หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 8
เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการแบ่งพื้นที่ภายในโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ แล้วทำการคำนวณหาค่าตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้นๆ ดังนั้นถ้าเราใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กมากเท่าไร จุดต่อต่างๆที่เป็นตัวแทนของตำแหน่งที่จะทำการคำนวณก็จะอยู่ใกล้กันมากขึ้นเท่านั้น ซึ่งจะเป็นผลทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น แต่การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากตลอดภายในโดเมนของปัญหาจะทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและจำนวนหน่วยความจำ (RAM) จำนวนมาก และอาจทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีจำนวนหน่วยความจำที่จำกัดนั้นไม่สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ ดังนั้นหากเราสามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่เหมาะสมก็จะทำให้ลดจำนวนจุดต่อที่ต้องทำการคำนวณลง แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยทั่วๆไปนั้นเราไม่สามารถที่จะทราบผลเฉลยแม่นตรงได้ จึงไม่อาจทราบว่าในบริเวณใดควรใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กและในบริเวณใดที่สามารถใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ได้ จึงต้องอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เหมาะสม [32] โดยในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ และขั้นตอนในการนำไปประยุกต์ใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหล

8.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือ จะทำการปรับใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีค่าการเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ดังกล่าว จะใช้หลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) [51] ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ ต้องเริ่มจากหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่จะใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมซึ่งประกอบไปด้วย $\frac{\partial^2\phi_e}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\phi_e}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\phi_e}{\partial x\,\partial y}$ และ $\frac{\partial^2\phi_e}{\partial y\,\partial x}$ โดยค่าต่างๆเหล่านี้จะนำมาคำนวณหาค่าในแนวแกนหลักดังแสดงในสมการ (8.1)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \qquad (8.1)$$

โดย ϕ คือ คำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ และ i คือ จุดต่อที่ i

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นจะใช้ค่าของคำตอบที่อยู่บนจุดต่อมาใช้เป็นตัวคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยในการทำวิทยานิพนธ์นี้ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในของคำตอบบนเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \qquad (8.2)$$

โดย N_i, i = 1, 2, 3 คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ϕ_i, i = 1, 2, 3 คือ ค่าตัวคำตอบที่จุดต่อของเอลิเมนต์

$$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (8.3)$$

โดยที่ค่า a_i, b_i, c_i มีค่าดังนี้

$$a_1 = (x_2y_3 - x_3y_2)/2A \qquad b_1 = (y_2 - y_3)/2A \qquad c_1 = (x_3 - x_2)/2A \qquad (8.4ก)$$

$$a_2 = (x_3y_1 - x_1y_3)/2A \qquad b_2 = (y_3 - y_1)/2A \qquad c_2 = (x_1 - x_3)/2A \qquad (8.4ข)$$

$$a_3 = (x_1y_2 - x_2y_1)/2A \qquad b_3 = (y_1 - y_2)/2A \qquad c_3 = (x_2 - x_1)/2A \qquad (8.4ค)$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \qquad (8.5)$$

การหาค่าตัวแปรทางด้านซ้ายของสมการ (8.1) จะเริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ใดๆก่อน ซึ่งจากสมการ (8.2) สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \qquad (8.6)$$

จากสมการ (8.3) จะได้ $\frac{\partial N_1}{\partial x} = b_1$, $\frac{\partial N_2}{\partial x} = b_2$, $\frac{\partial N_3}{\partial x} = b_3$

ดังนั้น
$$\frac{\partial\phi_e}{\partial x} = b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)\phi_1 + (y_3 - y_1)\phi_2 + (y_1 - y_2)\phi_3\right] \qquad (8.7ก)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial y} = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$$

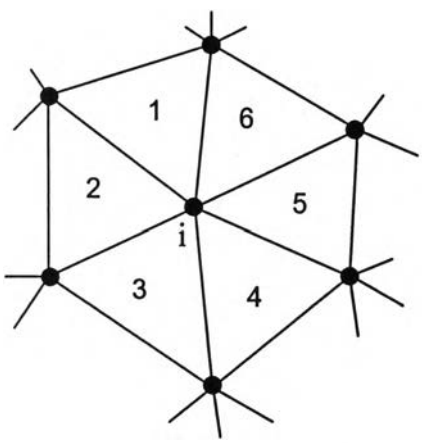
$$= \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2)\phi_1 + (x_1 - x_3)\phi_2 + (x_2 - x_1)\phi_3\right] \qquad (8.7ข)$$

แต่สิ่งที่เราต้องการทราบคือ ค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องนำค่าของอนุพันธ์ของเอลิเมนต์ที่หาได้นี้กระจายไปสู่จุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์ ซึ่งทำได้โดย

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial x}}{n} \qquad (8.8ก)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial y}}{n} \qquad (8.8ข)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น จุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์ ค่า $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi_i}{\partial y}$ จะเป็นการนำเอาค่าอนุพันธ์ของทั้ง 6 เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบอยู่มาทำการเฉลี่ยกันดังแสดงในรูปที่ 8.1



$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e6}}{\partial x}}{6}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e6}}{\partial y}}{6}$$

รูปที่ 8.1 ค่าอนุพันธ์ของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right)$$

$$= b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (8.9ก)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right)$$

$$= c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (8.9ข)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right)$$

$$= c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \qquad (8.9ค)$$

$$\frac{\partial^2\phi_e}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right)$$

$$= b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \qquad (8.9\text{ง})$$

โดย $\dfrac{\partial^2\phi_e}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2\phi_e}{\partial y\,\partial x}$

หลังจากนั้นกระจายค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ไปสู่จุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์

$$\frac{\partial^2\phi_e}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2\phi_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2\phi_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (8.10\text{ก})$$

$$\frac{\partial^2\phi_e}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2\phi_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2\phi_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (8.10\text{ข})$$

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\phi_i}{\partial y\,\partial x} = \frac{\frac{\partial^2\phi_{e1}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\phi_{e2}}{\partial x\,\partial y} + \ldots + \frac{\partial^2\phi_{en}}{\partial x\,\partial y}}{n} \qquad (8.10\text{ค})$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของ ϕ_i ทั้งหมดแล้ว จึงนำค่าต่างๆดังกล่าวไปหาค่าในแนวแกนหลัก (principal values) โดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\text{pricipal value} = \frac{\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}}{2} + \frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\,\partial y}} \qquad (8.11)$$

ซึ่งทำให้ได้ค่าในแกนหลัก $\dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}, \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}$ ออกมา ค่าที่มากที่สุดของทั้งสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมาโดย

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}\right|\right) \qquad (8.12)$$

ค่าที่ถูกเลือก (λ) จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ต่อไปโดย

$$h^2\lambda = \text{ค่าคงที่} = h_{min}^2\lambda_{max} \qquad (8.13)$$

ค่า h_{min} คือ ค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่ยอมให้ได้ และค่า λ_{max} คือ ค่าในแกนหลัก (principal value) ที่มีค่ามากที่สุดของทั้งปัญหา

8.2 การนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหล

ในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ได้นำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว โดยจะใช้ค่าของความเร็วที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ของปัญหา เนื่องจากค่าของการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient) มีการเปลี่ยนแปลงที่ค่อนข้างสูงในบริเวณที่มีลักษณะการไหลที่สลับซับซ้อน เพื่อให้ได้คำตอบในบริเวณดังกล่าวได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นจะต้องใช้เอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวที่ค่อนข้างเล็ก แต่ในบริเวณอื่นๆ สามารถที่จะใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้เพื่อเป็นการประหยัดจำนวนหน่วยความจำที่ต้องใช้ จากที่กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 8.1 ที่ว่าหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นใช้หลักการเดียวกับหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลักในวิชากลศาสตร์ของแข็ง ดังนั้นเมื่อนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้กับปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V_i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \qquad (8.14)$$

โดย สมการค่าอนุพันธ์ต่างๆ ในสมการ (8.6-8.10) จะกลายมาเป็น

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} V_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} V_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} V_3 \qquad (8.15)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3) V_1 + (y_3 - y_1) V_2 + (y_1 - y_2) V_3\right] \qquad (8.16ก)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial y} = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2) V_1 + (x_1 - x_3) V_2 + (x_2 - x_1) V_3\right] \qquad (8.16ข)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V_{en}}{\partial x}}{n} \qquad (8.17ก)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial V_{en}}{\partial y}}{n} \qquad (8.17ข)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3\right)$$

$$= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \qquad (8.18ก)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3\right)$$

$$= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \qquad (8.18ข)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3\right)$$

$$= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \qquad (8.19ค)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3\right)$$

$$= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \qquad (8.19ง)$$

โดย $\dfrac{\partial^2 V_e}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 V_e}{\partial y\,\partial x}$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (8.20ก)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (8.20ข)$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y\,\partial x} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x\,\partial y} + \ldots + \frac{\partial^2 V_{en}}{\partial x\,\partial y}}{n} \qquad (8.20ค)$$

และสมการ (8.12) จะกลายมาเป็น

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2}\right|\right) \qquad (8.21)$$

ค่า λ ที่ได้ในสมการ (8.21) นำไปสู่การหาค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่างๆ ต่อไป โดยใช้สมการ (8.13) คือ

$$h^2\lambda = \text{ค่าคงที่} = h_{min}^2\lambda_{max} \qquad (8.22)$$

8.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์

ในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวจะมีโปรแกรมที่เกี่ยวข้อง 3 โปรแกรมด้วยกันดังนี้

1. โปรแกรม BUILT

โปรแกรม BUILT เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งจะรับข้อมูลที่กำหนดพื้นผิวและขอบเขตของปัญหาจากผู้ใช้รวมทั้งขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจากโปรแกรม SPACE

2. โปรแกรม EQUAL

โปรแกรม EQUAL เป็นโปรแกรมที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปของความเร็วและความดัน โดยข้อมูลของความเร็วที่คำนวณได้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยโปรแกรม SPACE

