

เทคนิคการปรับเอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนึ่ง
โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับเท่ากัน



นายนิพนธ์ วรรณโสภาคย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2543
ISBN 974-347-064-6
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I 1996 3567

29 ต.ค. 2546

ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE FOR VISCOUS FLOW ANALYSIS
USING EQUAL-ORDER TRIANGULAR ELEMENTS

Mr.Niphon Wansophark

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2000

ISBN 974-347-064-6

นิพนธ์ วรณโสภาคย์ : เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนืด โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับเท่ากัน. (ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE FOR VISCOUS FLOW ANALYSIS USING EQUAL-ORDER TRIANGULAR ELEMENTS) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 198 หน้า. ISBN 974-347-064-6.

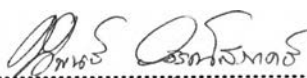
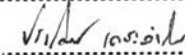
วิทยานิพนธ์นี้แสดงขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวลและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม สำหรับพจน์การพาในสมการโมเมนตัมจะถูกพิจารณาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ ซึ่งช่วยหลีกเลี่ยงการแกว่งตัวของคำตอบที่มักเกิดขึ้นในระเบียบวิธีอื่นๆ

ส่วนขั้นตอนการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้สามารถที่จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วและความดันที่อันดับเท่ากันได้เป็นผลให้สามารถทำความเข้าใจในขั้นตอนของการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยง่าย อีกทั้งยังเพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณด้วยการคำนวณแบบแยกกันกล่าวคือตัวแปรความเร็วและความดันจะถูกคำนวณไม่พร้อมกัน

ขณะเดียวกันเพื่อให้ผลลัพธ์มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับการวิเคราะห์ปัญหาการไหล โดยเทคนิคดังกล่าวจะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีความเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นๆ

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ไปเปรียบเทียบกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำ ก่อนนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลต่างๆ ในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีลักษณะซับซ้อนได้

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
ปีการศึกษา 2543

ลายมือชื่อนิสิต 
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา 
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม -

4070316021 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEY WORD: FINITE ELEMENT / STREAMLINE UPWIND / EQUAL-ORDER / ADAPTIVE MESHING / VISCOUS FLOW

NIPHON WANSOPHARK : ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE FOR VISCOUS FLOW ANALYSIS USING EQUAL-ORDER TRIANGULAR ELEMENTS. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D. 198 pp. ISBN 974-347-064-6.

A finite element method for two-dimensional, steady-state viscous incompressible flow is presented. Corresponding finite element equations were derived from the set of partial differential equations that satisfy the law of conservation of mass and conservation of momentums. The convection term in momentum equations is treated by a finite element streamline upwind method to avoid the oscillation in the solution.

The solution algorithm presented in this thesis uses an equal order element interpolation functions for both the velocity and pressure that can reduce the complexity in deriving the finite element equations. A segregated solution algorithm is also incorporated to compute the velocities and pressure separately for improving the computational efficiency.

In addition, the adaptive meshing technique is applied to increase the solution accuracy. The technique places small elements in the region of high solution gradients, and at the same time, places larger elements in the other regions.

A corresponding finite element computer program was developed and verified using simple examples that have exact solutions before applying to solve more complex problems. Flow solutions from several tested problems illustrate the effectiveness of the finite element method that can predict detailed flow behaviors past complex geometries.

Department Mechanical Engineering
Field of study Mechanical Engineering
Academic Year 2000

Student's signature *Nippon Wansophark*
Advisor's signature *Pramote Dechaumphai*
Co-advisor's signature -

