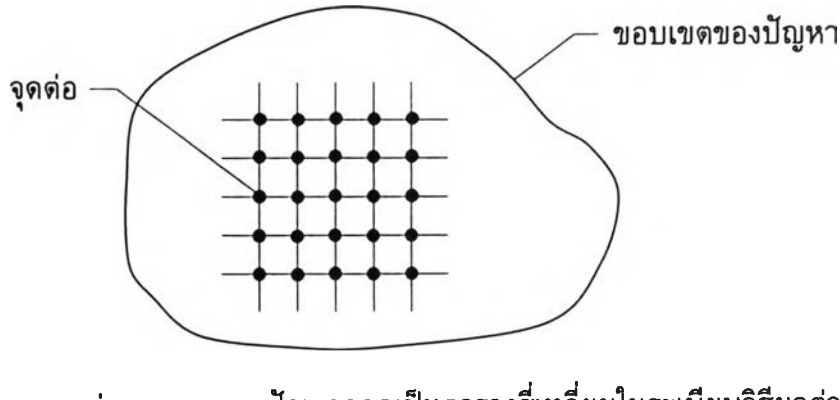
บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วๆไป จำเป็นต้องอาศัยการแก้สมการที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งสมการดังกล่าวส่วนใหญ่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (integral equations) แต่ทว่าการหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solutions) ของสมการดังกล่าวนั้นทำได้ยากลำบาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับปัญหาของการไหล ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องได้แก่ สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงานนั้น อยู่ในรูปแบบที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหาโดยทั่วไปได้ ดังนั้นจึงมีการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้วิเคราะห์เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณกับปัญหาการไหล

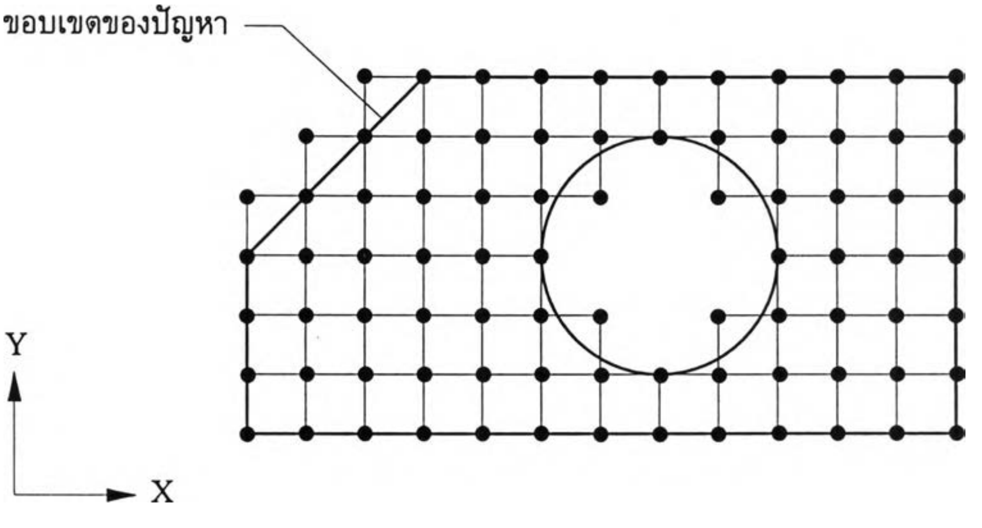
1.1.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหล

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยโดยประมาณที่ได้รับความนิยมอย่างมากในอดีตที่ผ่านมาคือ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) [1] หลักการของระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องเริ่มจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นช่องตารางสี่เหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 1.1 โดยที่ตารางสี่เหลี่ยมเหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ (grid points) ตามหัวมุมของสี่เหลี่ยมต่างๆ และขนาดของปัญหาหรือจำนวนตัวไม่รู้ค่า (number of unknowns) จะขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อนี้เอง จากนั้นนำเอาสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาที่จะพิจารณามากระจายพจน์ออกโดยใช้การกระจายของอนุกรมเทยเลอร์ (Taylor series expansion) [2] ซึ่งจะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปแบบของระบบสมการผลต่างสืบเนื่อง (system of difference equations) ที่สอดคล้องกับจุดต่อต่างๆ ภายในขอบเขตของปัญหา ข้อดีของระเบียบวิธีนี้ก็คือสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย และมีความสะดวกในการนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาต่อไป