3. โปรแกรม SPACE

โปรแกรม SPACE เป็นโปรแกรมที่ใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมบนโดเมนของปัญหาดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 8.1 โดยการรับข้อมูลทั้งจากผู้ใช้เป็นผู้กำหนดค่าตัวแปรต่างๆที่จำเป็น และข้อมูลที่คำนวณได้จากข้อ 2 โดยผลการคำนวณจะถูกใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในโปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

รายละเอียดของโปรแกรม BUILT และ SPACE ที่อยู่ในรูปแบบของภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [16]

8.4 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในหัวข้อนี้จะได้นำเสนอขั้นตอนในการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว โดยใช้โปรแกรมทั้ง 3 ที่ได้กล่าวในหัวข้อ 8.3 ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดของเอลิเมนต์เท่าๆกัน และกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอตลอดขอบเขตของปัญหา โดยใช้โปรแกรม BUILT

2. ใช้โปรแกรม EQUAL เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลโดยใช้แบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม BUILT ในขั้นตอนที่ 1

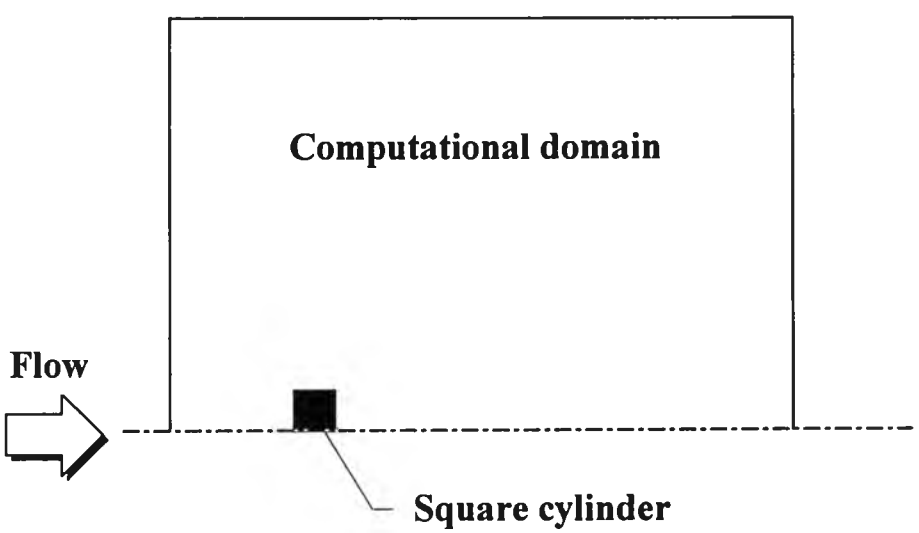
3. ใช้โปรแกรม SPACE ในการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยใช้ผลของความเร็วที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 เป็นตัวกำหนด

4. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้งโดยใช้ผลของขนาดเอลิเมนต์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 แล้วทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลอีกครั้งโดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรกมาแล้ว

5. นำผลที่ได้ในขั้นตอนที่ 4 มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในครั้งก่อนหน้าว่าค่าของคำตอบต่างๆที่ได้มีความแตกต่างหรือมีการเปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเท่าไร ถ้ามีความแตกต่างกันค่อนข้างมากแสดงว่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้ยังไม่เหมาะสม จะต้องนำคำตอบที่ได้ในครั้งหลังนี้ไปใช้หาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมใหม่ในขั้นตอนที่ 3 ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนการเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับผลคำตอบที่ได้ครั้งก่อน

8.5 ตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว

ในหัวข้อนี้จะได้ยกตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยม โดยที่ลักษณะของปัญหาได้แสดงในรูปที่ 8.2 การวิเคราะห์ปัญหาจะใช้โปรแกรม EQUAL ร่วมกับโปรแกรม BUILT และ SPACE ซึ่งสามารถแสดงขั้นตอนในการวิเคราะห์เป็นลำดับได้ดังนี้



รูปที่ 8.2 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยม

1. ใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอ

1.1 ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT จะเป็นข้อมูลที่ใช้สร้างขอบเขตของปัญหาเพื่อที่จะให้โปรแกรมทำการแบ่งเอลิเมนต์ภายในขอบเขตนั้นๆ โดยส่วนประกอบของข้อมูลนำเข้าสามารถจำแนกออกเป็น 4 ส่วนย่อย ได้ดังต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ข้อมูลแสดงจำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดแรก คำอธิบายจำนวนและจำนวนพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 จำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น :

```
nis   nsf
8     1
```

ส่วนที่ 2 ข้อมูลองค์ประกอบของเส้นที่ขอบ

บรรทัดแรก คำอธิบายคำจำกัดความของขอบปัญหา

บรรทัดที่ 2 ประกอบไปด้วยตัวเลขสองตัว ตัวแรกคือหมายเลขประจำขอบ ส่วนเลขตัวที่สองคือจำนวนจุดที่ใช้ในการสร้างขอบนั้นๆ

บรรทัดต่อๆไป ตำแหน่งพิกัดของจุดที่จะใช้สร้างขอบนั้นๆ ซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับเลขตัวที่สองในบรรทัดที่ 2

ตัวอย่างเช่น :

```
edge definition
  1     2
0.    0.    0.
1.5   0.    0.
```

หมายเหตุ : จากตัวอย่างที่แสดงข้างต้นคือขอบที่ 1 ซึ่งจะใช้จุดพิกัดสองจุดในการสร้างขอบนั้น โดยจุดพิกัดสองจุดดังกล่าวคือจุด (0,0) และจุด (1.5,0) แต่ในกรณีที่ขอบดังกล่าวเป็นเส้นโค้งก็จำเป็นต้องใช้จำนวนจุดพิกัดที่มากขึ้นเพื่อที่จะสามารถสร้างขอบดังกล่าวให้ได้สมบูรณ์

ส่วนที่ 3 ข้อมูลจุดพิกัดที่มุมของบริเวณที่สามารถล้อมรอบพื้นผิวทั้งหมดของปัญหาได้

บรรทัดแรก คำอธิบายจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดที่ 2 เลขประจำพื้นผิวของปัญหาและจำนวนจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดต่อๆไป เป็นตำแหน่งจุดพิกัดที่มุมของพื้นที่ๆล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น :

```
surface support point
1     2     2
0.    0.    0.
7.5   0.    0.
0.    5.    0.
7.5   5.    0.
```

ส่วนที่ 4 ข้อมูลการเรียงลำดับของขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดแรก คำอธิบายลำดับของขอบที่ประกอบเป็นพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 เลขตัวแรกระบุหมายเลขประจำพื้นผิว เลขตัวหลังจะระบุจำนวนขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดที่ 3 ลำดับหมายเลขประจำขอบที่เรียงกันแล้วก่อให้เกิดพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น :

```
face boundary
1     8
1  2  3  4  5  6  7  8
```

สำหรับลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม BUILT ต้องการและสอดคล้องกับปัญหาตัวอย่างในหัวข้อนี้สมมติว่าบรรจุอยู่ในไฟล์ชื่อ 'square.dat' ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

```
nis    nsf
 8      1
edge definition
  1      2
0.     0.     0.
1.5    0.     0.
  2      2
1.5    0.     0.0
1.5    0.5    0.0
  3      2
1.5    0.5    0.
2.0    0.5    0.
  4      2
2.0    0.5    0.
2.0    0.     0.
  5      2
2.0    0.     0.
7.5    0.     0.
  6      2
7.5    0.     0.
7.5    5.     0.
  7      2
7.5    5.     0.
0.     5.     0.
  8      2
0.     5.     0.
0.     0.     0.
surface support point
1      2      2
0.     0.     0.
7.5    0.     0.
0.     5.     0.
7.5    5.     0.
face boundary
1     8
1  2  3  4  5  6  7  8
```

รูปที่ 8.3 ข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'square.dat'

1.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม BUILT

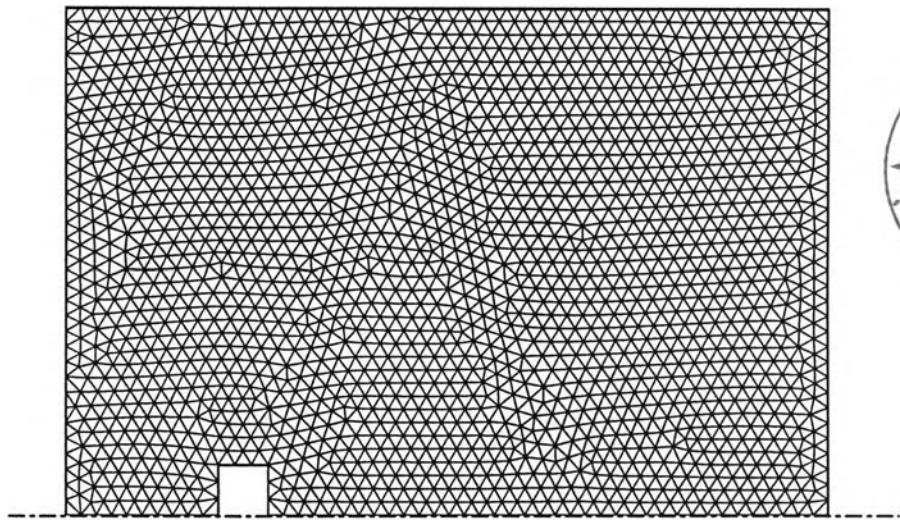
หลังจากที่ได้ข้อมูลที่บอกรายละเอียดของขอบเขตของปัญหาที่ต้องการแล้ว ก็จะเริ่มทำการใช้โปรแกรม BUILT ในการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานั้นๆ โดยโปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลและข้อมูลบางส่วนที่โปรแกรมต้องการ ซึ่งผู้ใช้จะต้องตอบกลับไป ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 8.4 โดย ***ตัวเอียงหนา*** คือส่วนที่ผู้ใช้ต้องเป็นผู้พิมพ์ด้วยตนเอง

```
      ************************************
      ***        B  U  I  L  T           ***
      ***     surface triangulator       ***
      ***     for plane structures       ***
      ************************************

*** mesh generation ***
    0.- initial mesh
    1.- remeshing

       Option ?: 0     (เลือก 0 สำหรับการสร้างแบบจำลองครั้งแรก โดยมีขนาดเอลิเมนต์สม่ำเสมอ)

Enter problem name: square  (ชื่อไฟล์ของปัญหา จะใช้ชื่อเดียวกันในทุกๆการปรับปลี่ยนขนาด)
Enter current version number: 0          (หมายเลขระบุชุดของการปรับเปลี่ยนขนาด)
 *** initial mesh ***
     element size ?:  0.15       (ขนาดเอลิเมนต์เริ่มต้นที่มีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ)
```

