรวจสอบเงื่อนไขจะสามารถได้ผลของวงโคจรเป็นวงโคจรรูปเกือกม้าได้ หรือไม่

ระบบดาวเสาร์กับไดโอนีอยู่ในบริเวณขอบนอกของวงแหวนดาวเสาร์ในชั้น E ทำให้ได้รับอิทธิพลของดาวพฤหัสบดีมีมากกว่าระบบดาวเสาร์กับเททีสจึงมีแนวคิดว่าจะระบบดาวเสาร์กับไดโอนีน่าจะมีโอกาสพบวงโคจรรูปเกือบมาได้ง่ายกว่าระบบดาวเสาร์กับเททีสซึ่งจากการตรวจสอบวงโคจรพบว่าเกิดได้เฉพาะวงโคจรรูปปลุกี้ออก

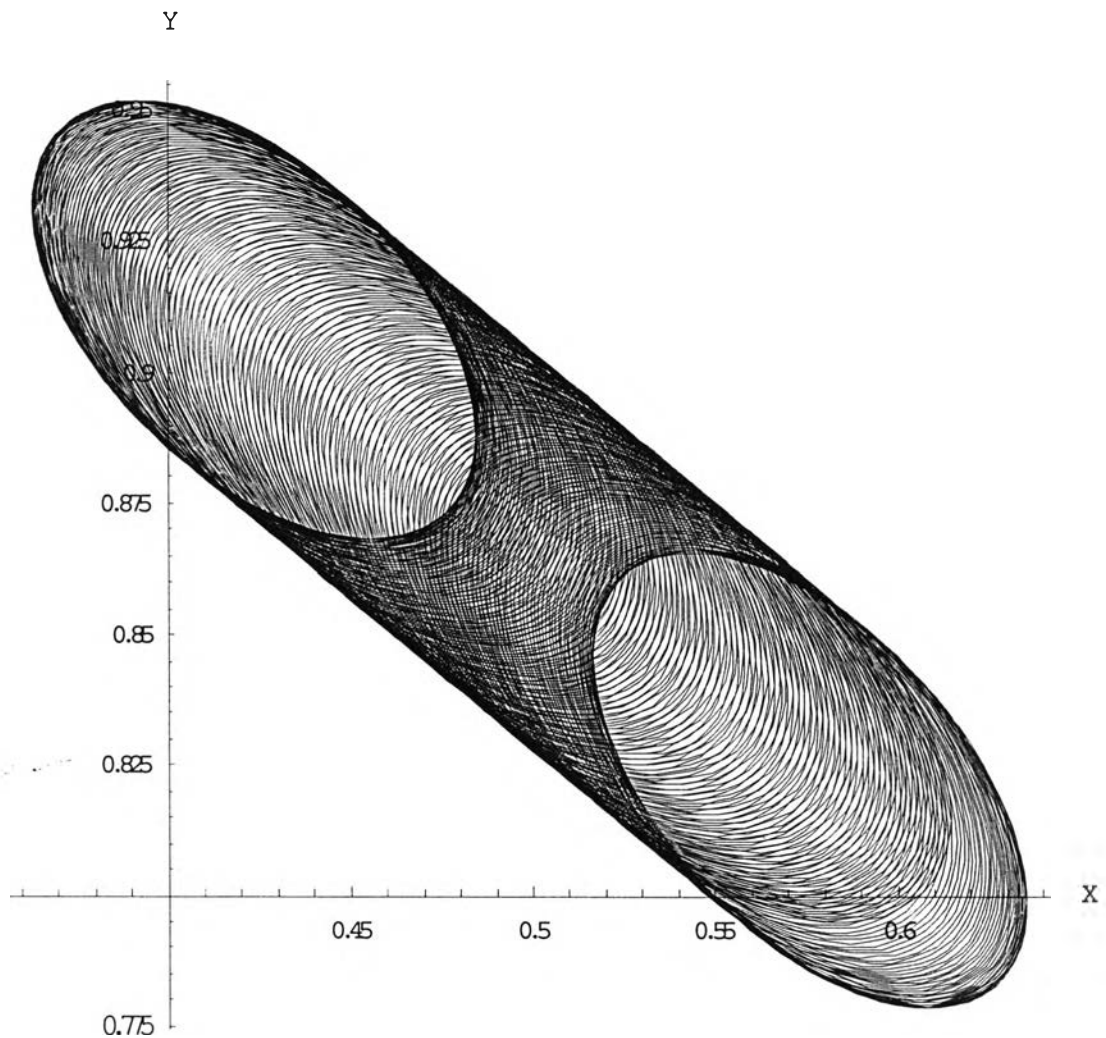
5.1.1.2 ระบบของดาวเสาร์ กับ ไดโอนี



รูปที่ 21 แสดงสมการจาโคบีของระบบดาวเสาร์ กับ ไดโอนี (ภาคผนวก ง หัวข้อ 2.1)