รูปที่ 1.1 การแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

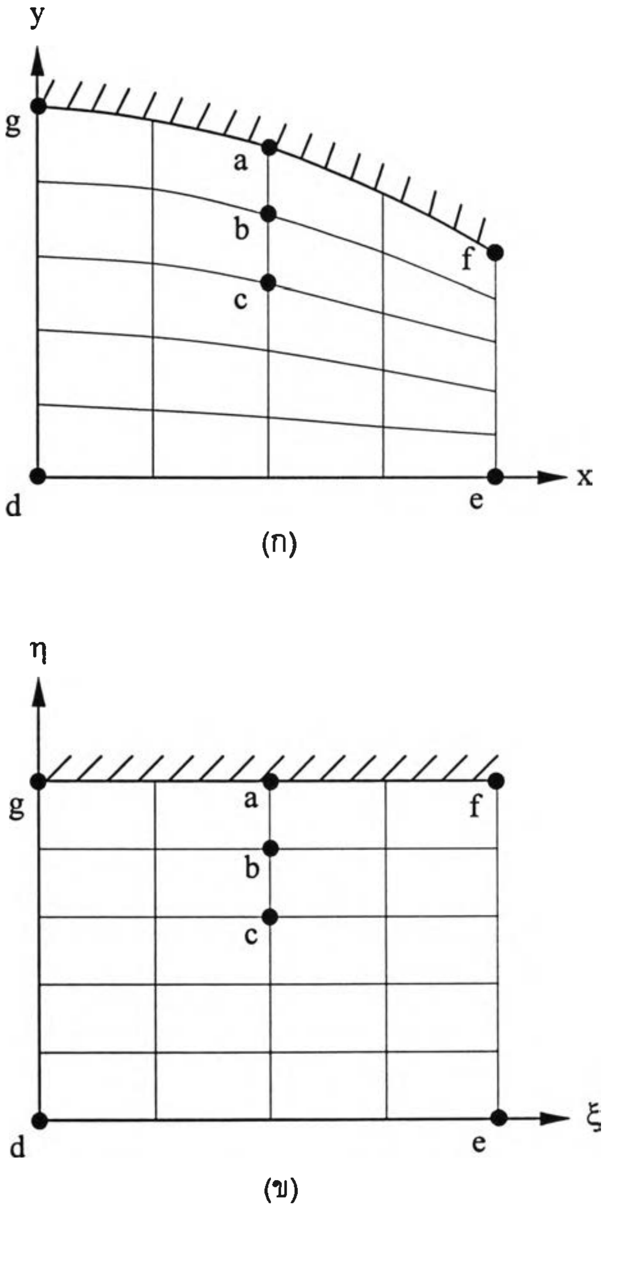
ส่วนข้อเสียของระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องก็มีหลายประการด้วยกัน เช่น ความไม่สะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (application of boundary conditions) และที่สำคัญที่สุดก็คือในวิธีนี้จะต้องแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น จากสาเหตุดังกล่าวทำให้ขอบของปัญหาที่จะพิจารณาด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องต้องวางตัวขนานกับระบบพิกัดฉาก (orthogonal coordinate) แต่สำหรับปัญหาการไหลโดยทั่วไปนั้น ขอบเขตของปัญหาหรือวัตถุที่วางขวางการไหลอยู่นั้นมักจะมีขอบเป็นเส้นโค้งหรืออาจจะไม่ได้วางตัวขนานกับระบบพิกัดฉาก ดังนั้นเมื่อทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยม ก็จะทำให้ขอบดังกล่าวถูกแทนด้วยลักษณะของ "ขั้นบันได" (stair step) ดังแสดงในรูปที่ 1.2 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าตารางสี่เหลี่ยมที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไม่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงของปัญหาได้โดยเที่ยงตรง แต่ถ้าหากจะใช้สี่เหลี่ยมขนาดที่เล็กลงเพื่อให้สามารถจำลองรูปร่างลักษณะที่แท้จริงได้ใกล้เคียงยิ่งขึ้น ก็จะเป็นการเพิ่มจำนวนจุดต่อซึ่งจะทำให้ต้องแก้ระบบสมการที่มีขนาดใหญ่ขึ้น เป็นผลทำให้ต้องใช้หน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์และเวลาในการคำนวณที่เพิ่มมากขึ้นด้วย



รูปที่ 1.2 แสดงลักษณะการเกิดขั้นบันไดบนขอบที่ไม่ขนานกับระบบพิกัดฉาก

จากปัญหาดังกล่าวทำให้นักวิจัยในอดีตได้เสนอวิธีที่เรียกว่าระบบพิกัดที่โค้งตามขอบของปัญหา (boundary-fitted coordinate) [3] เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดปัญหา "ขั้นบันได" ซึ่งวิธีดังกล่าวจะใช้ระบบพิกัดฉากแบบโค้ง (orthogonal curvilinear coordinate) แทนระบบพิกัดฉากแบบธรรมดา จากนั้นจะทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมที่มีลักษณะโค้งรับกับส่วนโค้งของขอบเขตของปัญหา โดยในรูปที่ 1.3 ได้แสดงขอบเขตของปัญหาการไหลภายในท่อที่มีการลดขนาด (convergent duct) โดยที่เส้นโค้ง gf แทนผนังท่อ ส่วนเส้น de เป็นแนวกึ่งกลางของท่อ จากรูปจะเห็นว่าการแบ่งขอบเขตของปัญหานี้เป็นตารางสี่เหลี่ยมมุมฉากจะทำให้เกิดปัญหา "ขั้นบันได" ดังนั้นจึงต้องทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออก

เป็นตารางสี่เหลี่ยมที่โค้งรับกับขอบของท่อดังแสดงในรูปที่ 1.3ก ซึ่งจะทำให้รูปแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะปัญหานั้นมีความถูกต้องใกล้เคียงกับลักษณะดั้งเดิมมากยิ่งขึ้น แต่ข้อเสียของวิธีดังกล่าวก็คือในระหว่างขั้นตอนของการหาผลเฉลยโดยประมาณในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องนั้นจะต้องทำการแปลงพิกัดของจุดต่อต่าง ๆของปัญหาดังแสดงในรูปที่ 1.3ก ให้อยู่ในระบบพิกัดฉากใหม่ (ξ, η) ดังแสดงในรูปที่ 1.3ข เสียก่อน ซึ่งเป็นผลให้ขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหามีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

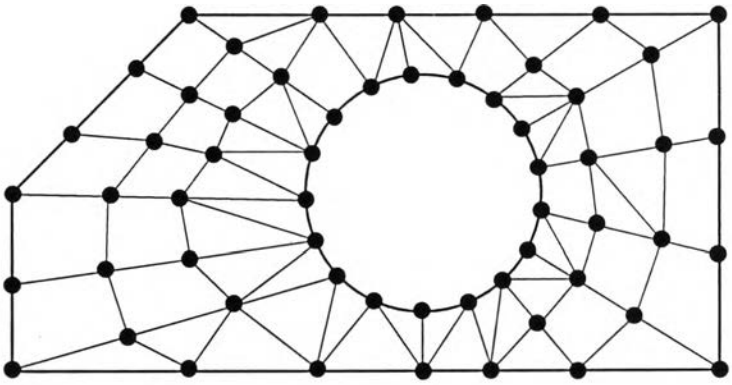


รูปที่ 1.3 การแบ่งขอบเขตออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมของปัญหาที่มีขอบโค้ง

(ก) การแบ่งขอบเขตออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมในปัญหาจริง

(ข) การแบ่งขอบเขตออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมบนระบบพิกัดที่ใช้คำนวณ

จากความลำบากดังกล่าวจึงทำให้ในปัจจุบันระเบียบวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณที่ได้รับความนิยมเพิ่มมากขึ้นได้แก่วิธีที่เรียกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) [2,4,5] ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนได้ โดยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้จะเริ่มต้นเช่นเดียวกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องนั่นคือ ทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นพื้นที่ย่อยๆที่เรียกว่าเอลิเมนต์ ซึ่งเอลิเมนต์เหล่านี้อาจมีรูปร่างเป็นสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าและจะมีขนาดเท่าใดก็ได้ ดังนั้นเอลิเมนต์เหล่านี้จึงสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมของปัญหาได้ ไม่ว่ารูปร่างขอบเขตของปัญหาดังกล่าวจะมีส่วนโค้งในแบบใดก็ตามดังแสดงในรูปที่ 1.4 ซึ่งก็หมายความว่าผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จะมีความถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้นด้วย โดยหลังจากการแบ่งขอบเขตออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆแล้ว ต่อไปจะเป็นการเลือกฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation function) ให้กับเอลิเมนต์นั้นๆ พร้อมทั้งสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์โดยสมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ จากนั้นก็นำเอาสมการของแต่ละเอลิเมนต์มารวมกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม (system of equations) ซึ่งความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง ซึ่งหลังจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมลงในระบบสมการรวมดังกล่าวแล้วก็จะทำการแก้ระบบสมการรวมนี้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ ต่อไป



รูปที่ 1.4 การแบ่งขอบเขตของปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.1.2 พัฒนาการของวิธีหาผลเฉลยโดยประมาณสำหรับปัญหาการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่อัดตัวจะประกอบไปด้วยสมการอนุรักษ์มวล และสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ถ้าพิจารณาการไหลในสองมิติ สมการที่เกี่ยวข้องทั้งหมดจะประกอบไปด้วย 3 สมการนั่นคือจากสมการอนุรักษ์มวล 1 สมการและจากสมการอนุรักษ์โมเมนตัม 2 สมการ พร้อมกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัวด้วยกันคือความเร็วในแนวแกน

ทั้งสองและความดัน ถ้าเราใช้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้ง 2 สมการในการแก้หาค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองแล้ว ดังนั้นจะเหลือสมการอนุรักษ์มวลที่ต้องใช้ในการแก้หาค่าความดัน แต่พจน์ของความดันนั้นไม่ได้ปรากฏและมีความสัมพันธ์โดยตรงกับสมการอนุรักษ์มวล เพียงแต่มีความสัมพันธ์กันโดยอ้อมกล่าวคือ ถ้าทำการแทนค่าความดันที่ถูกต้องลงในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมแล้วแก้สมการหาค่าความเร็วออกมา ค่าความเร็วที่ได้นั้นจะสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวลโดยอัตโนมัติ ดังนั้นจากปัญหาดังกล่าวข้างต้นพร้อมกับความมีลักษณะไม่เชิงเส้น (nonlinear) ของสมการอนุรักษ์โมเมนตัม ทำให้การวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้นมีความซับซ้อนมาก