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เตชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้ทั้งความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดต่างๆที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง อันเป็นแรงบันดาลใจและกำลังใจให้ผู้วิจัยสามารถทำงานได้สำเร็จลุล่วง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ทวี เวชพฤติ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อติ บุญจิตราดุลย์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ พี่วิโรจน์ ลี้มตระการ พี่สุพัฒน์พงศ์ สิขาบัณฑิต และพี่วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม ตลอดจนสมาชิกในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณทุกท่าน สำหรับคำแนะนำและกำลังใจในระหว่างการทำงานวิจัยนี้ ขอขอบคุณนางสาวเจริญขวัญ ไกรยานายเวชพงศ์ ชูติชูเดช และนายณัฐ พันธุ์สุทรากกร เพื่อนที่กำลังศึกษาต่อในต่างประเทศที่ให้ความช่วยเหลือในการส่งเอกสารทางวิชาการกลับมาให้ผู้วิจัยได้ศึกษาเพิ่มเติม และขอขอบคุณนางสาวพัชรินทร์ มณีโรจน์ ที่คอยให้กำลังใจและอำนวยความสะดวกในเรื่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์นี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ที่คอยให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญูตราบูชาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญภาพ	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์	ถ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์	1
1.1.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล	1
1.1.2 พัฒนาการของวิธีหาผลเฉลยโดยประมาณสำหรับ ปัญหาการไหล	4
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์	10
1.3 วิธีดำเนินงานและขอบเขตวิทยานิพนธ์	11
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์	11
1.5 เนื้อหาโดยสังเขปของบทต่าง ๆ ภายในวิทยานิพนธ์	12
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหล	13
2.1 กฎการอนุรักษ์มวล	13
2.2 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม	15
บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์	19
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	19
3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์	22
3.3 การแก้ปัญหาที่มีพจน์การพาโดยใช้ระเบียบวิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์	29
บทที่ 4 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืด	40
4.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด	40
4.2 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์	46
4.2.1 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการโมเมนตัม	46
4.2.2 เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการความดัน	47

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5	
การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์	51
5.1 ฟังก์ชันควอดราติก (quadratic function)	51
5.2 ระเบียบวิธีการลดลงมากที่สุด (steepest descent method)	54
5.3 ระเบียบวิธีคอนจูเกตไคเรคชัน (conjugate direction method)	59
5.4 ระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์ (conjugate gradient method)	64
5.5 การปรับสภาพเพื่อเร่งเข้าสู่คำตอบ (preconditioning)	66
5.6 ตัวอย่างการแก้ระบบสมการด้วยวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์	68
บทที่ 6	
ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบหนืด	72
6.1 ลักษณะของโปรแกรม EQUAL	72
6.2 รายละเอียดของโปรแกรม EQUAL	73
6.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม EQUAL ต้องการ	73
6.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม EQUAL	77
บทที่ 7	
ผลการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในแบบต่าง ๆ	82
7.1 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความหนืด (Couette flow)	82
7.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความดัน (Poiseuille flow)	85
7.3 ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบร์ริง	89
7.4 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว (developing flow)	93
7.5 ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ (cavity flow)	97
7.6 ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่ หน้าที่ดัดหันที่หันใด (backward facing step)	100
7.7 ปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก (flow past a cylinder)	105
7.8 ปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน	111
บทที่ 8	
เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	114
8.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	114
8.2 การนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ มาใช้กับปัญหาการไหล	118

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
8.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์	120
8.4 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดย อัตโนมัติ	120
8.5 ตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมา ประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนึ่งแต่ไม่ตัดตัว	121
8.6 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนโดยใช้เทคนิคการ ปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	131
บทที่ 9 บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ	141
9.1 บทสรุป	141
9.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์	142
9.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	143
รายการอ้างอิง	144
ภาคผนวก	149
ภาคผนวก ก. รายละเอียดของโปรแกรม EQUAL	150
ภาคผนวก ข. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ STREAM	172
ข.1 ลักษณะของโปรแกรม STREAM	172
ข.2 รายละเอียดของโปรแกรม STREAM	174
ข.3 ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรม STREAM ต้องการ ...	185
ข.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม STREAM	187
ภาคผนวก ค. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ PCG	192
ค.1 ลักษณะของโปรแกรม PCG	192
ค.2 รายละเอียดของโปรแกรม PCG	193
ค.3 ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรม PCG ต้องการ	196
ค.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม PCG ในการแก้ ระบบสมการ	196
ประวัติผู้วิจัย	198