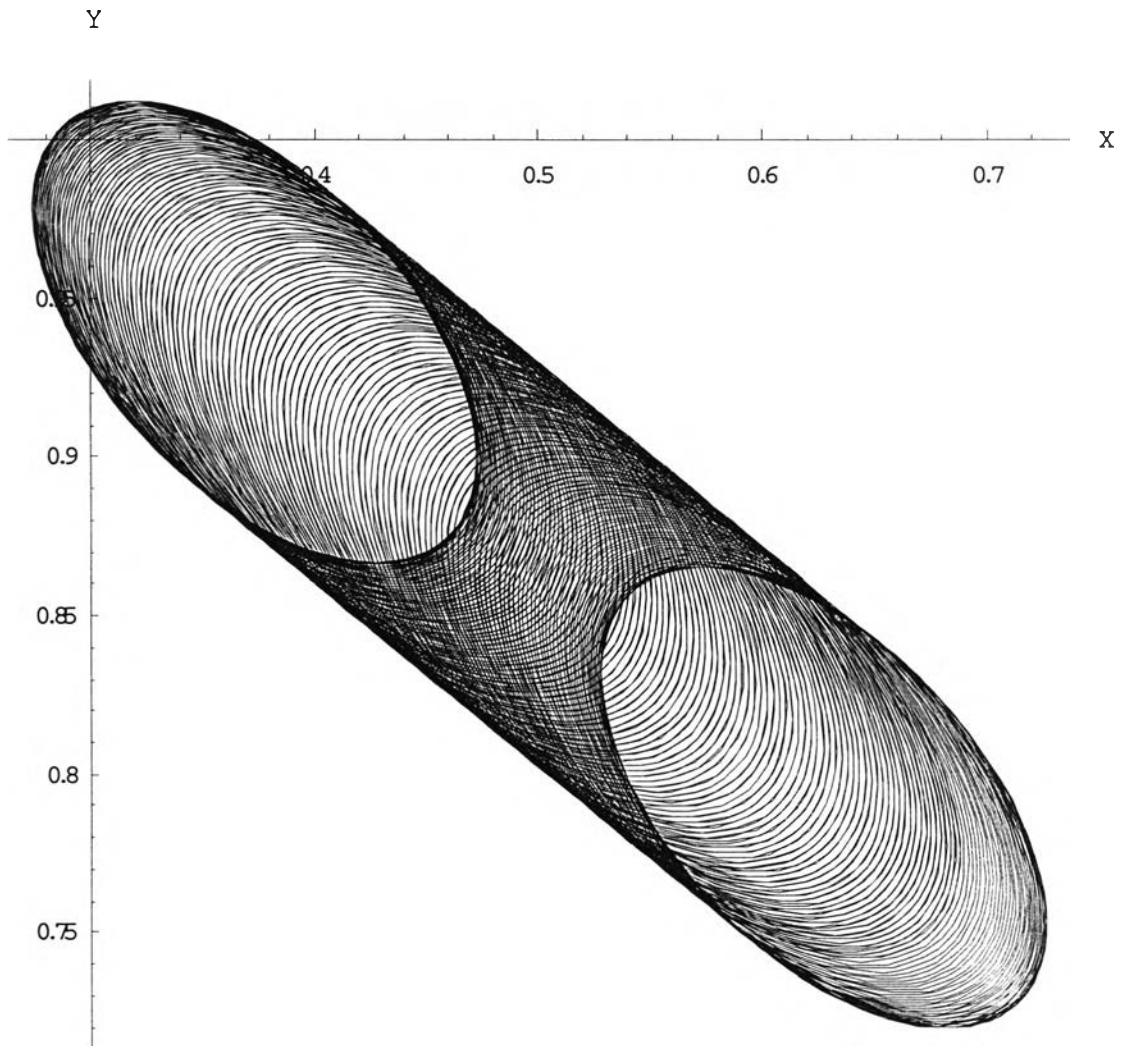
เส้นโค้งของระบบดาวเสาร์กับไดโอนีมีความคล้ายกับของระบบดาวเสาร์กับเททีสคือไม่ปรากฏศักย์ของไดโอนีที่ตำแหน่งประมาณ $(1,0)$ แสดงว่าศักย์ของไดโอนีมีค่าที่น้อยเกินกว่าที่จะสามารถปรากฏได้เหมือนกับกรณีของระบบดาวเสาร์กับเททีส พื้นผิวรอบบริเวณจุดลากรานจ์ที่หนึ่ง, สอง และ สาม มีลักษณะเป็นภูเขาจึงทำให้พบว่าการรบกวนระบบในบริเวณนี้จะทำให้วัตถุออกห่างจากบริเวณนี้ พื้นผิวรอบจุดลากรานจ์ที่สี่ และ ห้าซึ่งมีลักษณะเป็นหุบเขาจึงเป็นบริเวณที่ผ่อนคลายมากที่สุดของระบบดาวเสาร์กับไดโอนีจึงทำให้วัตถุในธรรมชาติอยู่รอบบริเวณนี้

5.1.1.2.1 การเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่สี่



รูปที่ 22 แสดง เอลเลน โคจรรอบจุดลากรางจ์ที่สี่ (ภาคผนวก ง หัวข้อ 2.2.1)