นักวิจัยในอดีตได้พยายามหลีกเลี่ยงปัญหาที่จะต้องหาค่าความดันด้วยการหลีกเลี่ยงไปใช้ค่าตัวแปรสตรีมฟังก์ชัน (ψ, stream function) และค่าตัวแปรวอร์ทิซิตี้ (ω, vorticity) ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแทน ซึ่งสมการสำหรับตัวแปรทั้งสองนั้นสามารถสร้างมาจากสมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัม โดยในระหว่างกระบวนการดังกล่าวพจน์ของความดันจะถูกกำจัดออกไป สำหรับรายละเอียดของวิธีดังกล่าวสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [6-8] ซึ่งจะทำให้การวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่เดิมจะต้องพิจารณาสมการที่เกี่ยวข้อง 3 สมการ (สมการอนุรักษ์มวล 1 สมการและสมการอนุรักษ์โมเมนตัม 2 สมการ) ลดลงเป็นการวิเคราะห์สมการเพียง 2 สมการเท่านั้น ซึ่งก็คือสมการเพื่อใช้สำหรับหาค่าของสตรีมฟังก์ชันและสมการสำหรับหาค่าวอร์ทิซิตี้นั่นเอง แต่อย่างไรก็ตามข้อเสียของวิธีดังกล่าวก็คือ การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตสามารถทำได้ลำบาก และอีกทั้งยังมีความซับซ้อนอย่างมากในการพัฒนาไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลในสามมิติ ด้วยสาเหตุดังกล่าวจึงทำให้ในปัจจุบันมีความนิยมที่จะวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยใช้ตัวแปรตั้งต้น (primitive variable) ซึ่งก็คือตัวแปรความเร็วในแนวแกนทั้งสองและตัวแปรความดันเพิ่มมากขึ้น โดยในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยตัวแปรตั้งต้นใน บียบวิธีผลต่างสืบเนื่องที่ทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมดังที่ได้อธิบายไปแล้วนั้นยังมีปัญหาสำคัญที่ควรจะต้องนำมากล่าวถึงดังนี้

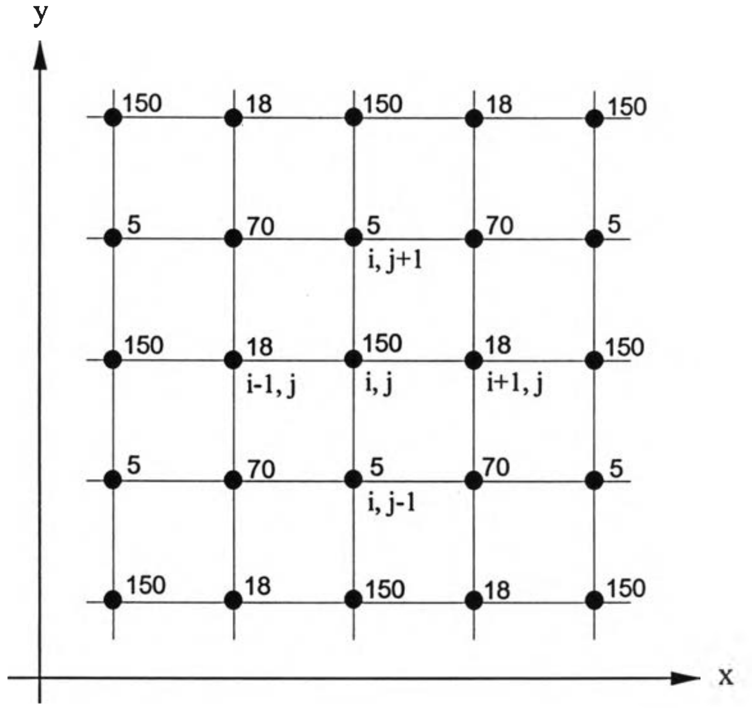
พิจารณารูปที่ 1.5 ซึ่งแสดงตารางสี่เหลี่ยมที่มีค่าของความดันเปลี่ยนแปลงสลับกัน (checkerboard pressure pattern) [9] ถ้าทำการกระจายพจน์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันที่ปรากฏอยู่ในสมการอนุรักษ์โมเมนตัม โดยใช้การกระจายผลต่างแบบตรงกลาง (central difference) [1,10] ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์สำหรับพจน์อัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันดังนี้

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial x} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\,\Delta x} \tag{1.1}$$

