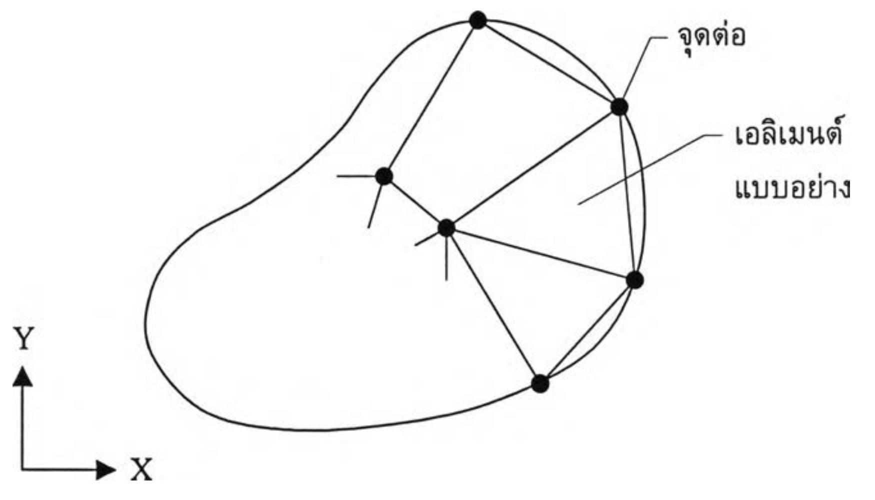
บทที่ 3
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์

ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทนำแล้วว่าความซับซ้อนในการแก้ปัญหาการไหลนั้นเป็นผลมาจากความมีลักษณะไม่เชิงเส้นของพจน์การพาในสมการนาเวียร์-สโตกส์ ดังนั้นในบทนี้จะเป็นการนำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ (streamline upwind finite element method) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการจัดพจน์การพา เพื่อนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะไม่เชิงเส้น โดยจะเริ่มกล่าวตั้งแต่ขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นจะได้อธิบายถึงรายละเอียดของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ สุดท้ายจะแสดงถึงความสามารถของระเบียบวิธีดังกล่าวในการแก้ปัญหาที่มีพจน์การพา

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 6 ขั้นตอน [2] คือ

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1



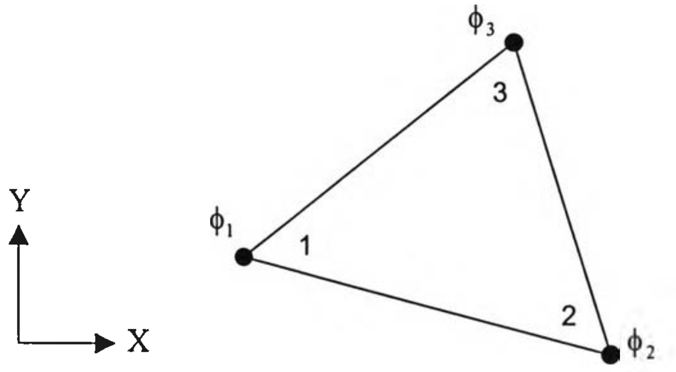
รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาเป็นเอลิเมนต์แบบต่าง ๆ

จากนั้นก็ทำการหาสมการอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$D(\phi') = 0 \tag{3.1}$$

โดย D คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ ϕ' คือตัวแปรตามแม่นตรง

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์ (element interpolation function)



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยม 3 จุดต่อ โดยมีตัวไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อ

ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้เป็นคุณสมบัติต่างๆของการไหล ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi = \phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(1\times 3)}{\lfloor N \rfloor} \quad \underset{(3\times 1)}{\{\phi\}} \tag{3.2}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวคเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง หากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่เราพิจารณานั่นคือสมการ (3.1) จะได้ว่า

$$D(\phi) \text{ จะไม่เท่ากับ 0 แต่จะ } = R$$

โดยที่ R คือเศษตกค้าง (Residual) นั่นหมายถึง

$$R = D(\phi) = D(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i) \tag{3.3}$$

โดย m คือจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

จากวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) [2] ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.4}$$

และโดยปกติเราจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรดทีละส่วน (integrate by part) ซึ่งหากเราแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.4) แล้วอินทิเกรดทีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma^{(e)}} = 0$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, $\Gamma^{(e)}$, ด้วยภาวะขอบเขตอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

ขั้นตอนที่ 6 จากนั้นเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ นั่นคือ

$$\underset{(m \times m)}{[K]} \; \underset{(m \times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m \times 1)}{\{F\}} \tag{3.5}$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix), สำหรับ $\{\phi\}$ คือ เวคเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์ และ $\{F\}$ คือโหลดเวคเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.5) แล้วลำดับขั้นตอนต่อไปก็จะทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขต แล้วจึงแก้สมการระบบรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่างๆ

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์

ในหัวข้อต่อไปนี้จะนำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ [29] ที่ใช้สำหรับจัดการกับพจน์ที่มีลักษณะไม่เชิงเส้นซึ่งอยู่ในสมการทรานสปอร์ต (transport equation) โดยทั่วๆไปนั่นเอง ซึ่งมีขั้นตอนโดยสังเขปดังนี้

เริ่มจากการพิจารณาการแก้ปัญหาสมการทรานสปอร์ตในสองมิติ โดยสมมติว่าทราบค่าสนามความเร็ว (velocity field) ของทุกๆตำแหน่งภายในขอบเขตของปัญหานั้นๆ และกำหนดให้ค่าคุณสมบัติต่างๆของของไหลมีค่าคงที่ ซึ่งสมการดังกล่าวจะมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\rho u\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \tag{3.6}$$

โดยที่ ϕ คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ซึ่งอาจเป็นค่าความเร็วในแนวแกน x หรือ y (u, v) หรืออาจเป็นค่าอุณหภูมิ (T) ก็ได้

Γ_ϕ คือ สัมประสิทธิ์ของการแพร่ (diffusion coefficient)

จากนั้นทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งเราจะได้สมการสำหรับเอลิเมนต์ดังนี้

$$\int_A N\left(\rho u\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dA=\int_A N\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)dA \tag{3.7}$$

การจัดพจน์ทางด้านขวามือของสมการนั้นสามารถทำได้โดยทำการอินทิเกรดโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ดังนี้

$$\int_\Omega u\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)d\Omega \;=\; \int_\Gamma u\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right)d\Gamma-\int_\Omega\left(\nabla u\cdot\vec{V}\right)d\Omega \tag{3.8}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสัญลักษณ์ของตัวแปรทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.8) กับพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.7) จะพบว่า

$$\left.\begin{aligned} u &= N \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j \\ \vec{V} &= \Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}i+\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}j \end{aligned}\right\}\quad \left(\nabla\cdot\vec{V}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)$$

และเนื่องจาก $\hat{n} = n_x i + n_y j$ ดังนั้น

$$\vec{V}\cdot\hat{n} = \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y$$

$$u\left(\vec{V}\cdot\hat{n}\right) = N\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y\right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N}{\partial x} i + \frac{\partial N}{\partial y} j$$

$$\nabla u \cdot \vec{V} = \frac{\partial N}{\partial x}\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

พจน์ทางด้านขวามือของสมการ (3.7) จะกลายมาเป็น

$$\int_\Omega N\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right) d\Omega = \Gamma_\phi \int_\Gamma N\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y\right) d\Gamma$$
$$- \Gamma_\phi \int_\Omega \left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) d\Omega \qquad (3.9)$$

สมการ (3.9) ที่ได้จากการจัดพจน์การแพร่นี้สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง โดยจะได้แสดงรายละเอียดในบทต่อไป ส่วนพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.7) จะได้นำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์มาใช้ในการจัดพจน์ดังกล่าวและเพื่อให้สามารถทำความเข้าใจกับระเบียบวิธีนี้ได้โดยง่าย เราจะเริ่มพิจารณากับปัญหาที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียวก่อนเท่านั้น นั่นคือกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.6) จะลดรูปลงเหลือ

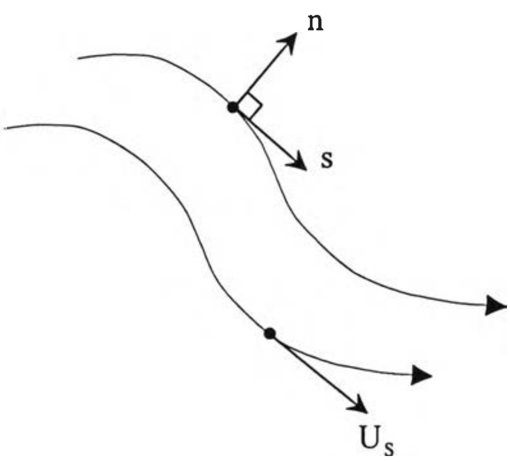
$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad (3.10)$$