รูปที่ 8.4 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม BUILT

1.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม BUILT

ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมมีอยู่หลายไฟล์ด้วยกัน แต่ส่วนใหญ่จะเป็นไฟล์ที่เก็บข้อมูลสำหรับใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในรอบต่อไปของการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ ชื่อของไฟล์ผลลัพธ์นี้จะเหมือนกับชื่อไฟล์ที่ผู้ใช้ระบุให้โปรแกรมทำการอ่านข้อมูล และนามสกุลของไฟล์ผลลัพธ์จะมีหมายเลขชุดที่ผู้ใช้เป็นผู้กำหนดเพื่อให้แยกกันชัดเจนสำหรับไฟล์คำตอบในรอบต่างๆของการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ ข้อมูลที่สำคัญที่จะใช้นำไปเป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม EQUAL เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลก็คือข้อมูลที่เก็บระยะพิกัดของจุดต่อต่างๆ และการจัดเรียงจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ โดยข้อมูลดังกล่าวจะเก็บไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล *.e_ โดยที่เครื่องหมาย _ คือหมายเลขที่ระบุชุดของการปรับเปลี่ยนขนาด ซึ่งในที่นี้ไฟล์ดังกล่าวคือ square.e0 สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยมที่สร้างจากโปรแกรม BUILT ได้แสดงในรูปที่ 8.5 ซึ่งประกอบไปด้วย 1913 จุดต่อ และ 3652 เอลิเมนต์



หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 8.5 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาตัวอย่าง

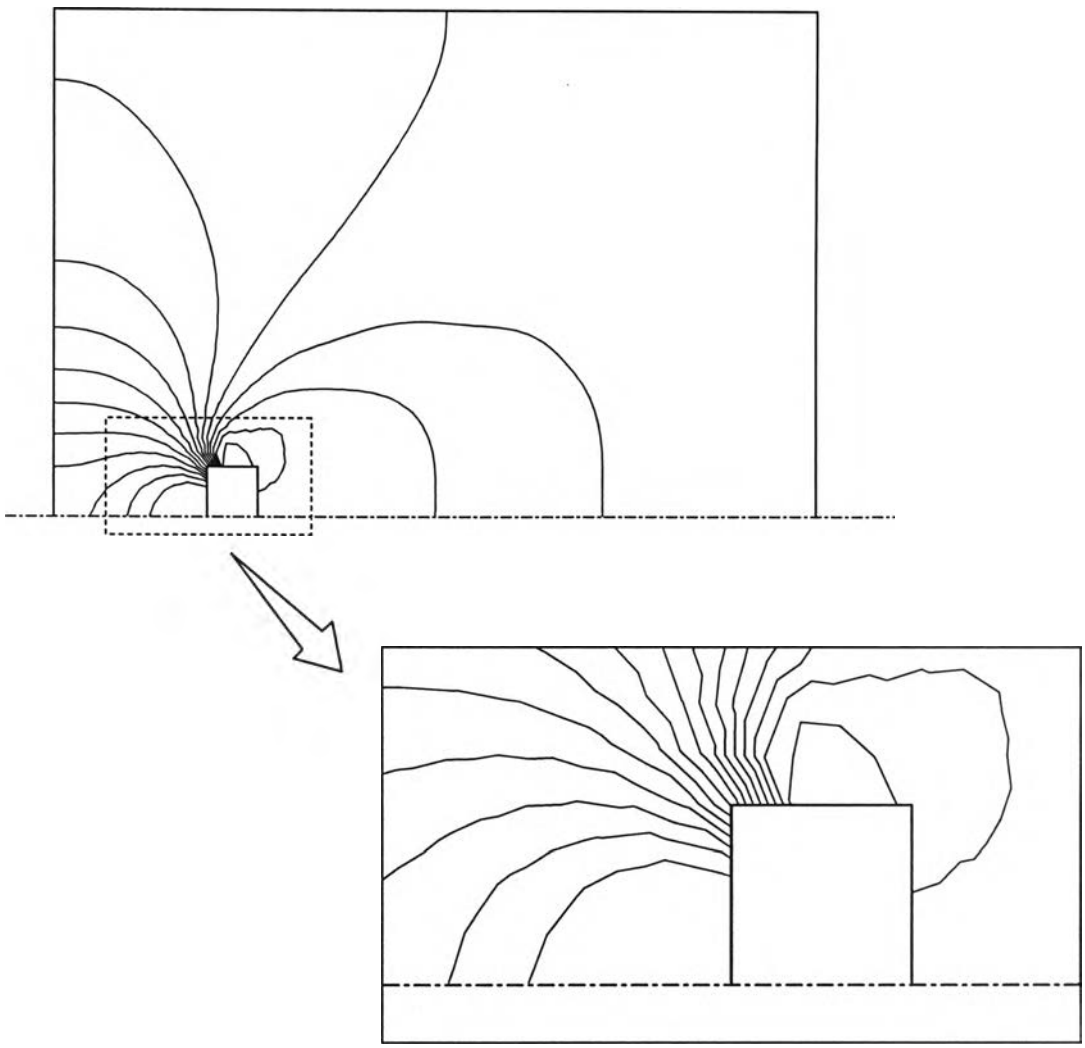
2. ใช้โปรแกรม EQUAL เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

นำไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 1.3 มาสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าพร้อมกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 6 เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม EQUAL ซึ่งจะได้ผลลัพธ์อยู่ในรูปของความเร็ว (u, v) และความดัน (p) หลังจากนั้นนำความเร็ว (u, v) มาสร้างไฟล์ข้อมูลของความเร็วลัพธ์เพื่อใช้เป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE เพื่อทำการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมต่อไป โดยข้อมูลของความเร็วลัพธ์จะเก็บอยู่ในไฟล์ชื่อ 'square.v0' ซึ่งตัวอย่างภายในไฟล์ดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 8.6

```
1913
    1    .10000E+01
    2    .00000E+00
    3    .00000E+00
    4    .00000E+00
    5    .00000E+00
    6    .19101E+00
    ¦         ¦
    ¦         ¦
 1910    .10062E+01
 1911    .10047E+01
 1912    .11627E+01
 1913    .11505E+01
```

รูปที่ 8.6 ตัวอย่างข้อมูลในไฟล์ชื่อ 'square.v0'

ผลการกระจายตัวของความดันสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหานี้ได้แสดงในรูปที่ 8.7



รูปที่ 8.7 การกระจายตัวของความดันสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

3. ใช้โปรแกรม SPACE เพื่อหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

3.1 ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE

ไฟล์ข้อมูลที่ใช้สำหรับโปรแกรม SPACE จะมีด้วยกัน 4 ไฟล์ โดยจะอยู่ในรูปแบบของนามสกุล *.N_ , *.L_ , *.DIM และ *.V_ ซึ่ง 3 ไฟล์แรกนั้นจะได้มาจากโปรแกรม BUILT ส่วนไฟล์สุดท้ายได้จากขั้นตอนที่ 2

3.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม SPACE

หลังจากได้ไฟล์ต่างๆครบแล้ว ก็จะเริ่มทำการใช้งานโปรแกรม SPACE โดยโปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลของปัญหาและข้อมูลต่างๆสำหรับใช้ปรับขนาดเอลิเมนต์ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 8.8 โดย ***ตัวเอียงหนา*** คือส่วนที่ผู้ใช้ต้องเป็นผู้พิมพ์ด้วยตนเอง

```
ENTER PROBLEM NAME : square                (ชื่อไฟล์ของปัญหา)
ENTER CURRENT VERSION NUMBER : 0           (หมายเลขระบุชุดของการปรับเปลี่ยนขนาด)
PLEASE INPUT THE MINIMUM & MAXIMUM SPACINGS
0.05                                       (ขนาดเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดภายในโดเมนของปัญหา)
0.3                                        (ขนาดเอลิเมนต์ที่ใหญ่ที่สุดภายในโดเมนของปัญหา)
```

รูปที่ 8.8 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม SPACE

3.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

โปรแกรม SPACE จะสร้างไฟล์ผลลัพธ์เพื่อเก็บข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล *.r_ ในที่นี้ไฟล์ดังกล่าวคือ 'square.r0' ซึ่งตัวอย่างภายในไฟล์ดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 8.9

```
1913
   1        .30000000E+00
   2        .65026372E-01
   3        .56518322E-01
   4        .64712217E-01
   5        .15185368E+00
   6        .25887153E+00
   ¦            ¦
   ¦            ¦
   ¦            ¦
1910        .30000000E+00
1911        .30000000E+00
1912        .30000000E+00
1913        .30000000E+00
```

รูปที่ 8.9 ตัวอย่างข้อมูลภายในไฟล์ 'square.r0'

4. ใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ปรับขนาดแล้ว

4.1 ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้ในขั้นตอนนี้จะถูกสร้างไว้แล้วในขั้นตอนที่ 1 รวมกับไฟล์ square.r0 ที่ได้สร้างขึ้นในตอนที่ 3