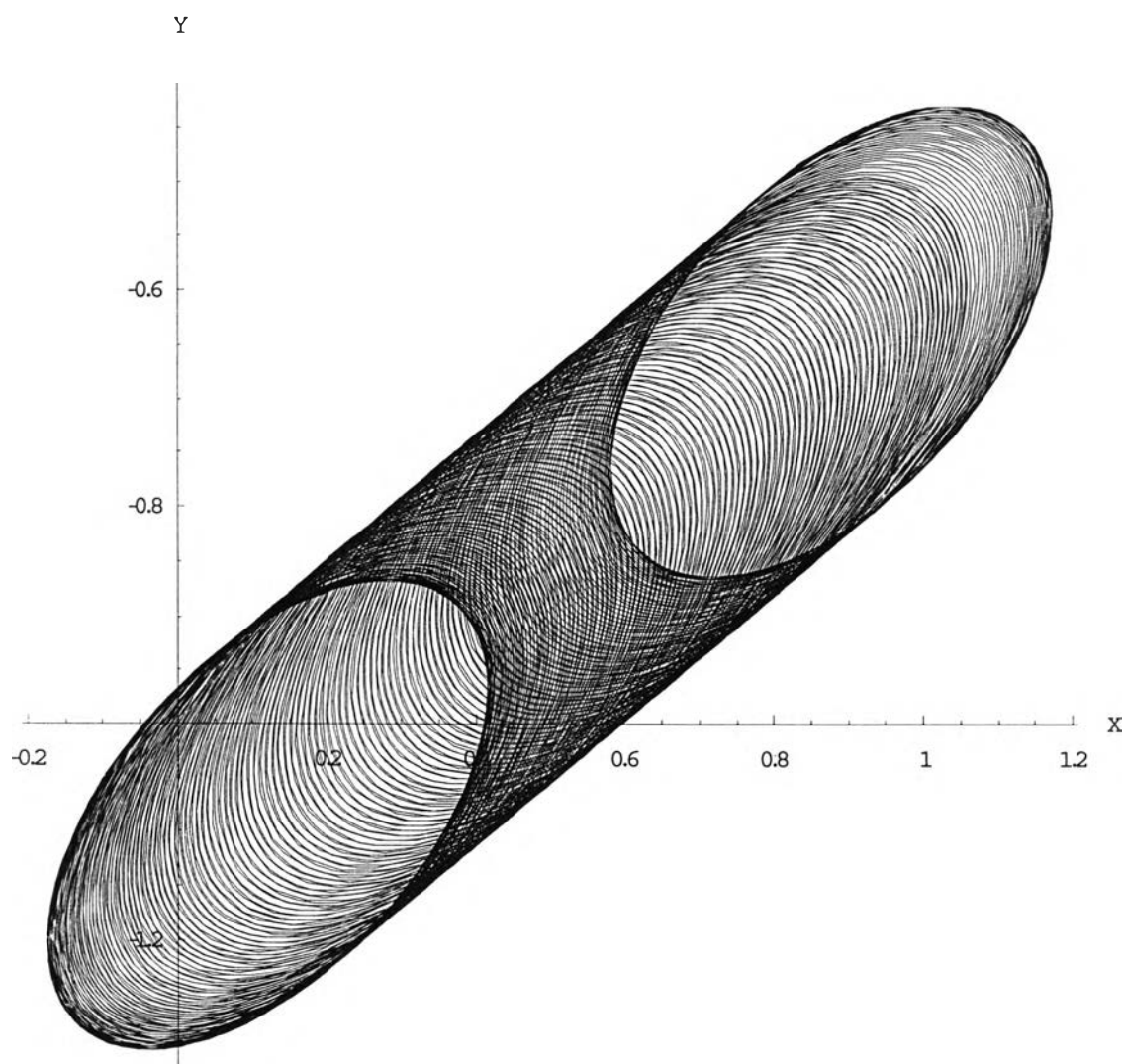
ค่าของ μ มีค่าเพิ่มมากกว่าของค่า μ ของระบบดาวเสาร์กับเททิสโดยมีการรบกวนของดาวพฤหัสบดีมากกว่าของระบบดาวเสาร์กับเททิสทำให้ทางโคจรของเฮเลนมีการขยายตัวมากกว่าทำให้เกิดวงโคจรรูปลู่ออกที่มีขนาดใหญ่กว่าระบบของดาวเสาร์กับเททิส ถ้ามีการรบกวนกันเองของอนุภาควงแหวนต้องทำให้เกิดพลังงานภายในเพิ่มขึ้นจนน่าจะทำให้เกิดเป็นวงโคจรรูปเกือบมาได้



รูปที่ 23 แสดงวงแหวนดาวเคราะห์โคจรรอบจุดลากรางจ์ที่สี่ (ภาคผนวก ง หัวข้อ 2.2.2)

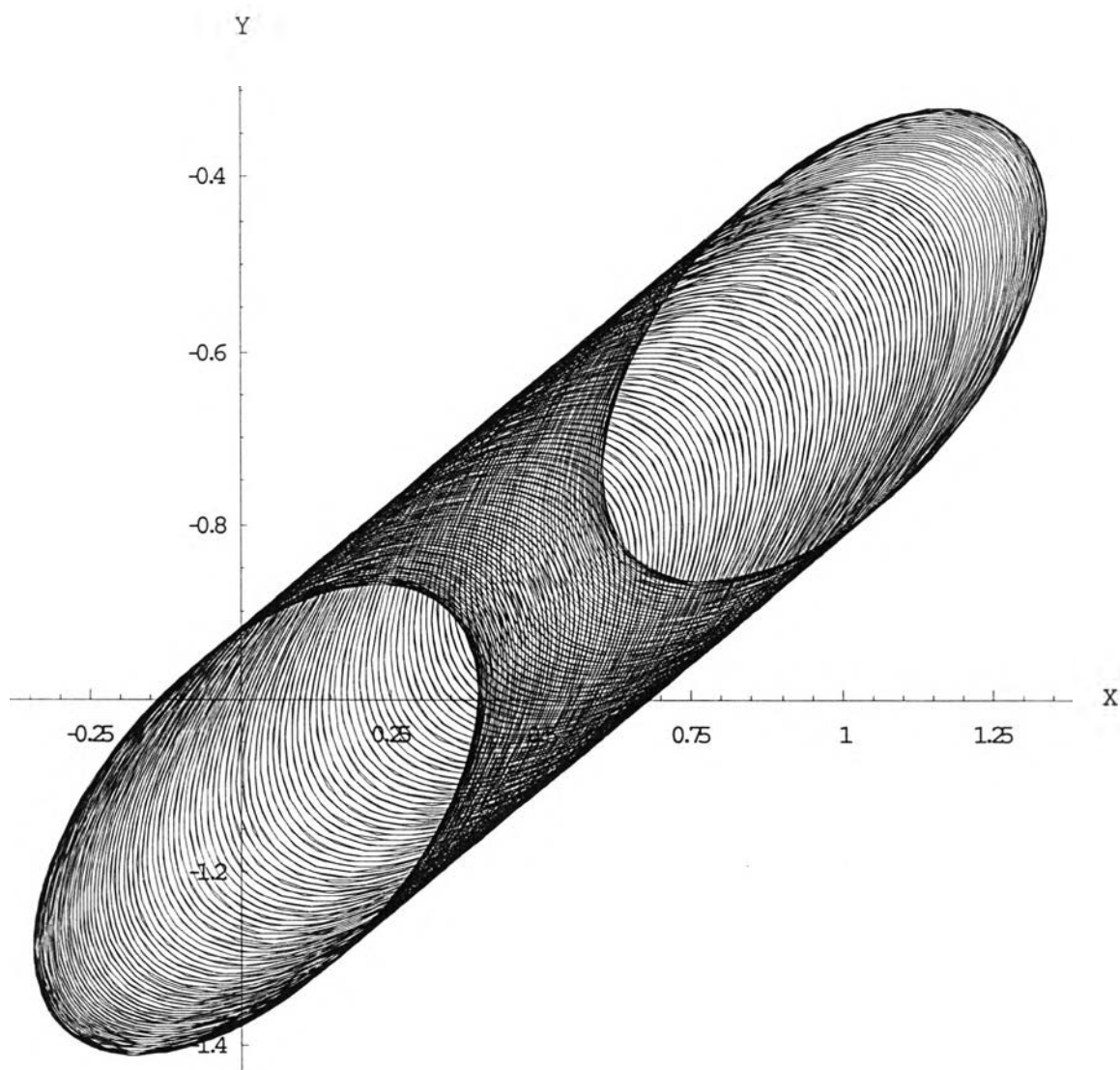
การเพิ่มการรบกวนเนื่องมาจากการปลัดถิ่นเองของอนุภาควงแหวนทำให้เกิดการขยายตัวของรูปร่างทางโคจร แต่ก็พบว่าเกิดวงโคจรรูปลูกอ้อด แสดงว่าค่า μ ที่เพิ่มขึ้นนี้ไม่สามารถทำให้เกิดวงโคจรรูปเกือบมา เพียงแต่จะมีการขยายตัวของรูปร่างทางโคจรเท่านั้น