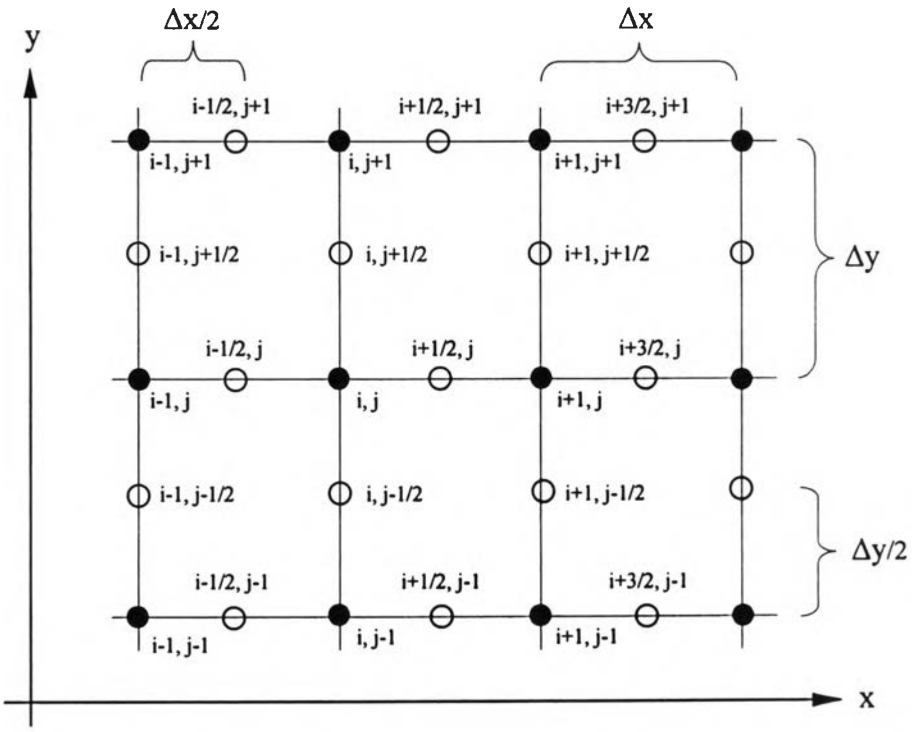
$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial y} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\,\Delta y} \tag{1.2}$$

จากลักษณะการกระจายตัวของความดันดังแสดงในรูปที่ 1.5 จะทำให้ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันดังในสมการ (1.1) และ (1.2) มีค่าเท่ากับศูนย์ จึงอาจจะกล่าวได้ว่าลักษณะการ

กระจายตัวของความดันในรูปแบบดังกล่าวให้ผลในการคำนวณเสมือนกับมีการกระจายตัวของความดันแบบคงตัว (uniform) ด้วยความไม่เหมาะสมของตารางสี่เหลี่ยมที่ใช้ จึงได้มีการคิดวิธีแก้ปัญหาโดยการเปลี่ยนจากการใช้ตารางสี่เหลี่ยมแบบธรรมดามาเป็นการใช้ตารางสี่เหลี่ยมที่มีการเลื่อนจุดต่อให้เกิดการเหลื่อมกัน (staggered grid) [9] ดังแสดงในรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.5 การกระจายตัวของความดันที่เปลี่ยนแปลงสลับกันบนตารางสี่เหลี่ยม



รูปที่ 1.6 ตารางสี่เหลี่ยมที่มีการเหลื่อมกันของจุดต่อเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหล

จากรูปที่ 1.6 การคำนวณค่าความดันจะกระทำบนจุดต่อทึบ (solid grid points) ส่วนค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองจะทำการคำนวณบนจุดต่อแบบเปิด (open grid points) ซึ่งข้อดีของการแบ่งจุดต่อเช่นนี้ก็คือ เมื่อจะทำการคำนวณความเร็วในแนวแกน x ที่จุดต่อ i+1/2, j นั้น การใช้ผลต่างแบบตรงกลางกับพจน์อัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันในแนวแกน x จะได้ดังนี้

$$\frac{\partial p_{i+1/2,\, j}}{\partial x} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \tag{1.3}$$

นั่นคือการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันจะเปลี่ยนมาใช้จุดต่อที่อยู่ติดกันในการคำนวณแทน ดังนั้นจึงเป็นการกำจัดปัญหาลักษณะการกระจายตัวของความดันดังแสดงในรูปที่ 1.5 ได้ จึงทำให้ลักษณะของการจัดวางตำแหน่งของจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 1.6 เป็นสิ่งจำเป็นในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง

สำหรับขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลซึ่งสามารถแก้ปัญหาของความดันได้และเป็นแนวทางที่เป็นที่นิยมใช้กันจนถึงปัจจุบันนี้ถูกเสนอโดย Chorin [11] ซึ่งวิธีดังกล่าวเรียกว่า วิธีการคำนวณแบบแยกกัน (segregated solution method) วิธีนี้จะเริ่มทำการคำนวณหาค่าความเร็วก่อนโดยใช้ค่าความดันที่สมมติขึ้น จากนั้นจะใช้สมการที่เกิดจากการรวมกันของสมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในการหาค่าของความดัน ซึ่งค่าความดันที่คำนวณได้นี้จะนำกลับไปใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็วใหม่ แต่วิธีการคำนวณแบบแยกกันที่เป็นที่รู้จักและเป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลายจนถึงปัจจุบันได้แก่วิธีที่เรียกว่า SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [12] โดยที่วิธีดังกล่าวจะทำการแทนสมการอนุรักษ์โมเมนตัมลงในสมการอนุรักษ์มวลเพื่อสร้างสมการของตัวแก้ไขความดัน (pressure correction equation) ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณของวิธี SIMPLE มีดังนี้