สารบัญญภาพ

		หน้า
รูปที่ 1.1	การแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง	1
รูปที่ 1.2	แสดงลักษณะการเกิดชั้นบันไดบนขอบที่ไม่ขนานกับระบบพิกัดฉาก	2
รูปที่ 1.3	การแบ่งขอบเขตออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมของปัญหาที่มีขอบโค้ง (ก) การแบ่งขอบเขตออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมในปัญหาจริง (ข) การแบ่งขอบเขตออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมบนระบบพิกัดที่ใช้คำนวณ	3
รูปที่ 1.4	การแบ่งขอบเขตของปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	4
รูปที่ 1.5	การกระจายตัวของความดันที่เปลี่ยนแปลงสลับกันบนตารางสี่เหลี่ยม	6
รูปที่ 1.6	ตารางสี่เหลี่ยมที่มีการเชื่อมกันของจุดต่อเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหล	6
รูปที่ 2.1	มวลของของไหลที่ไหลผ่านเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก	13
รูปที่ 2.2	แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก	16
รูปที่ 3.1	การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ	19
รูปที่ 3.2	เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ โดยมีตัวไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อ	20
รูปที่ 3.3	ระบบพิกัดสตรีมไลน์ (streamline coordinate)	24
รูปที่ 3.4	แสดงนิยามของจุดดาวนิวน์	24
รูปที่ 3.5	แสดงจุดดาวนิวน์และจุดอัปวินด์บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม	25
รูปที่ 3.6	เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพา (ก) เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับจุดต่อที่ 1 เป็นจุดดาวนิวน์ (ข) เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับจุดต่อที่ 2 เป็นจุดดาวนิวน์ (ค) เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับจุดต่อที่ 3 เป็นจุดดาวนิวน์	27
รูปที่ 3.7	แสดงขอบเขตของปัญหาตัวอย่าง	28
รูปที่ 3.8	ขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ 1	29
รูปที่ 3.9	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ 1	30
รูปที่ 3.10	แสดงผลของระเบียบวิธีที่ใช้จัดพจน์การพาในอดีตกับผลเฉลยแม่นยำ	30
รูปที่ 3.11	การเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำที่มุมการไหลต่างๆ	31
รูปที่ 3.12	ขอบเขตของปัญหาพร้อมเส้นกระแสที่เกิดขึ้น	32
รูปที่ 3.13	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 2	33
รูปที่ 3.14	ลักษณะการกระจายของค่า ϕ ตลอดขอบทางเข้า	33
รูปที่ 3.15	การกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดภายในขอบเขตของปัญหา	34

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 3.16	ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านนอกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นยำตรงกรณี $Pe = \infty$	35
รูปที่ 3.17	ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านนอกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นยำตรงกรณี $Pe = 100$	35
รูปที่ 3.18	แสดงลักษณะของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน	36
รูปที่ 3.19	ขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน	37
รูปที่ 3.20	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของ ปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน	37
รูปที่ 3.21	การเปรียบเทียบอนุกรมปริมาตรกึ่งกลางท่อกับผลเฉลยแม่นยำตรง	38
รูปที่ 4.1	การแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ	41
รูปที่ 4.2	ขั้นตอนในการคำนวณ	45
รูปที่ 4.3	การคำนวณพจน์ $\{R_b\}$ ที่บริเวณขอบของโดเมนการไหล	49
รูปที่ 5.1	ตัวอย่างปัญหาที่เป็นระบบสมการสองตัวแปร	52
รูปที่ 5.2	กราฟของฟังก์ชันควอดราติก $f(x)$	52
รูปที่ 5.3	กราฟเส้นโครงร่างของฟังก์ชัน $f(x)$	53
รูปที่ 5.4	กราฟของฟังก์ชันควอดราติก $f(x)$ เมื่อเมตริกซ์ A มีคุณสมบัติต่างๆ (ก) เมื่อเมตริกซ์ A มีคุณสมบัติ positive definite (ข) เมื่อเมตริกซ์ A มีคุณสมบัติ negative definite (ค) เมื่อเมตริกซ์ A เป็น singular และมีคุณสมบัติ positive definite (ง) เมื่อเมตริกซ์ A มีคุณสมบัติ indefinite	54
รูปที่ 5.5	แสดงเวกเตอร์ที่บอกถึงการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันควอดราติกที่มากที่สุดตามตำแหน่งต่างๆ	55
รูปที่ 5.6	แสดงถึงระเบียบวิธีการลดลงมากที่สุด (ก) จากจุดเริ่มต้น $[2, -2]^T$ หาค่าตำแหน่งของจุดต่อไปซึ่งอยู่ในแนวทิศทาง ที่มีการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด (ข) การหาจุดที่อยู่บนแนวการตัดกันระหว่างพื้นผิวสองผิว (ค) พหุคูณแสดงถึงแนวการตัดกันระหว่างพื้นผิวทั้งสอง (ง) แสดงถึงเวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันควอดราติกครั้งที่ $i + 1$ จะมีทิศทางตั้งฉากกับครั้งที่ i	56
รูปที่ 5.7	การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันตามตำแหน่งต่างๆ ที่อยู่บนแนวการวิ่ง เข้าสู่คำตอบ	57
รูปที่ 5.8	ลักษณะการวิ่งเข้าสู่คำตอบของระเบียบวิธีการลดลงมากที่สุด	57
รูปที่ 5.9	แนวคิดเริ่มต้นของวิธีคอนจูเกตไคเรคชัน	59

