บทที่ 6
ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบหนืด

ในบทนี้จะได้นำเอาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 4 รวมทั้งระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์ที่ได้อธิบายในบทที่ 5 มาทำการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวสามารถทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้ และสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า EQUAL ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

6.1 ลักษณะของโปรแกรม EQUAL

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ EQUAL ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และ 11 โปรแกรมย่อย (subroutine) โดยมีขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังนี้

6.1.1 เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านข้อมูลของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหา, ค่าคุณสมบัติต่างๆของของไหล ซึ่งได้แก่ ค่าความหนืด และค่าความหนาแน่น, ตำแหน่งของจุดต่อต่างๆ เป็นต้น โดยการอ่านค่าดังกล่าวจะทำในโปรแกรมหลัก [MAIN PROGRAM]

6.1.2 เริ่มการคำนวณแบบทำซ้ำ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE CHK] เพื่อทำการตรวจสอบทุกๆเอลิเมนต์ว่า มีเอลิเมนต์ใดบ้างที่ไม่มีจุดดาวน์วินด์อยู่ จากนั้นทำการแบ่งพื้นที่ของเอลิเมนต์ดังกล่าวไปยังจุดต่อดังอธิบายในบทที่ 3

6.1.3 เรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVEUV] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ โดยจะเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE STREAM] เพื่อหาเอลิเมนต์เมตริกซ์ของพจน์การพาสำหรับสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ จากนั้นนำเอลิเมนต์เมตริกซ์มารวมเป็นเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวม โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE ASSMBLE] จากนั้นเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE APPLYBC] เพื่อทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแล้วแก้ระบบสมการดังกล่าวเพื่อหาค่าความเร็วค่าใหม่ที่จุดต่อต่างๆ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE GS]

6.1.4 จากนั้นนำค่าความเร็วค่าใหม่ที่คำนวณได้จากข้อ 6.1.3 นั้นมาคำนวณค่าที่ต้องใช้ในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ต่าง ๆของสมการความดันโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE COEFF]

6.1.5 จากนั้นเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVEP] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ของสมการความดัน และส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆที่คำนวณได้ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการสำหรับความดันโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE ASSMP] จากนั้นเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE APPLYBC] เพื่อทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต สุดท้ายทำการแก้ระบบสมการดังกล่าวโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE PCG] เพื่อหาค่าความดันค่าใหม่ต่อไป

6.1.6 นำค่าความดันค่าใหม่ที่คำนวณได้จากข้อ 6.1.5 มาทำการปรับปรุงค่าความเร็ว โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE UPDATE]

6.1.7 ทำการตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ โดยที่ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ดำเนินการต่อในข้อ 6.1.8 แต่ถ้าไม่ก็ต้องกลับไปทำการคำนวณตั้งแต่หัวข้อ 6.1.2 ใหม่ จนกระทั่งได้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าที่กำหนดไว้ หรือจนกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

6.1.8 พิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองและค่าความดัน ลงในไฟล์ที่ต้องการเพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