5.1.1.2.2 การเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่ห้า



รูปที่ 24 แสดงดวงจันทร์ชื่อว่า โพรโตส รอบจุดลากรางจ์ที่ห้า (ภาคผนวก ง หัวข้อ 2.2.3)

การรบกวนบริเวณจุดลากรางจ์ที่ห้าพบว่าเกิดวงแหวนไม่ครบรอบ(วงโคจรรูปลูกช้อน)แต่ถ้าเปรียบเทียบกับระบบดาวเสาร์กับเททิสพบว่ามีการขยายตัวของวงโคจรมากกว่าเดิมทำให้คิดว่าการเพิ่มค่าของ μ น่าจะเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้เกิดวงโคจรรูปเกือกม้าในธรรมชาตินั่นเองโดยถ้ามีการรบกวนเพิ่มขึ้นเนื่องมาจากการผลัดกันเองของอนุภาควงแหวนจะทำให้วงโคจรเปลี่ยนไปอย่างไร



รูปที่ 25 แสดงวงแหวนดาวเคราะห์เคลื่อนที่ในบริเวณจุดลากรางจ์ที่ห้า(ภาคผนวก ง หัวข้อ 2.2.4)

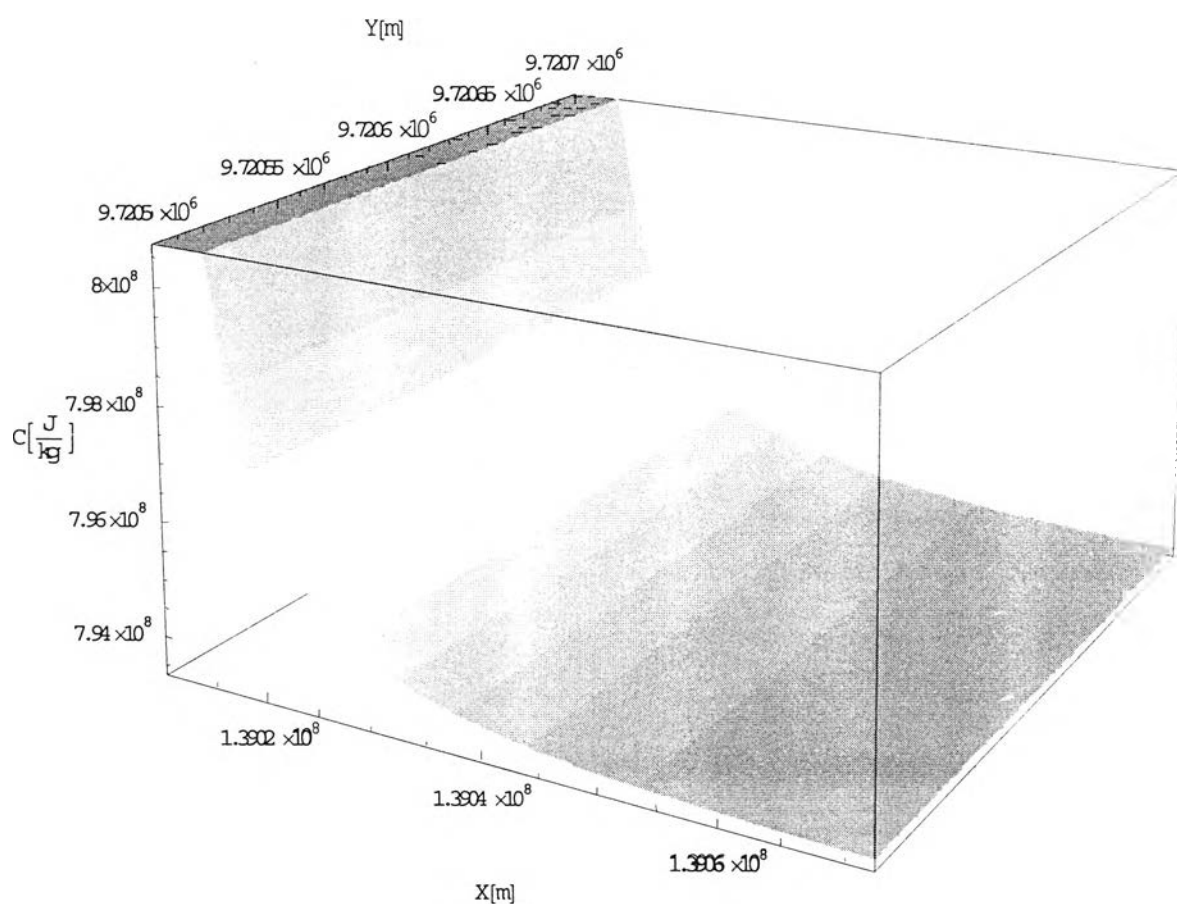
การเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนเนื่องจากการปลักกันเองของอนุภาควงแหวนทำให้เกิดพลังงานภายในเพิ่มขึ้นจนทำให้เกิดการขยายของรูปร่างทางโคจร แต่ก็ยังเกิดเป็นวงโคจรรูปลูกอ้อ