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 5.10	คู่ของเวกเตอร์ที่มีคุณสมบัติ A-orthogonal	60
รูปที่ 5.11	ระเบียบวิธีคอนจูเกตไคเรคชันที่ใช้จำนวนรอบการวิ่งเข้า n รอบ (ก) แสดงขั้นตอนแรกของระเบียบวิธีคอนจูเกตไคเรคชันโดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด $x_{(0)}$ แล้วเลื่อนจุดดังกล่าวไปในทิศทางของเวกเตอร์ $d_{(0)}$ จนกระทั่งถึงจุดต่ำสุดคือจุด $x_{(1)}$ ซึ่งมีข้อกำหนดว่า ตำแหน่งของจุด $x_{(1)}$ จะต้องทำให้เวกเตอร์ $e_{(1)}$ มีคุณสมบัติ A-orthogonal กับ เวกเตอร์ $d_{(0)}$ (ข) เวกเตอร์ค่าความคลาดเคลื่อน $e_{(0)}$ เกิดจากการรวมกันของเวกเตอร์ที่มีคุณสมบัติ A-orthogonal กัน (เวกเตอร์ที่เป็นเส้นประ)	61
รูปที่ 5.12	Gram-Schmidt process	63
รูปที่ 5.13	ตัวอย่างลักษณะการวิ่งเข้าสู่คำตอบด้วยวิธีคอนจูเกตไคเรคชัน	64
รูปที่ 6.1	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม EQUAL	74
รูปที่ 6.2	ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนึ่งระหว่างแผ่นคู่ขนาน	77
รูปที่ 6.3	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นขนาน	78
รูปที่ 6.4	ข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'COUETTE.DAT'	79
รูปที่ 6.5	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม EQUAL	80
รูปที่ 6.6	ลักษณะผลลัพธ์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นขนานที่อยู่ในไฟล์ชื่อ 'COUETTE.OUT'	81
รูปที่ 7.1	ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนึ่งระหว่างแผ่นคู่ขนาน เนื่องมาจากความหนืด	83
รูปที่ 7.2	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด	83
รูปที่ 7.3	การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน เนื่องมาจากความหนืด	84
รูปที่ 7.4	เปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด ณ ตำแหน่ง x ต่างๆ	84
รูปที่ 7.5	ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนึ่งระหว่างแผ่นคู่ขนาน เนื่องมาจากความดัน	85
รูปที่ 7.6	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน	87

