บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 <u>เครื่องมือทดสอบ Falling Weight Deflectometer (FWD)</u>

เครื่องมือทดสอบ FWD จัดเป็นเครื่องมือทดสอบเพื่อประเมินสภาพถนนที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในปัจจุบัน ตัวอย่างของเครื่องทดสอบชนิดนี้ ได้แก่ เครื่อง Dynatest FWD เครื่อง KUAB FWD และเครื่อง Phonix FWD ซึ่งในประเทศไทยโดยกรมทางหลวงได้รับมอบเครื่อง FWD รุ่น Dynatest 8000 จากประเทศเดนมาร์กตามโครงการออกแบบโครงสร้างถนนและประมาณความแข็งแรงของถนนโดยใช้เครื่อง FWD (ธีรชาติ พรหมศร, 2544) ลักษณะโดยทั่วไปและการใช้งานของเครื่อง FWD มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1.1 <u>ลักษณะทั่วไป</u>

เครื่อง FWD จะมีลักษณะเป็นรถพ่วงที่สามารถใช้รถตู้ลากไปในขณะปฏิบัติงานและสามารถวิ่งได้ที่ความเร็วเทียบเท่าการจราจรโดยทั่วไป ตัวอย่างของเครื่อง FWD ที่นิยมใช้กันในแถบยุโรปและฝั่งอเมริกาแสดงไว้ในรูปที่ 3.1 ส่วนประกอบโดยรวมของเครื่อง FWD ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 3.2 จะประกอบด้วยสองส่วนหลักที่สำคัญคือ

3.1.1.1 ส่วนที่ให้น้ำหนักกระทำ มีส่วนประกอบได้แก่ ก้อนน้ำหนัก แกนปล่อยน้ำหนัก แผ่นรองรับก้อนน้ำหนัก แผ่นโลหะถ่ายน้ำหนัก และแผ่นยางกันกระแทกที่ทำหน้าที่คล้ายสปริง โดยเครื่องมือจะมีแท่นรองรับก้อนน้ำหนักที่สามารถเพิ่มลดจำนวนลงได้ โดยมีแกนปล่อยน้ำหนักที่ตั้งฉากกับผิวถนน อีกทั้งระยะความสูงในการปล่อยน้ำหนักก็สามารถปรับเปลี่ยนได้ในช่วงระหว่าง 2 ถึง 20 นิ้ว (Chang et al., 1992) ตามความเหมาะสมกับสภาพถนนที่ต้องการโดยใช้ระบบอิเลคโทรไฮโดรลิกควบคุมโดยระบบคอมพิวเตอร์ โดยผู้ควบคุมสามารถจัดรูปแบบการให้น้ำหนักได้จากคีย์บอร์ดของเครื่องคอมพิวเตอร์เท่านั้น นอกจากนี้ในระหว่างการทดสอบระบบจะสามารถตรวจวัดแรง (ในหน่วยกิโลปาสคาล, kPa) ที่กระทำตั้งฉากกับแผ่นรองรับน้ำหนักได้อย่างถูกต้อง

3.1.1.2 ส่วนที่ใช้วัดสัญญาณเพื่อหาค่าการทรุดตัว (Geophone) เป็นส่วนที่สามารถทำการตรวจวัดค่าการทรุดตัว (ในหน่วยไมโครเมตร, μm) ที่เป็นผลมาจากแรงที่กระทำโดยทั่วไปเครื่อง FWD จะประกอบด้วย Geophone ตั้งแต่ 7 ถึง 10 ตัวทำงานร่วมกัน โดยมี Geophone หนึ่งตัวทำหน้าที่วัดค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนที่ตำแหน่งกึ่งกลางใต้จุดที่แรง