4.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม BUILT

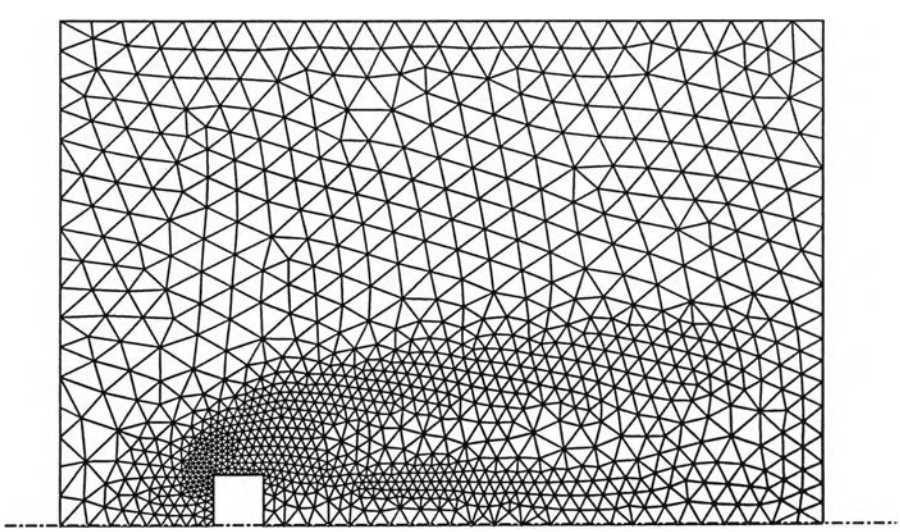
หลังจากได้ไฟล์ต่างๆครบแล้ว ก็จะเริ่มทำการใช้งานโปรแกรม BUILT โดยโปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลของปัญหาและข้อมูลต่างๆสำหรับใช้ปรับขนาดเอลิเมนต์ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 8.10 โดย ***ตัวเอียงหนา*** คือส่วนที่ผู้ใช้ต้องเป็นผู้พิมพ์ด้วยตนเอง

```
      ************************************
      ***        B  U  I  L  T           ***
      ***     surface triangulator       ***
      ***     for plane structures       ***
      ************************************

*** mesh generation ***
    0.- initial mesh
    1.- remeshing

       Option ?: 1                          (เลือก 1 สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์)

Enter problem name: square                  (ชื่อไฟล์ของปัญหา)
Enter current version number: 1             (หมายเลขระบุชุดของการปรับขนาดครั้งใหม่)
Enter previous version number: 0            (หมายเลขระบุชุดของการปรับขนาดครั้งก่อน)
```

รูปที่ 8.10 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม BUILT เพื่อการปรับขนาดครั้งใหม่

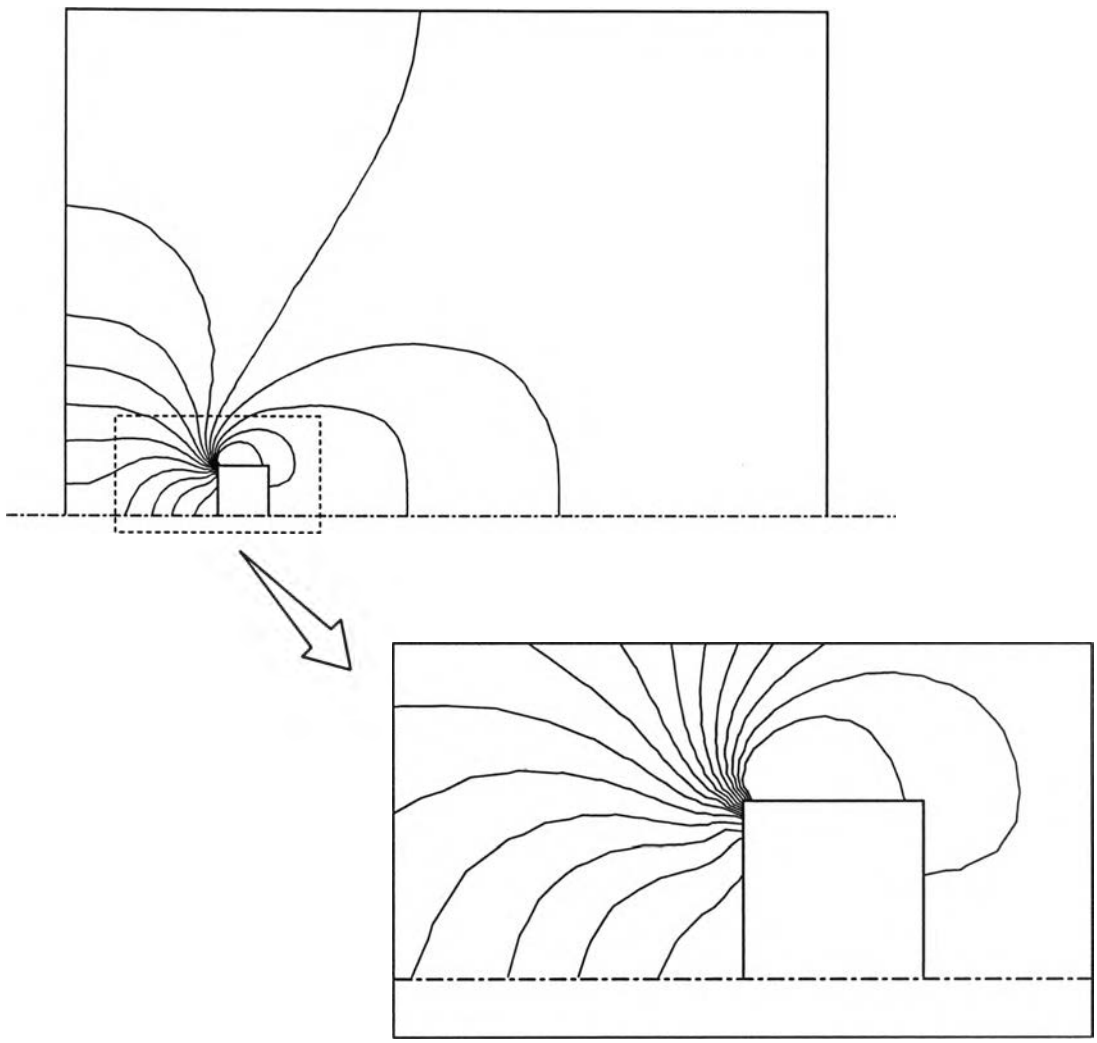
4.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้จะมีลักษณะเช่นเดียวกับที่ได้ในข้อ 1.3 ซึ่งเป็นไฟล์ที่บรรจุข้อมูลของตำแหน่งจุดต่อและหมายเลขจุดต่อสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ โดยในที่นี้ข้อมูลดังกล่าวจะถูกเก็บไว้ในไฟล์ชื่อ 'square.e1' สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ได้แสดงในรูปที่ 8.11 ซึ่งประกอบไปด้วย 1067 จุดต่อ และ 2016 เอลิเมนต์



รูปที่ 8.11 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดครั้งที่ 1 สำหรับปัญหาตัวอย่าง

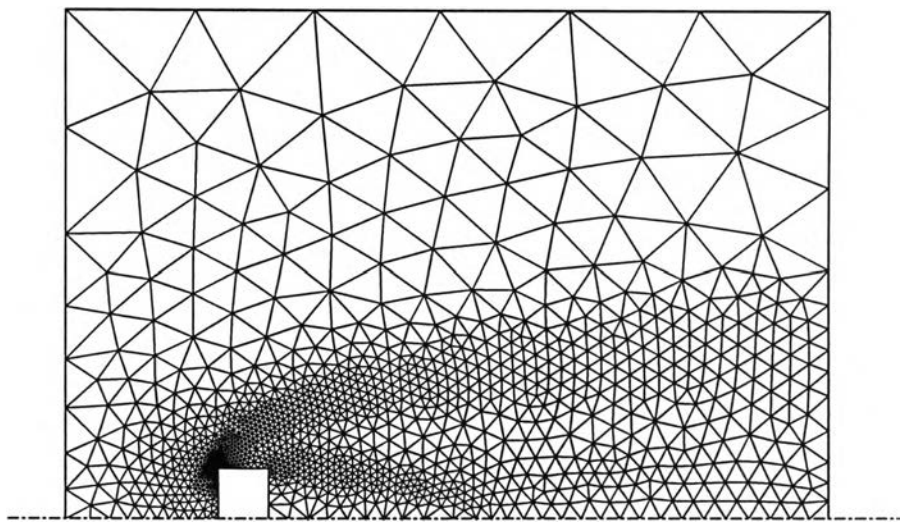
นำแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 มาทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม EQUAL โดยรูปที่ 8.11 ได้แสดงผลจากการวิเคราะห์ซึ่งจะเห็นได้ว่าการกระจายตัวของความดันในบริเวณมุมของวัตถุทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยมที่ได้มีความชัดเจนยิ่งขึ้น