จากนั้นทำการเขียนสมการ (3.10) ให้อยู่ในระบบพิกัดสตรีมไลน์ดังในรูปที่ 3.3 ซึ่งจะได้สมการในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \qquad (3.11)$$

โดยที่ U_S คือ ความเร็วในแนวเส้นสตรีมไลน์

s คือ แกนที่สัมผัสกับเส้นสตรีมไลน์



รูปที่ 3.3 ระบบพิกัดสตรีมไลน์ (streamline coordinate)

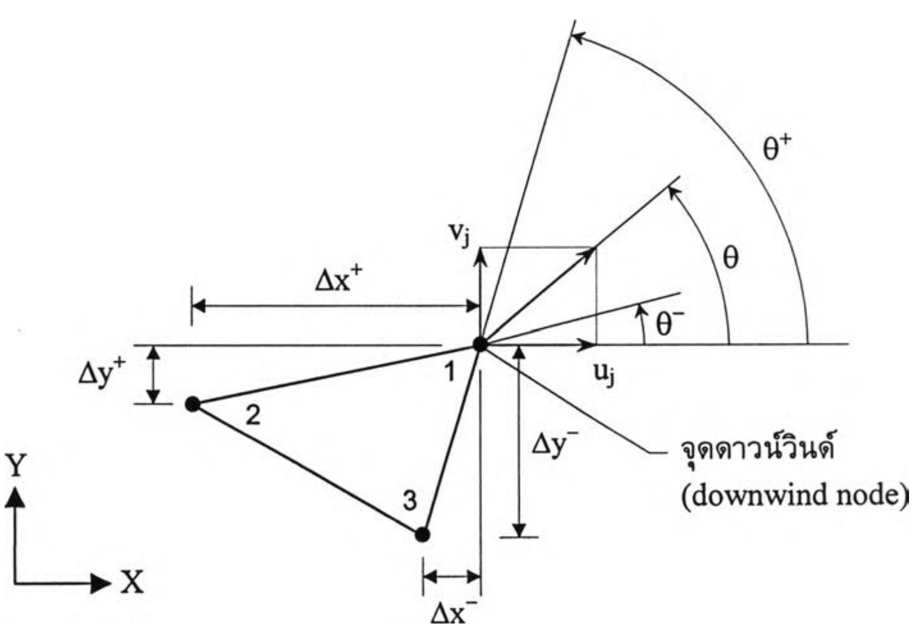
จากสมการ (3.11) จะเห็นได้ว่าค่า ϕ จะมีค่าคงที่ตลอดเส้นสตรีมไลน์ ส่วนบนเอลิเมนต์ที่จะพิจารณานั้น อาจจะสมมติได้ว่า

$$\rho U_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = \text{ค่าคงที่} \tag{3.12}$$

จากข้อสมมติดังกล่าวข้างต้น สามารถเขียนสมการของเอลิเมนต์สำหรับพจน์การพาได้ใหม่ดังนี้

$$\int N\left(\rho U_s \frac{\partial \phi}{\partial s}\right) dA = \left(\rho U_s \frac{\partial \phi}{\partial s}\right) \int N\, dA \tag{3.13}$$

สำหรับพจน์ในวงเล็บทางด้านขวาของสมการ (3.13) สามารถหาค่าได้โดยขั้นตอนดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.4 แสดงนิยามของจุดดาวน์วินด์

พิจารณารูปที่ 3.4 ซึ่งแสดงเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมใดๆที่กำลังพิจารณา จุดต่อที่ 1 กำหนดให้เรียกว่าจุดดาวน์วินด์ (downwind node) ซึ่งมีนิยามว่า จุดต่อใดจะถูกกำหนดให้เป็นจุดดาวน์วินด์ก็ต่อเมื่อทิศทางลบของเวคเตอร์ความเร็วที่จุดต่อนั้นจะต้องมีทิศทางพุ่งเข้าในเอลิเมนต์ [29] ซึ่งสามารถสังเกตุต่อไปได้ว่าในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมใดเอลิเมนต์หนึ่งนั้นจะมีจุดดาวน์วินด์ได้มากที่สุดเพียงจุดเดียวเท่านั้นหรืออาจไม่มีเลยก็ได้ และจุดต่อที่เป็นจุดดาวน์วินด์จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$\tan\theta^- \le \tan\theta \le \tan\theta^+ \tag{3.14}$$

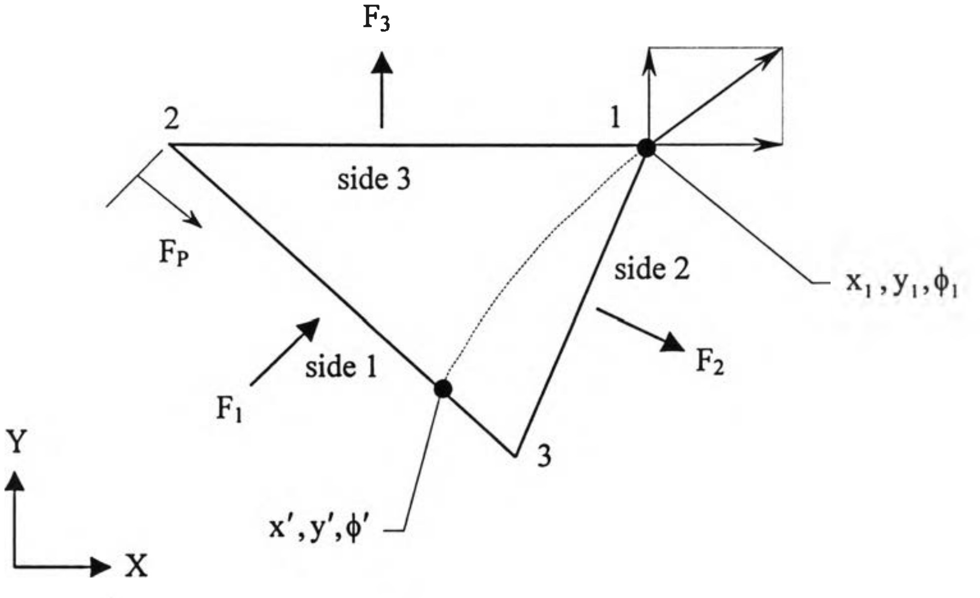
สมการ (3.14) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$-v_j\,\Delta x^- + u_j\,\Delta y^- \ge 0 \tag{3.15ก}$$

$$-v_j\,\Delta x^+ + u_j\,\Delta y^+ \ge 0 \tag{3.15ข}$$

ซึ่งจุดดาวน์วินด์จะต้องมีคุณสมบัติตามสมการ (3.15ก-ข) ทั้งสองสมการ

เมื่อทราบจุดดาวน์วินด์ของเอลิเมนต์ใดๆแล้ว การหาค่าของสมการ (3.13) จำเป็นต้องหาตำแหน่งของจุดอัปวินด์ ซึ่งก็คือจุด x' และ y' ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3.5 สำหรับการหาตำแหน่งของจุดอัปวินด์นั้นสามารถหาได้จากตัวแปร F_P ซึ่งคำนวณมาจากอัตราการไหลของของไหลที่ผ่านด้านต่างๆของเอลิเมนต์ โดยที่ค่า F_1, F_2, และ F_3 แทนอัตราการไหลของด้านที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ จากรูปที่ 3.5 ค่าของตัวแปร F_P สามารถหาได้ดังนี้



รูปที่ 3.5 แสดงจุดดาวน์วินด์และจุดอัปวินด์บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$F_P = F_2 / (F_2 + F_3) \quad (3.16)$$

เมื่อคำนวณค่าของ F_P ได้แล้ว ตำแหน่งของจุดอัปวินด์สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$x' = F_P x_2 + (1 - F_P) x_3 \quad (3.17)$$

$$y' = F_P y_2 + (1 - F_P) y_3 \quad (3.18)$$

เช่นเดียวกันกับค่าของ ϕ' ซึ่งสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\phi' = F_P \phi_2 + (1 - F_P) \phi_3 \quad (3.19)$$

เมื่อหาค่าต่าง ๆ ได้แล้ว พจน์ในวงเล็บทางด้านขวาของสมการ (3.13) สามารถจัดรูปใหม่สำหรับเอลิเมนต์ในรูปที่ 3.5 ที่มีจุดต่อหมายเลข 1 เป็นจุดดาวน์วินด์ได้ดังนี้

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\rho U_S}{\Delta s}(\phi_1 - \phi')$$