ทดสอบกระทำ ขณะที่ Geophone ตัวอื่นๆ ที่เหลือจะกระจายตัวเรียงกันบนแนวหน้าหรือหลัง Geophone ตัวแรก ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการทดสอบ แต่ละ Geophone จะถูกยึดติดกับแกนที่สามารถเลื่อนขึ้นลงโดยอัตโนมัติไปพร้อมกับแผ่นโลหะถ่ายน้ำหนัก สำหรับระยะห่างระหว่าง Geophone แต่ละตัวนั้นสามารถปรับเปลี่ยนได้ตามลักษณะการทดสอบ โดยปกติ Geophone แต่ละตัวจะมีระยะห่างกันประมาณ 30 เซนติเมตร โดยก่อนการทดสอบต้องตรวจให้แน่ใจด้วยว่าผิวรับสัญญาณของ Geophone สัมผัสกับผิวถนนได้เป็นอย่างดี

3.1.2 <u>พฤติกรรมของโครงสร้างถนนขณะทดสอบ</u>

ขณะทำการทดสอบด้วยเครื่อง FWD น้ำหนักกระทำชนิดแรงดลที่เกิดจากการปล่อยก้อนน้ำหนักให้ตกลงไปกระแทกและถ่ายแรงผ่านไปยังชั้นถนนนั้น จะส่งผลให้เกิดคลื่นของความเค้น (Stress wave) คลื่นดังกล่าวจะเกิดการแผ่กระจายไปในโครงสร้างถนนโดยมีลักษณะเป็นรูปครึ่งทรงกลม ดังแสดงในรูปที่ 3.3 การแผ่กระจายของคลื่นจะนำพาเอาพลังงานเนื่องจากแรงกระทำไปยังส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง ซึ่งพลังงานนี้เองเป็นสาเหตุให้เกิดการสั่นไหวที่ผิวของถนน

ลักษณะโดยทั่วไปของข้อมูลการทรุดตัวที่ถูกบันทึกได้จากเครื่อง FWD แสดงไว้ในรูปที่ 3.4 เส้นกราฟแต่ละเส้นแสดงถึงค่าการทรุดตัวที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาของแต่ละ Geophone ในขณะทำการทดสอบทั้งนี้จะเห็นได้ว่าค่าการทรุดตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นในแต่ละ Geophone นั้นจะมีช่วงเวลาเกิดที่เหลื่อมล้ำกัน โดยค่าการทรุดตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นก่อนใน Geophone ที่อยู่ใกล้กับแรงกระทำ และเกิดขึ้นภายหลังใน Geophone ที่อยู่ห่างออกไปตามลำดับ สำหรับสาเหตุที่ทำให้เกิดการทรุดตัวที่เหลื่อมล้ำกันนี้ เนื่องมาจากเวลาที่คลื่นจำเป็นต้องใช้ในการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง

3.1.3 <u>ลักษณะการทำงาน</u>

ในขณะทำการทดสอบนั้นเครื่อง FWD จะปล่อยก้อนน้ำหนักเพื่อให้เกิดแรงทดสอบกระทำไปบนโครงสร้างถนนโดยการปล่อยน้ำหนักทดสอบที่ทราบขนาดจากระดับความสูงที่กำหนดไว้ สำหรับขนาดของแรงกระทำสูงสุดโดยปกติจะมีค่าตั้งแต่ 2,000 ปอนด์จนถึงมากกว่า 20,000 ปอนด์ ขึ้นอยู่กับประเภทและรุ่นของเครื่อง FWD แรงกระทำที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะใกล้เคียงกับสัญญาณคลื่นรูป half-sine wave ในช่วงเวลาประมาณ 30 ถึง 40 มิลลิวินาที (Hossain, Zaniewski and Rajan, 1994; Sebaaly, Davis and Mamlouk, 1985) ก้อนน้ำหนักทดสอบจะตกลงกระแทกกับแผ่นรองรับที่เป็นยางโดยทำหน้าที่คล้ายสปริง (รูปที่ 3.2) ซึ่งขนาดของก้อนน้ำหนักทดสอบ ความสูงที่ปล่อยก้อนน้ำหนัก และคุณสมบัติของแผ่นยางรองรับต้องได้รับการออกแบบให้