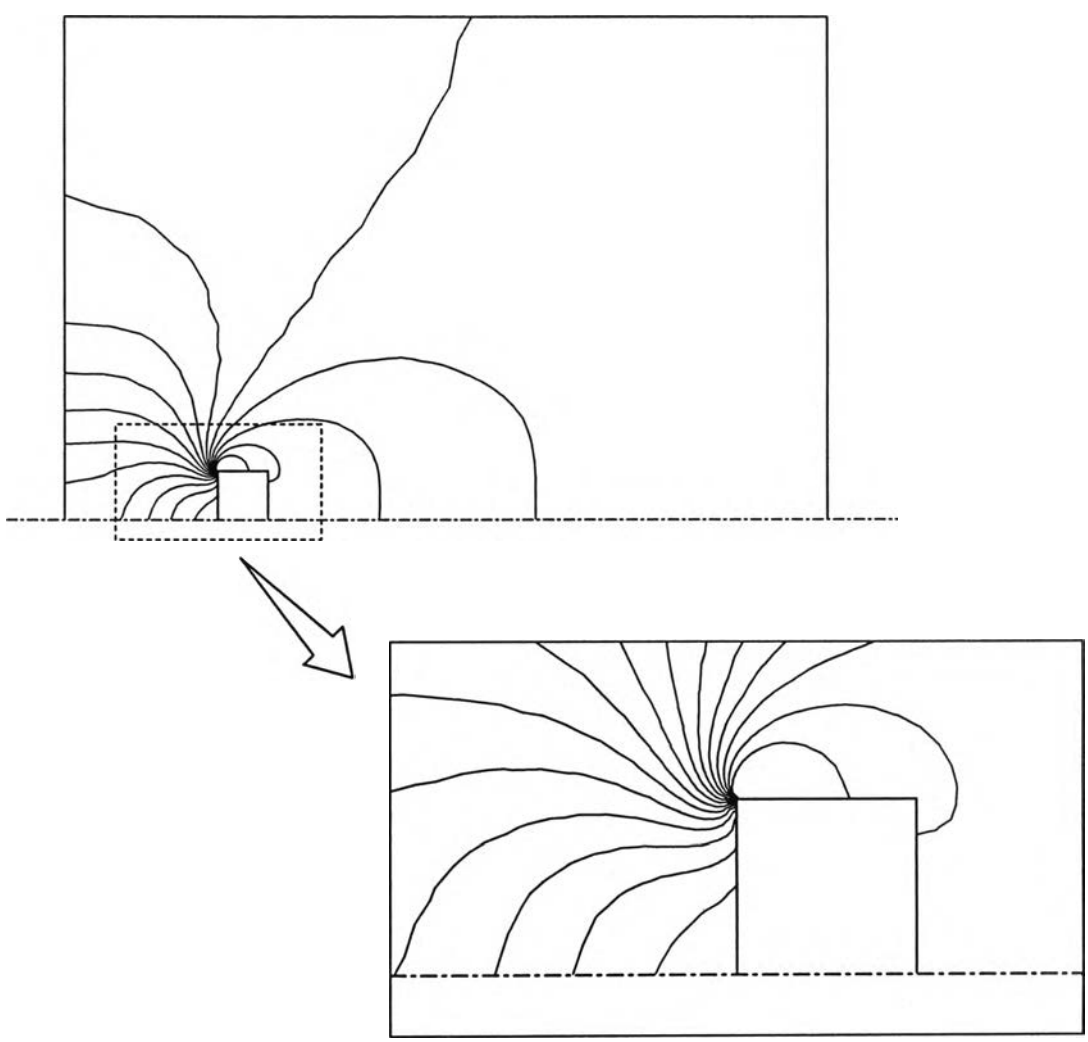
รูปที่ 8.12 การกระจายตัวของความดันสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

5. ตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่ได้

นำผลจากการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่ 5 มาตรวจสอบ หากผลที่ได้ยังไม่ดีนักสามารถทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์ครั้งต่อไปได้ โดยกลับไปเริ่มทำในขั้นตอนที่ 3 อีกครั้งจนกว่าผลคำตอบที่ได้จะลู่เข้าเป็นที่น่าพอใจ ซึ่งในตัวอย่างนี้จะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีก 1 ครั้ง โดยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.13 ซึ่งประกอบไปด้วย 1214 จุดต่อ และ 2326 เอลิเมนต์ ส่วนผลการกระจายตัวของความดันที่ได้จากการวิเคราะห์แสดงไว้ในรูปที่ 8.14 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการกระจายตัวของความดันที่บริเวณมุมของวัตถุทรงกระบอกรูปสี่เหลี่ยมที่ได้มีความชัดเจนยิ่งขึ้น



รูปที่ 8.13 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดครั้งที่ 2 สำหรับปัญหาตัวอย่าง



รูปที่ 8.14 การกระจายตัวของความดันสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2

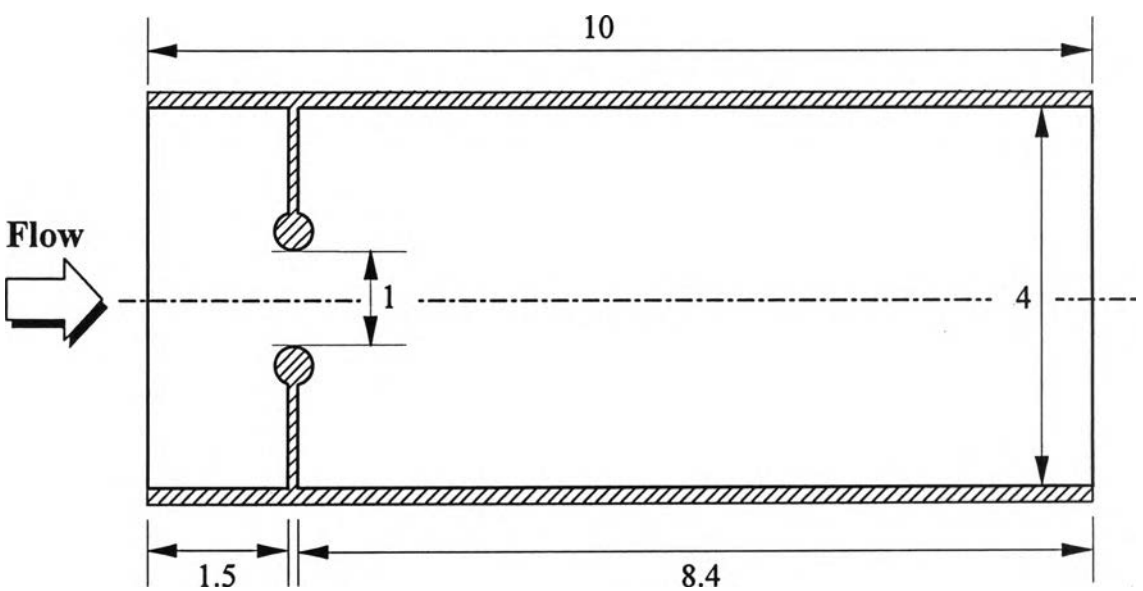
จากตัวอย่างที่ได้นำเสนอข้างต้นนี้จะเห็นได้ว่าการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวนี้เป็นผลทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น อีกทั้งยังช่วยประหยัดจำนวนหน่วยความจำและเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณอีกด้วย

8.6 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

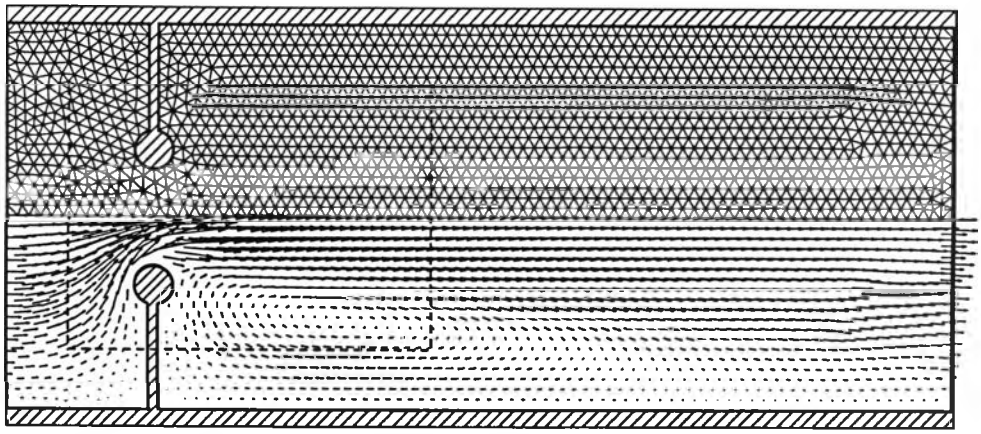
ในหัวข้อนี้จะได้แสดงประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น โดยจะได้แสดงตัวอย่างปัญหา 2 ตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ

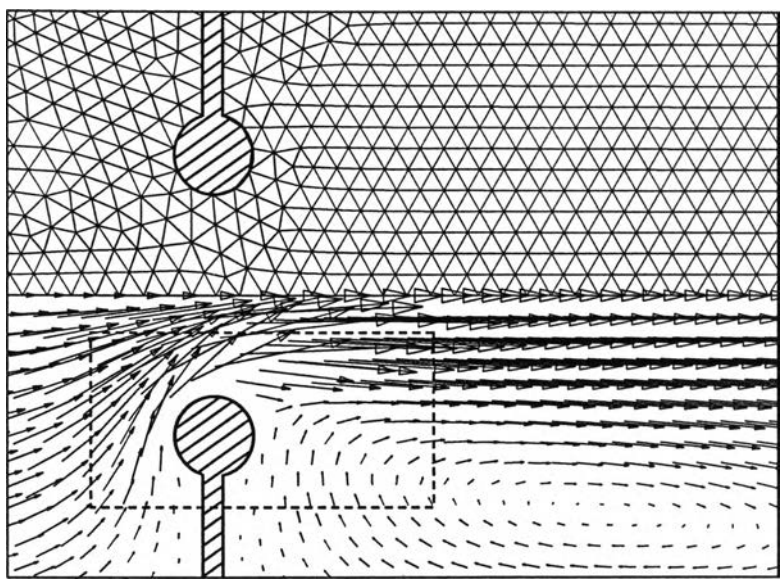
ปัญหาหนึ่งที่พบในงานวิศวกรรมที่มีความซับซ้อน นั่นคือปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ โดยมีการไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของปัญหา ด้วยค่าเรยโนลด์เท่ากับ 40 ดังแสดงในรูปที่ 8.15 เนื่องจากปัญหาดังกล่าวมีความสมมาตร ดังนั้นสามารถที่จะพิจารณาเฉพาะครึ่งล่างหรือครึ่งบนของปัญหาเท่านั้น รูปที่ 8.16 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอซึ่งประกอบไปด้วย 1638 จุดต่อและ 3046 เอลิเมนต์ พร้อมกับผลการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากโปรแกรม EQUAL ส่วนรายละเอียดของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วในบริเวณใกล้ช่องแคบได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.17 และรายละเอียดที่ชัดเจนยิ่งขึ้นในบริเวณดังกล่าวได้แสดงในรูปที่ 8.18



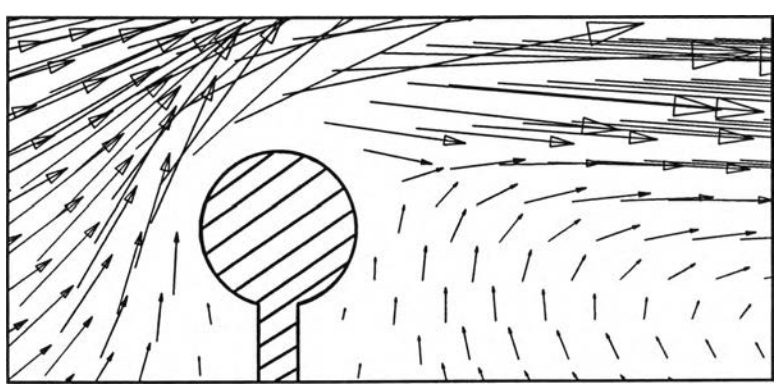
รูปที่ 8.15 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ



รูปที่ 8.16 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบ และผลการกระจายตัวของความเร็ว

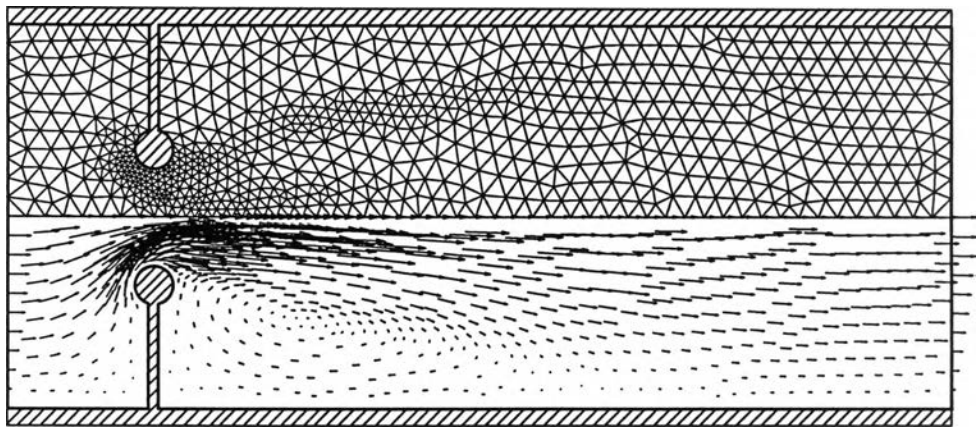


รูปที่ 8.17 ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็ว บริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.16)



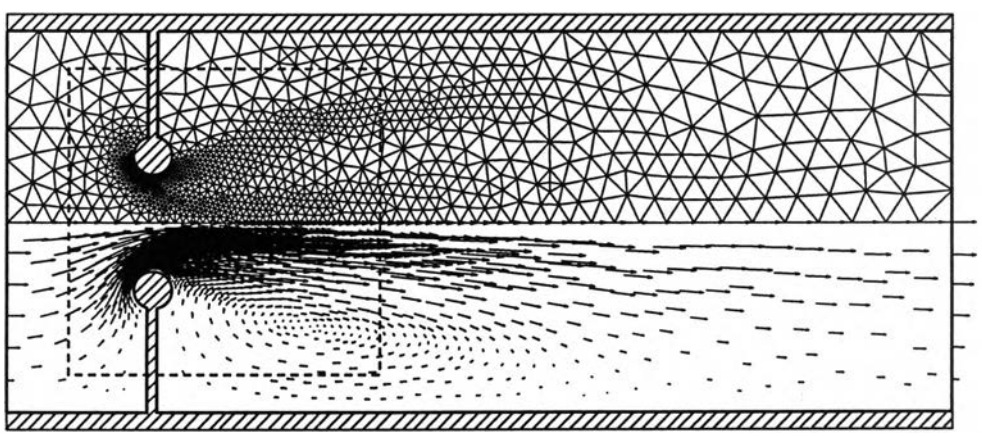
รูปที่ 8.18 ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.17)

ค่าความเร็วที่คำนวณได้ในกรณีใช้เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอจะนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.19 ซึ่งประกอบไปด้วย 801 จุดต่อและ 1447 เอลิเมนต์

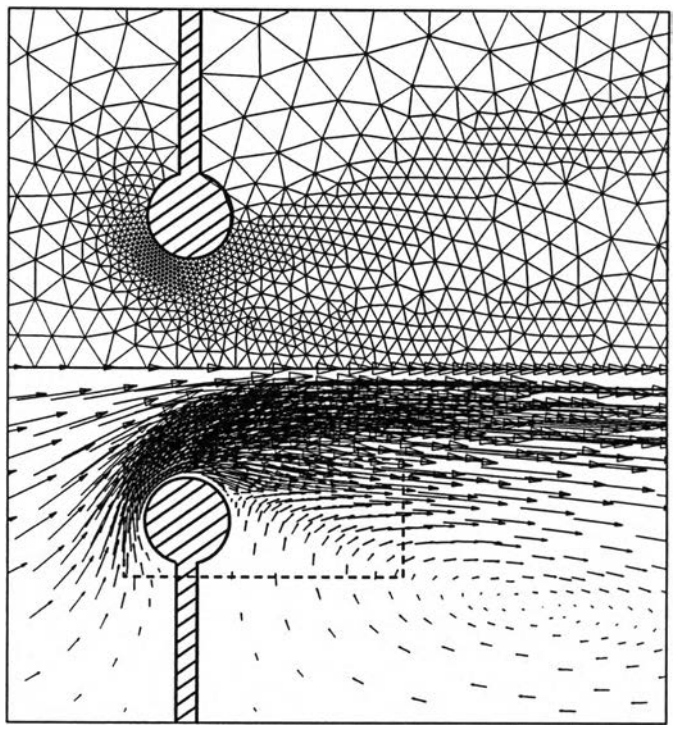


รูปที่ 8.19 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

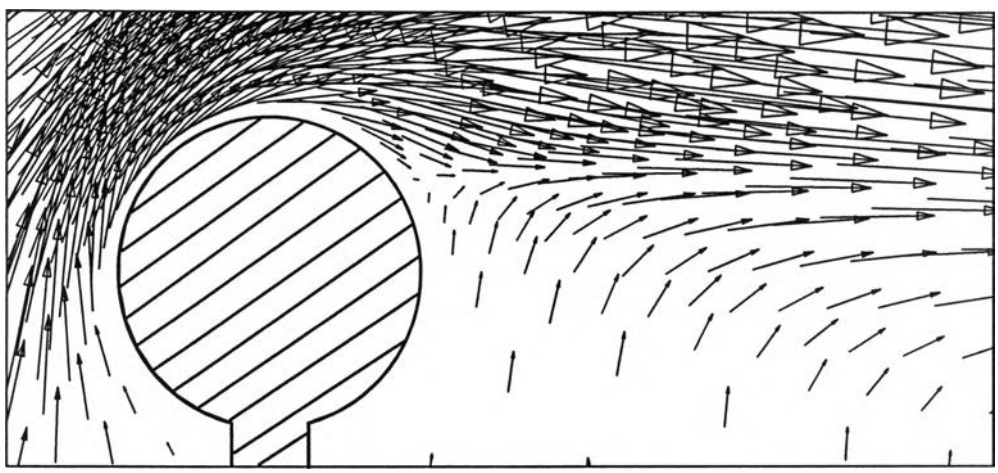
ผลของความเร็วที่ได้จากการคำนวณในกรณีที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 นี้ได้นำไปใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งทำให้ได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วย 1169 จุดต่อและ 2187 เอลิเมนต์ ถึงแม้ว่าจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 นี้จะมีจำนวนน้อยกว่ากรณีที่ใช้เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอ แต่คำตอบของปัญหาการไหลที่ได้ดังแสดงในรูปที่ 8.20 สามารถให้รายละเอียดของการไหลบริเวณที่ใกล้ช่องแคบได้เป็นอย่างดี รายละเอียดของพฤติกรรมการไหลได้แสดงในรูปที่ 8.21-8.23 ซึ่งได้ให้รายละเอียดของการไหลในบริเวณใกล้ช่องแคบและการไหลหมุนวนทางด้านหลังของช่องแคบ



รูปที่ 8.20 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านช่องแคบและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



รูปที่ 8.21 ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็ว
บริเวณใกล้ช่องแคบ (บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.20)

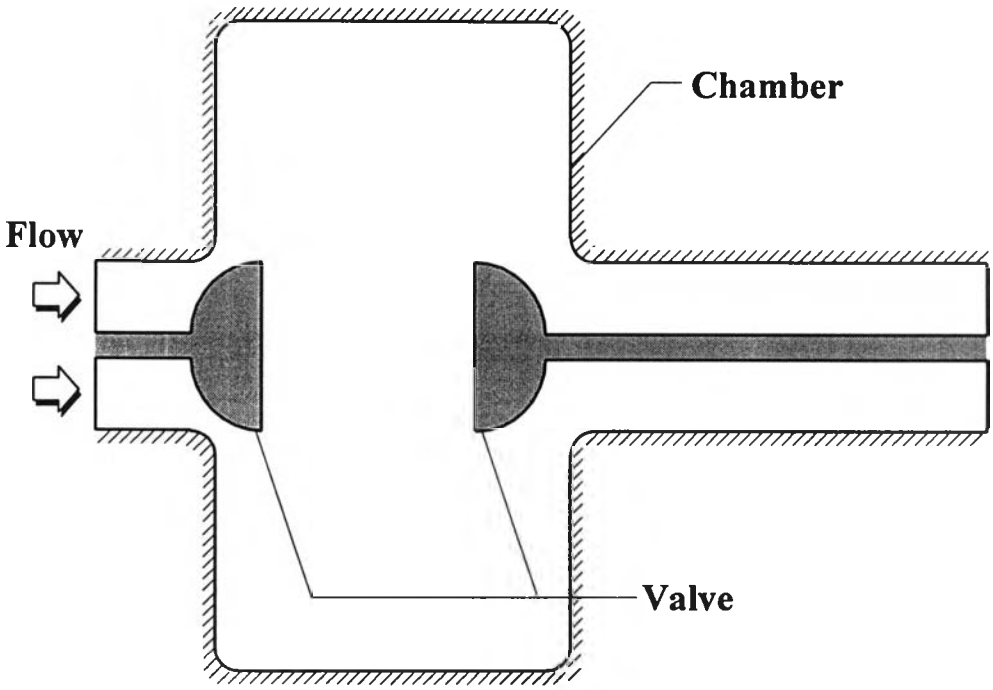


รูปที่ 8.22 ลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ช่องแคบ
(บริเวณกรอบประในรูปที่ 8.21)