ผลของการเคลื่อนที่ของระบบดาวเสาร์กับไดโอนีพบว่ามีการโคจรเป็นรูปวงโคจรรูปลูกอ้อเหมือนกับระบบของดาวเสาร์กับเททิส ความแตกต่างกันของระบบของดาวเสาร์กับไดโอนี และดาวเสาร์กับเททิสคือระบบของดาวเสาร์กับไดโอนีมีวงโคจรของวัตถุชิ้นที่สามมีการขยายตัวของวงโคจรรูปลูกอ้อใหญ่กว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามของระบบของดาวเสาร์กับเททิส

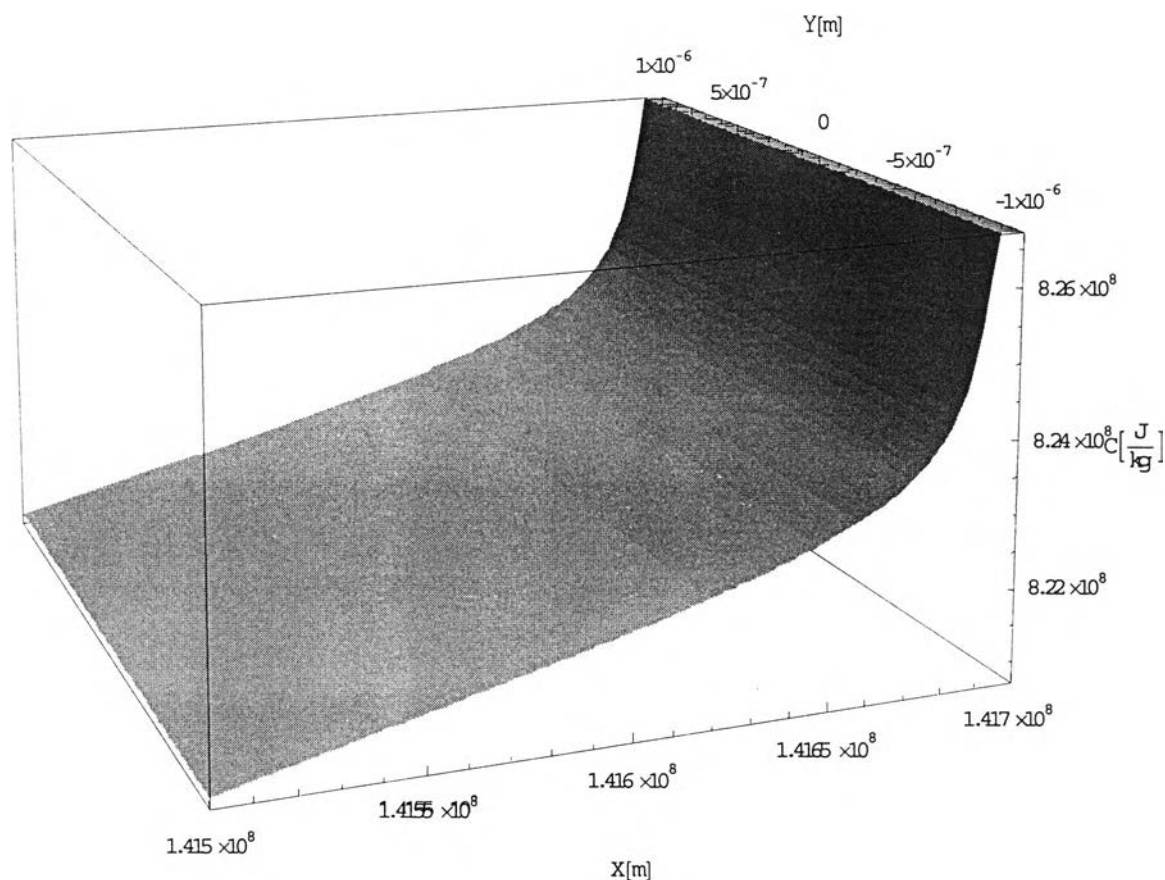
5.1.2 ทฤษฎีของทีมงานโกลด์ริช กับ ทรีเมน

ข้อมูลของยานอวกาศโพเนีย11พบเหตุการณ์นี้ในระบบของวงแหวนในชั้นFของดาวเสาร์ โดยจากข้อมูลที่ได้มาสนับสนุนว่าดวงจันทร์โคจรรอบระบบวงแหวนทำหน้าที่ควบคุมวงแหวนไว้ ทำให้เกิดแนวคิดในการวิเคราะห์คล้ายกับในทฤษฎีของเคอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์โดยเริ่มจากการพิจารณาพื้นผิวเส้นโค้งความเร็วศูนย์กลางของสมการฮิลส์จะเกิดการเคลื่อนที่ใดผ่านจุดสมดุลของระบบดาวเสาร์กับโพมีทรีอัส และ ระบบดาวเสาร์กับแพนดูล่า