เหมาะสมเพราะเป็นส่วนสำคัญที่จะทำให้ได้ลักษณะแรงที่กระทำต่อโครงสร้างถนนมีขนาด รูปร่าง และช่วงเวลาของแรงกระทำที่เหมาะสมคล้ายคลึงกับลักษณะของแรงกระทำที่เกิดขึ้นเมื่อล้อรถบรรทุกหนักกระทำต่อโครงสร้างถนนขณะรถวิ่งผ่าน อย่างไรก็ตามในการทำงานทดสอบโดยใช้เครื่อง FWD นั้นค่าแรงกระทำสูงสุด จะได้รับการวัดและบันทึกโดยตัวควบคุมการให้น้ำหนัก (Load cell) ของเครื่อง FWD (รูปที่ 3.2)

ข้อมูลการทดสอบจากเครื่อง FWD สามารถจะใช้ในการจำลองรูปแบบของการทรุดตัวของโครงสร้างถนนเนื่องจากการจราจรได้ โดยได้มีการศึกษาทดสอบเปรียบเทียบผลที่ได้จากเครื่อง FWD กับผลที่เกิดจากสภาพน้ำหนักจริงที่กระทำกับถนนของล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนน ซึ่ง Tholen และคณะ (1992) ได้รายงานถึงความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีระหว่างผลของค่าการทรุดตัวที่วัดได้จากเครื่อง FWD กับผลของค่าการทรุดตัวทีเกิดจากล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนนดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.5 ซึ่งแสดงถึงลักษณะสัญญาณค่าการทรุดตัวจากเครื่อง FWD โดยทั่วไปซึ่งแสดงไว้เปรียบเทียบกับลักษณะสัญญาณค่าการทรุดตัวจากล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนน จะเห็นว่าผลสะท้อนที่ได้จากเครื่อง FWD นั้นไม่แตกต่างไปจากผลสะท้อนที่ได้จากล้อรถหนักที่สัญจรไปมาบนถนนนักจะมีก็แต่ว่าสัญญาณค่าการทรุดตัวของเครื่อง FWD นั้น มีช่วงเวลาระหว่างสัญญาณเพียง 0.025 วินาทีซึ่งสั้นกว่าช่วงเวลาระหว่างสัญญาณที่เกิดจากล้อรถ เมื่อเครื่อง FWD เคลื่อนมาถึงยังตำแหน่งที่ต้องการบนถนนที่จะทำการตรวจสอบ เครื่อง FWD ต้องหยุดเพื่อปล่อยก้อนน้ำหนักพร้อมทั้งวัดค่าการทรุดตัว โดยปกติจะทำการวัดค่าทุกระยะ 50 ถึง 100 เมตร โดยเวลาที่ใช้ในการทดสอบแต่ละจุดไม่เกิน 5 นาที หลังจากระบบได้รับสัญญาณที่อ่านได้จาก Geophone แล้วสัญญาณของค่าการทรุดตัวที่วัดได้จะได้รับการบันทึกโดยระบบเก็บข้อมูลคอมพิวเตอร์ที่ต่ออยู่กับ Geophones สำหรับข้อมูลที่ได้จากเครื่อง FWD นั้นจะเป็นชุดของค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนที่วัดได้จากการปล่อยน้ำหนักในแต่ละจุดทดสอบ ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุในแต่ละชั้นของโครงสร้างถนนต่อไป

3.2 <u>การคำนวณย้อนกลับ</u>

ปัญหาที่ต้องใช้วิธีการคำนวณย้อนกลับส่วนใหญ่มักพบบ่อยครั้งในงานด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม โดยผลที่ได้จากการแก้ปัญหานี้มักจะเป็นค่าพารามิเตอร์ที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบได้ ลักษณะของปัญหาจะเป็นไปตามรูปที่ 3.6 ยกตัวอย่างเช่น เมื่อมีคานวางอยู่บนจุดรองรับ (support) ซึ่งอยู่ที่ปลายทั้งสองข้างและมีน้ำหนักกระทำที่บริเวณกึ่งกลางคาน ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกระทำ (P) และค่าการทรุดตัวที่กึ่งกลางคาน (u) คือ $P = Ku$ เมื่อ K คือ ค่าคงที่ของคาน โดยในปัญหานี้ต้องการจะหาค่าพารามิเตอร์ K ที่จะสามารถอธิบาย

ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกระทำและค่าการทรุดตัวที่กึ่งกลางคาน จากปัญหาที่กล่าวมาเมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 3.6 ค่าที่ป้อนเข้า (input) จะหมายถึง น้ำหนักกระทำที่บริเวณกึ่งกลางคาน ส่วนกระบวนการ (process) จะหมายถึง แบบจำลองของความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกระทำและค่าการทรุดตัวที่กึ่งกลางคาน ส่วนผลลัพธ์ (output) ของระบบจะหมายถึง ค่าการทรุดตัวที่กึ่งกลางคาน วัดได้จากเครื่องมือทดสอบ เมื่อทราบข้อมูลของค่าที่ป้อนเข้า (น้ำหนักกระทำ) และผลลัพธ์ของระบบ (ค่าการทรุดตัว) แล้วทำการเลือกกระบวนการที่เหมาะสม ก็จะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบของค่าพารามิเตอร์ (K) ที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบได้

ในการคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าคุณสมบัติของโครงสร้างถนนจากข้อมูลการทดสอบด้วยเครื่อง FWD ในลักษณะพลวัตนั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.7 โดยค่าที่ป้อนเข้าจะประกอบด้วยข้อมูลของน้ำหนักกระทำ ตำแหน่งที่วัดการทรุด ค่าคุณสมบัติของวัสดุในแต่ละชั้นของถนน อันประกอบด้วย ค่าอัตราส่วนปัวซอง ความหนาแน่น ความหนาของชั้นถนน และค่าโมดูลัสเริ่มต้น ส่วนผลลัพธ์ที่ได้ออกมา คือ ค่าการทรุดตัวที่ตำแหน่งต่างๆ จากนั้นจึงทำการเลือกแบบจำลองของโครงสร้างถนนที่รับแรงกระทำแบบพลวัตและวิธีการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุด ก็จะวิเคราะห์หาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของชั้นถนนออกมาได้

3.3 <u>แบบจำลองของโครงสร้างถนนที่รับแรงกระทำแบบพลวัต</u>

โครงสร้างถนนจะถูกจำลองให้มีลักษณะเป็นตัวกลางยืดหยุ่นหลายชั้น ที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุจำนวนหลายชั้นที่วางตัวอยู่บนชั้นดินยืดหยุ่น (รูปที่ 3.8 ก) หรือบนชั้นหินแข็ง (รูปที่ 3.8 ข) ในแต่ละชั้นของวัสดุจะพิจารณาเป็นตัวกลางยืดหยุ่นเนื้อเดียว ในการวิเคราะห์ปัญหาจะทำในลักษณะพลวัต โดยแรงที่มากระทำจะมีลักษณะเป็นแรงดล ที่สมมาตรรอบแกน (Axisymmetric loading) และมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอภายใต้แผ่นโลหะวงกลมที่ถ่ายน้ำหนักกระทำจากเครื่อง FWD (รูปที่ 3.2) ในการศึกษานี้จะใช้แบบจำลองของวัสดุในแต่ละชั้นของโครงสร้างถนนเป็นชนิดยืดหยุ่นเชิงเส้น การที่ให้วัสดุมีพฤติกรรมเป็นเชิงเส้นได้เพราะในการทดสอบไม่ทำลายด้วยเครื่อง FWD จะให้น้ำหนักกระทำน้อย ซึ่งช่วงที่น้ำหนักกระทำดังกล่าว ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นจะประมาณได้ด้วยเส้นตรง

3.3.1 รูปคำตอบทั่วไป

การวิเคราะห์หาค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนในลักษณะพลวัต เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของกฎข้อที่สองของนิวตัน ในระบบทางกลศาสตร์ที่มีความต่อเนื่อง (Continuum mechanics) โดยกฎของนิวตันสามารถเขียนเป็นสมการ Navier's displacement equation of motion ที่แสดงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ดังนี้