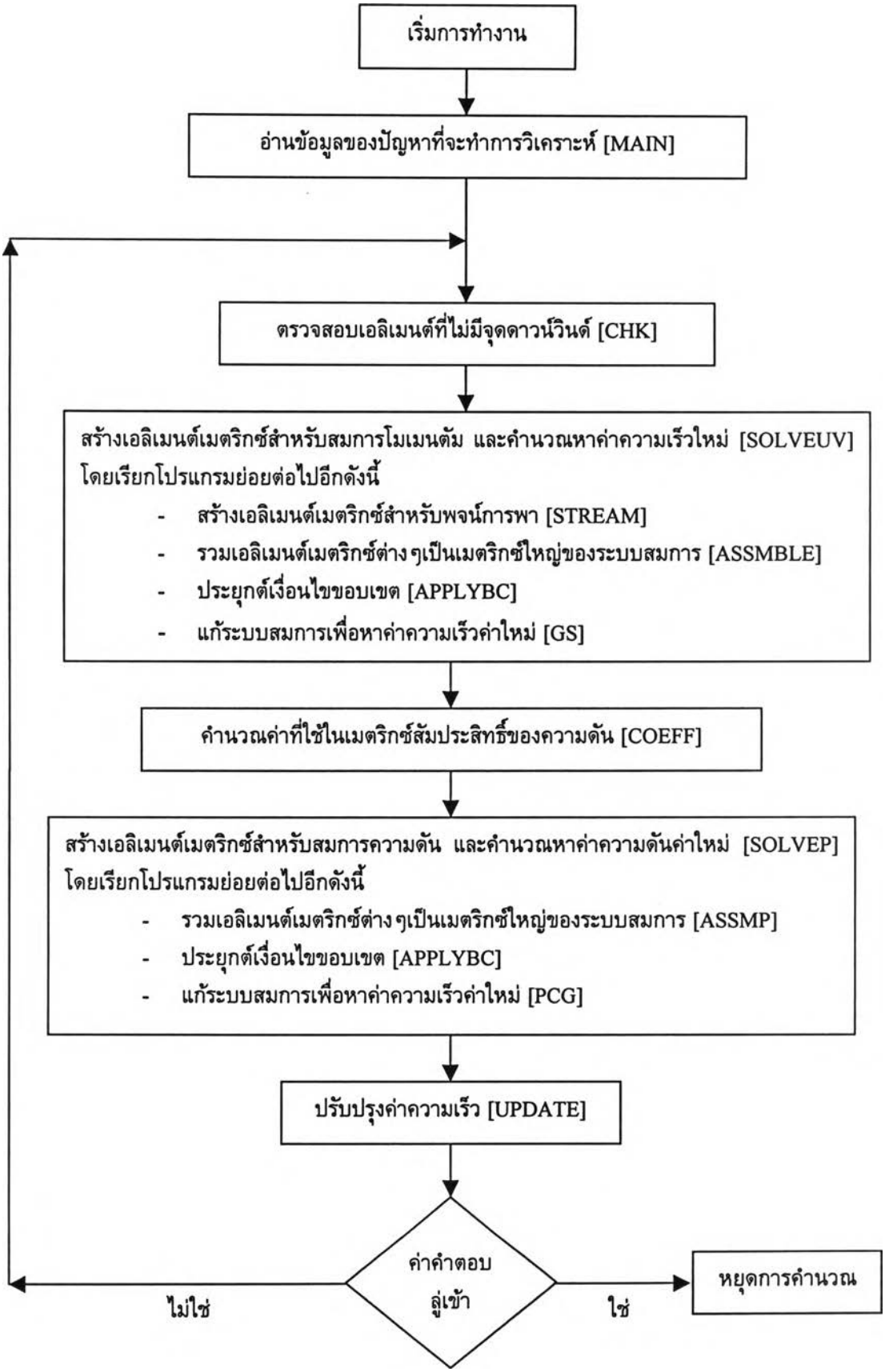
ลำดับขั้นตอนต่าง ๆ นี้สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 6.1

6.2 รายละเอียดของโปรแกรม EQUAL

รายละเอียดของโปรแกรม EQUAL ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก.

6.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม EQUAL ต้องการ

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรมวิเคราะห์การไหลแบบหนืดนี้ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 6 ส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 6.1 ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม EQUAL

