

ความอิสระของเศษส่วนต่อเนื่องในสนามฟังก์ชัน



นางสาวดวงรัตน์ ไชยชนะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-17-5914-2

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

๕๑๒๔๓๖๒๙๗

INDEPENDENCE OF CONTINUED FRACTIONS IN FUNCTION FIELDS

Miss Tuangrat Chaichana

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University


Academic Year 2005

ISBN 974-17-5914-2


481759

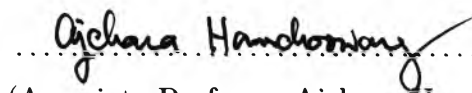
Thesis Title Independence of continued fractions in function fields
By Miss Tuangrat Chaichana
Field of Study Mathematics
Thesis Advisor Associate Professor Ajchara Harnchoowong, Ph.D.
Thesis Co-advisor Associate Professor Vichian Laohakosol, Ph.D.


Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial
Fulfillment of the Requirements for the Doctor's Degree



..... Dean of Faculty of Science
(Professor Piamsak Menasveta, Ph.D.)

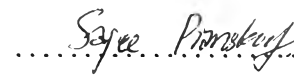
THESIS COMMITTEE

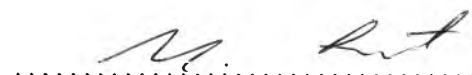

..... Chairman
(Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.)


..... Thesis Advisor
(Associate Professor Ajchara Harnchoowong, Ph.D.)


..... Thesis Co-advisor
(Associate Professor Vichian Laohakosol, Ph.D.)


..... Member
(Associate Professor Patanee Udomkavanich, Ph.D.)


..... Member
(Sajee Pianskool, Ph.D.)


..... Member
(Assistant Professor Utsanee Leerawat, Ph.D.)

ดวงรัตน์ ไชยชนะ : ความอิสระของเศษส่วนต่อเนื่องในสนามฟังก์ชัน

(INDEPENDENCE OF CONTINUED FRACTIONS IN FUNCTION FIELDS) อ.ที่ปรึกษา :

รศ. ดร. อัจฉรา หาญชูวงศ์, อ.ที่ปรึกษาร่วม : รศ. ดร. วิเชียร เลหาโกศล 48 หน้า.

ISBN 974-17-5914-2.

ความเป็นอิสระเชิงเส้น คือ แนวคิดที่ขยายแนวคิดของความเป็นตรรกยะให้เป็นนามธรรม ในทำนองเดียวกัน ความเป็นอิสระเชิงพีชคณิต คือ แนวคิดที่ขยายแนวคิดว่าด้วยความเป็นอดิศัยให้เป็นนามธรรม เป็นที่ทราบกันดีว่า จำนวนจริงแต่ละจำนวนสามารถเขียนแทนได้ด้วยเศษส่วนต่อเนื่องเชิงเดียวเมื่อผสมผสาน แนวคิดที่ว่าด้วยความเป็นอิสระกับการสร้างตัวแทน จะได้โจทย์ปัญหาว่าด้วยการจำแนกลักษณะของสมาชิกโดยผ่านทางตัวแทน วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เกี่ยวข้องกับแนวคิดทั้งสอง กล่าวคือ การแทนสมาชิกด้วยเศษส่วนต่อเนื่อง และความเป็นอิสระของเศษส่วนต่อเนื่อง ในสนามของอนุกรม Laurentเหนือสนามจำกัด ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในนาม สนามฟังก์ชัน

ส่วนสำคัญของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ คือ การสร้าง และ การพิสูจน์เกณฑ์สองประเภท ประเภทแรกเพื่อใช้ในการตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงเส้น เกณฑ์ประเภทที่สองสำหรับตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงพีชคณิต และการคำนวณตัวอย่างที่น่าสนใจแห่งเชิงวิเคราะห์ เกณฑ์การตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นที่ได้รับ กล่าวโดยย่อว่า ถ้าผลหารย่อยของเศษส่วนต่อเนื่อง มีอัตราการโตที่เร็วมากพอ แล้วเศษส่วนต่อเนื่องเหล่านี้จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เกณฑ์ดังกล่าวนี้เมื่อประยุกต์ใช้กับกรณีของจำนวนจริงจะครอบคลุมผลงานของ Hančl ที่ได้ทำไว้ในปี 2002 ส่วนการตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงพีชคณิต ได้พบและพิสูจน์เงื่อนไขที่เพียงพอแบบ Liouville สำหรับความเป็นอิสระเชิงพีชคณิตที่สร้างจากการประมาณเชิงตรรกยะเงื่อนไขดังกล่าว เมื่อประยุกต์ใช้กับเศษส่วนต่อเนื่อง จะให้เกณฑ์ที่กล่าวว่า ผลหารย่อยที่เติบโตอย่างรวดเร็วแบบชี้กำลังจะก่อให้เกิดความเป็นอิสระเชิงพีชคณิต ในส่วนของตัวอย่าง ได้ทำการคำนวณเศษส่วนต่อเนื่องเชิงซัดที่น่าสนใจอย่างยิ่งสองจำพวก ตัวอย่างดังกล่าวชี้ให้เห็นอย่างชัดเจนถึงประสิทธิภาพของเกณฑ์ที่ได้รับข้างต้น