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial r}+\mu\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r} \quad =\rho\ddot{u}_r \tag{3.1}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z \quad =\rho\ddot{u}_z \tag{3.2}$$

เมื่อ $e \quad = \quad \frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$ (3.3)

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.4}$$

เมื่อ u_r และ u_z คือ การเคลื่อนที่บนผิวถนนในทิศทางแกนรัศมี (r) และแกนดิ่ง (z) ตามรูปที่ 3.2 ρ คือ ความหนาแน่นมวล (Mass density) λ และ μ คือ ค่าคงที่ Lame's constants และเครื่องหมาย " $\ddot{}$ " ที่ปรากฏบนฟังก์ชัน หมายถึง การหาอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันเทียบกับเวลา

เนื่องจากสมมติฐานข้างต้นทำให้การเคลื่อนที่ในแนว θ หรือ u_θ ไม่เกิดขึ้น ในการหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ u_r และ u_z จะสามารถจัดให้อยู่ในรูปของ Lame potentials $\phi(r,z,t)$ และ $\chi(r,z,t)$ ได้ดังนี้

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z} \tag{3.5}$$

$$u_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\chi}{\partial r}\right) \tag{3.6}$$

ใช้วิธี Separation of variables กับสมการ 3.5 และ 3.6 ดังนี้

$$u_r(r,z,t) \quad = \quad \bar{u}_r(r,z)e^{i\omega t} \tag{3.7}$$

$$u_z(r,z,t) \quad = \quad \bar{u}_z(r,z)e^{i\omega t} \tag{3.8}$$

จะได้

$$u_r = \left[\frac{\partial \bar{\phi}(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\chi}(r,z)}{\partial r \partial z} \right] e^{i\omega t} \tag{3.9}$$

$$u_z = \left[\frac{\partial \bar{\phi}(r,z)}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \bar{\chi}(r,z)}{\partial r} \right) \right] e^{i\omega t} \tag{3.10}$$

โดยการแทนค่าสมการที่ 3.9 และ 3.10 ลงในสมการที่ 3.1 และ 3.2 ก็จะได้ความสัมพันธ์ของ $\bar{\phi}(r,z,\omega)$ และ $\bar{\chi}(r,z,\omega)$ ดังนี้

$$\nabla^2 \bar{\phi} - k_1^2 \bar{\phi} = 0 \tag{3.11}$$

$$\nabla^2 \bar{\chi} - k_2^2 \bar{\chi} = 0 \tag{3.12}$$

เมื่อ $k_1 = \frac{\omega i}{c_1}$ $k_2 = \frac{\omega i}{c_2}$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3.13}$$

ให้การแปลงฮันเกล (Hankel transform) อันดับที่ m ของฟังก์ชัน $\bar{y}(r,z,\omega)$ เทียบกับตัวแปร r เขียนแทนด้วย $y^*(\xi,z,\omega)$ และ การหาส่วนผกผันของฮันเกล คือ

$$y^*(\xi,z,\omega) = \int_0^\infty r\bar{y}(r,z,\omega) J_m(\xi r)\, dr \tag{3.14}$$

$$\bar{y}(r,z,\omega) = \int_0^\infty \xi y^*(\xi,z,\omega) J_m(\xi r)\, d\xi \tag{3.15}$$

เมื่อ ξ คือ พารามิเตอร์ของการแปลงฮันเกล (Hankel transform parameter) และ J_m คือ ฟังก์ชันเบสเซลอันดับที่ m และเครื่องหมาย " * " ที่ปรากฏบนฟังก์ชัน หมายถึง การแปลงฟังก์ชันดังกล่าวให้อยู่ในโดเมนของฮันเกลและความถี่