แทนค่า ϕ' จากสมการ (3.19) จะได้

$$\rho U_S \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\rho U_S}{\Delta s}\left[\phi_1 - (F_P \phi_2 + (1 - F_P)\phi_3)\right] \quad (3.20)$$

โดยที่ $\Delta s = \sqrt{(x_1 - x')^2 + (y_1 - y')^2}$ (3.21)

$U_S = \sqrt{(u_1^2 + v_1^2)}$ (3.22)

จากสมการ (3.13) ค่าของพจน์การพาที่ประดิษฐ์ขึ้นดังในสมการ (3.20) จะต้องนำไปคูณกับพจน์ $\int N dA$ ก่อนจะนำไปประดิษฐ์เป็นเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับพจน์การพาได้ โดยที่ค่า N สำหรับพจน์การพานั้นกำหนดให้เท่ากับ 1 ดังนั้นพจน์ $\int N dA$ จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ของเอลิเมนต์ที่กำลังพิจารณา และเนื่องจากค่าของพจน์การพาที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้นเกิดจากการคำนวณบนจุดต่อที่เป็นจุดดาวน์วินด์ ดังนั้นค่าที่คำนวณได้จึงควรจะต้องใส่ไว้ในแถวประจำตำแหน่งของจุดต่อที่เป็นจุดดาวน์วินด์นั้น เช่นถ้าจุดต่อที่หนึ่งเป็นจุดดาวน์วินด์ ค่าที่คำนวณได้ก็ให้ใส่ไว้ในแถวที่ 1 ของเอลิเมนต์เมตริกซ์ดังแสดงในรูปที่ 3.6ก ซึ่งเป็นรูปแบบของเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ที่มีจุดต่อที่หนึ่งเป็นจุดดาวน์วินด์ โดยค่า A_f ในรูปที่ 3.6ก-ค จะแทนค่าของพจน์ $\int N dA$

สำหรับรูปที่ 3.7 ได้แสดงขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ได้แบ่งเป็นเอลิเมนต์พร้อมทั้งเวคเตอร์ความเร็วที่แต่ละจุดต่อ และสำหรับเอลิเมนต์ที่ไม่ได้แรเงานั้นคือเอลิเมนต์ที่ไม่มีจุดดาวน์วินด์อยู่ ซึ่งเอลิเมนต์เหล่านี้จะไม่ถูกนำมาคำนวณพจน์การพา จึงอาจจะกล่าวได้ว่าการคำนวณพจน์การพาภายในขอบเขตของปัญหาที่พิจารณาอยู่นั้นจะมีผลเฉพาะกับบางส่วนภายในขอบเขตของปัญหาเท่านั้น แต่การคำนวณของพจน์ทางด้านขวาของสมการ (3.6) ซึ่งเป็น

$$\begin{pmatrix} \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} & -F_P \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} & -\left(1-F_P\right) \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad \text{(ก)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\left(1-F_P\right) \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} & \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} & -F_P \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad \text{(ข)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -F_P \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} & -\left(1-F_P\right) \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} & \rho U_S \dfrac{A_f}{\Delta s} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad \text{(ค)}$$

รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพา

(ก) เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับจุดต่อที่ 1 เป็นจุดดาวน์วินด์

(ข) เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับจุดต่อที่ 2 เป็นจุดดาวน์วินด์

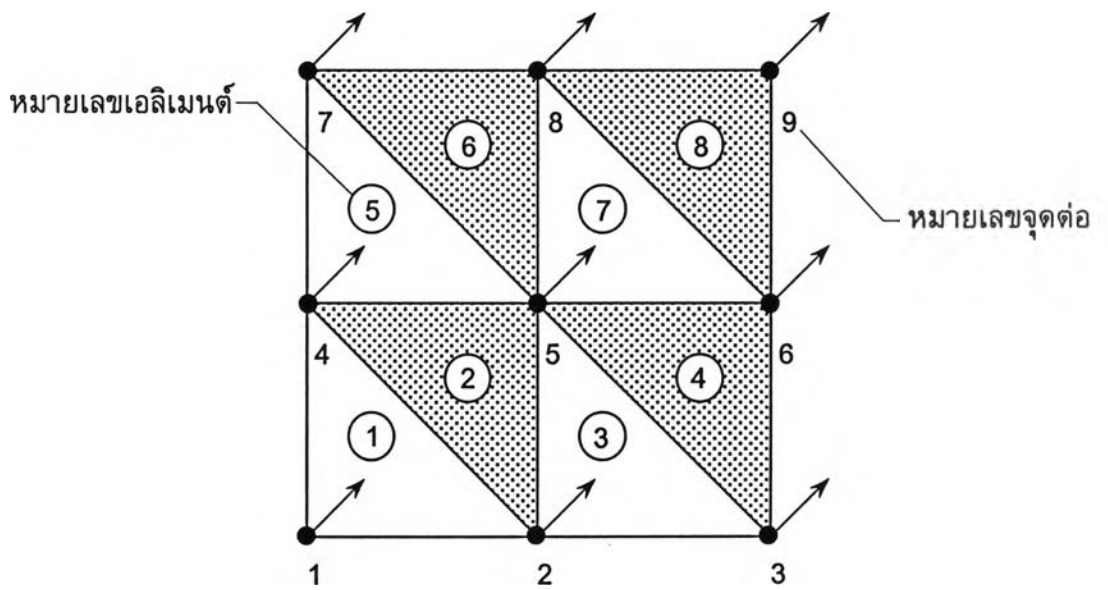
(ค) เอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับจุดต่อที่ 3 เป็นจุดดาวน์วินด์

พจน์การแพร่นั้นมีการคำนวณบนทุกๆเอลิเมนต์ภายในขอบเขตของปัญหา จึงทำให้ผลของการพาเมื่อเทียบกับการแพร่ของปัญหานั้นมีค่าน้อยกว่าที่ควรจะเป็น การแก้ปัญหาดังกล่าวสามารถทำได้โดยหลักที่ว่าจะต้องทำให้พื้นที่ของเอลิเมนต์ทั้งหมดภายในปัญหานั้นมีผลของการพารวมอยู่ ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

พิจารณาเอลิเมนต์หมายเลข 7 ในรูปที่ 3.7 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่ไม่มีจุดดาวน์วินด์อยู่ โดยที่เอลิเมนต์นี้มีจุดต่อหมายเลข 5, 6 และ 8 ซึ่งเป็นจุดดาวน์วินด์ของเอลิเมนต์อื่นๆ ถ้าทำการแบ่งพื้นที่ของเอลิเมนต์หมายเลข 7 ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆกัน (ตามจำนวนจุดต่อ) แล้วนำพื้นที่ส่วนที่ 1, 2 และ 3 ไปบวกเพิ่มให้กับพื้นที่ของเอลิเมนต์หมายเลข 2, 4 และ 6 ตามลำดับ ซึ่งเอลิเมนต์เหล่านี้เป็นเอลิเมนต์ที่มีจุดต่อหมายเลข 5, 6 และ 8 เป็นจุดดาวน์วินด์นั่นเอง แต่ถ้า

บางจุดต่อที่จะแบ่งพื้นที่ไปให้นั้นไม่เป็นจุดดาวน์วินด์ของเอลิเมนต์ใดเลย เช่นจุดต่อดังกล่าวเป็นจุดที่อยู่บนผนัง เช่นนี้แล้วให้แบ่งพื้นที่ดังกล่าวให้เท่ากับจำนวนจุดต่อที่เหลืออยู่อย่างเท่า ๆกันแทน ยกตัวอย่างเช่นสมมติให้จุดต่อหมายเลข 8 บนเอลิเมนต์หมายเลข 7 เป็นจุดต่อที่อยู่บนผนังหรือถูกกำหนดให้มีความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะต้องแบ่งพื้นที่ของเอลิเมนต์ดังกล่าวออกเป็นสองส่วนเท่า ๆกันโดยส่วนหนึ่งบวกเพิ่มให้กับเอลิเมนต์หมายเลข 2 ที่มีจุดต่อหมายเลข 5 เป็นจุดดาวน์วินด์ และอีกส่วนหนึ่งบวกเพิ่มให้กับเอลิเมนต์หมายเลข 4 ที่มีจุดต่อหมายเลข 6 เป็นจุดดาวน์วินด์เท่านั้น โดยทำเช่นนี้กับทุก ๆเอลิเมนต์ที่ไม่มีจุดดาวน์วินด์

เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ดียิ่งขึ้นจะขอยกตัวอย่างกับเอลิเมนต์หมายเลข 2 ในรูปที่ 3.7 ซึ่งมีจุดต่อหมายเลข 5 เป็นจุดดาวน์วินด์ จุดต่อดังกล่าวมีเอลิเมนต์ที่ไม่มีจุดดาวน์วินด์อยู่รอบข้างจำนวน 3 เอลิเมนต์ด้วยกัน ซึ่งได้แก่เอลิเมนต์หมายเลข 3, 5 และ 7 และสมมติให้ทุก ๆ จุดต่อของเอลิเมนต์เหล่านี้เป็นจุดดาวน์วินด์ทั้งหมด ดังนั้นพื้นที่สำหรับคำนวณพจน์การพาของจุดต่อหมายเลข 5 บนเอลิเมนต์หมายเลข 2 หรือคือค่า A_f ในเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แสดงในรูปที่ 3.6 จะประกอบไปด้วยพื้นที่ของเอลิเมนต์หมายเลข 2 รวมกับพื้นที่หนึ่งในสามของเอลิเมนต์หมายเลข 3 รวมกับพื้นที่หนึ่งในสามของเอลิเมนต์หมายเลข 5 และรวมกับพื้นที่หนึ่งในสามของเอลิเมนต์หมายเลข 7 ซึ่งเมื่อทำเช่นนี้แล้วพื้นที่ภายในขอบเขตของปัญหาจะถูกนำมาใช้ในพจน์การพาทั้งหมด



รูปที่ 3.7 แสดงขอบเขตของปัญหาตัวอย่าง

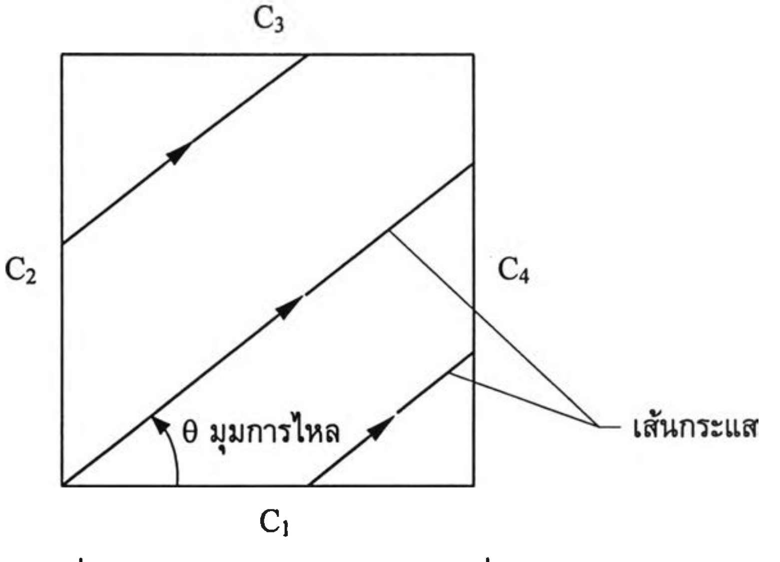
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้อธิบายในหัวข้อนี้ถูกนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้สำหรับแก้ปัญหาที่มีพจน์การพามาเกี่ยวข้อง โดยโปรแกรมดังกล่าวมีชื่อว่า STREAM ซึ่งมีรายละเอียดของโปรแกรมแสดงไว้ในภาคผนวก ข. พร้อมทั้งตัวอย่างการใช้โปรแกรมในการแก้ปัญหา และในหัวข้อต่อไปจะได้แสดงถึงผลการใช้โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาตัวอย่างที่มีพจน์การพา

3.3 การแก้ปัญหาที่มีพจน์การพาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์

ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้แสดงความสามารถของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ โดยจะได้นำไปทดสอบกับปัญหาทั้งหมด 3 ตัวอย่างด้วยกัน โดยที่ปัญหาดังกล่าวมีทั้งที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียว และมีทั้งพจน์การพาและการแพร่มาเกี่ยวข้องพร้อมกัน

ตัวอย่างที่ 1 การทดสอบการพาที่มุมต่าง ๆ (advection skew to the mesh)

ตัวอย่างแรกที่จะนำเสนอเป็นปัญหาที่มีแต่พจน์การพาเพียงอย่างเดียว นั่นคือ กำหนดให้สัมประสิทธิ์การแพร่มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งปัญหาดังกล่าวมักจะถูกนำมาใช้ในการทดสอบระเบียบวิธีที่ใช้ในการจัดพจน์การพา [34-36] โดยที่ขอบเขตของปัญหาจะมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังแสดงในรูปที่ 3.8 และกำหนดให้ความเร็วมีลักษณะคงตัว (uniform) ตลอดภายในขอบเขตของปัญหาแต่กำหนดให้มีการไหลที่มุมที่แตกต่างกัน โดยทำมุม 22.5, 45 และ 67.5 องศา ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม STREAM จะเริ่มต้นจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.9 โดยประกอบไปด้วย 441 จุดต่อ และ 800 เอลิเมนต์



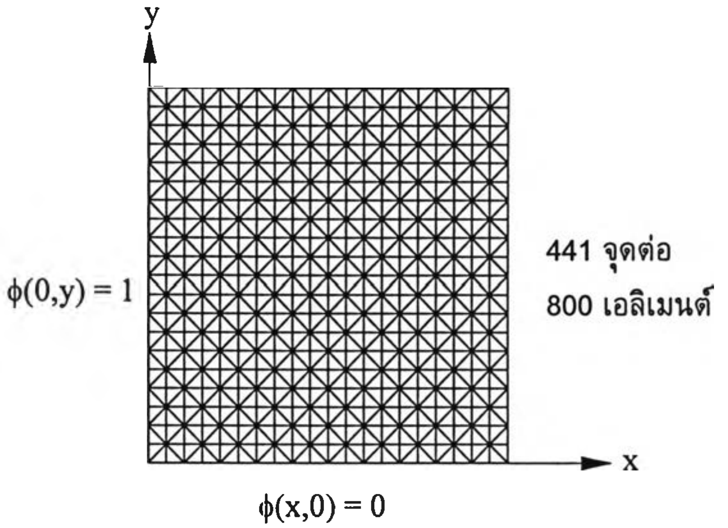
รูปที่ 3.8 ขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ 1

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับตัวอย่างที่ 1

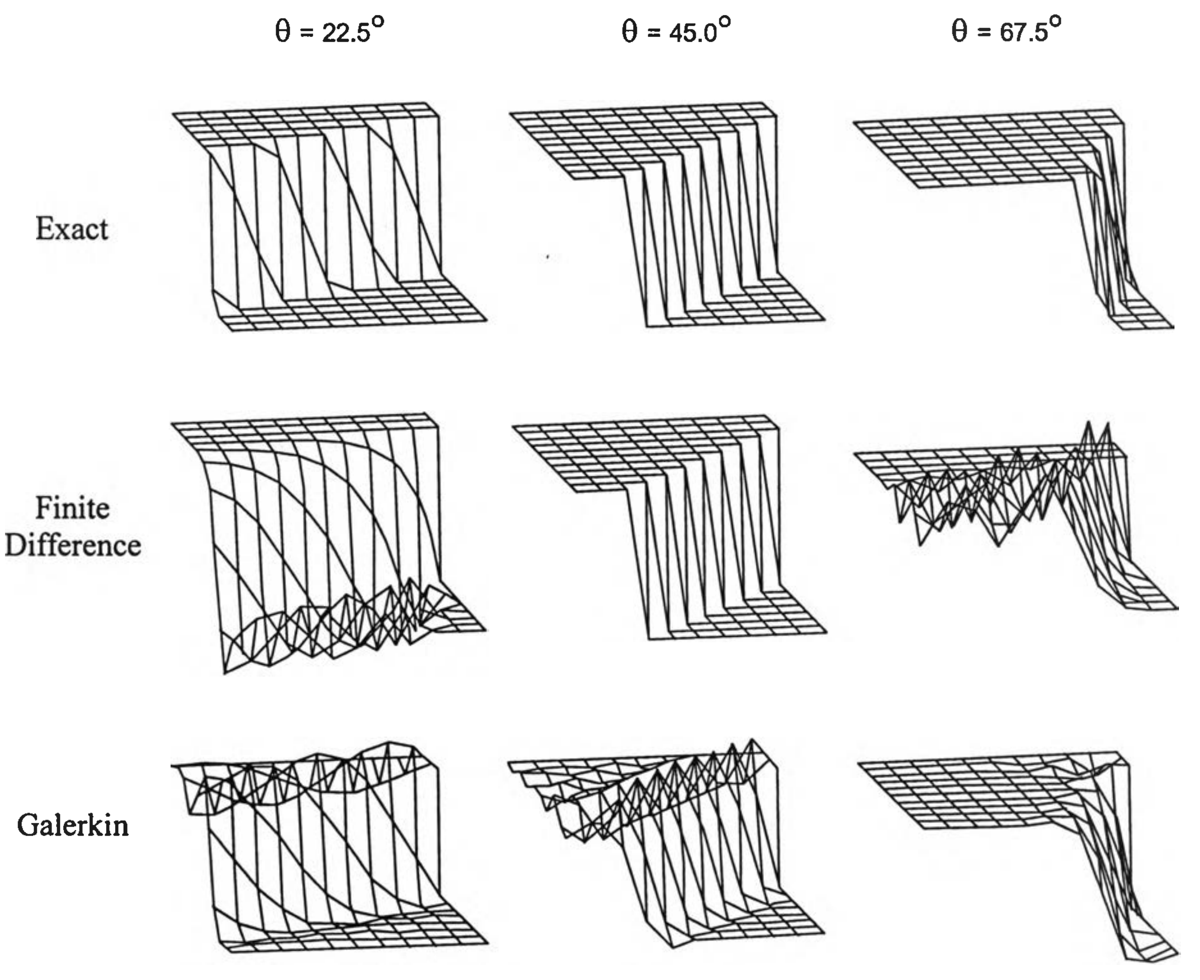
$$u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \tag{3.23}$$