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่างๆที่มีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

```
2
FINITE ELEMENT DATA FOR FLUID FLOW
COUETTE FLOW PROBLEM
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา พร้อมค่าที่จะใช้ในการคำนวณ

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ, เอลิเมนต์, เอลิเมนต์ที่ขอบ, รอบการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมให้ได้

บรรทัดต่อไป ตัวเลขจำนวนจุดต่อ, เอลิเมนต์, เอลิเมนต์ที่ขอบ, รอบการคำนวณ และค่าความผิดพลาดที่ยอมให้ได้

ตัวอย่างเช่น:

NPOIN	NELEM	NBOU	NITER	TOL
1521	2888	6	10000	1.e-8

หมายเหตุ: จำนวนเอลิเมนต์ที่ขอบ (NBOU) หมายถึง จำนวนเอลิเมนต์ที่อยู่บนขอบเขตของปัญหาซึ่งมีของไหลไหลผ่าน เช่นเอลิเมนต์ที่ขอบทางเข้าของการไหลของของไหลในปัญหาที่จะพิจารณา เป็นต้น

ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่างๆของของไหล

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่างๆ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงค่าความหนาแน่น และค่าความหนืดของปัญหา

ตัวอย่างเช่น:

DENSITY	VISCOSITY
100.00	0.25

ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อๆไป ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของความเร็วในทิศทาง x และ y พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตของความดัน ตำแหน่งจุดต่อในแกน x และ y และค่าความเร็วในแกน x, y และค่าความดัน

ตัวอย่างเช่น:

NODE	IBCX	IBCY	IBCP	X	Y	U	V	P
1	1	0	0	1.03333	0.	2.5	0.	0.
2	0	0	0	1.06667	0.	0.	0.	0.
3	1	1	0	1.1	0.	1.2	0.3	0.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
51	1	0	1	1.82	0.	0.5	0.	1.3
52	0	0	0	1.83333	0.	0.	0.	0.

หมายเหตุ: เงื่อนไขขอบเขต IBC ในทิศทาง x หรือ y และเงื่อนไขขอบเขตของความดัน หมายถึง

IBC = 1 จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีค่าตามที่ให้ไว้ และไม่ต้องทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

IBC = 0 ให้ทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อๆไป หมายเลขของจุดต่อทั้งสามในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้นๆ

ตัวอย่างเช่น:

ELEMENT NO.	I	J	K
1	182	184	190
2	181	182	190
3	175	181	190
⋮	⋮	⋮	⋮
2604	880	1386	990
2605	879	880	990

ส่วนที่ 6 เอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบเขตของปัญหาที่มีการไหลไหลผ่านขอบด้านนั้น

บรรทัดแรก คำระบุเอลิเมนต์ขอบเขต

บรรทัดต่อๆไป หมายเลขเอลิเมนต์ที่อยู่ที่ขอบดังกล่าว และหมายเลขจุดต่อที่อยู่บนขอบของเอลิเมนต์นั้นๆ (โดยมีจำนวนบรรทัดต้องเท่ากับค่า NBOU ที่ให้ไว้ในส่วนที่ 2)

ตัวอย่างเช่น:

ELEMENT NO.	II	JJ	
1966	939	940	
1968	940	941	
1965	941	942	
⋮	⋮	⋮	จำนวนบรรทัดเท่ากับค่า NBOU
1791	952	953	
1786	953	954	

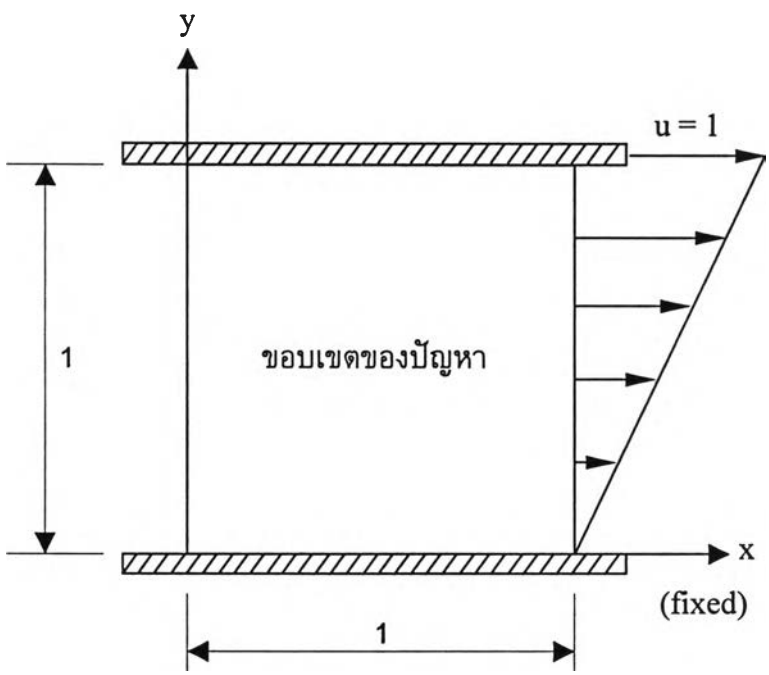