ภาควิชา ...คณิตศาสตร์...

สาขาวิชา ...คณิตศาสตร์...

ปีการศึกษา2548.....

ลายมือชื่อนิติ..... ดวงรัตน์ ไชยชนะ.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..... อ.อ.อ. หาญชู.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม..... วิเชียร เลหาโกศล.....

4573817023 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORDS : CONTINUED FRACTION / FUNCTION FIELD / ALGEBRAIC AND
LINEAR INDEPENDENCE

TUANGRAT CHAICHANA : INDEPENDENCE OF CONTINUED FRAC
TIONS IN FUNCTION FIELDS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. AJCHARA
HARNCHOOWONG, Ph.D. THESIS CO-ADVISOR : ASSOC. PROF. VICHIAN
LAOHAKOSOL, Ph.D., 48 pp. ISBN 974-17-5914-2

A natural abstraction of rationality is that of linear independence, while for algebraic consideration, a natural abstraction of transcendence is that of algebraic independence. Also well-known is that each real number is representable as a simple continued fraction. Combining independence with representation, there arises a natural problem of characterizing elements via their representations. The work in this thesis centers around these two concepts, namely, continued fraction representation and their independence, in the field of Laurent series over a finite field, referred to here as function field.

The major part of the thesis are devoted to the establishing of two general independence criteria, one for linear and the other for algebraic independence and to the extensive computation of intriguing examples. The linear independence criterion states roughly that if the partial quotients grow at a moderately fast rate, their continued fractions are linearly independent. This linear independence criterion when applied to the real case encompasses that obtained by Hančl in 2002. As to algebraic independence, a Liouville-type sufficient condition through rational approximations is proved. When applied to continued fractions, it yields a number of criteria which show that exponentially growing partial quotients imply algebraic independence. Two interesting types of explicit continued fractions are worked out as examples illustrating the strength of the criteria so obtained.

Department ...**Mathematics**...
Field of study ...**Mathematics**...
Academic year**2005**.....

Student's signature...*Tuangrat Chaichana*...
Advisor's signature...*Ajchara Harnchoowong*...
Co-advisor's signature...*Vichian Laohakosol*...

ACKNOWLEDGEMENTS

I am greatly indebted to Associate Professor Dr. Ajchara Harnchoowong and Associate Professor Dr. Vichian Laohakosol, my thesis advisors, for their willingness to sacrifice their time to suggest and advise me in preparing and writing this thesis. I would like to thank Professor Dr. Yupaporn Kemprasit, Associate Professor Dr. Patanee Udomkavanich, Dr. Sajee Pianskool and Assistant Professor Dr. Utsanee Leerawat, my thesis committee, for their suggestions. I also would like to thank all of the teachers.

In particular, I would like to express my highest gratitude to my family for their love and encouragement throughout my graduate studies.

CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	v
ACKNOWLEDGEMENTS	vi
CONTENTS	vii
CHAPTER	
I INTRODUCTION	1
II BASIC DEFINITIONS AND RESULTS	4
2.1 VALUATION	4
2.2 CLASSICAL CONTINUED FRACTIONS	7
2.3 CONTINUED FRACTIONS IN THE FIELD \mathbb{Q}_p	8
2.4 RUBAN CONTINUED FRACTIONS IN THE FIELD $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$	10
2.5 SCHNEIDER CONTINUED FRACTIONS IN THE FIELD $\mathbb{F}_q((x^{-1}))$..	12
III LINEAR AND ALGEBRAIC INDEPENDENCE	24
3.1 LINEAR INDEPENDENCE	24
3.2 ALGEBRAIC INDEPENDENCE	29
IV EXAMPLES	38
REFERENCES	45
VITA	48