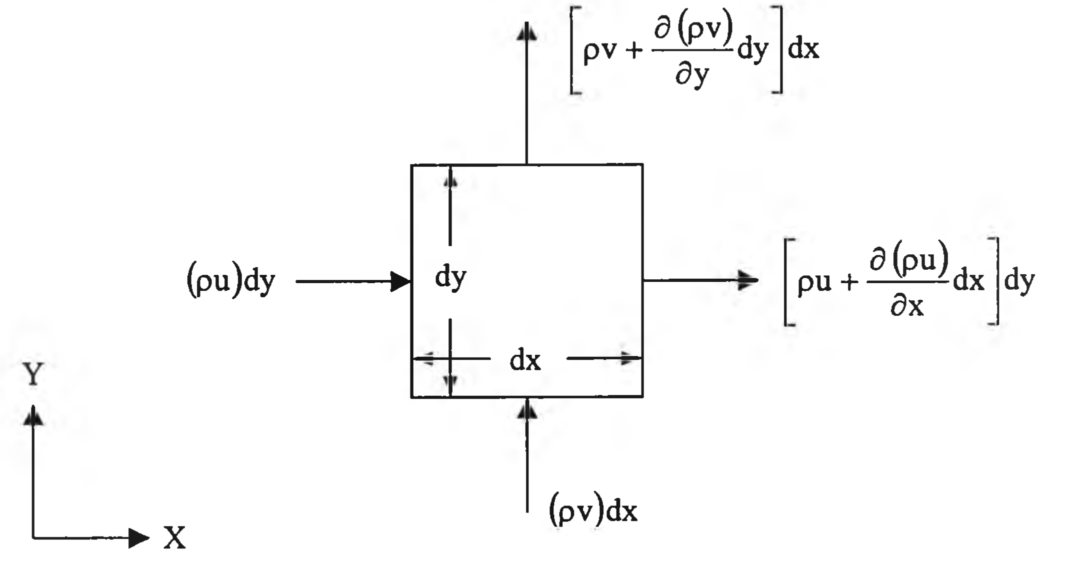
บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหล

ในบทนี้จะแสดงขั้นตอนในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการไหล ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยทั่วๆไปจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับ (1) กฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) (2) กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) (3) กฎการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy)

ในการศึกษาครั้งนี้ เป็นการพิจารณาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัวในสองมิติเท่านั้นดังนั้นความหนาแน่นของการไหลอาจถูกสมมติให้มีค่าคงที่ได้ และสำหรับการไหลที่มีความเร็วต่ำ อุณหภูมิของการไหลจะมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอทั่วทั้งขอบเขตของการไหลทำให้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการอนุรักษ์พลังงานไม่มีความสัมพันธ์กับสมการเชิงอนุพันธ์อื่นๆ ดังนั้นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องจึงมีเพียงสมการการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมเท่านั้น [15]

2.1 กฎการอนุรักษ์มวล

พิจารณาการไหลผ่านเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่มีขนาด Δx และ Δy ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ในระบบพิกัดฉาก (regtangular coordinate) โดยกำหนดให้ u และ v แทนความเร็วในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 มวลของของไหลที่ไหลผ่านเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

จากรูปที่ 2.1 จะได้ว่าผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน x คือ

$$\left[\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy \quad - \quad (\rho u)dy \quad = \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\,dy \tag{2.1}$$

ผลลัพธ์ของมวลที่ไหลออกในแนวแกน y คือ

$$\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx \quad - \quad (\rho v)dx \quad = \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\,dx \tag{2.2}$$

ดังนั้นผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลออกจากเอลิเมนต์เท่ากับ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy \tag{2.3}$$

สำหรับมวลของของไหลภายในเอลิเมนต์นั้นเท่ากับ $\rho(dx\,dy)$ ดังนั้น

$$\text{อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในเอลิเมนต์} \quad = \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy) \tag{2.4}$$

จากนิยามของกฎการอนุรักษ์มวลที่ว่า "ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลออกจากเอลิเมนต์ที่พิจารณาจะเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในเอลิเมนต์นั้น" [3] จากนิยามดังกล่าวสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy \quad = \quad -\frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\,dy) \tag{2.5}$$

หรือ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad + \quad \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] \quad = \quad 0 \tag{2.6}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right] \quad = \quad 0 \tag{2.7}$$

หรือ

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right] \quad = \quad 0 \tag{2.8}$$

สมการ (2.5) สามารถเขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V} \right) = 0 \tag{2.9}$$

โดยที่

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \quad \text{และ} \quad \vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

จากที่ได้กล่าวข้างต้นแล้วว่า การศึกษาครั้งนี้พิจารณาการไหลแบบหนืดแต่ไม่มีการอัดตัว (viscous incompressible flow) ซึ่งความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และตำแหน่งต่าง ๆขณะที่เคลื่อนที่ไป ดังนั้น

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

ดังนั้นสมการ (2.8) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.11}$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{2.12}$$

2.2 กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือกฎข้อที่สองของนิวตันมีนิยามว่า "แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้น" [3] ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