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

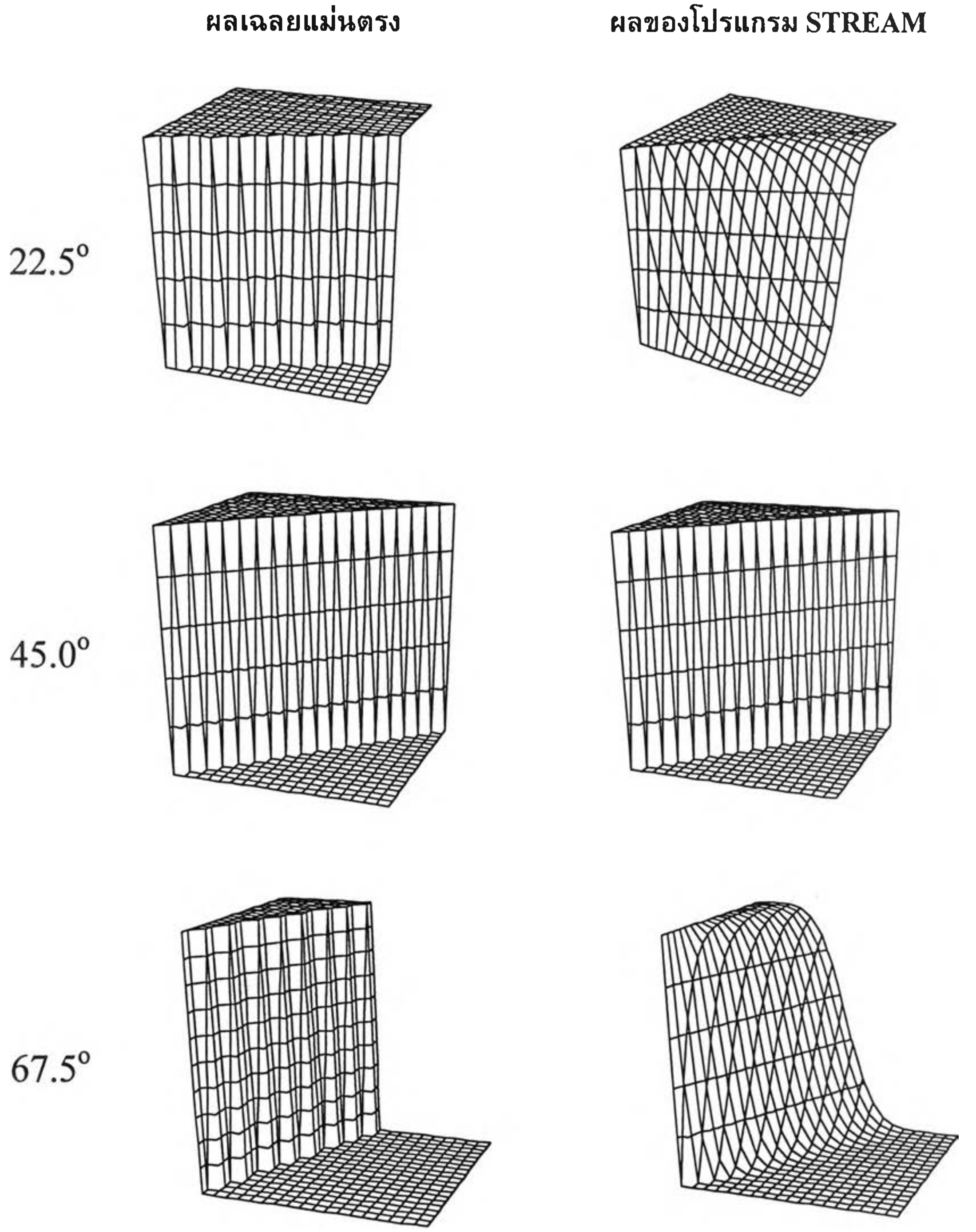
กำหนดให้ค่า ϕ ตลอดขอบ C_1 มีค่าเท่ากับศูนย์ และตลอดขอบ C_2 มีค่าเท่ากับหนึ่ง สำหรับด้านขอบ C_3 และ C_4 นั้นไม่ต้องทำการกำหนดค่า



รูปที่ 3.9 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาตัวอย่างที่ 1



รูปที่ 3.10 แสดงผลของระเบียบวิธีที่ใช้จัดพจน์การพาในอดีตกับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 3.11 การเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงที่มุมการไหลต่าง ๆ

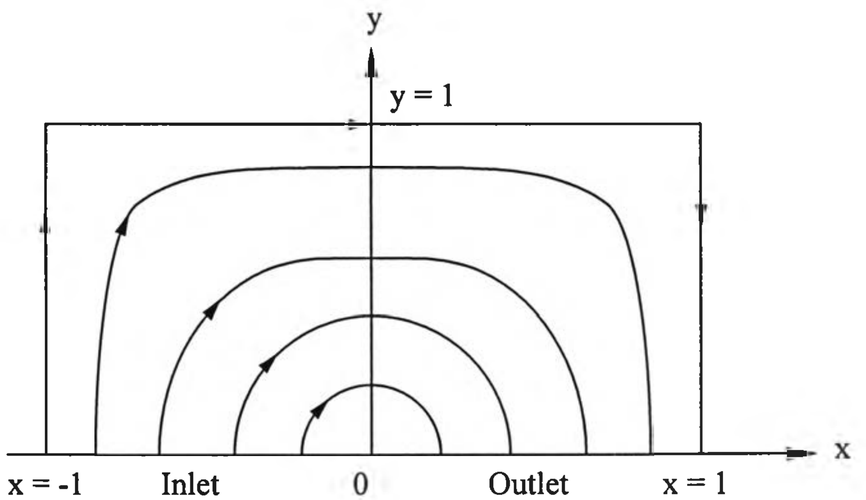
ระเบียบวิธีที่ใช้ในการจัดพจน์การพาในอดีต [29] ที่ถูกนำมาใช้ทดสอบกับปัญหานี้ยังไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่ดีในทุก ๆ มุมของการไหล นั่นคือยังคงมีการสั่นของคำตอบที่อย่างน้อยมุมหนึ่งของการไหลดังแสดงในรูปที่ 3.10 ส่วนในรูปที่ 3.11 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าของคำตอบที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์กับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้ไม่มีการสั่นในทุก ๆ มุมของการไหล อีกทั้งยังให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงอีกด้วย

ตัวอย่างที่ 2 กรณีทดสอบของสมิทธ์และฮัตตัน (Smith and Hutton test case)

ตัวอย่างที่สองเป็นปัญหาที่ถูกเสนอโดย Smith and Hutton [37] และใช้เป็นปัญหาในการทดสอบวิธีที่ใช้จัดพจน์การพา การทดสอบกับตัวอย่างนี้จะทำการทดสอบทั้งหมดสองกรณีด้วยกัน คือทดสอบในกรณีที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียว และทดสอบในกรณีที่มีทั้งพจน์การพาและการแพร่พร้อมกัน โดยที่โดเมนของปัญหามีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปที่ 3.12 และกำหนดให้ความเร็วตลอดภายในขอบเขตของปัญหามีความสัมพันธ์ดังนี้

$$u = 2y(1-x^2) \quad (3.24)$$

$$v = -2x(1-y^2) \quad (3.25)$$



รูปที่ 3.12 ขอบเขตของปัญหาพร้อมเส้นกระแสที่เกิดขึ้น

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับตัวอย่างที่ 2

$$u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{Pe}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right] \quad (3.26)$$