1. สมมติการกระจายตัวของความดัน
2. แก้สมการโมเมนตัมเพื่อหาค่าความเร็วโดยใช้ค่าความดันที่สมมติไว้
3. คำนวณหาค่าของตัวแก้ไขความดันจากสมการของตัวแก้ไขความดัน
4. คำนวณหาค่าความดันใหม่โดยใช้ตัวแก้ไขความดัน
5. แก้ไขความเร็วใหม่โดยใช้ค่าของตัวแก้ไขความดัน
6. นำค่าความดันใหม่ที่ได้กลับไปคำนวณในข้อที่ 2 ใหม่ และทำการคำนวณซ้ำเป็นวนรอบเช่นนี้จนกว่าคำตอบที่ต้องการจะลู่เข้า

จากนั้นได้มีการพัฒนาปรับปรุงวิธี SIMPLE โดย Patankar [9] ซึ่งเป็นการปรับปรุงเพื่อให้คำตอบลู่เข้า (converge) ได้เร็วยิ่งขึ้น โดยเรียกวิธีใหม่นี้ว่า SIMPLER (SIMPLE-Revised) แต่

ยังคงเป็นลักษณะการคำนวณแบบแยกกันเช่นเดิม สำหรับรายละเอียดของวิธี SIMPLE และ SIMPLER นี้สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [9,13]

ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งเป็นที่นิยมเพิ่มมากขึ้นในการศึกษาปัญหาของการไหลนั้น ก็มีปัญหาเบื้องต้นในลักษณะเช่นเดียวกันซึ่งก็คือปัญหาเกี่ยวกับวิธีจัดการกับพจน์ความดัน โดยได้มีนักวิจัยได้นำเสนอวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาของความดันซึ่งเรียกว่า วิธีพินัลตี้ (penalty method) โดยวิธีดังกล่าวจะแทนค่าของความดันด้วยสมการ (1.4)

$$p = -\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{1.4}$$

โดยที่ λ คือ ค่าพารามิเตอร์ของวิธีพินัลตี้

เมื่อแทนสมการ (1.4) ลงในสมการการอนุรักษ์โมเมนตัมจะเป็นการกำจัดพจน์ของความดันออกไป แต่วิธีดังกล่าวก็ยังคงมีข้อเสียกล่าวคือ ถึงแม้ตัวแปรที่ไม่รู้ค่าจะลดลงเหลือเพียงแค่ 2 ตัวเท่านั้น (ตัวแปรของความเร็วในแนวแกนทั้งสอง) แต่ยังคงเป็นการแก้สมการแบบพร้อมกัน (simultaneous) ซึ่งยังคงเป็นอุปสรรคในการวิเคราะห์ปัญหาขนาดใหญ่อยู่นั่นเอง สำหรับรายละเอียดของวิธีพินัลตี้นี้สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [4,7,14]

ความซับซ้อนอีกประการหนึ่งในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประสบเช่นเดียวกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องก็คือปัญหาที่ค่าตัวแปรความดันบนจุดต่อมีการเปลี่ยนแปลงสลับกัน (checkerboarding problem) ดังแสดงในรูปที่ 1.5 ซึ่งการแก้ปัญหาดังกล่าวในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ก็คือ การกำหนดให้ฟังก์ชันการประมาณภายในของตัวแปรความดันมีอันดับที่น้อยกว่าฟังก์ชันการประมาณภายในของตัวแปรความเร็ว ดังที่ใช้กันในเอกสารอ้างอิง [15-17] โดยที่ขั้นตอนในการคำนวณที่ใช้กันนั้นเป็นการคำนวณหาค่าคามเร็วและความดันอย่างพร้อมกัน (simultaneous) ซึ่งการคำนวณเช่นนี้ทำให้ระบบสมการของปัญหามีขนาดที่ใหญ่มากและเป็นอุปสรรคในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ อีกทั้งในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นก็มีความซับซ้อนเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าจะทำการพัฒนาเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสามมิติ แต่เนื่องจากความสำเร็จของวิธี SIMPLE และ SIMPLER ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการคำนวณแบบแยกกันที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ทำให้มีนักวิจัยหลายท่านได้พยายามพัฒนาวิธีดังกล่าวให้สามารถนำมาใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เช่น Comini [18] และ Shaw [19] ได้ใช้ขั้นตอนของ SIMPLE กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วน Baliga [20,21] ก็ได้พัฒนาวิธี SIMPLER มาใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เช่นเดียวกับ Prakash [22] ส่วน Rice & Schnipke [23-25] ก็ได้พัฒนาวิธีของ SIMPLER สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เช่นกัน โดยทั้ง Comini, Prakash และ Rice & Schnipke ได้ปรับปรุงวิธีของตนเองจนสามารถที่จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของความเร็วและความดันที่อันดับเท่ากันได้