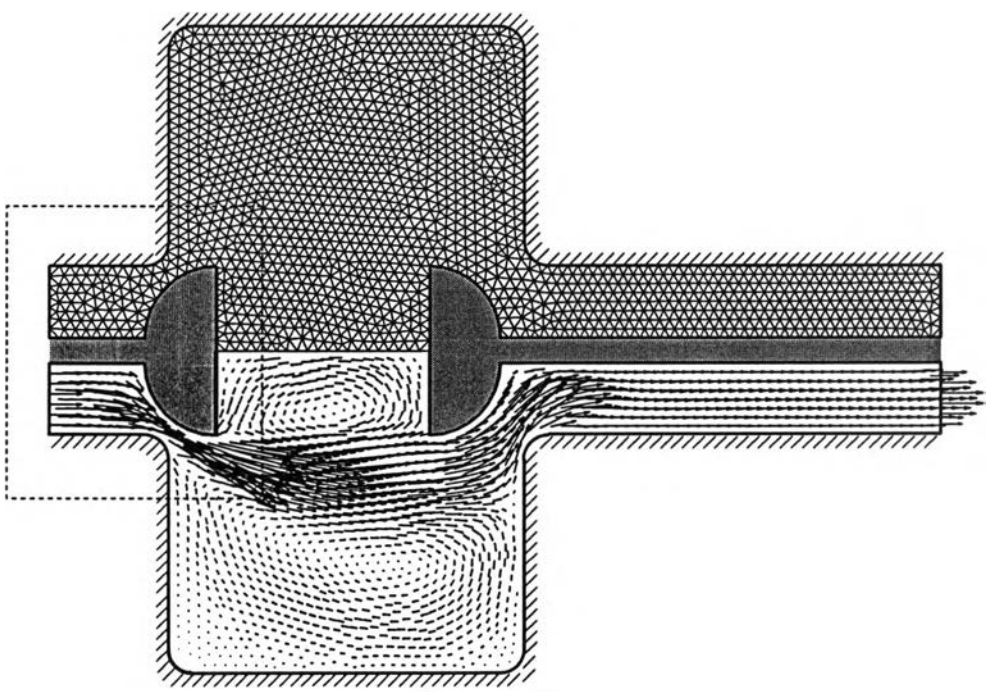
ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาการไหลผ่านวาล์ว

อีกปัญหาหนึ่งที่พบว่ามีความซับซ้อน นั่นคือปัญหาการไหลผ่านวาล์ว โดยมีการไหลเข้ามาทางด้านซ้ายของปัญหาผ่านวาล์วที่ทำหน้าที่ปิด-เปิด ก่อนจะไหลเข้าไปยังห้อง (chamber) และไหลผ่านวาล์วตัวที่ 2 ออกไป ดังแสดงในรูปที่ 8.23 เนื่องจากปัญหาดังกล่าวมีความสมมาตรดังนั้นสามารถที่จะพิจารณาเฉพาะครึ่งล่างหรือครึ่งบนของปัญหาเท่านั้น สำหรับ

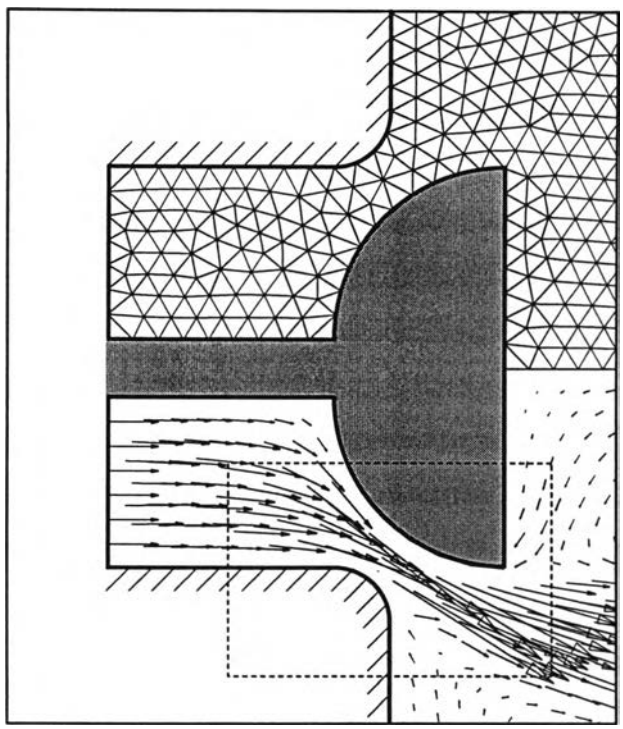
รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาซึ่งใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอจะประกอบไปด้วย 1657 จุดต่อและ 3053 เอลิเมนต์โดยแสดงไว้ในรูปที่ 8.24 พร้อมกับผลการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้จากโปรแกรม EQUAL



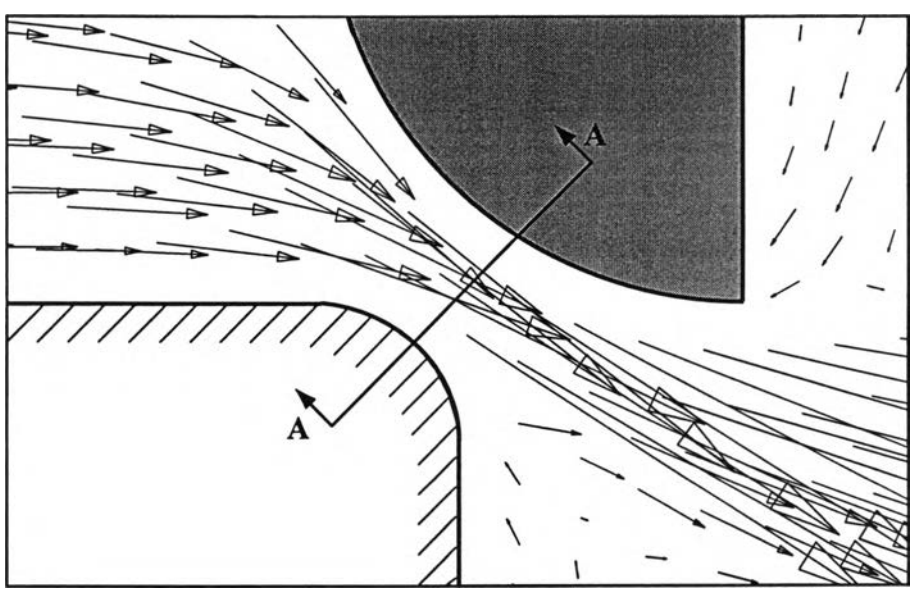
รูปที่ 8.23 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านวาล์ว



รูปที่ 8.24 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวาล์ว และผลการกระจายตัวของความเร็ว

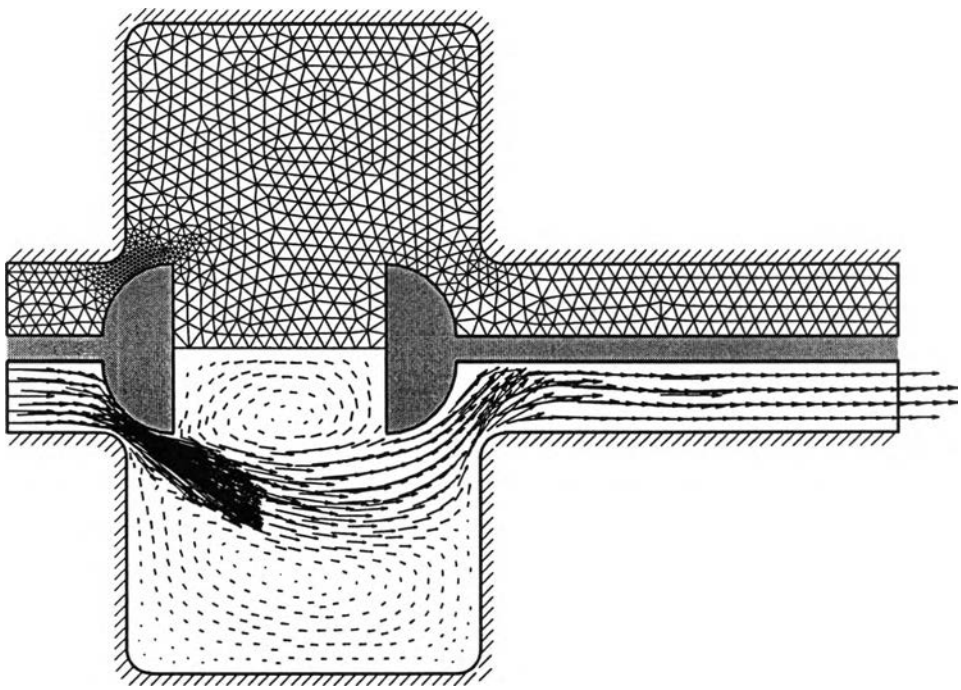


รูปที่ 8.25 ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณในกรอบประของรูปที่ 8.24)