5.1.2.1 สมการของฮิลส์แสดงศักยภาพของดวงจันทร์คู่นี้ที่มีผลต่ออนุภาควงแหวน



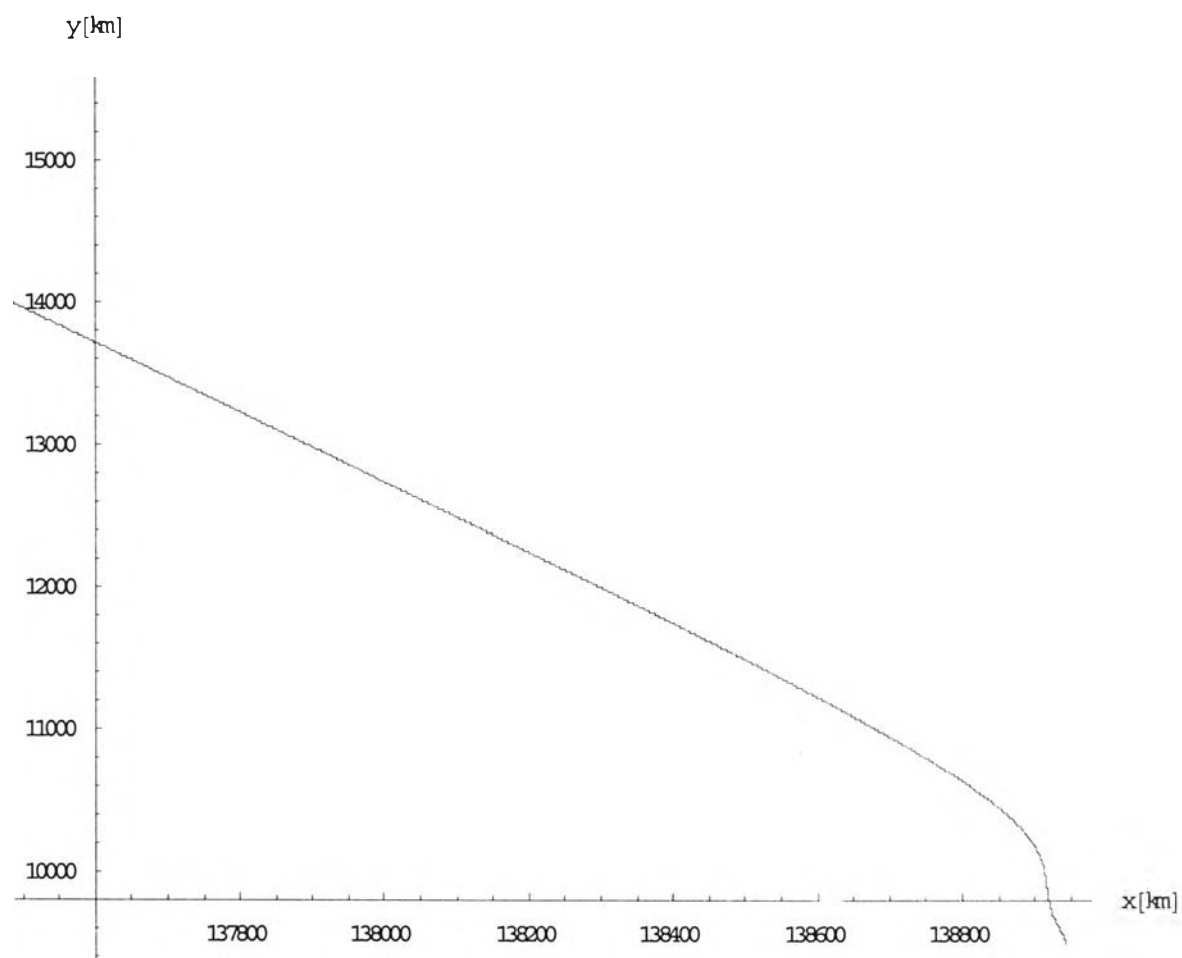
รูปที่ 26 แสดงสมการฮิลส์ใกล้กับโพมีทรีอัส (ภาคผนวก จ หัวข้อ 3.1)



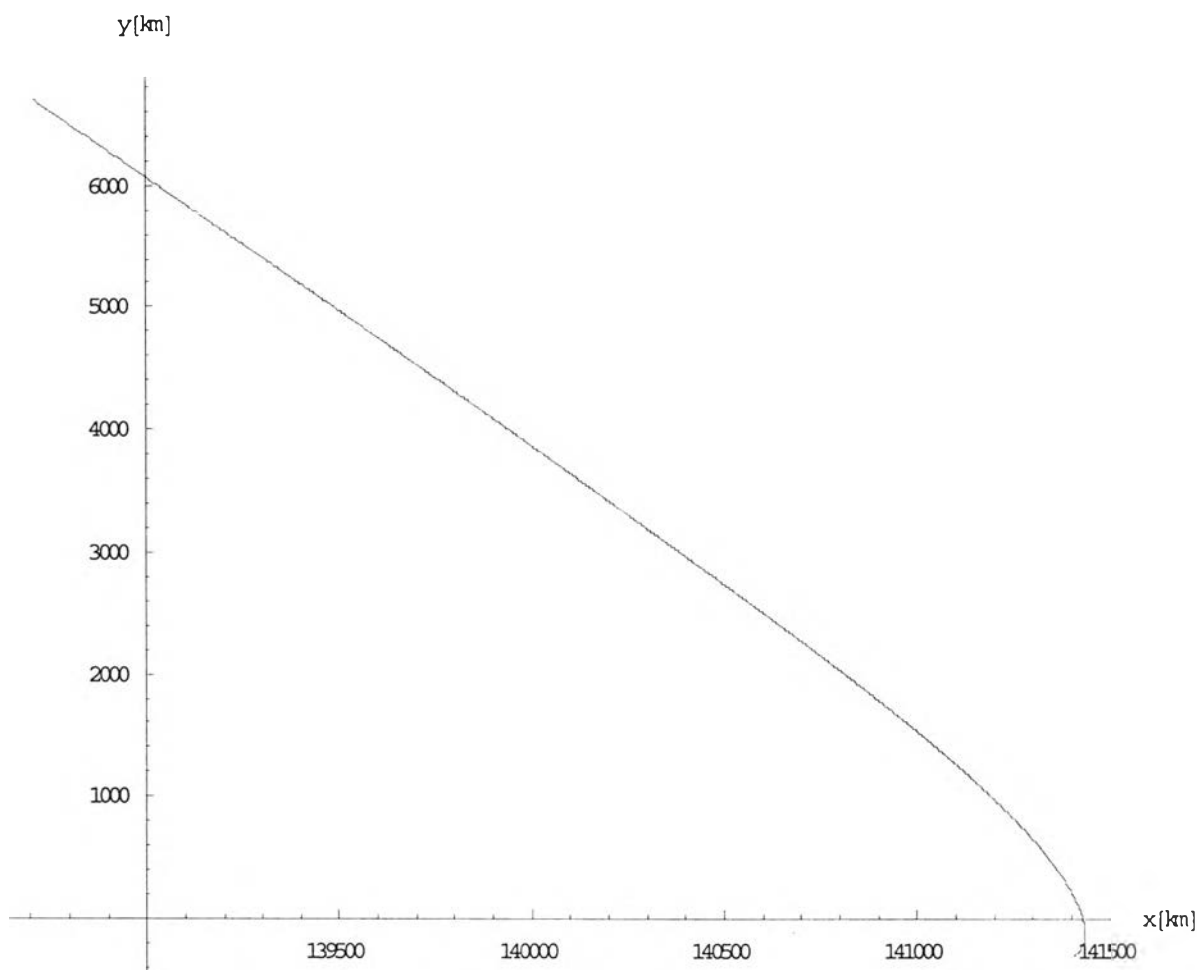
รูปที่ 27 แสดงสมการฮิลส์ใกล้กับแพนดูล่า (ภาคผนวก จ หัวข้อ 3.3)