ปัญหาอีกประการหนึ่งของการวิเคราะห์ปัญหาการไหลก็คือ ปัญหาที่เกี่ยวกับพจน์การพา (advection term) ซึ่งมีอยู่ในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั่นเอง โดยที่สมการดังกล่าวจะประกอบไปด้วยพจน์หลักๆอยู่ 2 ส่วนด้วยกันคือพจน์การพาและพจน์การแพร่ (diffusion term) และเนื่องจากพจน์การแพร่นั้นเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสอง ดังนั้นการใช้ผลต่างแบบตรงกลาง (central difference) ในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องกับพจน์การแพร่นี้จึงไม่เกิดปัญหาใดๆ แต่สำหรับพจน์การพาซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้น การใช้ผลต่างแบบตรงกลางกับพจน์ดังกล่าวจะทำให้เกิดปัญหาการสั่นของคำตอบ (spurious spatial oscillations) เมื่อค่าเรย์โนลด์ (Reynolds number) มีค่าเพิ่มขึ้น เพื่อที่จะกำจัดปัญหาดังกล่าวนักวิจัยในอดีตได้เสนอวิธีที่เรียกว่า ผลต่างแบบอัปวินด์ (upwind difference) ซึ่งเป็นการใช้ผลต่างแบบก้าวหน้า (forward difference) หรือผลต่างแบบถอยหลัง (backward difference) โดยการเลือกใช้นั้นจะขึ้นอยู่กับทิศทางของการไหลนั่นเอง การใช้วิธีอัปวินด์นี้จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เกิดการสั่นของคำตอบลดลงแต่ในขณะเดียวกันกลับไปเพิ่มผลของพจน์การแพร่ให้เพิ่มขึ้นกว่าที่ควรจะเป็น ซึ่งเรียกผลที่เกิดขึ้นนี้ว่าเป็นค่าของพจน์การแพร่ที่ผิดพลาด (false diffusion) Spalding [26] ได้ทำการแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการใช้วิธีที่เรียกว่า ผลต่างแบบไฮบริดจ์ (hybrid difference) ซึ่งจะใช้ผลต่างแบบผลต่างแบบอัปวินด์ในบริเวณที่มีปัญหา และใช้ผลต่างแบบ ตรงกลางในบริเวณที่เหลือ Leonard [27] ได้เสนอวิธีที่ใช้แก้ปัญหาการเกิดการแพร่ที่ผิดพลาด (false diffusion) ด้วยการใช้ผลต่างแบบอัปวินด์ที่มีอันดับที่สูงขึ้น

สำหรับในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น Brooks & Hughes [28] ได้เสนอวิธีเพื่อใช้แก้ปัญหาการเกิดการสั่นของคำตอบโดยการปรับปรุงฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function) ที่ใช้ในวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) [2] ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า วิธีสตรีมไลน์อัปวินด์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin formulation) ซึ่งวิธีดังกล่าวได้ส่งผลให้เกิดการแพร่ที่ผิดพลาดเพียงเล็กน้อยเท่านั้น แต่ยังคงเกิดการสั่นของคำตอบอยู่บ้าง สำหรับวิธีที่ใช้จัดการกับพจน์การพาที่ประสบความสำเร็จอย่างมากวิธีหนึ่งเป็นของ Rice & Schnipke [29,30] ซึ่งแทนที่จะเป็นการปรับปรุงฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักดังเช่นวิธีของ Brooks & Hughes นั้น Rice & Schnipke ได้เสนอวิธีที่เรียกว่าระเบียบไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ โดยนำมาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ซึ่งวิธีดังกล่าวจะทำการคำนวณพจน์การพาในแนวของเส้นสตรีมไลน์โดยตรง ส่วนผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้นั้น ไม่ทำให้เกิดการสั่นของผลของคำตอบแต่ก็ยังคงมีผลของการแพร่ที่ผิดพลาดเกิดขึ้นบ้าง

ความถูกต้องเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ก็เป็นอีกประการหนึ่งที่ต้องให้ความสำคัญ โดยทั่วไปแล้วความถูกต้องของผลลัพธ์นั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดของเอลิเมนต์ กล่าวคือหากต้องการความถูกต้องเที่ยงตรงสูงก็ต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมาก ยิ่งเอลิเมนต์ที่ใช้มีขนาดเล็กมากเท่าใดก็จะให้ความถูกต้องของผลลัพธ์สูงขึ้นเท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามการใช้

เอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากนั้นทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและจำนวนหน่วยความจำเพิ่มมากขึ้นโดยไม่จำเป็น ดังนั้นการนำเอาระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) [31,32] มาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะทำให้การแก้ปัญหามีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น โดยรายละเอียดของระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้จะได้นำเสนอในบทต่อๆไป

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำวิธีการคำนวณแบบแยกกันของ Rice & Schinpke มาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายและสามารถที่จะนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้ได้โดยสะดวก อีกทั้งยังสามารถใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับความเร็วและความดันที่อันดับเท่ากันได้ (equal-order interpolation function) ทำให้ลดความซับซ้อนในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงมีความสะดวกในการพัฒนาไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาในสามมิติ สำหรับพจน์การพาในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั้น จะนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ใช้จัดการกับพจน์การพาโดยนำมาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งผลที่ได้จะไม่ทำให้เกิดการสั่นของคำตอบดังที่จะได้แสดงในบทต่อๆไป