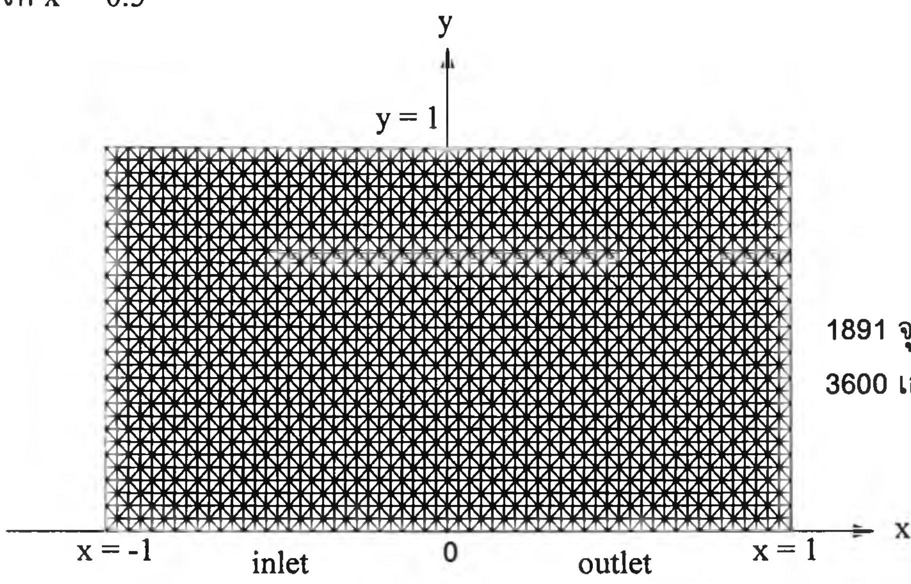
โดยที่ Pe = ค่าเพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number)

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

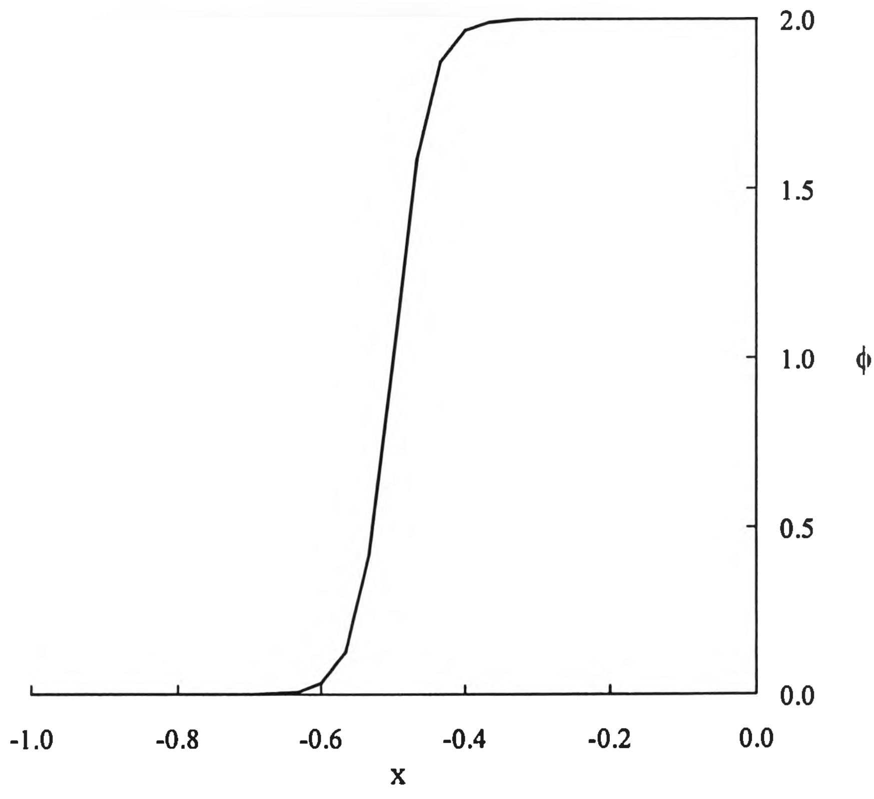
$$\phi = 1 + \tanh[(2x+1)10] \quad ; \quad y = 0,\ -1 \le x \le 0 \quad (3.27)$$

$$\phi = 1 - \tanh 10 \begin{cases} x = -1 & ; \quad 0 \le y \le 1 \\ y = 1 & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ x = 1 & ; \quad 0 \le y \le 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 2 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.13 ซึ่งประกอบไปด้วย 1891 จุดต่อ และ 3600 เอลิเมนต์ สำหรับลักษณะการกระจายของค่า ϕ บริเวณทางเข้าแสดงไว้ในรูปที่ 3.14 ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีการเปลี่ยนแปลงค่าจาก $\phi = 0$ ที่ตำแหน่ง $x = -1, y = 0$ จนถึง $\phi = 2$ ที่ $x = 0, y = 0$ โดยมีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันบริเวณตำแหน่งที่ $x = -0.5$



รูปที่ 3.13 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่างที่ 2



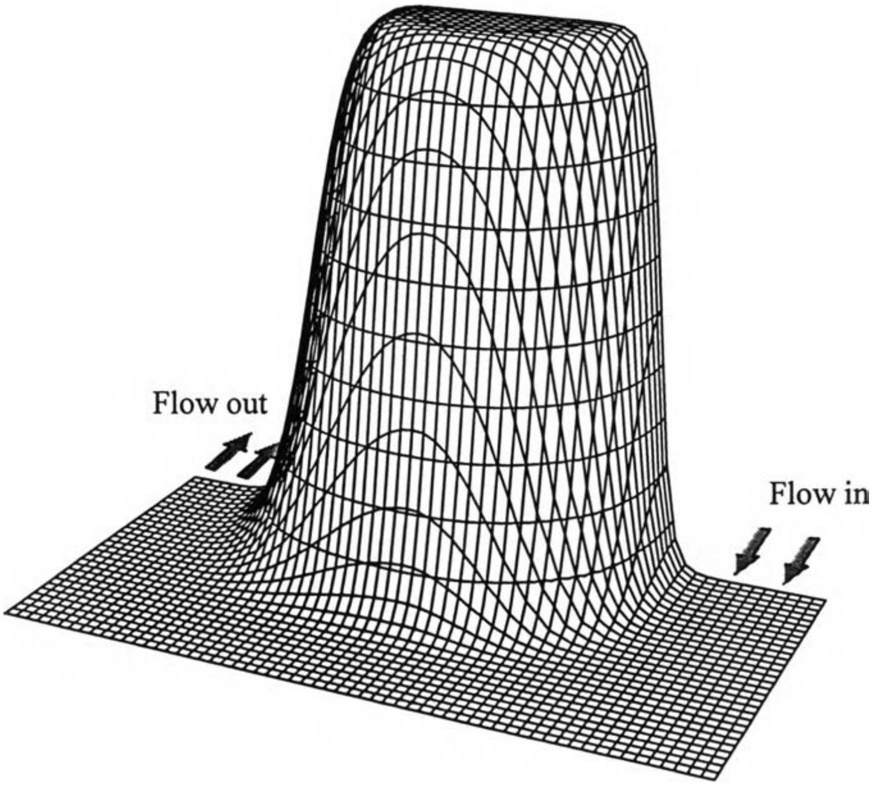
รูปที่ 3.14 ลักษณะการกระจายของค่า ϕ ตลอดขอบทางเข้า

<u>กรณีที่ 1</u> เพกเลตนัมเบอร์มีค่าเท่ากับอนันต์ ($Pe = \infty$)