ใช้วิธี Separation of variables กับสมการที่ 3.11 และ 3.12 โดยกำหนดให้ค่า Lame potentials อยู่ในรูปผลคูณระหว่างฟังก์ชันของระยะทาง r หรือ $R(r)$ และฟังก์ชันของระยะในแนวดิ่ง z หรือ $Z(z)$ ดังนี้

$$\bar{\phi}(r,z,\omega) = R_1(r)\ Z_1(z) \tag{3.16}$$

$$\bar{\chi}(r,z,\omega) = R_2(r)\ Z_2(z) \tag{3.17}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ 3.16 และ 3.17 ลงในสมการที่ 3.11 และ 3.12 จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $R_i(r)$ ดังสมการที่ 3.18

$$r\frac{d^2R_i}{dr^2}+\frac{dR_i}{dr}-(k_i^2-\omega)rR_i = 0 \tag{3.18}$$

โดย i เท่ากับ 1 และ 2 เมื่อพิจารณาสมการที่ 3.11 และ 3.12 ตามลำดับ

สมการที่ 3.18 จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซลอันดับที่ศูนย์ เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีการเคลื่อนที่สมมาตรรอบแกนดิ่ง ดังนั้น ในการแปลงฮันเกลดังสมการที่ 3.14 กับสมการที่ 3.11 และ 3.12 จะใช้เบสเซลฟังก์ชันอันดับที่ศูนย์

โดยการใช้การแปลงฮันเกลกับสมการที่ 3.11 และ 3.12 เทียบกับ r แล้วทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์และหาส่วนผกผันของฮันเกลดังสมการที่ 3.15 จะได้ผลเฉลยของ Lame potentials ดังนี้

$$\bar{\phi}(r,z,\omega)=\int_0^\infty\left[A(\xi,\omega)e^{-k_2\alpha_1 z}+B(\xi,\omega)e^{k_2\alpha_1 z}\right]J_0(\xi r)d\xi \tag{3.19}$$

$$\bar{\chi}(r,z,\omega)=\int_0^\infty\left[C(\xi,\omega)e^{-k_2\alpha_2 z}+D(\xi,\omega)e^{k_2\alpha_2 z}\right]\ J_0(\xi r)d\xi \tag{3.20}$$

โดย

$$k_2\alpha_1 = \sqrt{\xi^2+k_1^2} \qquad k_2\alpha_2 = \sqrt{\xi^2+k_2^2} \tag{3.21}$$

เมื่อ A, B, C และ D เป็นฟังก์ชันค่าเลือก (Arbitrary functions) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบและเงื่อนไขความต่อเนื่อง (Boundary/continuity condition)

จากสมการที่ 3.5 3.6 3.19 และ 3.20 จะได้ผลเฉลยของการเคลื่อนที่ $\bar{u}_r$ และ $\bar{u}_z$ ดังนี้

$$\bar{u}_r = \int_0^\infty\left[-\xi Ae^{-k_2\alpha_1 z}-\xi Be^{k_2\alpha_1 z}+k_2\alpha_2\xi Ce^{-k_2\alpha_2 z}-k_2\alpha_2\xi De^{k_2\alpha_2 z}\right]J_1(\xi r)d\xi \tag{3.22}$$

$$\bar{u}_z = \int_0^\infty\left[-k_2\alpha_1 Ae^{-k_2\alpha_1 z}+k_2\alpha_1 Be^{k_2\alpha_1 z}+\xi^2 Ce^{-k_2\alpha_2 z}+\xi^2 De^{k_2\alpha_2 z}\right]J_0(\xi r)d\xi \tag{3.23}$$

โดยค่าความเค้น σ_{zr} และ σ_{zz} สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\sigma_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) \tag{3.24}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3.25}$$

ใช้วิธี Separation of variables กับสมการที่ 3.24 และ 3.25 และจากสมการที่ 3.22 และ 3.23 จะได้ผลเฉลยของค่าความเค้น $\bar{\sigma}_{zr}$ และ $\bar{\sigma}_{zz}$ ที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ u_r และ u_z ตามลำดับดังนี้

$$\bar{\sigma}_{zr} = \mu\int_0^\infty\left[2k_2\alpha_1 Ae^{-k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_1 Be^{k_2\alpha_1 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right)Ce^{-k_2\alpha_2 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right)De^{k_2\alpha_2 z}\right]\xi J_1(\xi r)d\xi \tag{3.26}$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \mu\int_0^\infty\left[\left(2\xi^2 + k_2^2\right)Ae^{-k_2\alpha_1 z} + \left(2\xi^2 + k_2^2\right)Be^{k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_2\xi^2 Ce^{-k_2\alpha_2 z} + 2k_2\alpha_2\xi^2 De^{k_2\alpha_2 z}\right]J_0(\xi r)d\xi \tag{3.27}$$