หมายเหตุ: ถ้าในปัญหาไม่มีเอลิเมนต์ที่มีคุณสมบัติดังในส่วนที่ 6 ให้ใส่ค่า NBOU ในส่วนที่ 2 เท่ากับหนึ่ง และใส่หมายเลขของเอลิเมนต์ในส่วนที่ 6 เท่ากับศูนย์ดังนี้

ELEMENT NO.	II	JJ
0	0	0

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรม EQUAL ต้องการสามารถทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นโดยพิจารณาตัวอย่างการใช้โปรแกรมในหัวข้อต่อไป

6.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม EQUAL ในการแก้ปัญหาการไหล

ในหัวข้อนี้จะได้แสดงตัวอย่างการใช้โปรแกรม EQUAL ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวระหว่างแผ่นเรียบ 2 แผ่น โดยจะได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยที่ลักษณะของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 6.2 โดยที่แผ่นล่างถูกยึดไว้ ในขณะที่แผ่นบนมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับ 1 และกำหนดให้ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ 1



รูปที่ 6.2 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนืดระหว่างแผ่นคู่ขนาน

รูปแบบการกระจายของความเร็วแม่นตรงที่ทุกตำแหน่ง x [44] สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้สำหรับปัญหาการไหลชนิดเต็มรูปแบบ (fully developed) ในหนึ่งมิติเช่นนี้ โดยในกรณีนี้สมการนาเวียร์-สโตกส์ในแกน x ซึ่งคือสมการ (2.22ก) จะลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.1)$$

ในสมการ (2.22ข) นั้นจะถูกต้องเสมอเมื่อกำหนดให้ค่าความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกๆจุดของปัญหา ดังนั้นหากทำการอินทิเกรดสมการ (6.1) สองครั้งจะได้

$$u(y) = Ay + B \qquad (6.2)$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรด ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

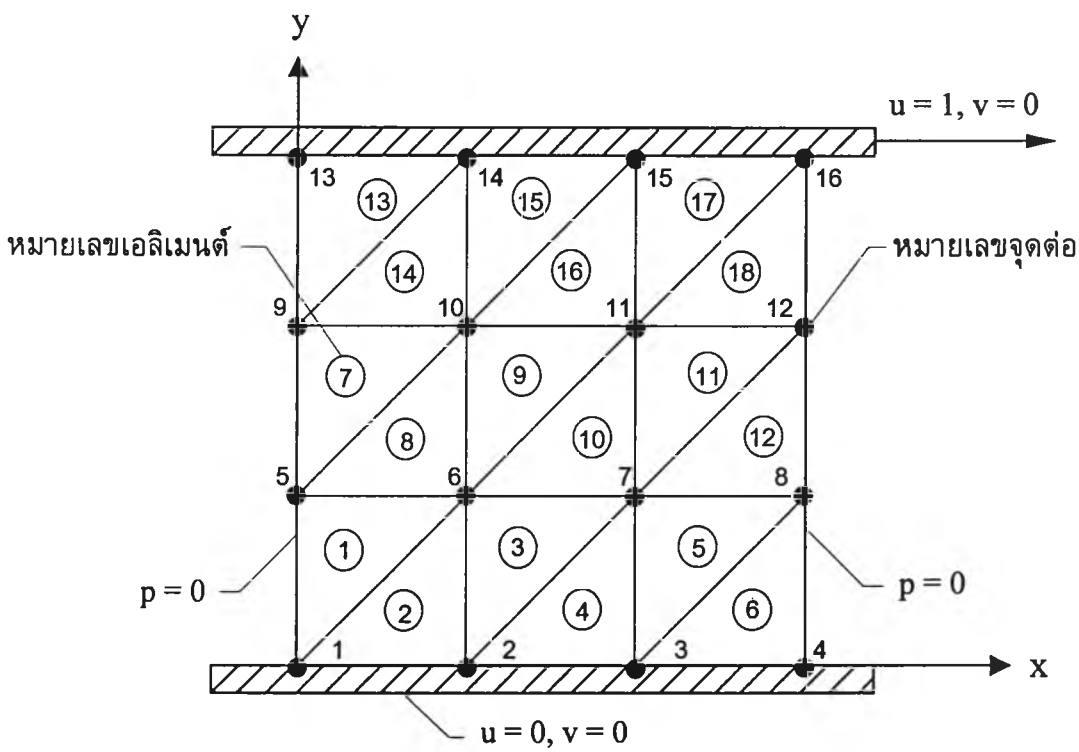
$$u(x, y = 0) = 0 \qquad (6.3ก)$$

$$u(x, y = 1) = 1 \qquad (6.3ข)$$

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (6.3ก) และ (6.3ข) ลงในสมการ (6.2) จะสามารถหาค่าคงที่ในสมการดังกล่าวได้ดังนี้ A = 1 และ B = 0 ดังนั้นค่ารูปแบบการกระจายความเร็วแม่นตรงตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใดๆ คือ

$$u(y) = y \qquad (6.4)$$

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ EQUAL โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 6.3 ซึ่งรูปแบบดังกล่าวประกอบไปด้วย 16 จุดต่อ และ 18 เอลิเมนต์ โดยให้ความเร็ว u = 1 และ v = 0 ที่จุดต่อตลอดขอบทางด้านบนของปัญหา ส่วนตลอดขอบทางด้านล่างกำหนดให้มีความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ และกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบในแนวดิ่งทางด้านซ้ายและขวาของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 6.3 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นขนาน

ส่วนลักษณะไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการนี้สมมติว่าชื่อ 'COUETTE.DAT' โดยมีรายละเอียดดังแสดงในรูปที่ 6.4