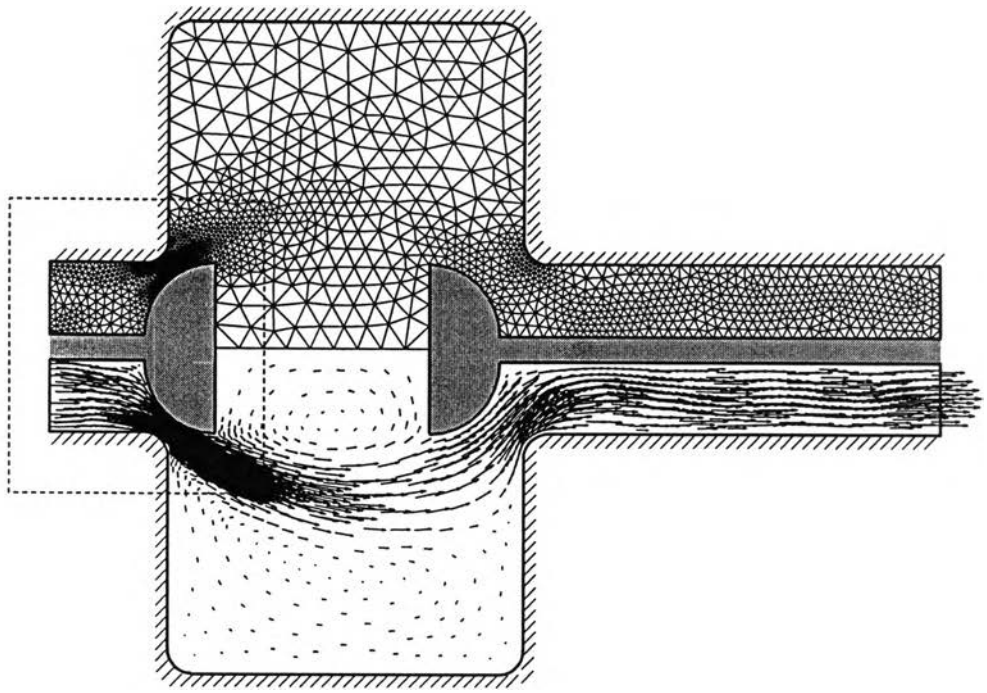
รูปที่ 8.26 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณในกรอบประของรูปที่ 8.25)

ค่าความเร็วที่คำนวณได้ในกรณีใช้เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอจะนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และการกระจายตัวของความเร็วที่คำนวณได้แสดงไว้ในรูปที่ 8.27 ซึ่งประกอบไปด้วย 920 จุดต่อและ 1640 เอลิเมนต์ จากนั้นนำผลของความเร็วที่ได้จากการคำนวณในกรณีที่ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ไปใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งทำให้ได้รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วย 1781 จุดต่อและ 3289 เอลิเมนต์ ถึงแม้ว่าจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 นี้จะมีจำนวนมากกว่ากรณีที่ใช้เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอแต่มากกว่าเพียงเล็กน้อยเท่านั้นคือมากกว่าเพียง 124 จุดต่อ แต่คำตอบของปัญหาการไหลที่คำนวณได้สามารถให้รายละเอียดของการไหลบริเวณช่องแคบใกล้วาล์วได้เป็นอย่างดีดังแสดงในรูปที่ 8.28 ส่วนรายละเอียดของพฤติกรรมการไหลได้แสดงในรูปที่ 8.29-8.30

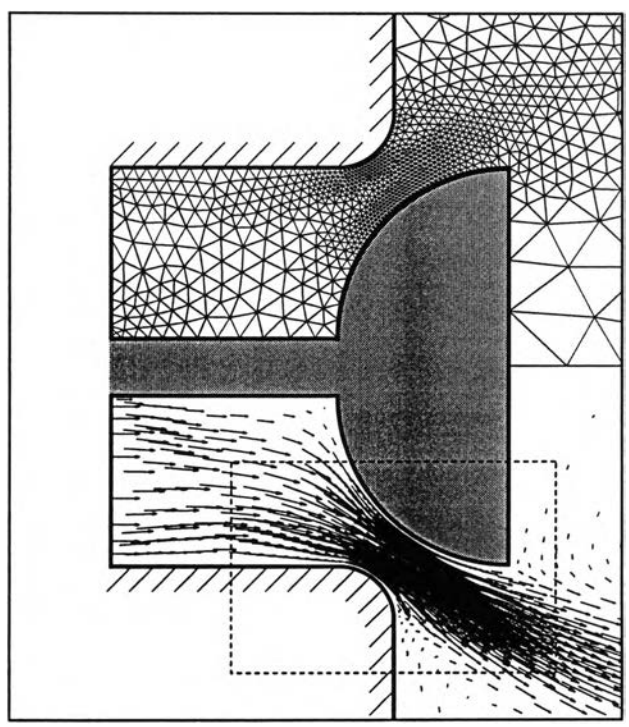


รูปที่ 8.27 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวาล์วและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

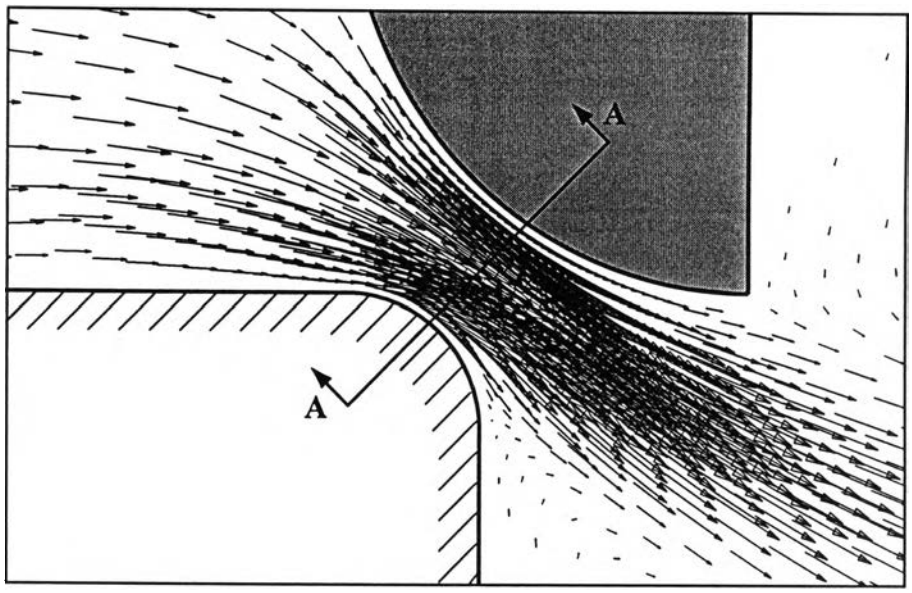
เพื่อให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลจะได้แสดงลักษณะการกระจายของความเร็วตามแนว A-A (ดูในรูปที่ 8.26 และ 8.30) บริเวณช่องแคบระหว่างวาล์วกับผนังท่อ โดยรูปที่ 8.31 แสดงการเปรียบเทียบลักษณะการกระจายตัวของความเร็วในกรณีที่ใช้ขนาดเอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอกับกรณีของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งจะเห็นว่าลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ได้ภายหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้วนั้นมีความชัดเจนขึ้นเป็นอย่างมาก



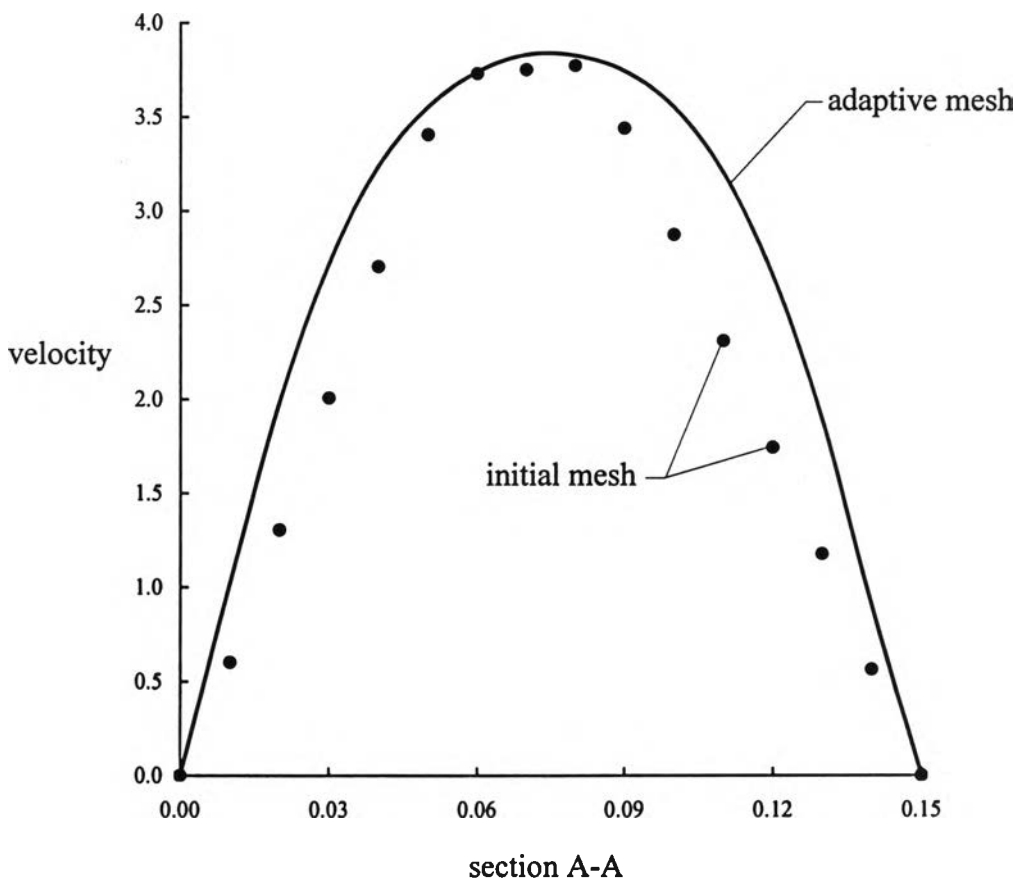
รูปที่ 8.28 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลผ่านวาล์วและผลการกระจายตัวของความเร็ว กรณีการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



รูปที่ 8.29 ลักษณะของเอลิเมนต์และการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว (บริเวณในกรอบประของรูปที่ 8.28)



รูปที่ 8.30 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้วาล์ว
(บริเวณในกรอบประของรูปที่ 8.29)



รูปที่ 8.31 การเปรียบเทียบลักษณะของการกระจายตัวของความเร็วในแนว A-A

จากตัวอย่างทั้งสองที่ได้นำเสนอในหัวข้อนี้แสดงให้เห็นว่าการนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนจะทำให้สามารถเข้าใจพฤติกรรมต่าง ๆของการไหลได้ดียิ่งขึ้น โดยไม่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากตลอดทั่วทั้งขอบเขตของปัญหา เป็นผลให้สามารถลดจำนวนหน่วยความจำและเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณลงได้ ในขณะเดียวกันก็ให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น