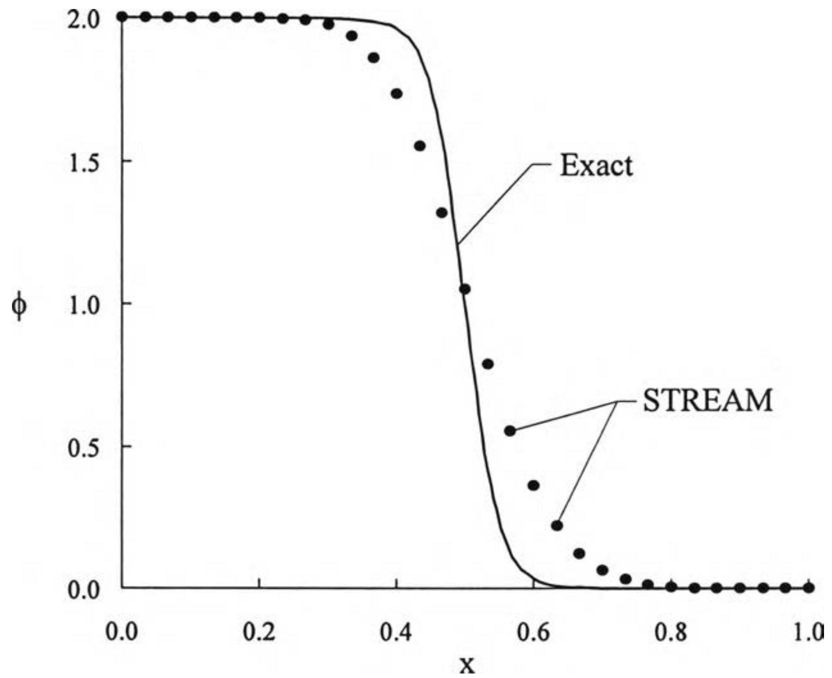
กรณีแรกที่พิจารณานี้เป็นปัญหาที่มีพจน์การพาเพียงอย่างเดียว ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาในกรณีที่ 1 นี้จะลดรูปจากสมการ (3.26) ลงเป็นสมการ (3.23) ดังนี้

$$u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad (3.23)$$

เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีแต่พจน์การพาเพียงอย่างเดียว ดังนั้นลักษณะการกระจายตัวของค่า ϕ ที่ทางเข้าควรจะกระจายตัวไปยังขอบทางด้านออกโดยที่ไม่มีการแพร่เกิดขึ้น จากรูปที่ 3.15 แสดงให้เห็นถึงการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดภายในขอบเขตของปัญหาที่ค่าเพกเลตนัมเบอร์เท่ากับอนันต์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ ส่วนการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดขอบทางออกที่คำนวณได้นั้นแสดงไว้ในรูปที่ 3.16 โดยเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง จะเห็นได้ว่าค่าของ ϕ ที่กำหนดไว้ทางด้านเข้ากระจายตัวไปยังทางด้านออกโดยเกิดการแพร่เพียงเล็กน้อยเท่านั้น



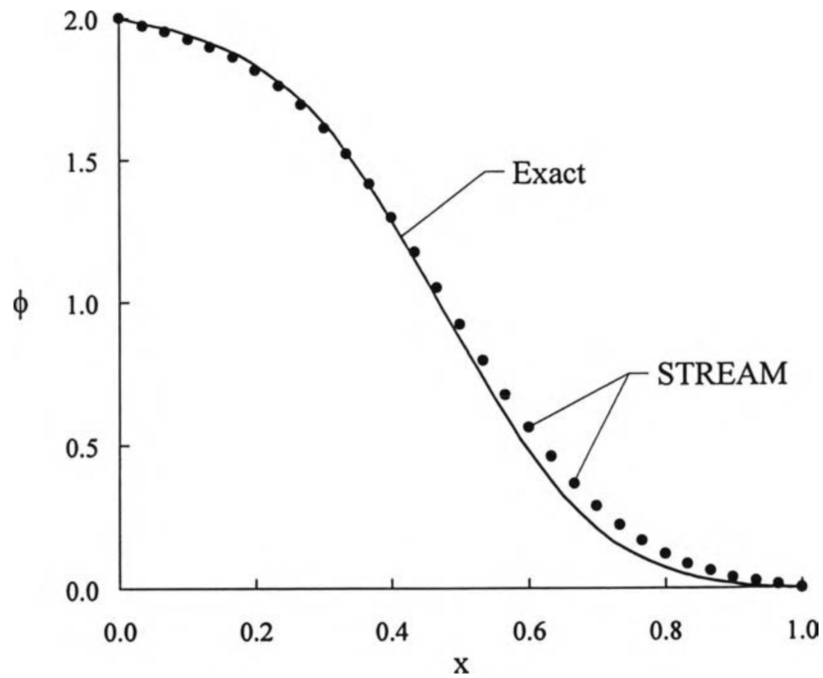
รูปที่ 3.15 การกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดภายในขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 3.16 ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงกรณี Pe = ∞

<u>กรณีที่ 2</u> เพกเลตนัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 100 (Pe = 100)

สำหรับกรณีที่สองนี้เป็นปัญหาที่ผสมผสานกันระหว่างพจน์การพาและพจน์การแพร่ ผลการคำนวณลักษณะการกระจายตัวของค่า ϕ ตลอดขอบทางออกได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.17 โดยเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง จะเห็นว่าค่าที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ให้ผลลัพธ์ที่ดี



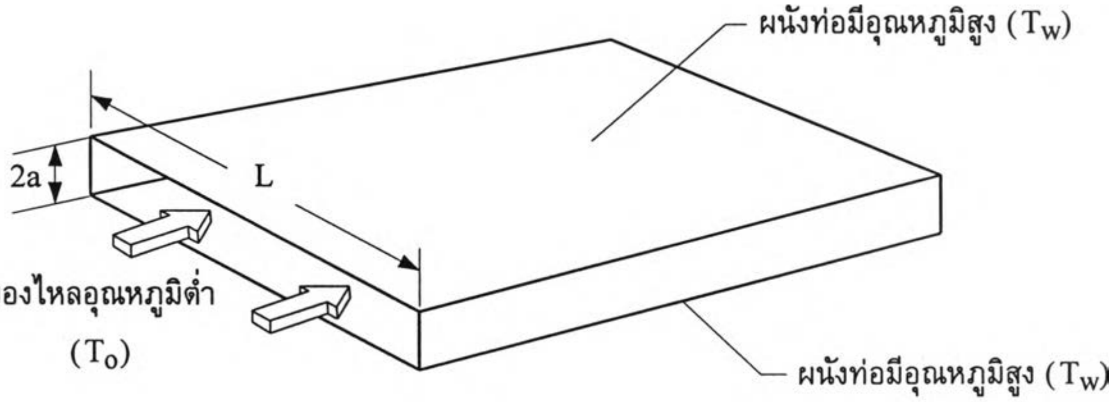
รูปที่ 3.17 ค่า ϕ ตลอดขอบทางด้านออกเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงกรณี Pe = 100

ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาการถ่ายเทความร้อน (thermal entry problem)

ตัวอย่างสุดท้ายเป็นปัญหาการไหลที่มีของไหลอุณหภูมิต่ำไหลเข้าไปภายในท่อที่ให้ความร้อนอยู่ดังแสดงในรูปที่ 3.18 ถ้าสมมติว่าท่อดังกล่าวมีอัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของปากทางเข้ามีค่ามากพอ (L>>2a) การกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณที่ห่างจากผนังท่อหรือบริเวณกึ่งกลางท่อจะมีลักษณะเป็นสองมิติ ซึ่งปัญหาดังกล่าวสามารถอธิบายได้โดยสมการพลังงานภายใต้สถานะอยู่ตัวดังนี้

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = k_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + k_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{3.29}$$

โดยที่ $k_x = k_y = k$ = ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของสมการพลังงาน



รูปที่ 3.18 แสดงลักษณะของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน

สมการ (3.29) สามารถจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้มิติ [38] โดยกำหนดให้

$$T' = \frac{T-T_O}{T_W-T_O}, \qquad u' = \frac{u}{U_m}, \qquad v' = \frac{v\,Re}{2.5\,U_m}, \qquad Pr = \frac{\mu C_P}{k}$$

$$x' = \frac{2.5x}{a\,Re}, \qquad y' = \frac{y}{a}, \qquad Re = \frac{4aU_m}{\nu},$$

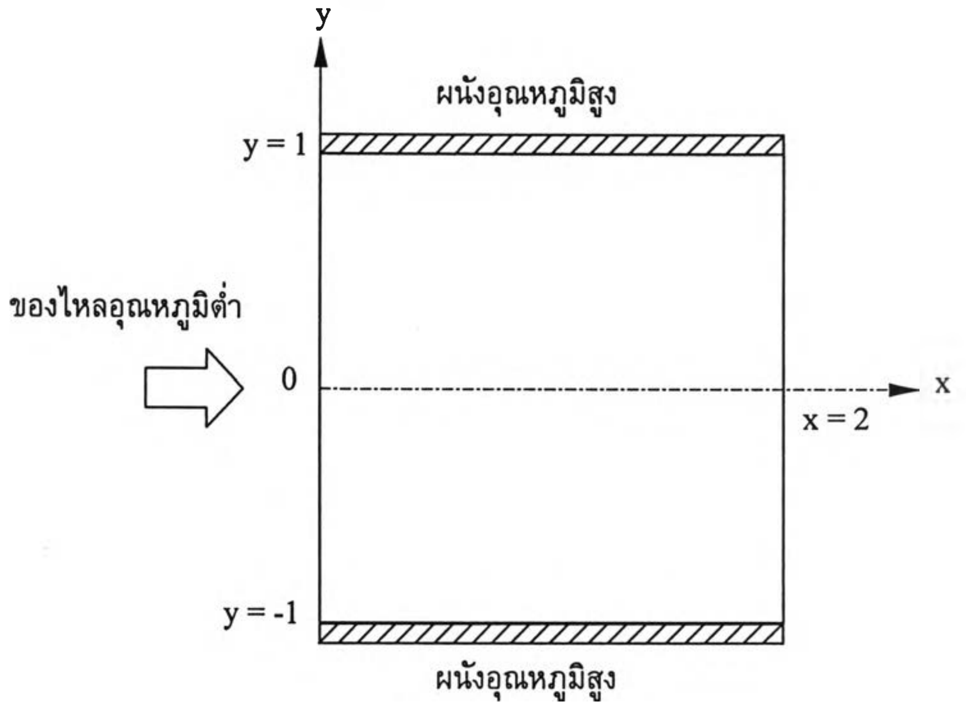
ซึ่งจะได้สมการใหม่ดังนี้

$$u'\frac{\partial T'}{\partial x'}+v'\frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial T'}{\partial x'}\right) + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right) \tag{3.30}$$

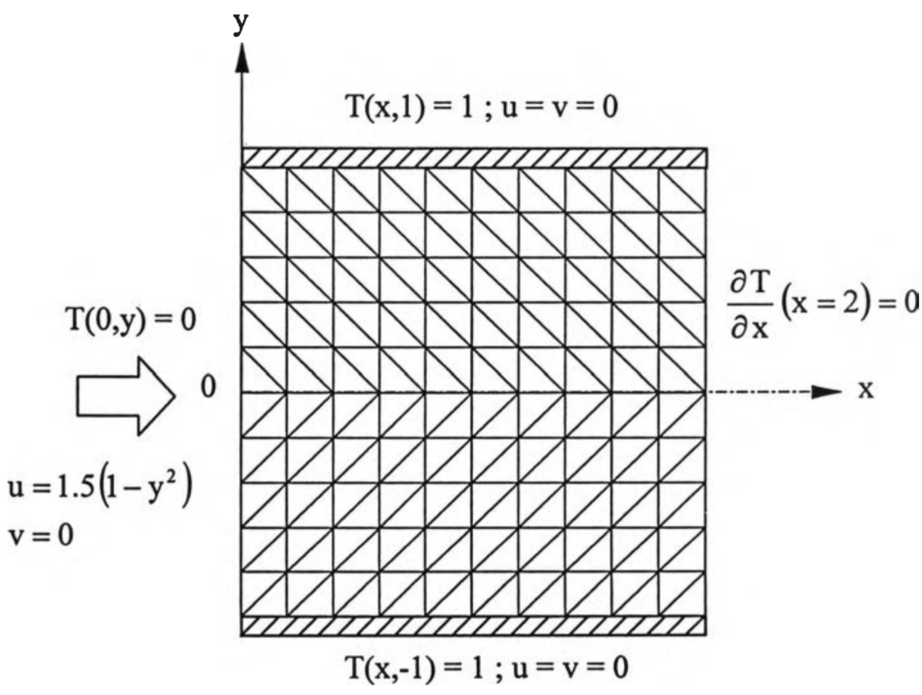
โดยที่ $\alpha_x = \frac{10}{Pr\,Re^2}$ และ $\alpha_y = \frac{1.6}{Pr}$

สำหรับในส่วนต่อๆไป จะขอละเครื่องหมาย (′) ออกจากตัวแปรไร้มิติ

รูปที่ 3.19 แสดงขอบเขตของปัญหาที่จะใช้ในการคำนวณ ซึ่งมีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยมีขอบเขตคือ $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$ ส่วนรูปที่ 3.20 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้ซึ่งประกอบไปด้วย 121 จุดต่อ และ 200 เอลิเมนต์



รูปที่ 3.19 ขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน



รูปที่ 3.20 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขต
ของปัญหาการไหลในท่อที่ให้ความร้อน

เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

$$T(0,y) = 0 \quad \text{ที่} \quad x = 0 \tag{3.31}$$

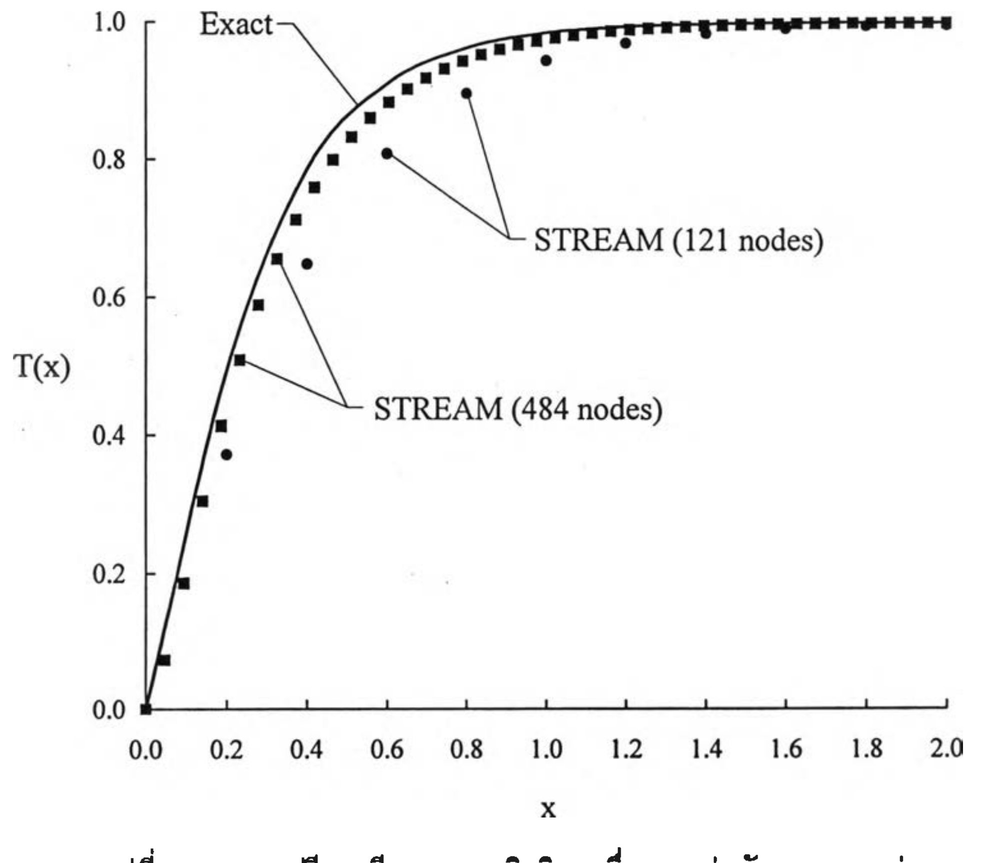
$$T(x,\pm 1) = 1 \quad \text{ที่} \quad y = \pm 1 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{ที่} \quad x = 2 \tag{3.33}$$

สมมติให้การไหลภายในท่อเป็นการไหลเต็มรูปแบบ (fully developed flow) และมีการกระจายตัวของความเร็วดังนี้

$$u = 1.5\left(1-y^2\right), \quad v = 0 \tag{3.34}$$

ผลการคำนวณค่าอุณหภูมิที่บริเวณกึ่งกลางของท่อที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.21 โดยเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรงของ Brown [39] ซึ่งกำหนดค่าของตัวแปรไร้มิติดังนี้ Pr = 0.7 และ Re = 100 จากรูปที่ 3.21 แสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณที่ได้ยังไม่ดีเท่าที่ควร แต่เมื่อทำการเพิ่มจำนวนจุดต่อให้เพิ่มมากขึ้นแล้วผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากยิ่งขึ้น



รูปที่ 3.21 การเปรียบเทียบอุณหภูมิบริเวณกึ่งกลางท่อกับผลเฉลยแม่นตรง

จากปัญหาตัวอย่างทั้งสามที่ได้นำมาใช้ทดสอบระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สตรีมไลน์อัปวินด์ที่ได้นำเสนออยู่นี้จะเห็นได้ว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้อง อันแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีดังกล่าวในการจัดพจน์การพา อีกทั้งยังสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย และจะได้นำระเบียบวิธีดังกล่าวไปประยุกต์ใช้กับสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์การไหลแบบหนืด ดังจะได้แสดงรายละเอียดในบทต่อไป