สมการฮิลส์ของดวงจันทร์ทั้งสองที่ทำหน้าที่ควบคุมอนุภาควงแหวนพบว่าไม่มีพื้นผิวในลักษณะเป็นภูเขาได้เงื่อนไขการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลแบบไม่เสถียรแสดงว่าการเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวน โดยผลของดวงจันทร์ที่เคลื่อนที่รอบวงแหวนเป็นผลการเคลื่อนที่จากศักย์สูงลงไปหาศักย์ที่ต่ำกว่าเกิดการบีบอัดของอนุภาควงแหวนจนสามารถควบคุมอนุภาควงแหวนนั่นเอง แต่การผลึกกันเองของอนุภาควงแหวนจะทำให้ผลของการบีบอัดนี้ไม่เกิดตลอดไป แต่เนื่องจากการเคลื่อนที่ของดวงจันทร์ทั้งสองนี้เคลื่อนตัวรอบวงแหวนตลอดจนสามารถเกิดเหตุการณ์ของการควบคุมนี้ได้ตลอดเวลาที่ดวงจันทร์คู่นี้ผ่านในบริเวณของวงแหวนชั้น F

5.1.2.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาควงแหวนเนื่องจากวงจันทร์ทั้งสอง



รูปที่ 28 แสดงการควบคุมอนุภาควงแหวนเนื่องมาจากโพมีทรีอัส (ภาคผนวก จ หัวข้อ 3.2)



รูปที่ 29 แสดงการควบคุมอนุภาควงแหวนเนื่องมาจากแพนดูล่า (ภาคผนวก จ หัวข้อ 3.4)

รูปทั้งสองนี้พบว่าการสั่นเล็กๆเกิดขึ้นเป็นผลมาจากวงจันทร์เคลื่อนที่ผ่านอนุภาควงแหวนจนการแกว่งลงจึงมีร่องรอยนี้เกิดขึ้น ข้อมูลกราฟดังรูปที่ 28 และ รูปที่ 29 มีการเคลื่อนที่แบบแกว่งของอนุภาควงแหวนรอบ โปมัทรีอัสสังเกตได้ง่ายกว่าการเคลื่อนที่แบบแกว่งของอนุภาควงแหวนรอบแพนดูล่าเพราะว่าศักย์ยังผลของ โปมัทรีอัสมีค่าที่ต่ำกว่าศักย์ยังผลของแพนดูล่าทำให้การเคลื่อนที่รอบ โปมัทรีอัสเกิดขึ้นได้ง่ายกว่าการเคลื่อนที่รอบแพนดูล่ามีศักย์ยังผลที่มีค่าสูงกว่าจึงทำให้ไม่สามารถตรวจพบการแกว่งนี้ในธรรมชาติซึ่งตรงกับข้อมูลของยาน โพนี 11 สังเกตผลของอนุภาควงแหวนเคลื่อนที่ใกล้กับแพนดูล่าจึงสรุปได้ว่าการพิจารณาศักย์ยังผลเป็นเหตุผลสำคัญที่ทำให้สามารถอธิบายเหตุผลสำคัญนี้ตรงกับผลของข้อมูลจากยานอวกาศ โพนี 11 ได้

5.2 สรุปผล

ทฤษฎีของเคอโมท, โกลด์ และ เมอร์เลย์ อธิบายการเคลื่อนที่ของดวงจันทร์ หรือ อนุภาควงแหวนเกิดเป็นวงโคจรรูปเกือบม้า หรือ วงโคจรรูปลูกธนูโดยเริ่มการวิเคราะห์จากสมการจาโคบีดังรูปที่ 16 และ 21 พบวัตถุโคจรรอบจุดลากรางจ์ที่สี่ และ ห้า เพราะว่า มีศักย์คู่โคที่ต่ำที่สุดในระบบ ดังแสดงในตารางที่ 3 กับ 4 ระบบดาวเสาร์กับไดโอนิพบว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุชั้นที่สาม(ดวงจันทร์หรืออนุภาควงแหวน)อยู่ใกล้กับดาวพฤหัสบดีทำให้มีอิทธิพลของการรบกวนจากดาวพฤหัสบดีที่มีค่าสูงจนทำให้เกิดการขยายตัวของวงโคจรรูปลูกธนูได้เนื่องจากมีค่า μ มีค่าสูงกว่าค่า μ ของระบบดาวเสาร์กับเททิสและระบบนี้อยู่ภายในวงแหวนชั้น E ทำให้การรบกวนเนื่องมาจากดาวพฤหัสบดีทำให้วงโคจรของวัตถุชั้นที่สามของระบบดาวเสาร์กับไดโอนิเกิดวงโคจรที่มีขนาดใหญ่กว่าระบบดาวเสาร์กับเททิส การเคลื่อนที่ของวัตถุรอบจุดลากรางจ์ที่สี่หรือห้าเมื่อถูกรบกวนจากแรงโน้มถ่วงภายนอกพบว่าการเคลื่อนที่ได้ง่ายที่สุดในบริเวณจุดลากรางจ์ที่สาม, สี่ และ ห้า เพราะ ศักย์คู่โคของทั้งสามจุดนี้มีค่าใกล้เคียงกันจนทำให้การรบกวนที่น้อยที่สุดจะมีวงโคจรที่เกิดขึ้นง่ายที่สุดคือวงโคจรรูปลูกธนูซึ่งวงโคจรนี้จะเคลื่อนที่ผ่านเฉพาะจุดลากรางจ์ที่สี่ หรือ ห้า แต่ไม่สามารถผ่านจุดลากรางจ์ที่สามจึงทำให้ไม่สามารถเกิดเป็นวงโคจรรูปเกือบม้า และ ผลของการรบกวนที่เพิ่มขึ้นของทั้งสองระบบพบว่าจะเกิดการเคลื่อนที่ได้เฉพาะวงโคจรรูปลูกธนู ผลของการจำลองภาพของทั้งสองระบบ โดยใช้เงื่อนไขของช่วงการพจน์จุดในคำสั่ง Table ของโปรแกรม Mathematica ด้วยเงื่อนไขเดียวกันพบว่าเกิดความไม่ค้อยจะเป็นเส้นโค้งของรูปวงโคจรของระบบดาวเสาร์กับเททิสเมื่อเทียบกับความเป็นเส้นโค้งของรูปวงโคจรของระบบดาวเสาร์กับไดโอนิทำให้ทราบว่า การใช้ชุดคำสั่งของช่วงความละเอียดของจุดในการพจน์ที่เหมือนกันนี้มีความสัมพันธ์โดยตรงกับค่า μ คือว่า ถ้าค่า μ มีค่ามากจะทำให้ได้ลักษณะของเส้นโค้งมีความเป็นระเบียบมากกว่าค่า μ ที่มีค่าที่น้อยกว่า