```
2
THIS DATA IS FOR FLUID FLOW ANALYSIS
COUETTE FLOW PROBLEM
    NPOIN    NELEM    NBOU   NITER    TOL
       16       18       1   10000   1.e-10
    DENSITY      VISCOSITY
     1.00           1.00
NODE   IBCU  IBCV  IBCP        X           Y       U     V     P
 1        1     1     1        0.          0.      0.    0.    0.
 2        1     1     0  0.33333           0.      0.    0.    0.
 3        1     1     0  0.66667           0.      0.    0.    0.
 4        1     1     1        1.          0.      0.    0.    0.
 5        0     0     1        0.    0.33333       0.    0.    0.
 6        0     0     0  0.33333     0.33333       0.    0.    0.
 7        0     0     0  0.66667     0.33333       0.    0.    0.
 8        0     0     1        1.    0.33333       0.    0.    0.
 9        0     0     1        0.    0.66667       0.    0.    0.
10        0     0     0  0.33333     0.66667       0.    0.    0.
11        0     0     0  0.66667     0.66667       0.    0.    0.
12        0     0     1        1.    0.66667       0.    0.    0.
13        1     1     1        0.          1.      1.    0.    0.
14        1     1     0  0.33333           1.      1.    0.    0.
15        1     1     0  0.66667           1.      1.    0.    0.
16        1     1     1        1.          1.      1.    0.    0.
ELEMENT    I        J        K
 1         1        6        5
 2         1        2        6
 3         2        7        6
 4         2        3        7
 5         3        8        7
 6         3        4        8
 7         5       10        9
 8         5        6       10
 9         6       11       10
10         6        7       11
11         7       12       11
12         7        8       12
13         9       14       13
14         9       10       14
15        10       15       14
16        10       11       15
17        11       16       15
18        11       12       16
ELEMENT   II       JJ
0          0        0
```

รูปที่ 6.4 ข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'COUETTE.DAT'

เมื่อผู้ใช้ทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม EQUAL โปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลซึ่งผู้ใช้จะพิมพ์ตอบกลับไป และจากนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณเป็นขั้นตอนดังอธิบายในหัวข้อย่อย 6.1 เมื่อการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะให้ผู้ใช้ใส่ชื่อไฟล์ที่จะบรรจุผลลัพธ์ของความเร็วและความดัน ซึ่งขั้นตอนทั้งหมดดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 6.5

```
>EQUAL      <Enter>

PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:
COUETTE.DAT

  THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :
     NUMBER OF NODES               =    16
     NUMBER OF ELEMENTS            =    18
     NUMBER OF MAX. ITERATION      = 10000
     SPECIFIED STOPPING TOLERANCE =.10000E-09

ITER =      1   .1744043518E-01   .1000000000E+01   .1000000000E+01
ITER =      2   .1244696508E-01   .4419766236E+00   .6379864805E+00
ITER =      3   .1526359401E-02   .6905326945E+00   .1473739156E+00
ITER =      4   .5008540085E-02   .5985169662E+00   .6635671406E+00
ITER =      5   .6356563309E-02   .8309629149E+00   .2022969855E+01
ITER =      6   .4952938684E-02   .8438751288E+00   .4326758042E+01
ITER =      7   .3097443314E-02   .4737014772E+00   .7430534620E+01
ITER =      8   .1694331769E-02   .4401530399E+00   .8339538916E+01
ITER =      9   .8628479525E-03   .3591275928E+00   .6078780922E+01
ITER =     10   .4356706688E-03   .3669895648E+00   .4121327049E+01
ITER =     11   .2314563298E-03   .4820101408E+00   .3101208285E+01
ITER =     12   .1339650415E-03   .5820709988E+00   .2768618869E+01
ITER =     13   .8227427126E-04   .6287874221E+00   .2769299876E+01
ITER =     14   .5168782783E-04   .6566890439E+00   .2956491676E+01
ITER =     15   .3173326452E-04   .6368436678E+00   .3083818039E+01
ITER =     16   .1898314967E-04   .6474128382E+00   .3072483689E+01
ITER =     17   .1113182623E-04   .6713262742E+00   .2960605735E+01
ITER =     18   .6451651065E-05   .6735685300E+00   .2741362467E+01
ITER =     19   .3820617348E-05   .6975181000E+00   .2590876039E+01
ITER =     20   .2317057667E-05   .7187836208E+00   .2512086596E+01
ITER =     21   .1436290457E-05   .7138053235E+00   .2503151653E+01
ITER =     22   .9012309501E-06   .7051039829E+00   .2509390382E+01
ITER =     23   .5654500165E-06   .7221735051E+00   .2551084418E+01
ITER =     24   .3512312744E-06   .7406897631E+00   .2600637935E+01
ITER =     25   .2169064488E-06   .7581429896E+00   .2639875581E+01
ITER =     26   .1297687356E-06   .7634774059E+00   .2542439980E+01
ITER =     27   .7659126379E-07   .7535310969E+00   .2409024625E+01
ITER =     28   .4520395495E-07   .7574144981E+00   .2301563869E+01
ITER =     29   .2705564407E-07   .7702568913E+00   .2236469644E+01
ITER =     30   .1640922412E-07   .7643851711E+00   .2216076807E+01
ITER =     31   .1043597972E-07   .7684383722E+00   .2192795252E+01
ITER =     32   .6805278262E-08   .7776876774E+00   .2171207530E+01
ITER =     33   .4481348253E-08   .7635773100E+00   .2143955301E+01
ITER =     34   .2941263523E-08   .7638224089E+00   .2152536192E+01
ITER =     35   .1943130258E-08   .7737912783E+00   .2208560549E+01
ITER =     36   .1269080946E-08   .7813428682E+00   .2254251911E+01
ITER =     37   .8260768464E-09   .7927932215E+00   .2264961826E+01
ITER =     38   .5259689977E-09   .8058658571E+00   .2246296228E+01
ITER =     39   .3363724508E-09   .8155500921E+00   .2202475753E+01
ITER =     40   .2195527996E-09   .8309425035E+00   .2179202729E+01
ITER =     41   .1433963989E-09   .8024551966E+00   .2171839135E+01
ITER =     42   .9369367782E-10   .8777109459E+00   .2194358765E+01
Start time:   15:57:12:23
  End time:   15:57:14:37

ENTER THE OUTPUT FILE NAME
COUETTE.OUT

Stop - Program terminated.
```

รูปที่ 6.5 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม EQUAL

โดยที่ผลลัพธ์ของค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองและความดัน ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์ 'COUETTE.OUT' ได้แสดงในรูปที่ 6.6

NODE	U	V	P
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	.0000E+00	.0000E+00	-.3051E-08
3	.0000E+00	.0000E+00	-.2692E-08
4	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
5	.3333E+00	.0000E+00	.0000E+00
6	.3333E+00	-.1200E-09	.3008E-09
7	.3333E+00	-.3314E-09	.0000E+00
8	.3333E+00	-.3893E-09	.0000E+00
9	.6667E+00	.3163E-09	.0000E+00
10	.6667E+00	.1971E-09	.0000E+00
11	.6667E+00	.0000E+00	.0000E+00
12	.6667E+00	.0000E+00	.0000E+00
13	.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00
14	.1000E+01	.0000E+00	-.2284E-08
15	.1000E+01	.0000E+00	-.2677E-08
16	.1000E+01	.0000E+00	.0000E+00

รูปที่ 6.6 ลักษณะผลลัพธ์ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นขนานที่อยู่ในไฟล์ชื่อ 'COUETTE.OUT'