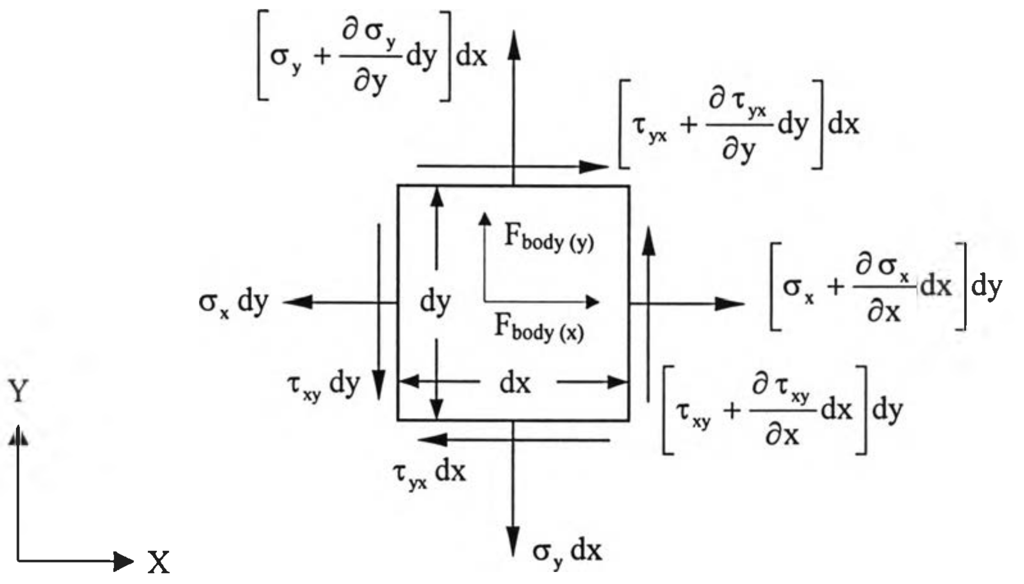
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.13}$$

กฎข้อที่สองของนิวตันนั้นเป็นความสัมพันธ์แบบเวคเตอร์ ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวในรูปของความสัมพันธ์แบบสกาลา (scalar) ในแนวแกนต่าง ๆได้

พิจารณาในทิศทางแกน x

$$\sum F_x = ma_x \tag{2.14}$$

โดยที่ F_x และ a_x เป็นค่าของแรงและความเร่งในแนวแกน x ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

พิจารณาด้านซ้ายของสมการ (2.14) แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ในรูปประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกัน (รูปที่ 2.2) คือ

1. Body forces คือ แรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคของของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาพ (physical contact) ซึ่งได้แก่แรงจากความโน้มถ่วงของโลก และแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะผลมาจากแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว

2. Surface forces คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อผิวด้านนอกของเอลิเมนต์ของของไหลที่ถูกพิจารณา ซึ่งประกอบไปด้วย แรงเนื่องจากความดันในแนวตั้งฉาก (normal force) และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือนในแนวสัมผัส (shear force)

ดังนั้นแรงลัพธ์ในแนวแกน x คือ

$$\sum F_x = \left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) - \sigma_x\right] dy + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) - \tau_{yx}\right] dx + \rho g_x \, dx\, dy \quad (2.15)$$

หรือ

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\, dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\, dx + \rho g_x \, dx\, dy \quad (2.16)$$

พิจารณาด้านขวาของสมการ (2.14) มวลของของไหลภายในเอลิเมนต์

$$m = \rho\, dx\, dy \quad (2.17)$$

สำหรับความเร่งในแนวแกน x ของเอลิเมนต์ดังกล่าวนั้น คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในแนวแกน x นั่นเอง ดังนั้น

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \tag{2.18}$$

นำสมการ (2.16), (2.17) และ (2.18) มารวมกันจะได้สมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.19ก}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทางแกน y จะได้ว่า

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{2.19ข}$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) ความเค้นต่างๆ สามารถเขียนอยู่ในเทอมของความเร็วและความดันได้โดยใช้สมมติฐานของ (Stokes' hypothesis) ดังนี้

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.20ก}$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.20ข}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{2.20ค}$$

โดย μ แทนค่าความหนืด (viscosity) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล เมื่อแทนสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.19) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations)

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)u = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \tag{2.21ก}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)v = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right] \tag{2.21ข}$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว และหากละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหล สมการนาเวียร์-สโตกส์จะลดรูปลงมาเป็น

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (2.22ก)$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad (2.22ข)$$

พจน์ทางด้านซ้ายของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองสมการข้างต้น เป็นพจน์อันเนื่องมาจากการพาและมีลักษณะไม่เชิงเส้น ซึ่งเป็นสาเหตุให้การแก้สมการดังกล่าวมีความซับซ้อน ซึ่งในบทต่อไปจะได้อธิบายถึงระเบียบวิธีที่ใช้ในการจัดการพจน์ดังกล่าวอย่างมีประสิทธิภาพและจะเป็นผลให้สามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้สะดวกยิ่งขึ้น