ตารางที่ 8 แสดงข้อมูลคาบการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามของระบบดาวเสาร์กับเททีส

คาบสั้น = 1.8878 วัน และ คาบยาว = 627.6976 วัน

	คาบ(วัน)	จำนวนรอบของคาบสั้น
Telesto	628.6415	0.5
Calypso	629.5854	1
Planetary Ring 1	642.8000	8
Planetary Ring 2	642.8000	8

ตารางที่ 9 แสดงข้อมูลคาบการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามของระบบดาวเสาร์กับไดโอนี

คาบสั้น = 2.7369 วัน และ คาบยาว = 774.4997 วัน

	คาบ(วัน)	จำนวนรอบของคาบสั้น(n)
Helene	775.8682	0.5
Polydeuces	782.7104	3
Planetary Ring 1	788.1842	5
Planetary Ring 2	788.1872	5

การรบกวนของระบบดาวเสาร์กับเททีสและระบบดาวเสาร์กับไดโอนีเนื่องจากดาวพฤหัสบดี และ ดาวที่อยู่ในภายในระบบวงแหวน พบว่า ดาวพฤหัสบดีอยู่ใกล้กับระบบของดาวเสาร์กับไดโอนีจึงทำให้เกิดรูปร่างของวงโคจรที่มีการขยายตัวได้มากกว่าระบบด้านในของวงแหวนอย่างระบบของ

ดาวเสาร์กับเททิสจึงสรุปได้ว่าค่า μ ที่มีค่าสูงจะทำให้เกิดการขยายของรูปร่างทางโคจรได้ดีกว่าระบบที่มีค่า μ ที่ต่ำกว่า คาบของทั้งสองระบบเนื่องมาจากการรบกวนที่น้อยที่สุดไปหาการรบกวนที่มากที่สุดโดยเปลี่ยนเงื่อนไขของ ξ_0, η_0 พบว่าเกิดได้เฉพาะวงโคจรรูปลูกอ้อเท่านั้นเพราะว่าคาบของทั้งสองระบบมีค่าอยู่ในช่วงของคาบยาวถึงสองเท่าของคาบยาวซึ่งช่วงดังกล่าวนี้เป็นช่วงของกรณีของวงโคจรรูปลูกอ้อจึงสรุปว่าระบบทั้งสองเกิดการเคลื่อนที่รอบจุดลากรางจ์ที่เสถียรเป็นวงโคจรรูปลูกอ้อ และ คาบการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่สามเป็นตัวแบ่งประเภทของวงโคจรได้

ทฤษฎีของทีมงานโกลด์ริช และ ทริเมน พบว่าการรบกวนอนุภาควงแหวนทำให้เกิดการบีบอัดเนื่องมาจากดวงจันทร์คู่นี้จนสามารถควบคุมอนุภาควงแหวนได้โดยเริ่มการพิจารณาจากสมการฮิลล์พบว่ามีลักษณะเป็นภูเขาบริเวณจุดสมดุลคล้ายกรณีพื้นผิวรอบจุดลากรางจ์ที่ไม่เสถียรเพราะสมการการเคลื่อนที่น้อยยิ่งของระบบมีการเคลื่อนที่ที่ลดผลของ $\sin \lambda_2 t$ และ $\cos \lambda_2 t$ ด้วยเทอมของ $e^{\pm \lambda_1 t}$ จนทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบแฉกดังรูปที่ 10

ตารางที่ 10 แสดงผลของของดวงจันทร์แต่ละดวงกระทำกับอนุภาควงแหวน

	X_0 (km)	Y_0 (km)	ξ (km)	η (km)	$R = \sqrt{(X_0 + \xi)^2 + (Y_0 + \eta)^2}$ (km)
Prometheus	139072	9720.6	-408	-1370.60	139920.28
Pandora	141653	0	-697.20	725	140929.66

ค่าของ $\frac{|\xi|}{d} \ll 1, \frac{|\eta|}{d} \ll 1$ (d เป็นรัศมีของดวงจันทร์) พบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการการเคลื่อนที่แสดงว่าช่วงเวลาที่กำหนดนี้สามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ได้ ตารางที่ 10 เปรียบเทียบกันค่าช่วงความกว้างของชั้น F ในทางทฤษฎีได้ค่าโดยประมาณ (139920.28 km - 140929.66 km) กับช่วงความกว้างของชั้น F มีค่าประมาณ (139900 km - 140400 km) จากข้อมูล พบว่า ค่าทั้งสองนี้มีความใกล้เคียงกันมากแสดงว่า โปมีทรีอัส และ แพนดูล่า ทำหน้าที่ควบคุมอนุภาควงแหวนจริงดังข้อสรุปของทฤษฎีทีมงานของ โกลด์ริช และ ทริเมน