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 7.7	แสดงการกระจายความเร็วของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนาน เนื่องจากความดัน	87
รูปที่ 7.8	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง x ต่างๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันกับ ค่าผลเฉลยแม่นยำตรง	88
รูปที่ 7.9	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง y ต่างๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน	88
รูปที่ 7.10	กลไกการหล่อลื่นของเจอร์นัลแบร์ริง	89
รูปที่ 7.11	แสดงระยะระหว่างเพลากับแบร์ริงและความยาวส่วนโค้งของแบร์ริง ที่สัมผัสน้ำมัน	90
รูปที่ 7.12	รูปแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์การหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบร์ริง	90
รูปที่ 7.13	ลักษณะของปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบร์ริง	91
รูปที่ 7.14	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการหล่อลื่น ระหว่างเพลากับแบร์ริง	91
รูปที่ 7.15	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ขอบทางด้านซ้ายกับ ผลเฉลยแม่นยำตรง	92
รูปที่ 7.16	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ขอบทางด้านขวากับ ผลเฉลยแม่นยำตรง	92
รูปที่ 7.17	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง	93
รูปที่ 7.18	ลักษณะการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว	94
รูปที่ 7.19	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการ ไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว	94
รูปที่ 7.20	การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนาน แบบมีการปรับตัว	95
รูปที่ 7.21	การกระจายตัวของความดันสำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนาน แบบมีการปรับตัว	95
รูปที่ 7.22	การกระจายตัวของค่าความเร็วที่ด้านทางเข้าและออกของการไหล	96
รูปที่ 7.23	รูปร่างลักษณะพร้อมกับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหล หมุนวนภายในช่องแคบและเงื่อนไขขอบเขต	97
รูปที่ 7.24	การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลหมุนวนภายใน ช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100	98

สารบัญญภาพ (ต่อ)

		หน้า
รูปที่ 7.25	การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400	98
รูปที่ 7.26	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100	99
รูปที่ 7.27	การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400	99
รูปที่ 7.28	ลักษณะของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด	100
รูปที่ 7.29	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด	100
รูปที่ 7.30	ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 100	101
รูปที่ 7.31	ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 100	101
รูปที่ 7.32	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.30 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 100	101
รูปที่ 7.33	ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 200	102
รูปที่ 7.34	ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 200	102
รูปที่ 7.35	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.33 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 200	102
รูปที่ 7.36	ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 300	103
รูปที่ 7.37	ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 300	103

สารบัญญภาพ (ต่อ)

		หน้า
รูปที่ 7.38	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.36 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 300	103
รูปที่ 7.39	ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 400	104
รูปที่ 7.40	ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 400	104
รูปที่ 7.41	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.39 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 400	104
รูปที่ 7.42	การเปรียบเทียบระยะเวลาการแตะสัมผัสจากการคำนวณกับผลการทดลอง	105
รูปที่ 7.43	ลักษณะปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก	106
รูปที่ 7.44	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก	106
รูปที่ 7.45	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 10	107
รูปที่ 7.46	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.45 บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 10	107
รูปที่ 7.47	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 20	108
รูปที่ 7.48	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.47 บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 20	108
รูปที่ 7.49	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 30	109
รูปที่ 7.50	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.49 บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 30	109
รูปที่ 7.51	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 40	110
รูปที่ 7.52	รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.51 บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 40	110

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 7.53	การเปรียบเทียบขนาดของการไหลหมุนวนที่เกิดขึ้นด้านหลังวัตถุรูปทรงกระบอกจากการคำนวณกับผลการทดลอง	111
รูปที่ 7.54	ลักษณะของปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน	112
รูปที่ 7.55	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน	112
รูปที่ 7.56	การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน	113
รูปที่ 7.57	รายละเอียดของความเร็วบริเวณที่การไหลมาบรรจบกัน	113
รูปที่ 8.1	ค่าอนุพันธ์ของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์	116
รูปที่ 8.2	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยม	121
รูปที่ 8.3	ข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'square.dat'	123
รูปที่ 8.4	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม BUILT	124
รูปที่ 8.5	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาตัวอย่าง	125
รูปที่ 8.6	ตัวอย่างข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'square.v0'	125
รูปที่ 8.7	การกระจายตัวของความดันสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น	126
รูปที่ 8.8	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม SPACE	127
รูปที่ 8.9	ตัวอย่างข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'square.r0'	127
รูปที่ 8.10	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม BUILT เพื่อการปรับขนาดครั้งใหม่	128
รูปที่ 8.11	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดครั้งที่ 1 สำหรับปัญหาตัวอย่าง	128
รูปที่ 8.12	การกระจายตัวของความดันสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	129
รูปที่ 8.13	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดครั้งที่ 2 สำหรับปัญหาตัวอย่าง	130
รูปที่ 8.14	การกระจายตัวของความดันสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	130
รูปที่ 8.15	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ	131
รูปที่ 8.16	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ และผลการกระจายตัวของความเร็ว	132
รูปที่ 8.17	ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.16)	132
รูปที่ 8.18	ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.17)	132

สารบัญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ 8.19	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	133
รูปที่ 8.20	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	133
รูปที่ 8.21	ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.20)	134
รูปที่ 8.22	ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.21)	134
รูปที่ 8.23	ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านวาล์ว	135
รูปที่ 8.24	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวาล์วและผลการกระจายตัวของความเร็ว	135
รูปที่ 8.25	ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.24)	136
รูปที่ 8.26	ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.25)	136
รูปที่ 8.27	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวาล์วและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	137
รูปที่ 8.28	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวาล์วและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	138
รูปที่ 8.29	ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.28)	138
รูปที่ 8.30	ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.29)	139
รูปที่ 8.31	การเปรียบเทียบลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วในแนว A-A	139
รูปที่ ข.1	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม STREAM	173
รูปที่ ข.2	ขอบเขตของปัญหาตัวอย่าง	187
รูปที่ ข.3	รูปลักษณะไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขต	188
รูปที่ ข.4	ข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'EX1.DAT'	190
รูปที่ ข.5	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม STREAM	190
รูปที่ ข.6	ลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์ที่อยู่ในไฟล์ 'EX1.OUT'	191
รูปที่ ค.1	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม PCG	192

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า	
รูปที่ ค.2	ข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'EX2.DAT'	197
รูปที่ ค.3	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม PCG	197
รูปที่ ค.4	ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรม PCG	197

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่, เมตริกซ์สัมประสิทธิ์
A_f	ค่า $\int N dA$
a	ความเร่ง, ตัวแปรความสูงของช่องการไหล
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
C_p	ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน
D	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
e	ค่าความผิดพลาด
F	แรง
F_p	ฟังก์ชันน้ำหนักของวิธีสตรึมไลน์อัปวินด์
F_1	ปริมาณมวลของไหลที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ด้านตรงข้ามกับจุดต่อที่ 1
F_2	ปริมาณมวลของไหลที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ด้านตรงข้ามกับจุดต่อที่ 2
F_3	ปริมาณมวลของไหลที่ไหลผ่านเอลิเมนต์ด้านตรงข้ามกับจุดต่อที่ 3
g	แรงโน้มถ่วงโลก
h	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์
K_x	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการความดัน
K_y	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการความดัน
K_{pi}	สัมประสิทธิ์สำหรับความดันที่กระจายมาจากสมการโมเมนต์
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
L	ตัวแปรระยะทาง
L_e	ระยะทางการไหลที่มีการปรับตัว
N	ฟังก์ชันน้ำหนัก
n	ทิศทางตั้งฉาก
m	มวล

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

Pe	เพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)
Pr	พริ้งเดิลนัมเบอร์ (Prandlt number)
p	ความดัน
R	เศษตกค้าง
Re	เรย์โวลด์นัมเบอร์ (Reynold number)
r	เวกเตอร์เศษตกค้าง
s	แกนที่สัมพันธ์กับเส้นสตรีมไลน์
T	อุณหภูมิ
t	เวลา
U_s	ความเร็วในแนวเส้นสตรีมไลน์
u	ความเร็วในแนวแกน x
\hat{u}_i	ตัวแปรในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน x
v	ความเร็วในแนวแกน y
\hat{v}_i	ตัวแปรในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน y
W	ฟังก์ชันน้ำหนัก, น้ำหนัก
x	ระยะในแนวราบ
y	ระยะในแนวตั้ง
Γ	ขอบของการไหล
Γ_ϕ	สัมประสิทธิ์การแพร่
Ω	โดเมนของการไหล
ϕ	ตัวแปรใดๆ
λ	ค่าพารามิเตอร์ของวิธีฟินิต์, ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
μ	ความหนืด
ν	ความหนืดพลศาสตร์
θ	มุมการไหล

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

ρ	ความหนาแน่น
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน
ω	ตัวแปรอวกาศ
ψ	ตัวแปรเสริมฟังก์ชัน