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นจะเห็นได้ว่าอุปสรรคในการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้นประกอบไปด้วยความมีลักษณะไม่เชิงเส้นของพจน์การพาและปัญหาของวิธีในการจัดการกับพจน์ของความดันในสมการอนุรักษ์โมเมนตัม อีกทั้งในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่ผ่านมานั้นต้องใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของความเร็วและความดันที่ไม่เท่ากัน เป็นผลทำให้เกิดความซับซ้อนในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้นวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้ก็คือ

1.2.1 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ใช้ในการจัดพจน์การพา

1.2.2 เพื่อศึกษาขั้นตอนของวิธีการคำนวณแบบแยกกัน ซึ่งสามารถขจัดปัญหาที่เกี่ยวกับการหาค่าของพจน์ความดันได้

1.2.3 เพื่อประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) [33] โดยใช้ระเบียบระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของตัวแปรความดันและความเร็วที่อันดับเท่ากัน

1.2.4 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

1.2.5 เพื่อให้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาและวิจัยในระดับสูงต่อไป

1.3 วิธีดำเนินงานและขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 ศึกษาและทำความเข้าใจหลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ใช้สำหรับจัดการกับพจน์การพา

1.3.2 ประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์และตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาที่ใช้สำหรับตรวจสอบ

1.3.3 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติ ก่อนทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในขั้นต่อไป

1.3.4 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาโดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

1.3.5 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาในหัวข้อ 1.3.4 โดยที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้

1.3.6 ทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาอย่างง่าย เพื่อให้เกิดความมั่นใจก่อนที่จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนต่อไป

1.3.7 แสดงประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำไปใช้วิเคราะห์กับปัญหาที่มีความซับซ้อน

1.3.8 ศึกษาและทำความเข้าใจในระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์

1.3.9 นำระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์มาใช้ร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น

1.3.10 สรุปผลทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทำวิทยานิพนธ์นี้ พร้อมทั้งข้อเสนอแนะเพื่อการขยายผลจากวิทยานิพนธ์นี้สู่งานวิจัยในระดับสูงต่อไป

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

1.4.1 สามารถนำไปทำนายพฤติกรรมการไหล (flow behavior) ได้สะดวก เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการไหลนั้นๆ ต่อไป

1.4.2 ทำให้สามารถนำโปรแกรมไปใช้ในการแก้ปัญหาขนาดใหญ่ที่มีความซับซ้อน

1.4.3 ทำให้สามารถลดจำนวนหน่วยความจำ (RAM) และเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้มากยิ่งขึ้น

1.4.4 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาวิชาการทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับผู้วิจัยในอนาคตต่อไป

1.5 เนื้อหาโดยสังเขปของบทต่าง ๆภายในวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะเริ่มอธิบายตั้งแต่สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยได้แสดงรายละเอียดไว้ในบทที่ 2 จากนั้นได้นำระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์ของ Rice & Schnipke มาประยุกต์ใช้กับพจน์การพาโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายและยังไม่ทำให้เกิดการสั่นของผลของคำตอบด้วย โดยได้อธิบายระเบียบวิธีสตรีมไลน์อัปวินด์นี้อย่างเป็นขั้นเป็นตอนไว้ในบทที่ 3 พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการใช้ระเบียบวิธีดังกล่าวในการแก้ปัญหาที่มีพจน์การพาอยู่ จากนั้นในบทที่ 4 จะเป็นการแสดงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดชนิดไม่อัดตัว โดยได้ประยุกต์ขั้นตอนการคำนวณแบบ SIMPLER ซึ่งเป็นการคำนวณแบบแยกกัน (segregated method) อันเป็นผลทำให้การวิเคราะห์ปัญหาการไหลไม่จำเป็นต้องทำการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่พร้อม ๆกัน แต่ในการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่โดยใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss elimination method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีโดยตรง (direct method) ทำให้ต้องเสียเวลาในการคำนวณเป็นอย่างมาก ดังนั้นในบทที่ 5 จึงได้นำเสนอระเบียบวิธีที่ใช้ในการแก้ระบบสมการที่เรียกว่าระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์ (conjugate gradient method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการคำนวณแบบทำซ้ำ (iterative method) ทำให้ลดเวลาในการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ลงได้ ส่วนขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลพร้อมทั้งตัวอย่างการใช้โปรแกรมได้อธิบายอย่างเป็นขั้นเป็นตอนไว้ในบทที่ 6 จากนั้นในบทที่ 7 ได้แสดงผลการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นซึ่งได้แสดงตั้งแต่ปัญหาอย่างง่ายจนถึงปัญหาที่มีความซับซ้อนเพื่อแสดงประสิทธิภาพของโปรแกรม และเนื่องจากสามารถที่จะใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อได้ ทำให้การนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้มีความสะดวกเพราะสามารถที่จะประยุกต์ใช้ได้โดยตรง สำหรับรายละเอียดของวิธีดังกล่าวพร้อมกับตัวอย่างการประยุกต์ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลได้แสดงไว้ในบทที่ 8 สุดท้ายจะเป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไป