

บทที่ 7

ผลการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในแบบต่าง ๆ

ในบทนี้จะเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่สภาวะอยู่ตัว โดยจะได้แบ่งปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ออกเป็นสองส่วนด้วยกัน ในส่วนแรกนี้จะเป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ EQUAL ไปทดสอบกับปัญหาพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงเพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม โดยปัญหาที่จะได้นำมาใช้ทดสอบในส่วนแรกนี้ประกอบไปด้วย 3 ปัญหาด้วยกัน ซึ่งได้แก่ (1) ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความหนืด (Couette flow) (2) ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความดัน (Poiseuille flow) (3) ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบร์ริง จากนั้นเมื่อเกิดความมั่นใจกับโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นแล้ว ในส่วนที่สองก็จะเป็นการนำโปรแกรมดังกล่าวไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น โดยปัญหาที่จะได้นำมาวิเคราะห์ในส่วนนี้ประกอบไปด้วย 6 ปัญหาด้วยกัน ซึ่งได้แก่ (4) ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว (developing flow) (5) ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ (cavity flow) (6) ปัญหาการไหลภายในช่องขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดอย่างทันทีทันใด (backward facing step) (7) ปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก (flow past a cylinder) และสุดท้าย (8) ปัญหาการไหลรวมกันภายในท่อ

7.1 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความหนืด (Couette flow)

ลักษณะของปัญหามีความคล้ายคลึงกับปัญหาตัวอย่างที่ได้แสดงในบทที่ 6 โดยในที่นี้จะเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตให้มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น และจะได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ซึ่งลักษณะของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 7.1 โดยที่แผ่นล่างกำหนดให้มีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับ -0.5 ในขณะที่แผ่นบนมีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว u เท่ากับ 1 และกำหนดให้ระยะห่างระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ 1

รูปแบบการกระจายของความเร็วแม่นยำตรงที่ทุกตำแหน่ง x สามารถแสดงได้ดังสมการ (6.2)

$$u(y) = Ay + B \quad (6.2)$$

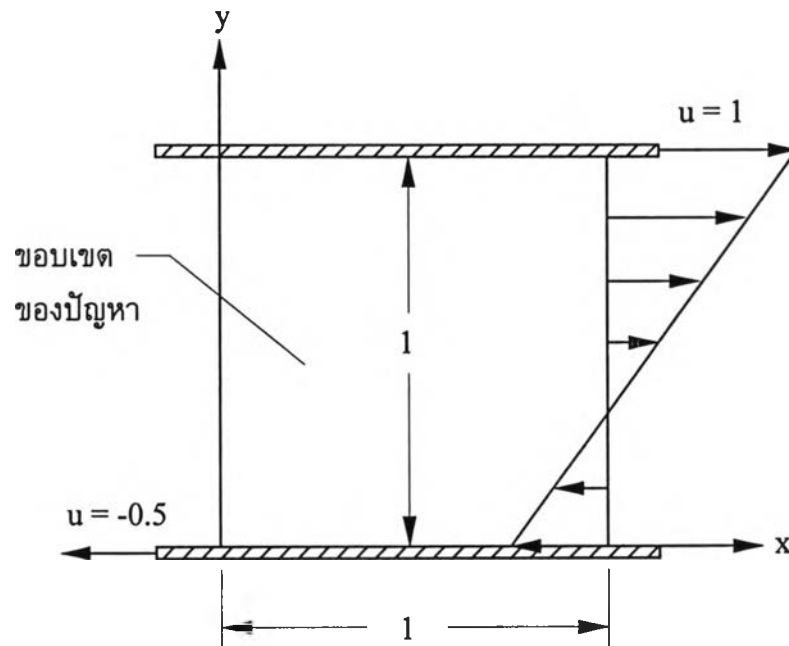
โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$u(x, y=0) = -0.5 \quad (7.1a)$$

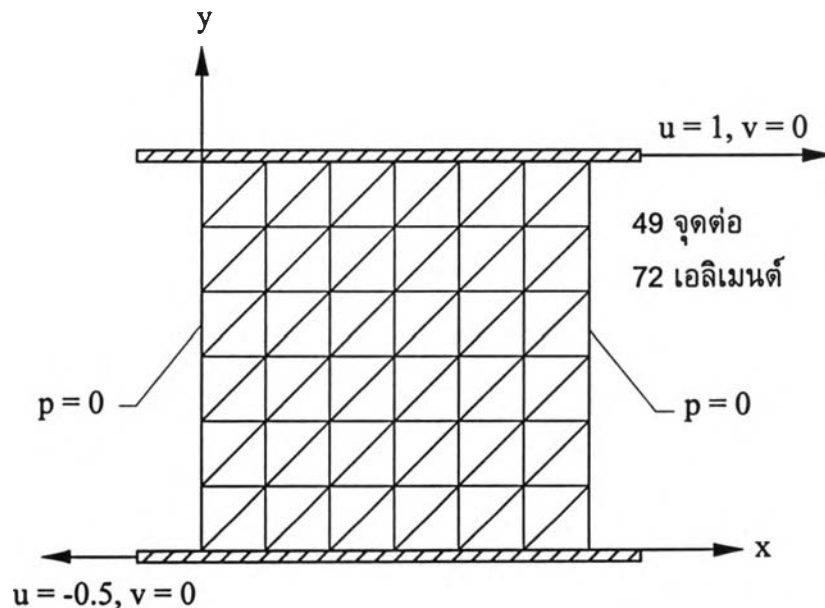
$$u(x, y=1) = 1 \quad (7.1b)$$

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (7.1ก) และ (7.1ข) ลงในสมการ (6.2) จะสามารถหาค่าคงที่ในสมการดังกล่าวได้คือ $A = 1.5$ และ $B = -0.5$ ดังนั้นรูปแบบการกระจายความเร็วแม่นยำตรงตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x ใดๆ คือ

$$u(y) = 1.5y - 0.5 \quad (7.2)$$

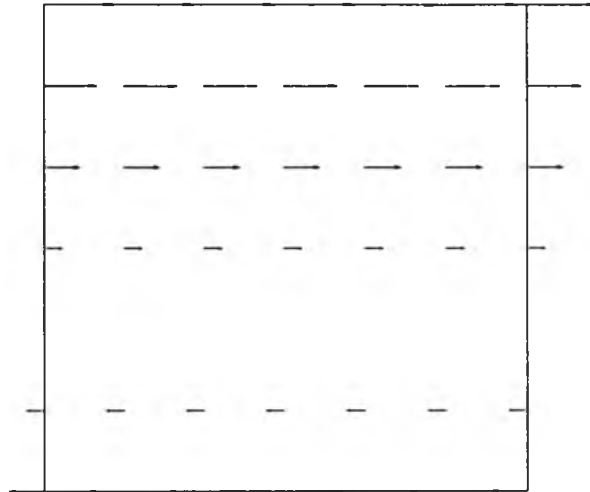


รูปที่ 7.1 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนืดระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด

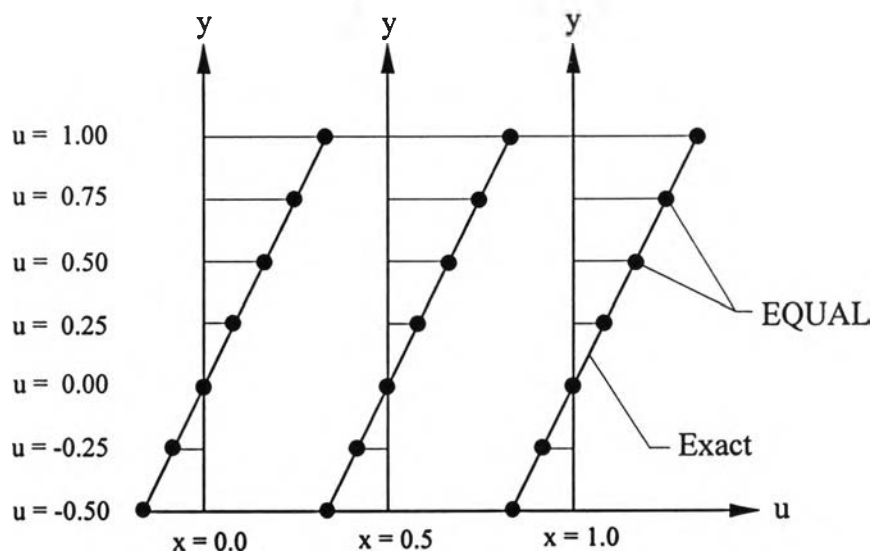


รูปที่ 7.2 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ EQUAL โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 7.2 ซึ่งรูปแบบดังกล่าวประกอบไปด้วย 49 จุดต่อ และ 72 เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ความดันมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบในแนวตั้งทางด้านซ้ายและขวาของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 7.3 การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด



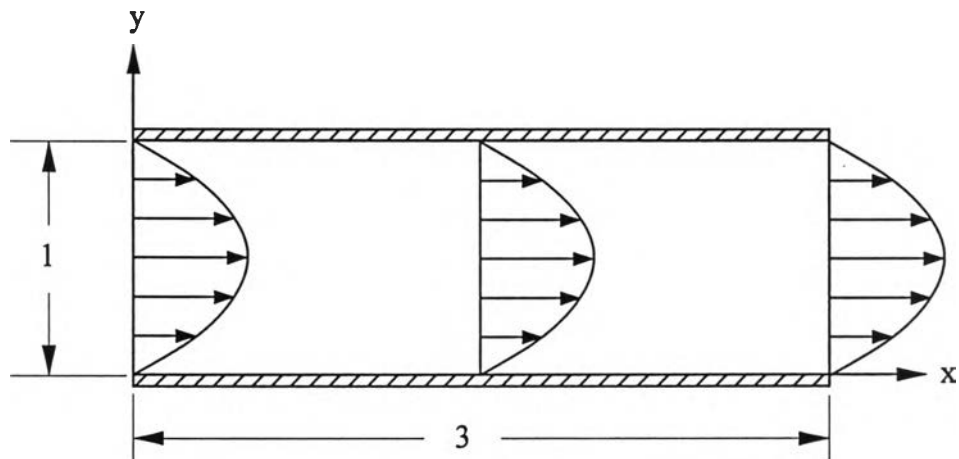
รูปที่ 7.4 เปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความหนืด ณ ตำแหน่ง x ต่างๆ

รูปที่ 7.3 แสดงการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม EQUAL ส่วนรูปที่ 7.4 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำที่ตำแหน่ง x ต่างๆกัน ซึ่งได้แก่ตำแหน่งที่ $x = 0.0, 0.5$ และ 1.0 จะเห็นว่าได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำ

7.2 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความดัน (Poiseuille flow) [45]

ปัญหาต่อไปที่จะได้นำมาใช้ทดสอบโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้น เป็นปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานโดยการไหลดังกล่าวเป็นการไหลเต็มรูปแบบ (fully developed flow) ซึ่งลักษณะของปัญหาดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 7.5 โดยที่แผ่นคู่ขนานทั้งสองนั้นถูกตรึงให้อยู่กับที่และมีระยะห่างระหว่างแผ่นเท่ากับ 1 สำหรับความยาวของช่องการไหลกำหนดให้เท่ากับ 3 โดยที่ปัญหานี้สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ดังนี้

เนื่องจากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาในหนึ่งมิติ คือไม่มีการไหลในทิศทางแกนตั้ง หรือกำหนดให้ความเร็วในแนวแกนตั้ง (v) มีค่าเป็นศูนย์ พร้อมกับข้อกำหนดที่ว่า การไหลดังกล่าวเป็นการไหลเต็มรูปแบบ ดังนั้นเมื่อใช้ข้อสมมติดังกล่าวแทนลงในสมการโมเมนตัมทั้งสองสมการ (สมการ (2.22ก-ข)) จะได้สมการใหม่เพื่อใช้หาผลเฉลยแม่นยำตรงดังนี้



รูปที่ 7.5 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบหนืดระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องมาจากความดัน

$$\text{สมการโมเมนตัมในแกน } x: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.3\text{ก})$$

$$\text{สมการโมเมนตัมในแกน } y: \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.3\text{ข})$$

จากสมการ (7.3) จะได้ว่า

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

ทำการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร y สองครั้งจะได้สมการดังนี้

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + \frac{A}{\mu} y + B \quad (7.4)$$

โดยที่ตัวแปร A และ B คือค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยการแทนค่าเงื่อนไขขอบเขตซึ่งมีดังนี้

$$u(x,0) = 0 \quad (7.5ก)$$

$$u(x,1) = 0 \quad (7.5ข)$$

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขขอบเขตทั้งสอง (สมการ (7.5ก-ข)) ลงในสมการ (7.4) จะได้ค่าตัวแปรดังนี้

$$B = 0$$

$$A = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

จากนั้นแทนค่าคงที่ทั้งสองลงในสมการ (7.4) จะได้สมการสำหรับการกระจายตัวของความเร็วในแนวแกน x ดังนี้

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y$$

หรือ

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - y) \quad (7.6)$$

จากสมการ (7.6) ถ้ากำหนดให้ของไหลมีความหนืดเท่ากับ 0.125 และกำหนดให้อัตราการเปลี่ยนแปลงความดันต่อระยะทางมีค่าคงที่เท่ากับ -1 ดังนั้นจะได้สมการการกระจายตัวของความเร็วในแนวแกน x ใหม่ดังนี้

$$u = 4y(1 - y) \quad (7.7)$$

จากที่ได้กำหนดข้างต้น สามารถหาสมการสำหรับความดันได้ดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -1 \quad (7.8)$$

ทำการอินทิเกรตสมการ (7.8) เทียบกับตัวแปร x จะได้

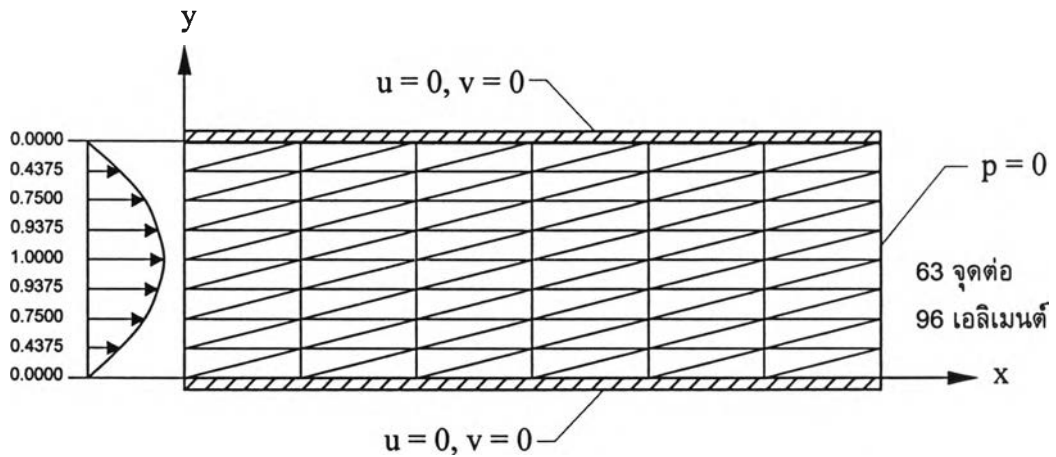
$$\int_{p_1}^p dp = - \int_0^x dx$$

$$p(x) - p_1 = -x \quad (7.9)$$

ปัญหาดังกล่าวได้ถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม EQUAL โดยที่รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาพร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตได้แสดงในรูปที่ 7.6 ซึ่งประกอบไปด้วย 63 จุดต่อและ 96 เอลิเมนต์ โดยกำหนดให้ผนังทั้งสองข้างมีความเร็วเท่ากับศูนย์ และตลอดขอบทางด้านซ้ายกำหนดให้มีความเร็วในแนวแกน x มีค่าดังแสดงในสมการ (7.7) ส่วน

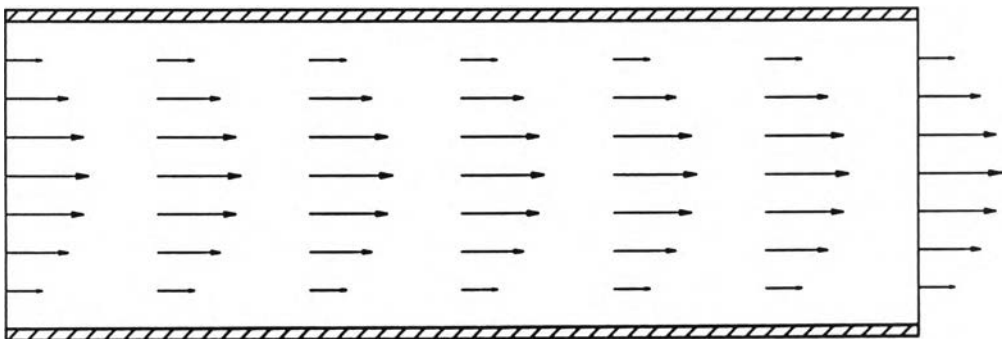
ตลอดขอบทางด้านขวากำหนดให้มีความดันเท่ากับศูนย์ นั่นคือที่ตำแหน่ง $x = 3$ จะได้ $p = 0$ ซึ่งเมื่อทำการแทนค่าดังกล่าวลงในสมการ (7.9) แล้ว จะได้สมการสำหรับความดันของปัญหาที่พิจารณาอยู่ดังนี้

$$p(x) = 3 - x \quad (7.10)$$

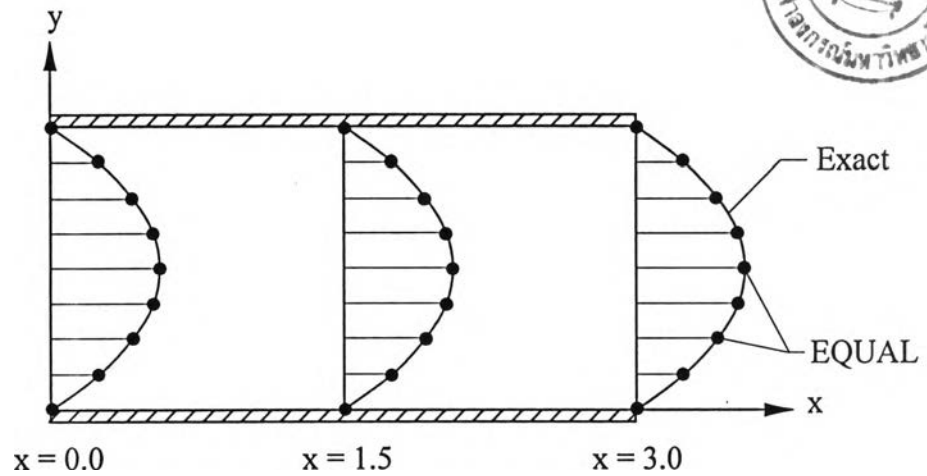


รูปที่ 7.6 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน

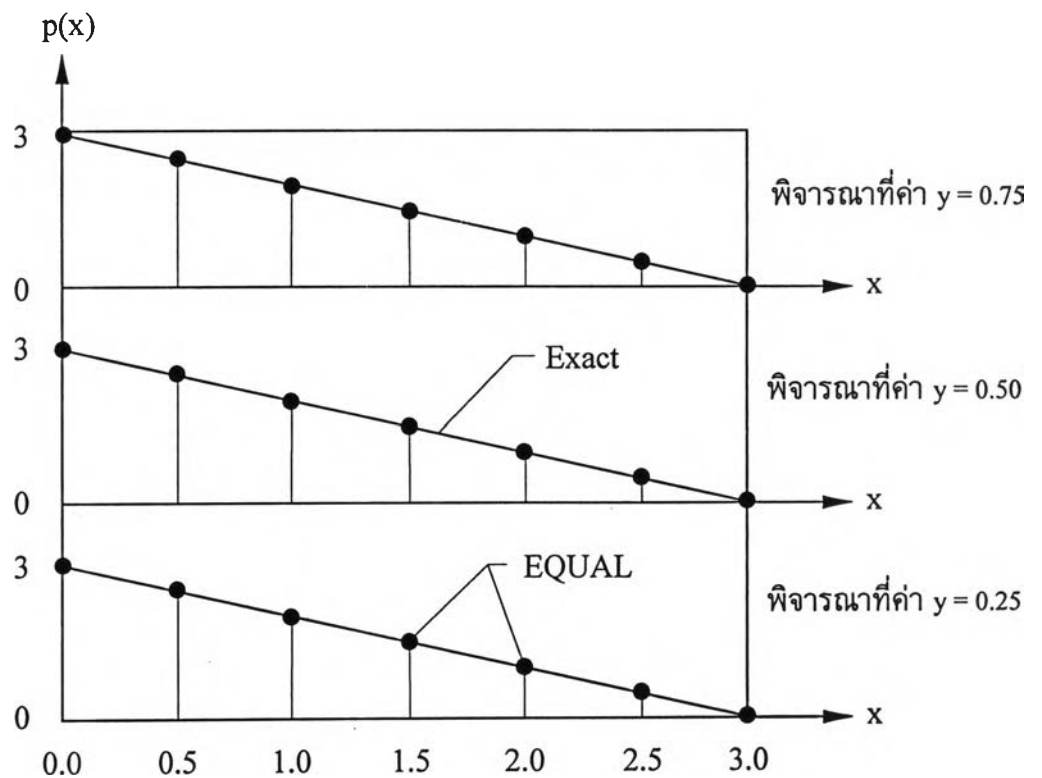
รูปที่ 7.7 แสดงการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณ สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม EQUAL กับผลเฉลยแม่นยำตรงได้แสดงในรูปที่ 7.8 และรูปที่ 7.9 ตามลำดับ โดยในรูปที่ 7.8 เป็นการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว ณ ตำแหน่ง x ที่แตกต่างกัน ซึ่งได้แก่ตำแหน่งริมซ้ายสุดของปัญหา ตำแหน่งกึ่งกลางและตำแหน่งทางด้านขวาสุดของปัญหา ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้อง ส่วนในรูปที่ 7.9 ได้แสดงผลการเปรียบเทียบความดันที่ตำแหน่งต่าง ๆ กันซึ่งได้แก่ตำแหน่ง $y = 0.25, 0.50$ และ 0.75 จะเห็นว่าค่าที่คำนวณได้มีความถูกต้องแม่นยำในทุก ๆ ตำแหน่งของค่า y



รูปที่ 7.7 แสดงการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน



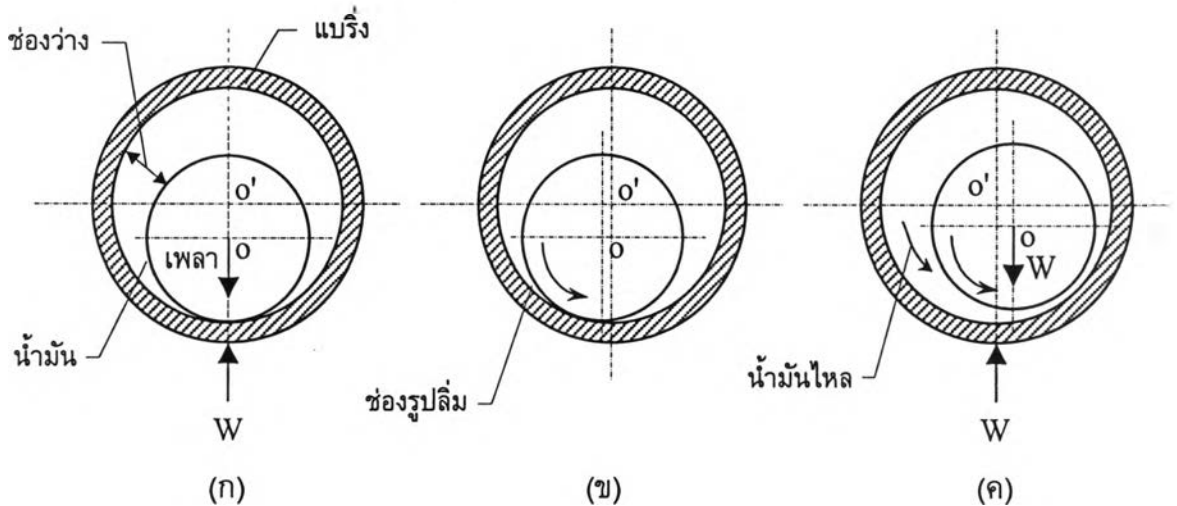
รูปที่ 7.8 การเปรียบเทียบค่าการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง x ต่างๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดันกับค่าผลเฉลยแม่นยำตรง



รูปที่ 7.9 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันที่คำนวณได้ ณ ตำแหน่ง y ต่างๆ ของปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานเนื่องจากความดัน

7.3 ปัญหาการหล่อลื่นระหว่างเพลากับแบริ่ง [6,45,46]

สำหรับปัญหานี้เป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของของไหลระหว่างผิววัตถุที่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน นั่นคือการหล่อลื่นของเพล (หรือเจอร์นัล) กับแบริ่ง ซึ่งมีกลไกการหล่อลื่นดังแสดงในรูปที่ 7.10 ดังนี้



รูปที่ 7.10 กลไกการหล่อลื่นของเจอร์นัลแบริ่ง

ในรูปที่ 7.10 (ก) เป็นขณะที่เพลายู่หนึ่ง และผิวของเพลากับแบริ่งสัมผัสกันอยู่ เมื่อเพลาริมหมุนทวนเข็มนาฬิกา ก็ยังมีการสัมผัสระหว่างผิวหน้าอยู่ ดังนั้นเพลาก็ป็นขึ้นไ้ทางด้านซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 7.10 (ข) ในขณะนี้เองน้ำมันสำหรับการหล่อลื่นก็จะไหลเข้าไปในช่องรูปลิ้มที่เกิดขึ้น ซึ่งจะก่อให้เกิดความดันขึ้นภายในชั้นน้ำมัน เมื่อเพลามีความเร็วที่พอเหมาะ ความดันที่เกิดขึ้นก็จะมีมากพอที่จะรับแรง W และทำให้เพลาลอยตัวขึ้นและเคลื่อนที่มาอยู่ทางด้านขวา ดังรูปที่ 7.10 (ค) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในการหล่อลื่นของเจอร์นัลแบริ่งทั่วไป

สำหรับปัญหาดังกล่าว ถ้าสมมติว่าความหนาของชั้นน้ำมันหล่อลื่น (lubricant film) ระหว่างเพลากับแบริ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับส่วนโค้งของแบริ่งที่สัมผัสกับน้ำมัน นั่นคือ $h \ll L$ ดังแสดงในรูปที่ 7.11 ทำให้เราสามารถที่จะพิจารณาปัญหานี้ด้วยลักษณะของปัญหาดังแสดงในรูปที่ 7.12 และ 7.13 แทนได้

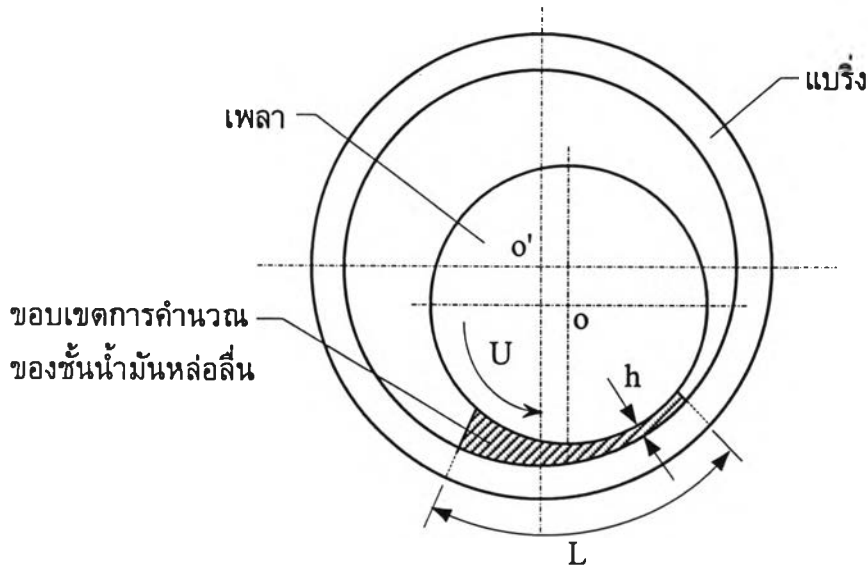
ปัญหาดังกล่าวนี้สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ดังนี้

$$u = \left(U_0 - \frac{1}{2\mu} h^2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (7.11ก)$$

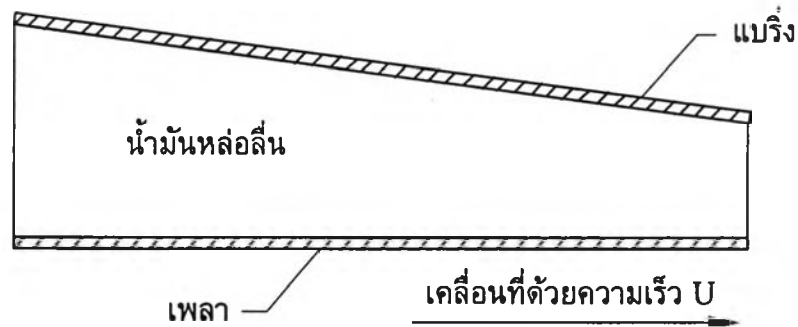
$$p = \frac{6\mu U_0 L (h_2 - h_1)(h(x) - h_1)}{[h(x)]^2 (h_2^2 - h_1^2)} \quad (7.11ข)$$

โดยที่

$$h(x) = h_2 + \frac{h_1 - h_2}{L} x$$



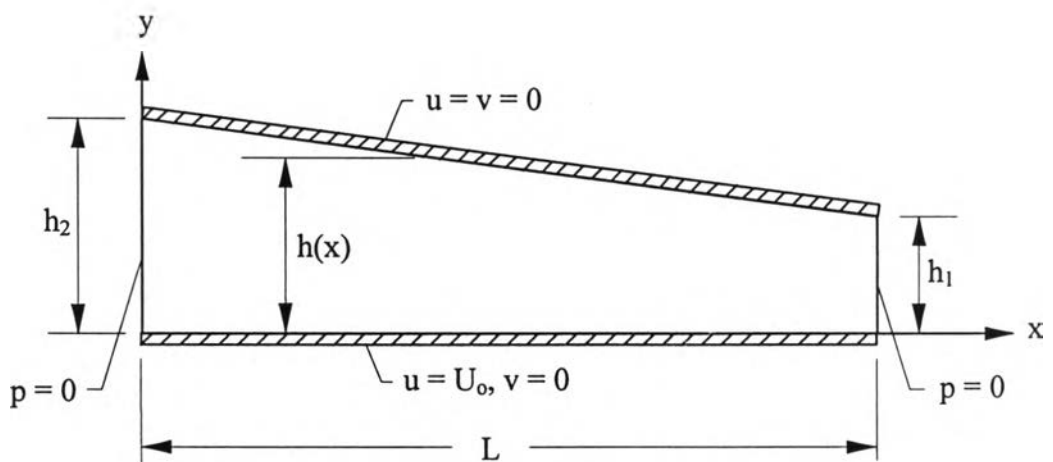
รูปที่ 7.11 แสดงระยะระหว่างเพลกากับแบร์ริงและความยาวส่วนโค้งของแบร์ริงที่สัมผัสน้ำมัน



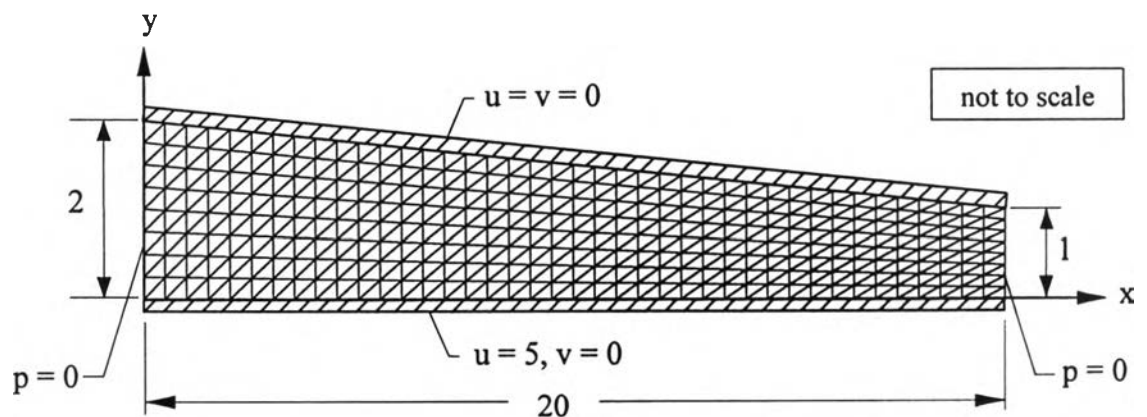
รูปที่ 7.12 รูปแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์การหล่อลื่นระหว่างเพลกากับแบร์ริง

ปัญหาดังกล่าวได้นำมาใช้ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม EQUAL โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาดังได้แสดงในรูปที่ 7.14 ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ประกอบไปด้วย 369 จุดต่อและ 640 เอลิเมนต์ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตนั้นกำหนดให้ตลอดขอบทางด้านล่างของปัญหามีการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ด้วยความเร็ว $U_0 = 5$ ส่วนตลอดขอบทางด้านบนกำหนดให้ถูกต้องอยู่กับที่ สำหรับขอบในแนวตั้งทางด้านซ้าย

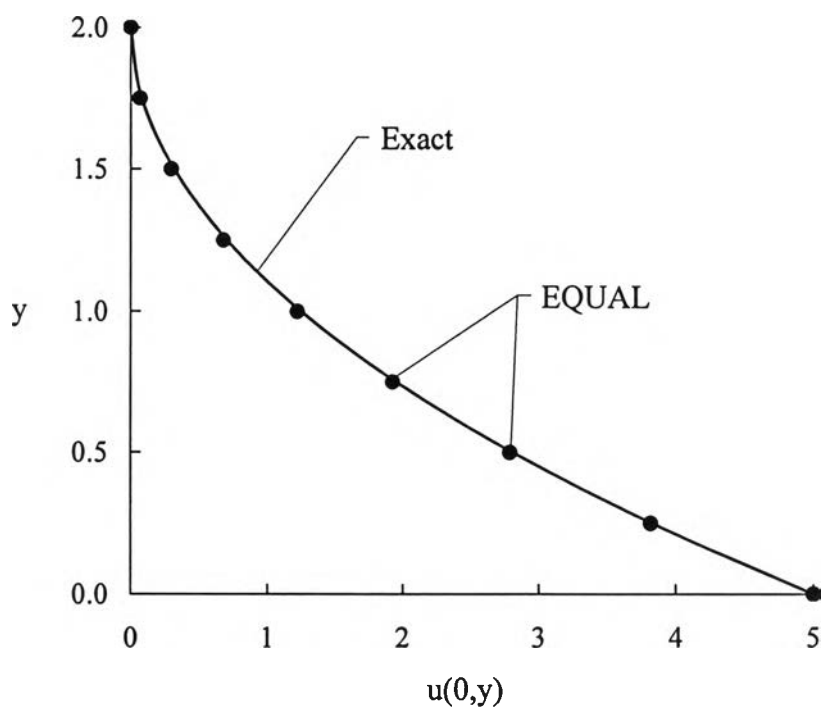
และขวานั้นกำหนดให้มีค่าความดันเท่ากับศูนย์ ให้ความยาวของขอบเขตของปัญหา L มีค่าเท่ากับ 20 และกำหนดให้ขอบของการไหลทางด้านซ้าย (h_2) มีความสูงเท่ากับ 2 ส่วนความสูงของขอบทางด้านขวา (h_1) มีค่าเท่ากับ 1 สุดท้ายกำหนดให้ความหนาแน่นของของไหลมีค่าเท่ากับ 1 และมีค่าความหนืดเท่ากับ 2 รูปที่ 7.15 และรูปที่ 7.16 แสดงการเปรียบเทียบค่าการกระจายของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = L$ ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับผลเฉลยแม่นยำ โดยที่ค่าความผิดพลาดของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 0$ และตำแหน่ง $x = L$ มีค่าเท่ากับ 1.16% และ 0.61% ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าค่าที่ได้จากการคำนวณนั้นให้ผลที่มีความถูกต้อง สำหรับรูปที่ 7.17 นั้นแสดงค่าการกระจายตัวของความดันที่ตำแหน่ง x ต่างๆเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ซึ่งมีค่าความผิดพลาดประมาณ 3.04%



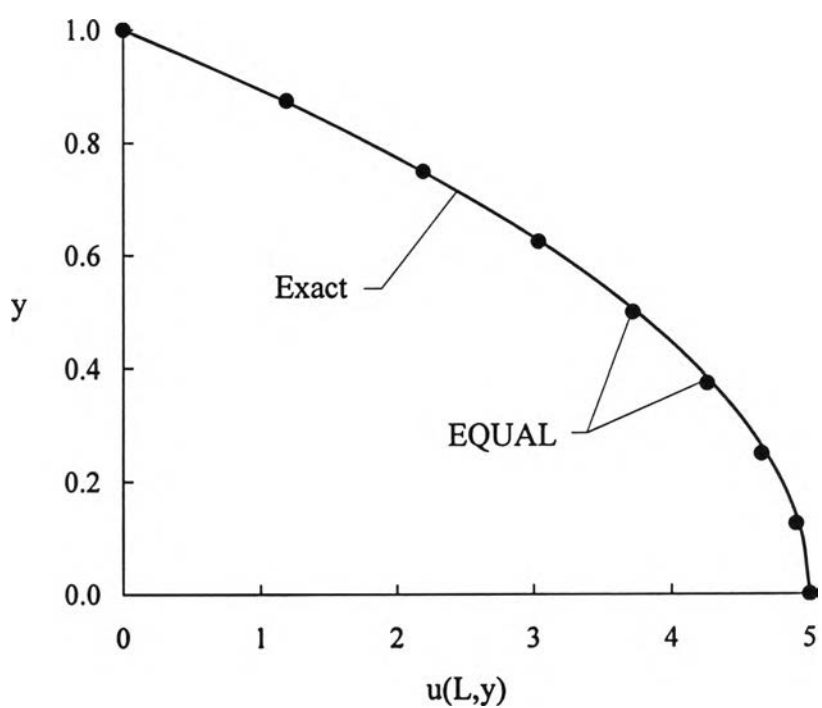
รูปที่ 7.13 ลักษณะของปัญหาการหลอ่ลื่นระหว่างเพลากับแปรง



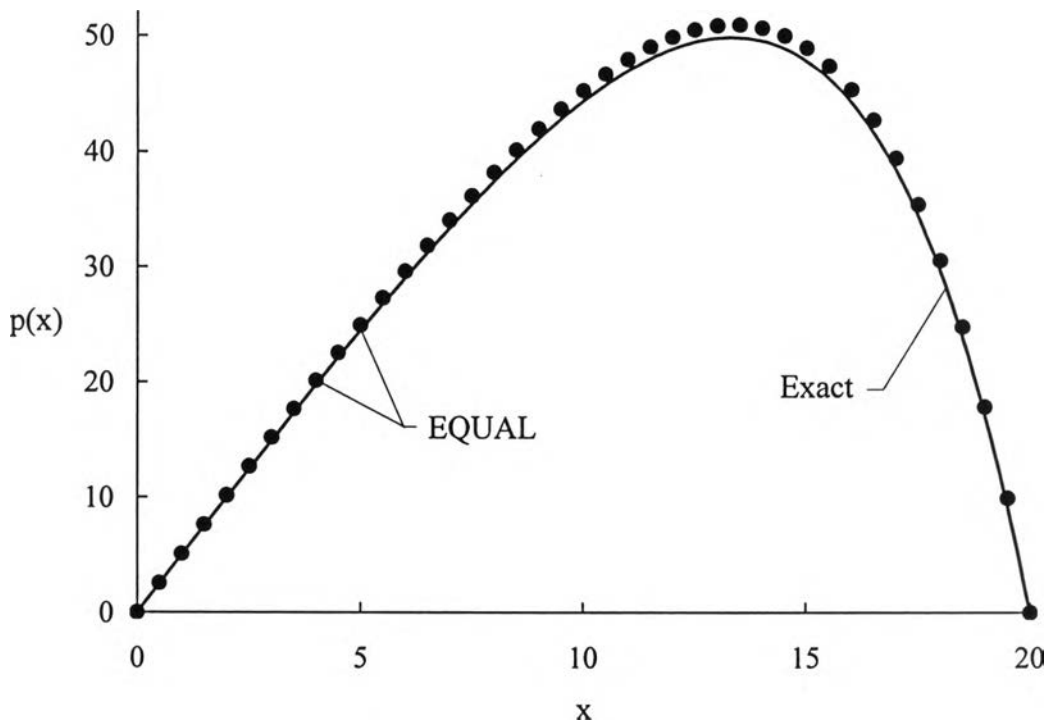
รูปที่ 7.14 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการหลอ่ลื่นระหว่างเพลากับแปรง



รูปที่ 7.15 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ขอบทางด้านซ้ายกับผลเฉลยแม่นยำ



รูปที่ 7.16 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ขอบทางด้านขวากับผลเฉลยแม่นยำ

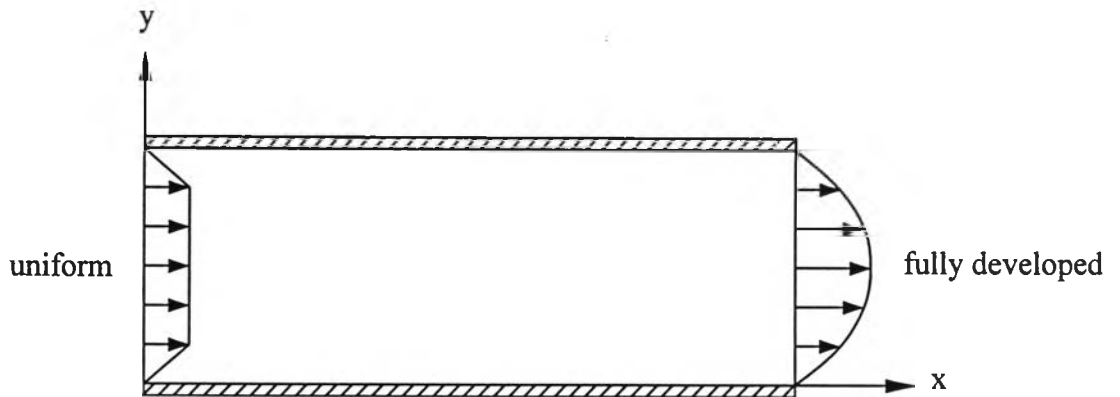


รูปที่ 7.17 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความดันเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง

สำหรับค่าความผิดพลาดของความดันซึ่งยังคงมีค่ามากอยู่นั้นอาจเป็นผลมาจากลักษณะขนาดของปัญหาที่ใช้ไม่ถูกต้องตามที่ได้อ้างอิงไว้ นั่นคือยังกำหนดให้ขนาดของความสูงของช่องการไหลมีค่ามากเมื่อเทียบกับความยาวของช่องการไหล (L) อยู่ โดยเมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาใหม่โดยเปลี่ยนความยาวของช่องการไหลจากเดิม 20 เป็น 40 และคงให้ความสูงของขอบการไหลทางด้านซ้ายเท่ากับ 2 ส่วนความสูงของขอบทางด้านขวาเท่ากับ 1 เหมือนเดิม โดยที่รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ที่ใช้มีจำนวนจุดต่อเท่ากับ 960 จุดต่อและ 1738 เอลิเมนต์ ก็จะได้ค่าความผิดพลาดของความดันลดลงเหลือเท่ากับ 1.43% ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าถ้าทำการกำหนดขนาดของปัญหาให้ถูกต้องตามสมมติฐานที่ตั้งไว้คือให้ค่า h น้อยกว่าเมื่อเทียบกับค่า L มากๆก็จะทำให้ผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

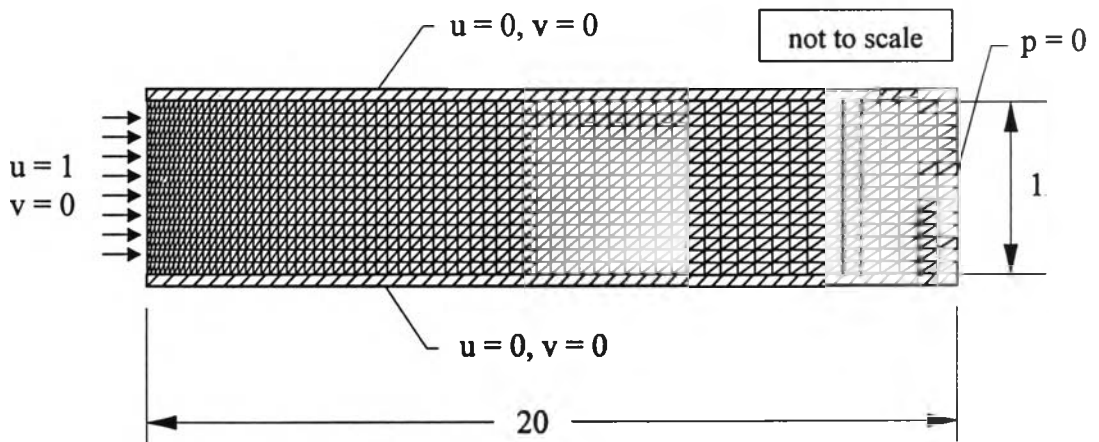
7.4 ปัญหาการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว (developing flow)

ลักษณะของปัญหาการไหลในข้อนี้กำหนดให้มีการไหลแบบคงตัว (uniform) ไหลเข้าทางด้านซ้าย ซึ่งการไหลดังกล่าวจะมีการปรับตัวจนกระทั่งการไหลมีลักษณะเป็นการไหลเต็มรูปแบบ (fully developed) ดังแสดงในรูปที่ 7.18 โดยกำหนดให้การไหลมีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 150

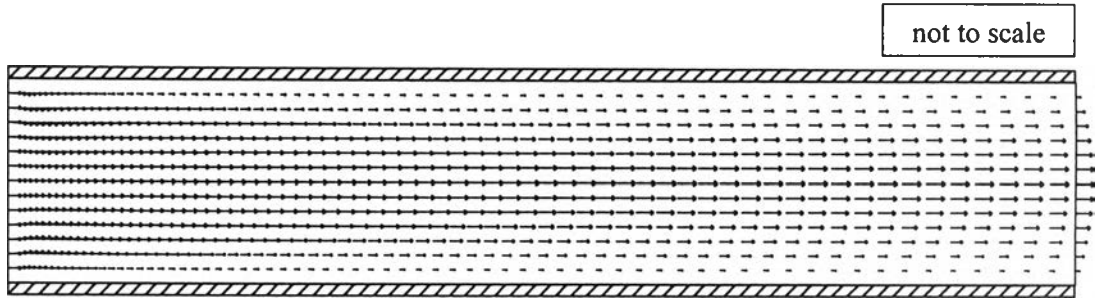


รูปที่ 7.18 ลักษณะการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

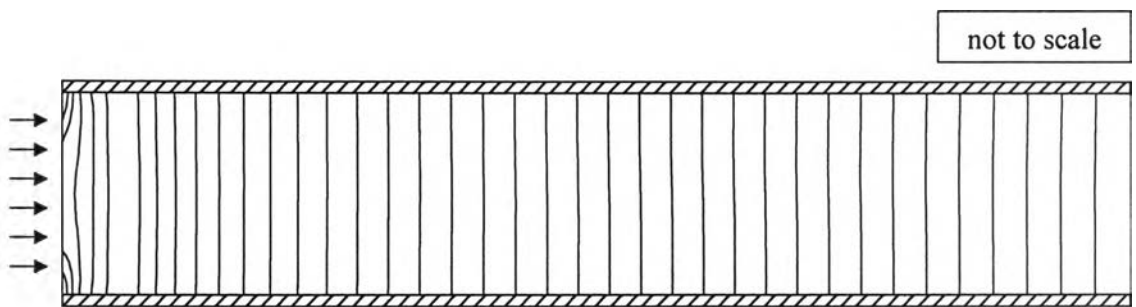
การวิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบไปด้วย 1050 จุดต่อและ 1932 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.19 โดยกำหนดให้ความสูงของช่องการไหลมีค่าเท่ากับ 1 และช่องการไหลดังกล่าวยาวเท่ากับ 20 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา กำหนดให้ตลอดขอบของผนังทั้งด้านบนและด้านล่างถูกตรึงอยู่กับที่หรือมีความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ สำหรับตลอดขอบทางด้านเข้ากำหนดให้มีความเร็วในแนวแกน x เท่ากับ 1 และตลอดขอบทางด้านออกกำหนดให้มีความดันคงที่เท่ากับศูนย์



รูปที่ 7.19 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว



รูปที่ 7.20 การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว



รูปที่ 7.21 การกระจายตัวของความดันสำหรับปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานแบบมีการปรับตัว

จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม EQUAL ซึ่งรูปที่ 7.20 และรูปที่ 7.21 ได้แสดงการกระจายตัวของความเร็วและความดันที่คำนวณได้ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่า การปรับตัวของความดันเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วในบริเวณที่ความเร็วกำลังทำการปรับตัวจากการไหลแบบคงตัวไปสู่การไหลเต็มรูปแบบ ซึ่งจะเกิดความดันสูงสุดที่มุมของขอบทางเข้าและปรับตัวอย่างรวดเร็วจนกระทั่งการกระจายตัวของความดันมีค่าคงตัวและลดลงอย่างช้าๆไปยังทางออกของการไหล สิ่งที่จะพิจารณาต่อไปคือระยะในการปรับตัวเข้าสู่การไหลเต็มรูปแบบ โดยที่ระยะดังกล่าวจะวัดจากปากทางเข้าจนถึงตำแหน่งที่ความเร็วในแนวแกนของการไหลมีค่าเท่ากับ 99% ของค่าความเร็วสูงสุด ซึ่ง Shah and London [47] ได้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างระยะดังกล่าวกับค่าเรย์โนลด์์ดังแสดงในสมการ (7.12) โดยความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถใช้สำหรับการไหลที่มีหน้าตัดเป็นรูปร่างใดๆได้

$$\frac{L_e}{h} \cong 0.05\text{Re} + 0.5 \quad (7.12)$$

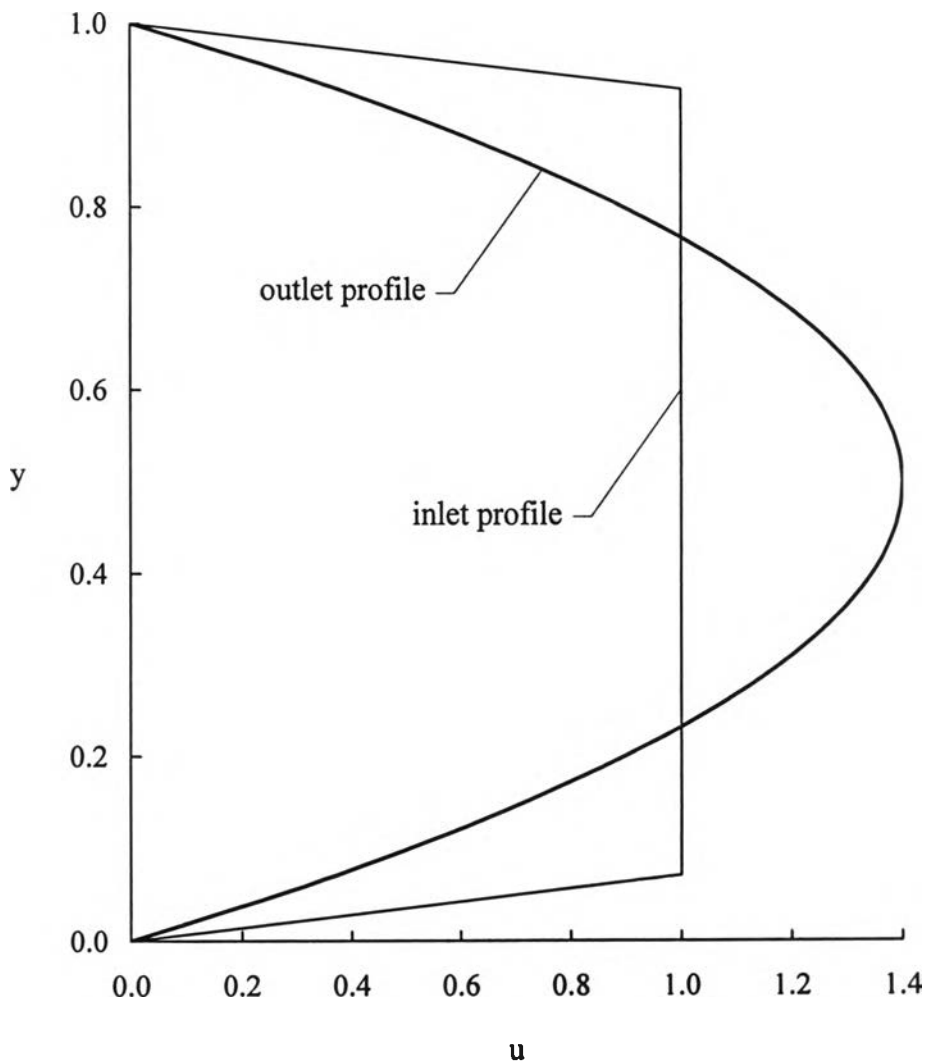
โดยที่ L_e = ระยะการปรับตัวสู่การไหลเต็มรูปแบบ (entrance length)

h = ความสูงของช่องการไหล

Re = ค่าเรย์โนลด์์

ซึ่งสำหรับปัญหานี้จะได้ค่า L_c ประมาณเท่ากับ 8 สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรม EQUAL นั้นได้ค่า L_c ประมาณเท่ากับ 7.67 ซึ่งมีค่าความผิดพลาดเท่ากับ 4.13%

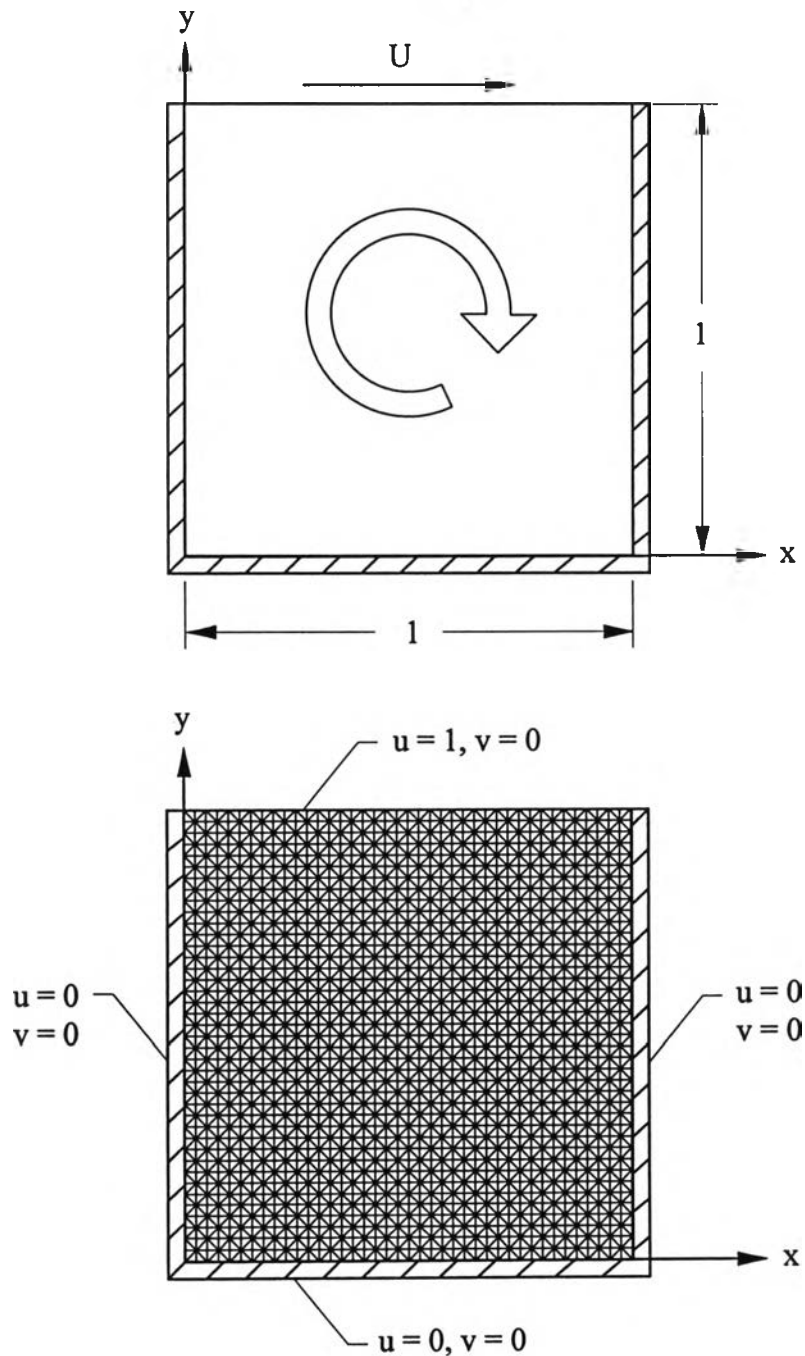
รูปที่ 7.22 แสดงการกระจายตัวของค่าความเร็วที่ด้านทางออกของการไหลที่มีลักษณะการกระจายตัวแบบพาราโบลาซึ่งสามารถหาค่าอัตราการไหลได้ประมาณเท่ากับ $0.9287 \text{ m}^2/\text{s}$ (คำนวณจากพื้นที่ใต้กราฟของรูปที่ 7.22) และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าอัตราการไหลที่คำนวณจากการกระจายตัวของความเร็วที่ด้านทางเข้า (การกระจายตัวของความเร็วที่ด้านทางเข้านั้นมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังแสดงในรูปที่ 7.22) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $0.9286 \text{ m}^2/\text{s}$ จะเห็นได้ว่าคุณค่าดังกล่าวมีความสอดคล้องกัน ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ EQUAL ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมีความสอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวล



รูปที่ 7.22 การกระจายตัวของค่าความเร็วที่ด้านทางเข้าและออกของการไหล

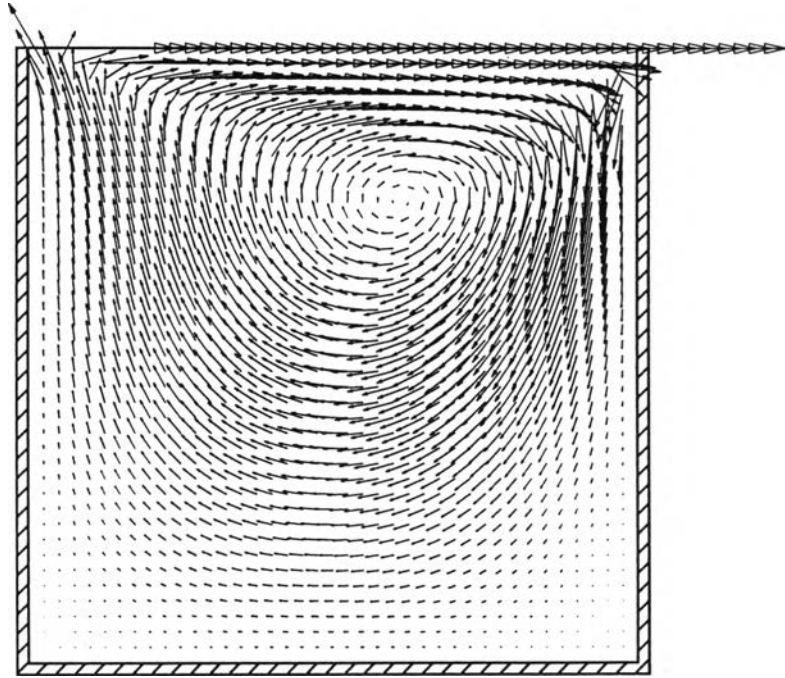
7.5 ปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบ (cavity flow)

รูปร่างของปัญหาดังกล่าวพร้อมกับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.23 โดยมีลักษณะเป็นช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความกว้างต่อต้านเท่ากับ 1 และกำหนดให้ตลอดขอบทางด้านบนมีความเร็วในแนวแกน x เท่าหนึ่งและมีค่าเท่ากับ 1 ส่วนอีกสามด้านที่เหลือนั้นกำหนดให้มีความเร็วในแนวแกนทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบไปด้วย 1681 จุดต่อและ 3200 เอลิเมนต์

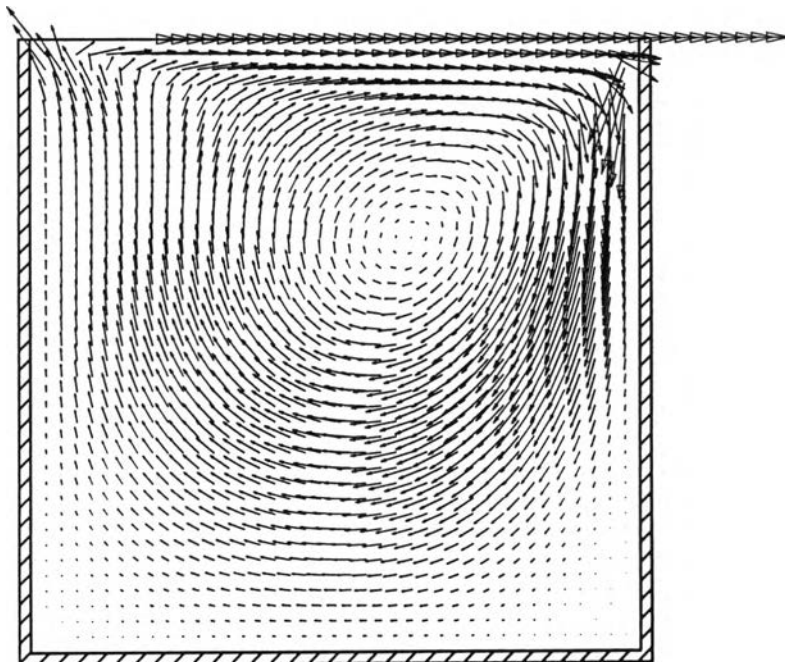


รูปที่ 7.23 รูปร่างลักษณะพร้อมกับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบและเงื่อนไขขอบเขต

การใช้โปรแกรม EQUAL ในการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวได้ทำที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 400 โดยรูปที่ 7.24 และ 7.25 แสดงการกระจายตัวของความเร็วจากการคำนวณที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 400 ตามลำดับ

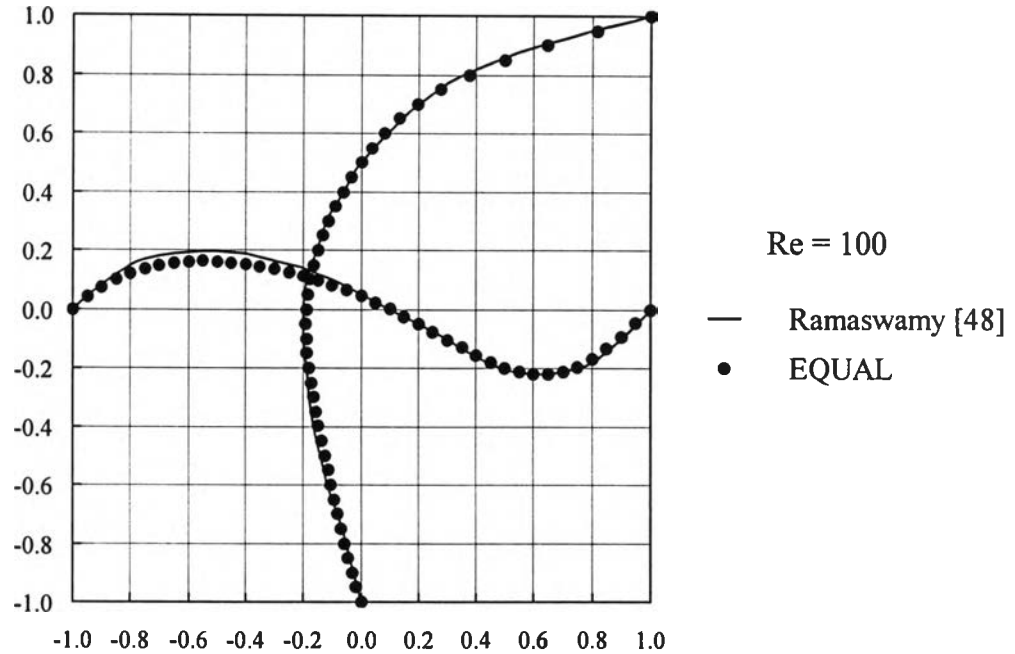


รูปที่ 7.24 การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100

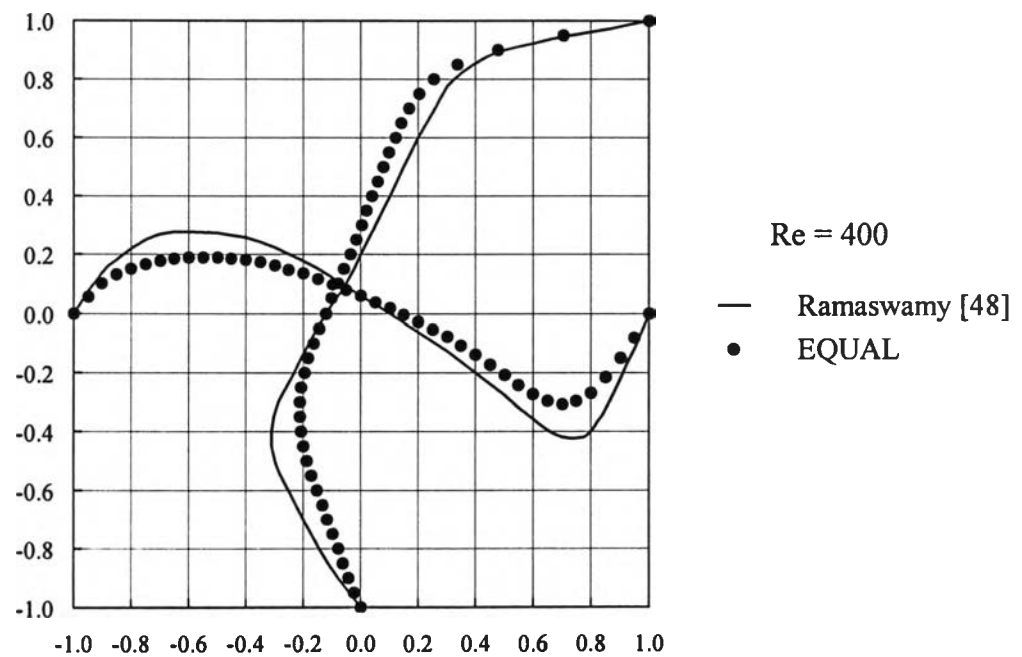


รูปที่ 7.25 การกระจายตัวของความเร็วสำหรับปัญหาการไหลหมุนวนภายในช่องแคบที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400

สำหรับรูปที่ 7.26 และ 7.27 ได้แสดงลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่ง x เท่ากับ 0.5 กับค่าการกระจายตัวของความเร็ว v ที่ตำแหน่ง y เท่ากับ 0.5 ที่ค่าเรย์โนลด์ 100 และ 400 ตามลำดับ โดยได้ทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Ramaswamy [48] ซึ่งจะเห็นว่าได้ผลการคำนวณที่มีความสอดคล้องกัน



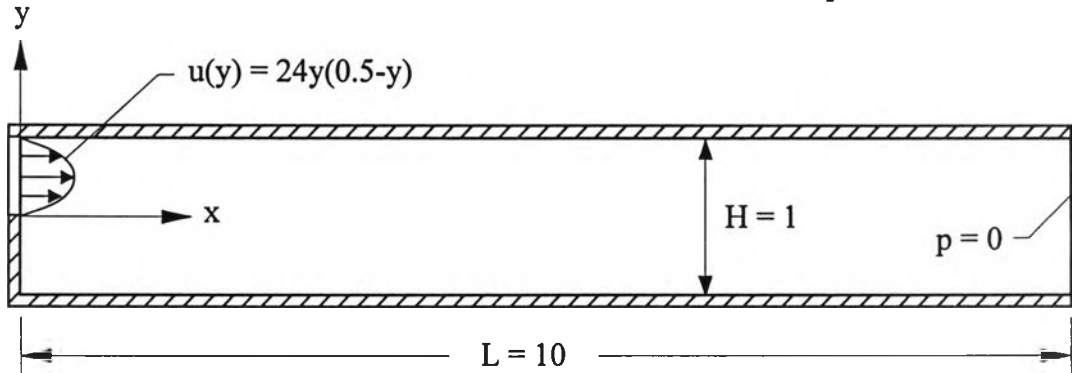
รูปที่ 7.26 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100



รูปที่ 7.27 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 400

7.6 ปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด (backward facing step)

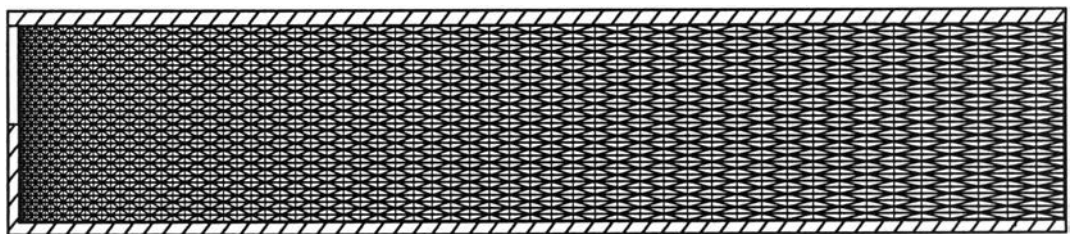
ขอบเขตของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์นี้มีลักษณะเป็นช่องการไหลระหว่างแผ่นคู่ขนานซึ่งมีระยะระหว่างแผ่นคู่ขนานเท่ากับ 1 ส่วนความยาวของช่องการไหลมีค่าเท่ากับ 10 โดยจะมีของไหลที่มีลักษณะการไหลแบบเต็มรูปแบบไหลเข้าทางด้านครึ่งบนของขอบทางด้านซ้าย ส่วนครึ่งล่างของขอบนี้กำหนดให้เป็นผนังซึ่งสามารถแสดงได้ในรูปที่ 7.28



รูปที่ 7.28 ลักษณะของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด

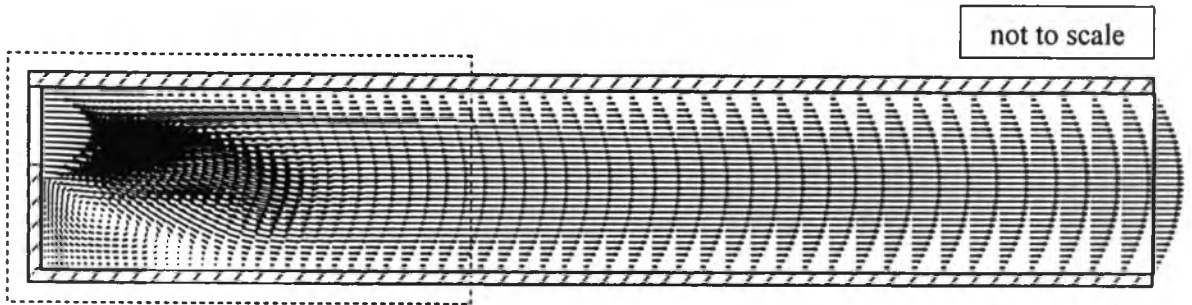
รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้ประกอบไปด้วย 2015 จุดต่อและ 3840 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.29 โดยที่เงื่อนไขขอบเขตนั้นกำหนดให้ตลอดขอบของผนังทั้งหมดมีค่าความเร็วในแนวแกนทั้งสองเท่ากับศูนย์ สำหรับตลอดขอบทางด้านขวาที่กำหนดให้มีค่าความดันคงที่เท่ากับศูนย์ โดยจะได้ทำการวิเคราะห์ที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100, 200, 300 และ 400

not to scale

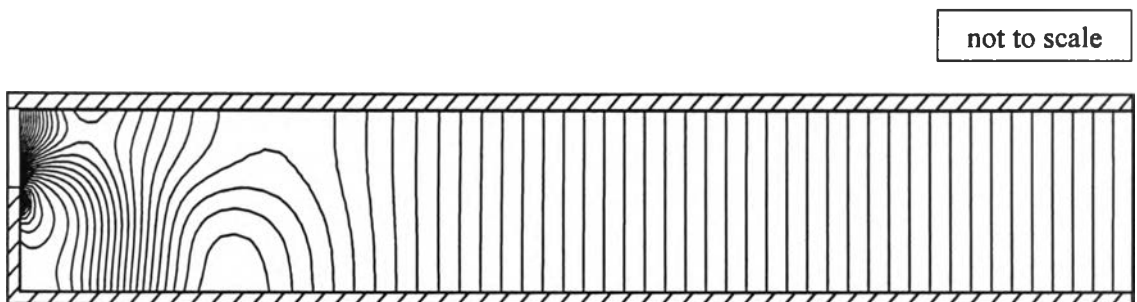


รูปที่ 7.29 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใด

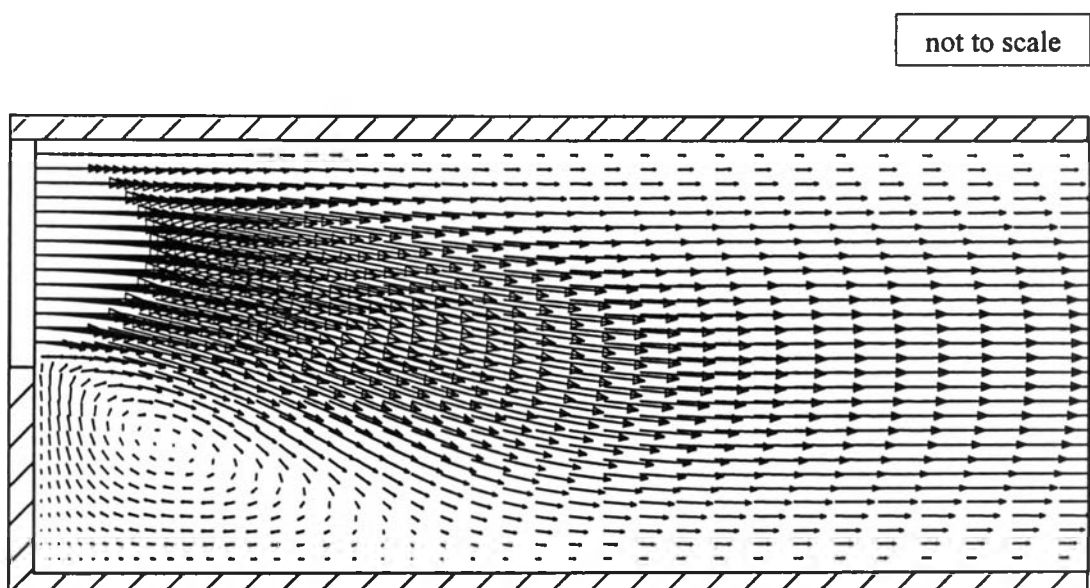
ผลของการคำนวณปัญหาด้วยโปรแกรม EQUAL ได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.30 – 7.41 โดยเป็นการแสดงการกระจายตัวของความเร็วและความดันที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 100, 200, 300 และ 400 ตามลำดับ



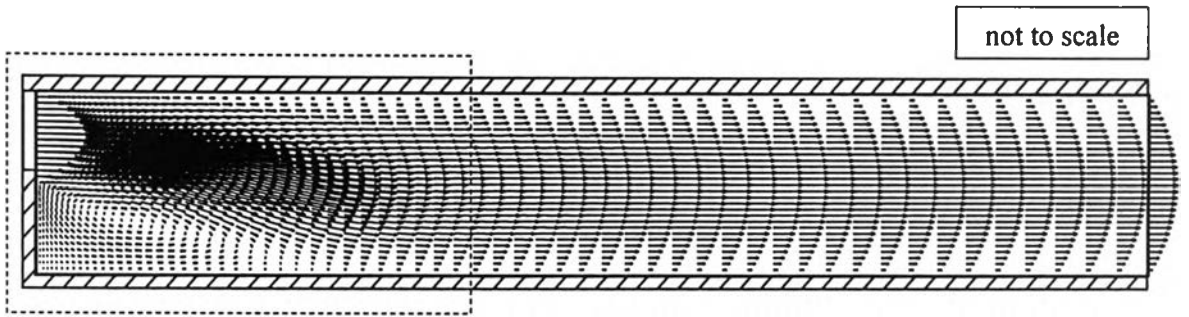
รูปที่ 7.30 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 100



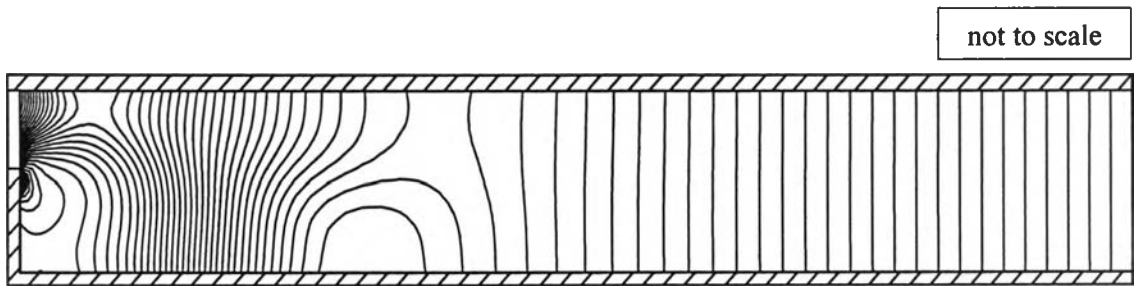
รูปที่ 7.31 ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 100



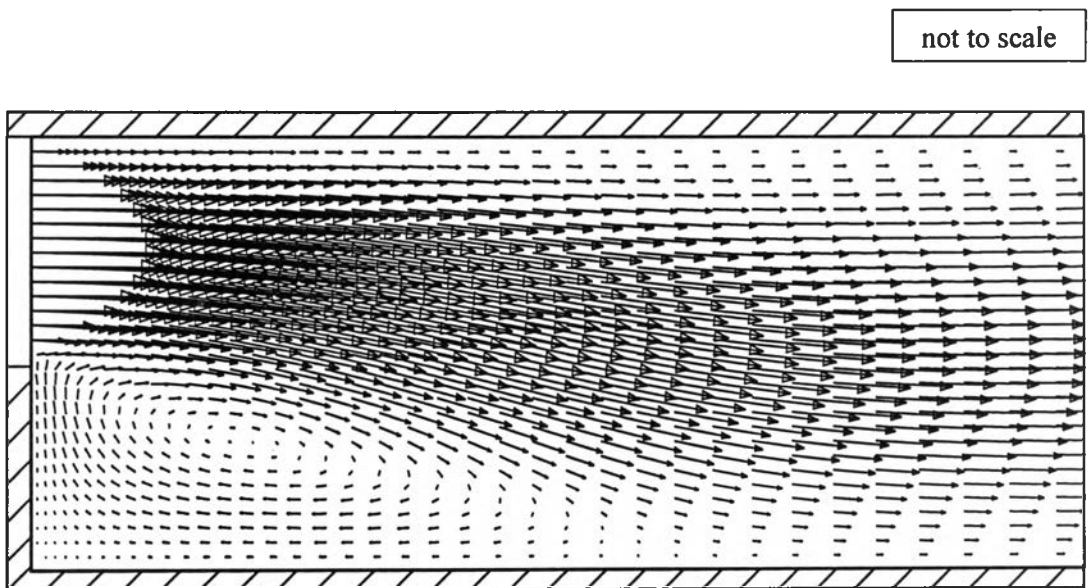
รูปที่ 7.32 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.30 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 100



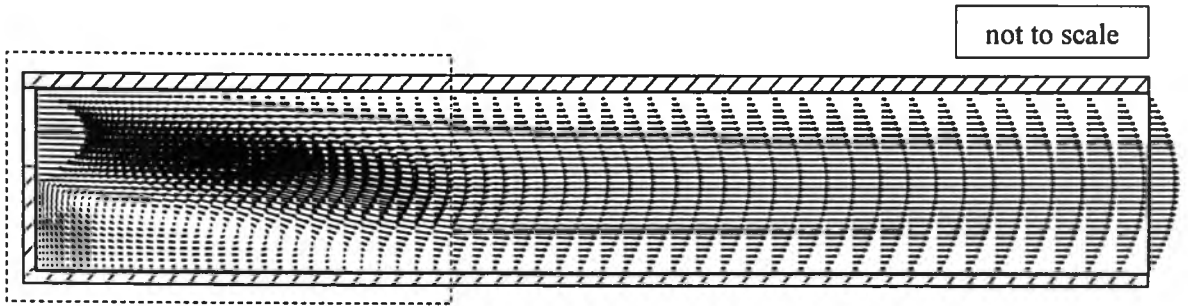
รูปที่ 7.33 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 200



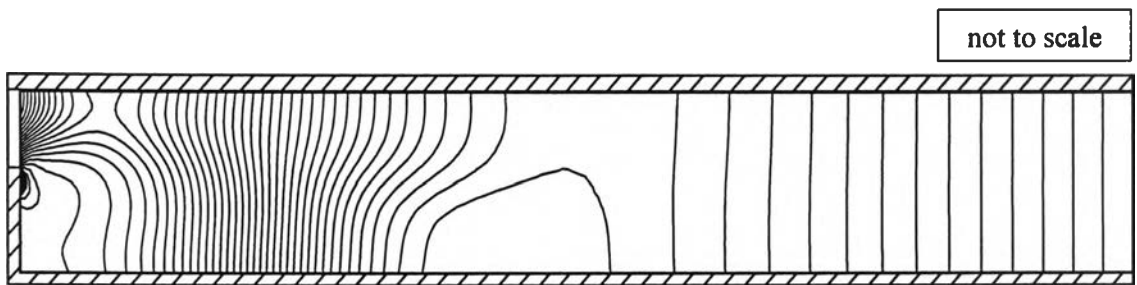
รูปที่ 7.34 ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 200



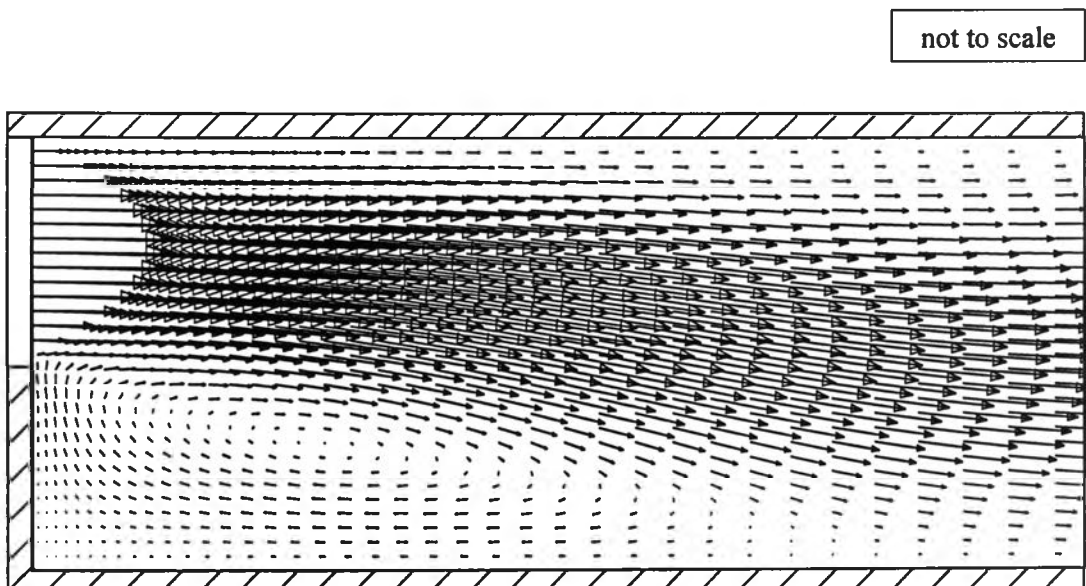
รูปที่ 7.35 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.33 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 200



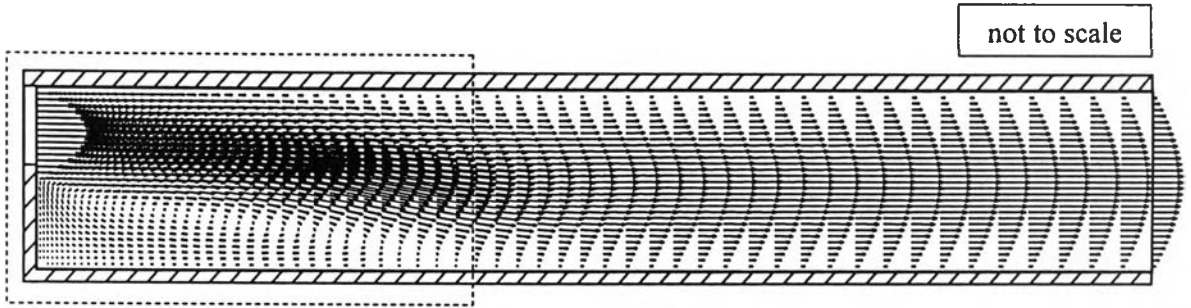
รูปที่ 7.36 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 300



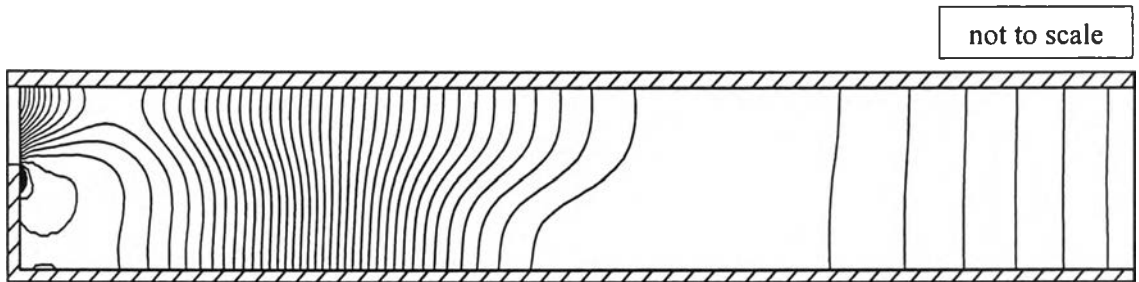
รูปที่ 7.37 ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีทันใดกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 300



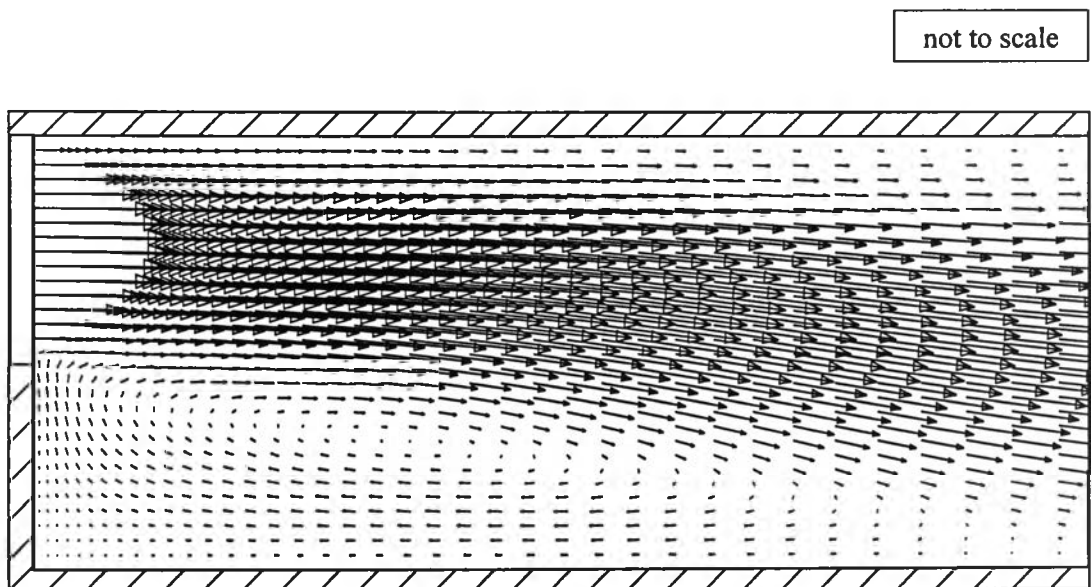
รูปที่ 7.38 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.36 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีที่ค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 300



รูปที่ 7.39 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีที่ทันไดกรณีทีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 400

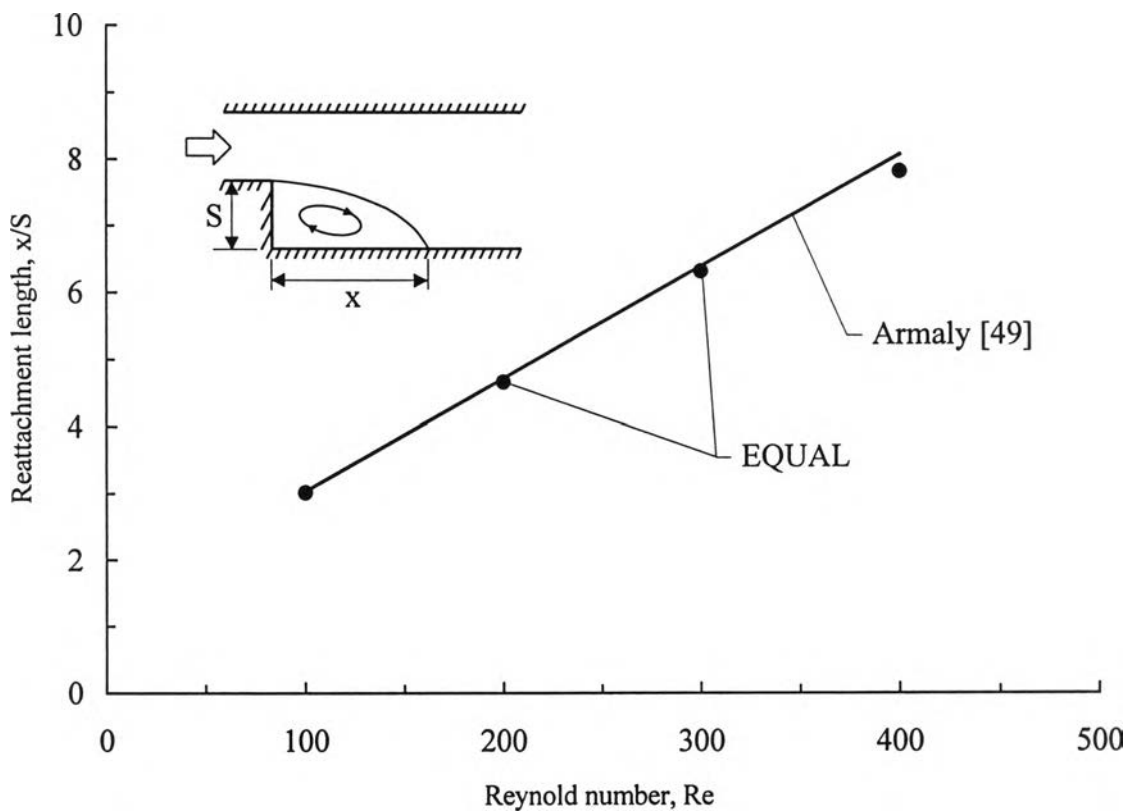


รูปที่ 7.40 ลักษณะการกระจายตัวของความดันของปัญหาการไหลภายในช่องคู่ขนานที่มีการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดทันทีที่ทันไดกรณีทีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 400



รูปที่ 7.41 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.39 ที่แสดงการไหลหมุนวน กรณีทีค่าเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 400

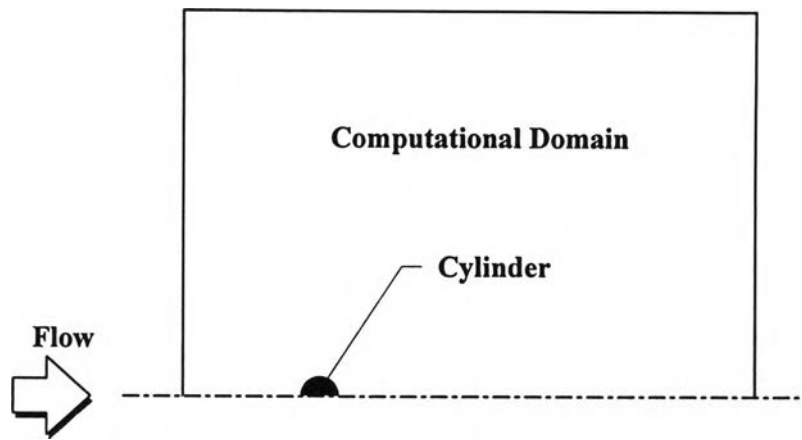
สำหรับปัญหาที่พิจารณานี้ได้มีการทำการศึกษาทั้งโดยทำการทดลองและการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งในที่นี้จะได้นำผลการทดลองของ Armaly et al. [49] มาใช้ในการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากโปรแกรม EQUAL ซึ่งรูปที่ 7.42 ได้แสดงผลการเปรียบเทียบระยะการแตะสัมผัส (reattachment length) ของปัญหา ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลการคำนวณมีความสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี



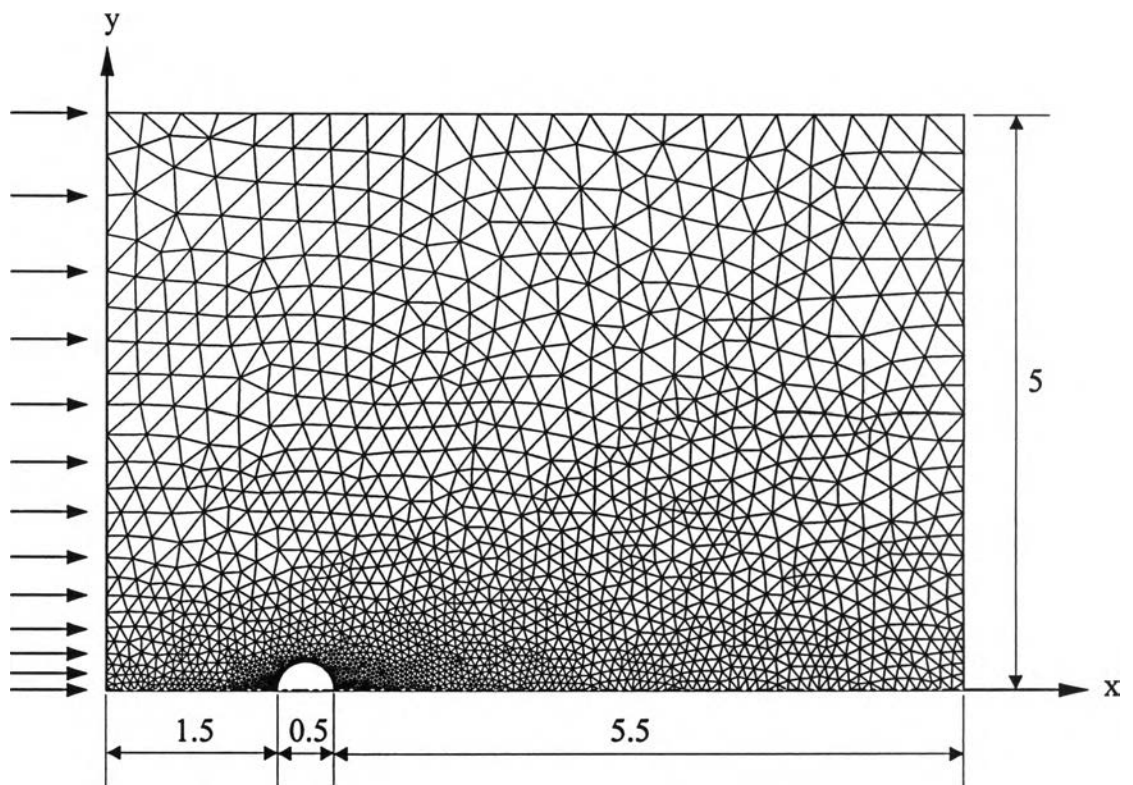
รูปที่ 7.42 การเปรียบเทียบระยะการแตะสัมผัสจากการคำนวณกับผลการทดลอง

7.7 ปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก (flow past a cylinder)

ลักษณะของปัญหาจะมีการไหลแบบคงตัวไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของขอบเขตของปัญหา โดยมีวัตถุรูปทรงกระบอกยาวขวางการไหลไว้และถ้าพิจารณาการไหลที่ค่าเรย์โนลด์ไม่มากนักปัญหาดังกล่าวจะมีลักษณะที่สมมาตร ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาโดยใช้เพียงครึ่งบนของขอบเขตทั้งหมดดังแสดงในรูปที่ 7.43 ได้ สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.44 ซึ่งประกอบไปด้วย 1912 จุดต่อและ 3579 เอลิเมนต์

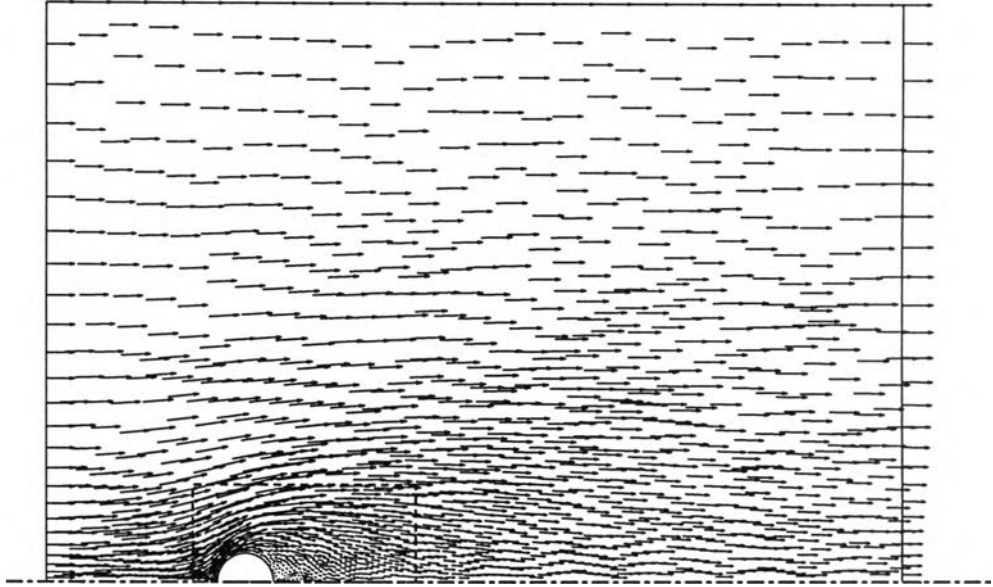


รูปที่ 7.43 ลักษณะปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก

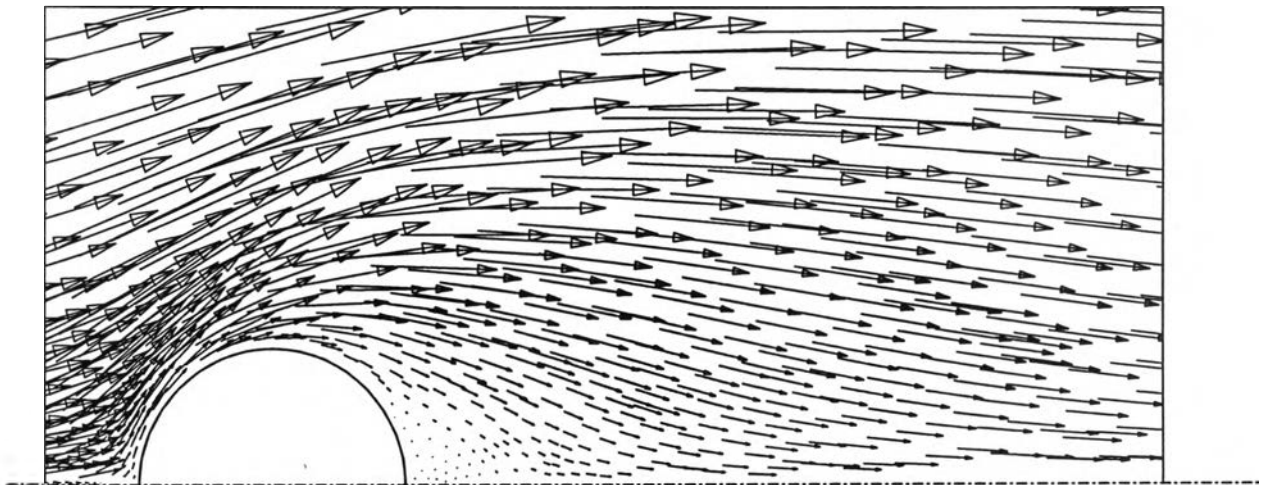


รูปที่ 7.44 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวัตถุรูปทรงกระบอก

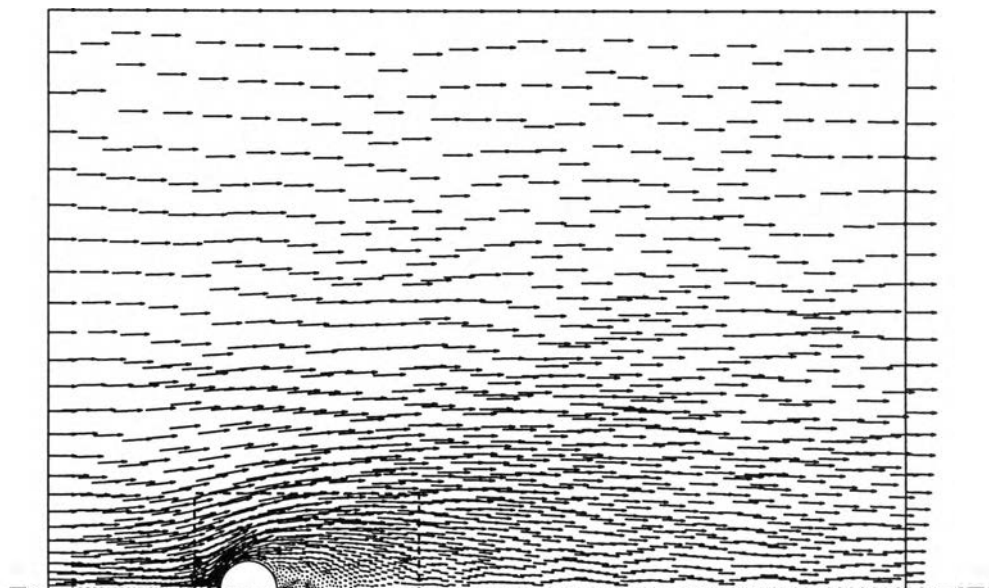
ปัญหาดังกล่าวได้ถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม EQUAL ที่ค่าเรย์โนลด์ต่างๆกันนั้นคือ 10, 20, 30 และ 40 ตามลำดับ โดยลักษณะการกระจายตัวของความเร็วและรายละเอียดของบริเวณที่เกิดการไหลหมุนวนที่แต่ละค่าเรย์โนลด์นั้นถูกแสดงไว้ในรูปที่ 7.45 - 7.52



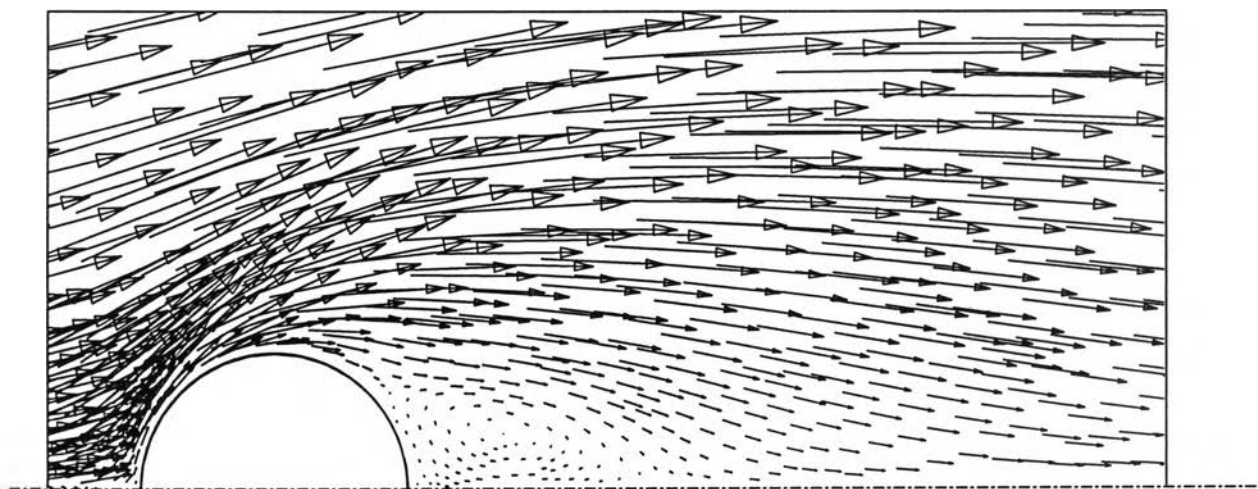
รูปที่ 7.45 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหล
ผ่านวัตถุทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 10



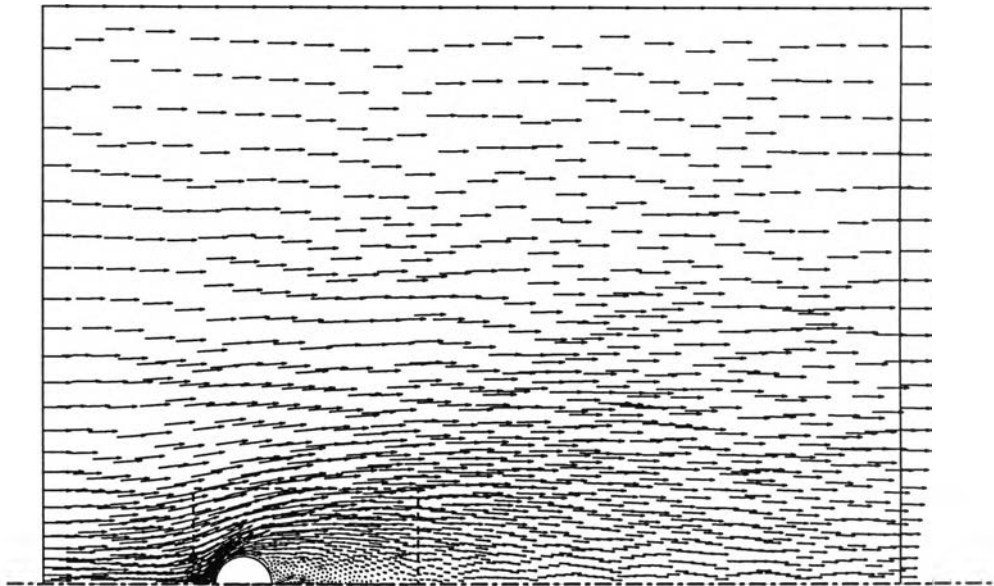
รูปที่ 7.46 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.45
บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 10



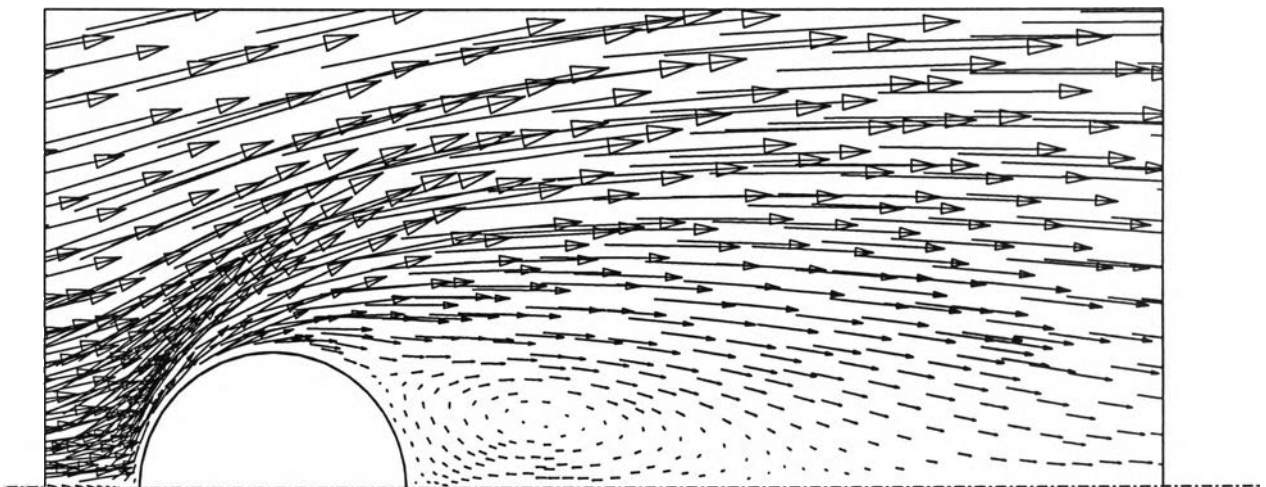
รูปที่ 7.47 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหล
ผ่านวัตถุทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 20



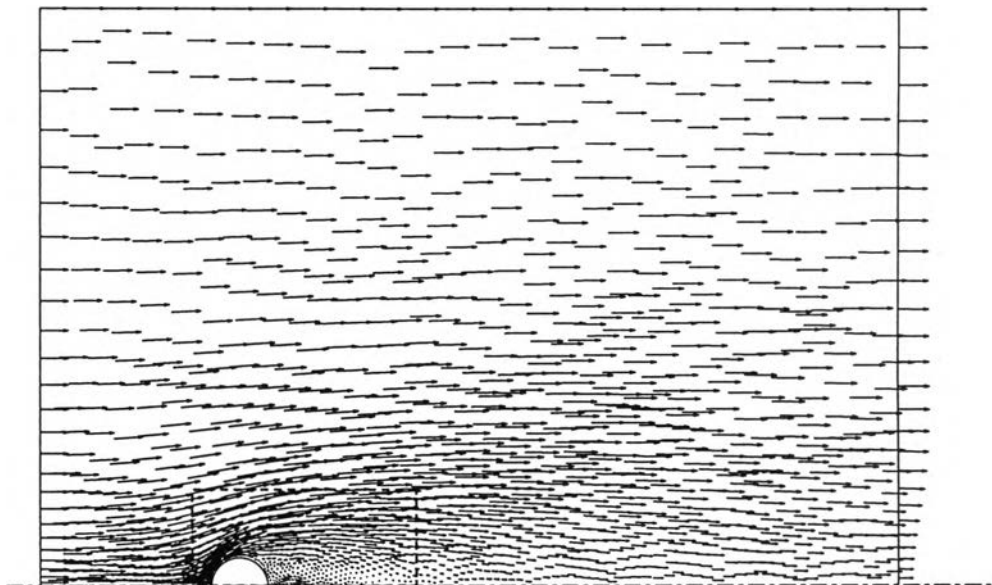
รูปที่ 7.48 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.47
บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 20



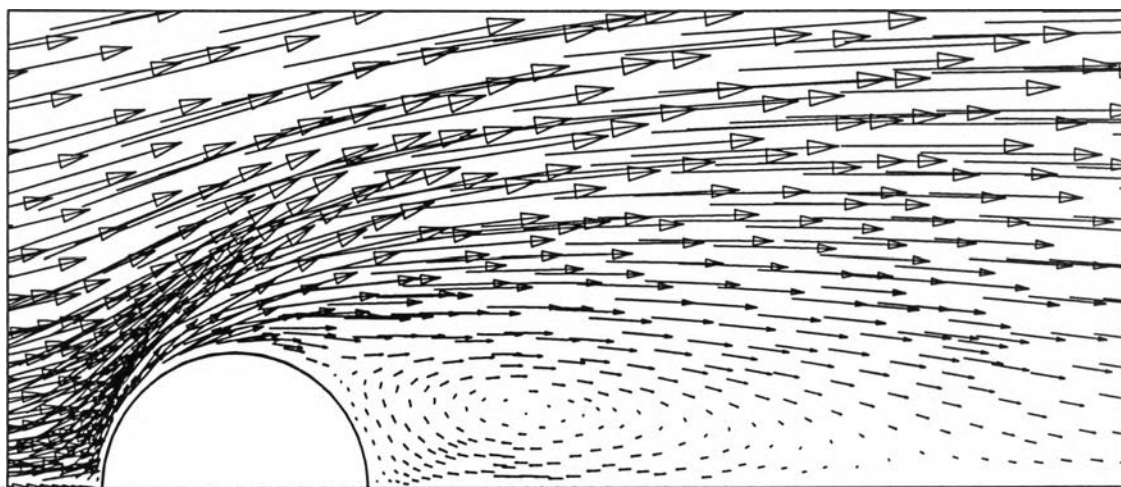
รูปที่ 7.49 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหล
ผ่านวัตถุทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 30



รูปที่ 7.50 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.49
บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 30

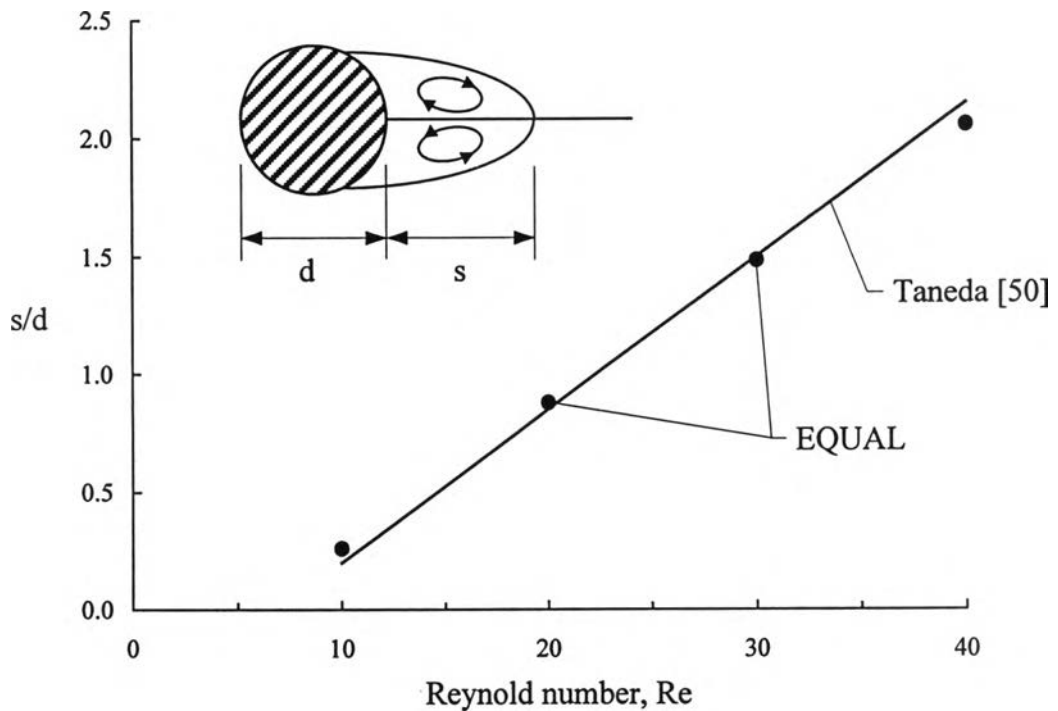


รูปที่ 7.51 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหล
ผ่านวัตถุทรงกระบอกที่ค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 40



รูปที่ 7.52 รายละเอียดการกระจายตัวของความเร็วภายในกรอบประของรูปที่ 7.51
บริเวณที่เกิดการไหลหมุนวน กรณีค่าเรย์โนลด์เท่ากับ 40

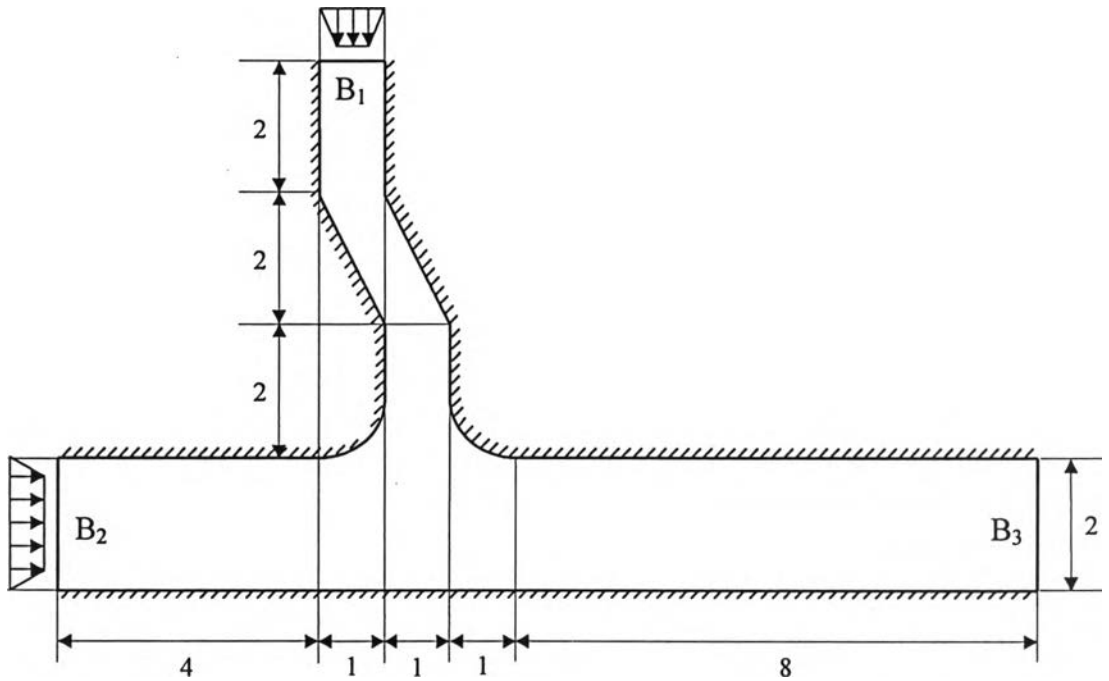
จากการทดลองของ Taneda [50] พบว่าเมื่อการไหลมีค่าเรย์โนลด์ประมาณเท่ากับ 7 จะเริ่มมีการไหลหมุนวนขึ้นด้านหลังวัตถุรูปทรงกระบอกและขนาดของการไหลหมุนวนนั้นจะมีขนาดที่ใหญ่ขึ้นเมื่อค่าเรย์โนลด์มีค่าเพิ่มขึ้น รูปที่ 7.53 แสดงการเปรียบเทียบขนาดของการไหลหมุนวนที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม EQUAL กับผลการทดลองของ Taneda ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี



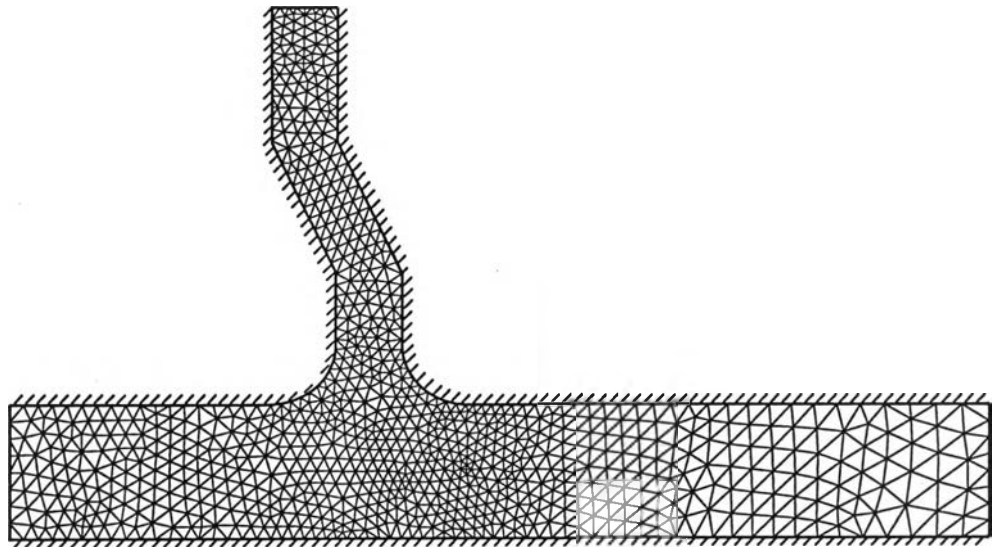
รูปที่ 7.53 การเปรียบเทียบขนาดของการไหลหมุนวนที่เกิดขึ้นด้านหลังวัตถุรูปทรงกระบอกจากการคำนวณกับผลการทดลอง

7.8 ปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน

ปัญหาสุดท้ายนี้เป็นปัญหาที่ค่อนข้างจะมีความซับซ้อนทั้งรูปร่างและรูปแบบของการไหล โดยที่รูปร่างลักษณะของปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.54 ซึ่งจะมีของไหลไหลเข้ามาทางด้านขอบ B_1 ด้วยความเร็วเท่ากับ 20 และขอบ B_2 ด้วยความเร็วเท่ากับ 10 จากนั้นจะไหลมาบรรจบกันแล้วไหลออกทางด้านขอบ B_3 โดยลักษณะของความเร็วของการไหลเข้านั้นกำหนดให้เป็นการไหลแบบคงตัว และกำหนดให้ค่าความหนาแน่นกับค่าความหนืดมีค่าเท่ากับ 0.142857 และ 1 ตามลำดับ ส่วนตลอดขอบทางด้านออกนั้นกำหนดให้มีค่าความดันคงที่เท่ากับ ศูนย์

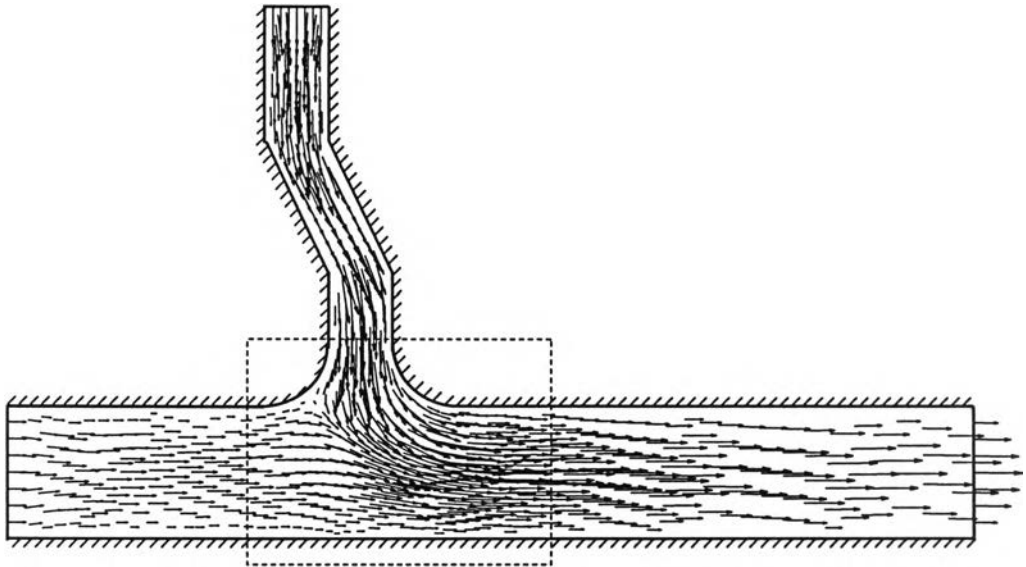


รูปที่ 7.54 ลักษณะของปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน

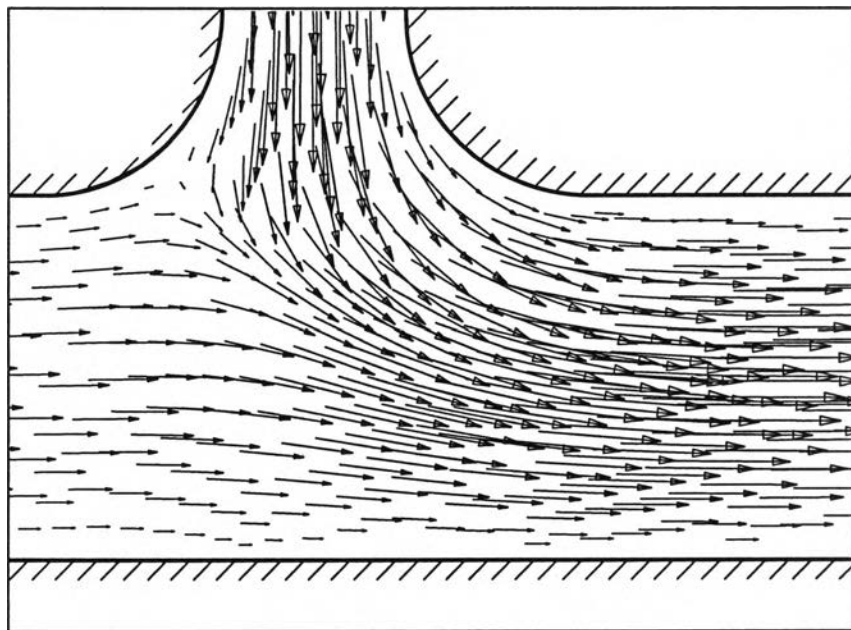


รูปที่ 7.55 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม EQUAL เริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 7.55 ซึ่งประกอบไปด้วย 961 จุดต่อและ 1702 เอลิเมนต์ โดยการกระจายตัวของความเร็วที่ได้จากการคำนวณและรายละเอียดของความเร็วในบริเวณที่มีการไหลมาบรรจบกันได้แสดงในรูปที่ 7.56 และรูปที่ 7.57 ตามลำดับ



รูปที่ 7.56 การกระจายตัวของความเร็วของปัญหาการไหลภายในท่อที่มาบรรจบกัน



รูปที่ 7.57 รายละเอียดของความเร็วบริเวณที่การไหลมาบรรจบกัน