เพื่อให้ผลเฉลยอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นจะพิจารณาฟังก์ชันของการเคลื่อนที่และความเค้นให้อยู่ในโดเมนของฮันเกลซึ่งจะไม่อยู่ในรูปของปริพันธ์ โดยการพิจารณาเปรียบเทียบการหาส่วนผกผันของฮันเกลกับการเคลื่อนที่และความเค้นที่อยู่ในโดเมนของความถี่และฮันเกล ดังนี้

$$\bar{u}_r(r,z,\omega) = \int_0^\infty u_r^*(\xi,z,\omega)J_1(\xi r)\xi d\xi \tag{3.28}$$

$$\bar{u}_z(r,z,\omega) = \int_0^\infty u_z^*(\xi,z,\omega)J_0(\xi r)\xi d\xi \tag{3.29}$$

$$\bar{\sigma}_{zr}(r,z,\omega) = \int_0^\infty \sigma_{zr}^*(\xi,z,\omega)J_1(\xi r)\xi d\xi \tag{3.30}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(r,z,\omega) = \int_0^\infty \sigma_{zz}^*(\xi,z,\omega)J_0(\xi r)\xi d\xi \tag{3.31}$$

พิจารณาค่าปริพัทธ์ของสมการที่ 3.22 3.23 3.26 และ 3.27 เปรียบเทียบสมการที่ 3.28 3.29 3.30 และ 3.31 ตามลำดับ จะได้รูปคำตอบทั่วไปของการเคลื่อนที่และความเค้นในโดเมนของความถี่และฮันเกลดังนี้

$$u_r^\bullet(\xi,z,\omega) = -Ae^{-k_2\alpha_1 z} - Be^{k_2\alpha_1 z} + k_2\alpha_2 Ce^{-k_2\alpha_2 z} - k_2\alpha_2 De^{k_2\alpha_2 z} \tag{3.32}$$

$$u_z^\bullet(\xi,z,\omega) = -\frac{k_2}{\xi}\alpha_1 Ae^{-k_2\alpha_1 z} + \frac{k_2}{\xi}\alpha_1 Be^{k_2\alpha_1 z} + \xi Ce^{-k_2\alpha_2 z} + \xi De^{k_2\alpha_2 z} \tag{3.33}$$

$$\sigma_{zr}^\bullet(\xi,z,\omega) = \mu\left[2k_2\alpha_1 Ae^{-k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_1 Be^{k_2\alpha_1 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right)Ce^{-k_2\alpha_2 z} - \left(2\xi^2 + k_2^2\right)De^{k_2\alpha_2 z}\right] \tag{3.34}$$

$$\sigma_{zz}^\bullet(\xi,z,\omega) = \frac{\mu}{\xi}\left[\left(2\xi^2 + k_2^2\right)Ae^{-k_2\alpha_1 z} + \left(2\xi^2 + k_2^2\right)Be^{k_2\alpha_1 z} - 2k_2\alpha_2\xi^2 Ce^{-k_2\alpha_2 z} + 2k_2\alpha_2\xi^2 De^{k_2\alpha_2 z}\right] \tag{3.35}$$

ซึ่งสามารถจัดสมการที่ 3.32 ถึง 3.35 ได้ในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$\mathbf{u}^\bullet(\xi,z,\omega) = \mathbf{R}(\xi,z,\omega)\mathbf{C}(\xi,\omega) \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\bullet(\xi,z,\omega) = \mathbf{S}(\xi,z,\omega)\mathbf{C}(\xi,\omega) \tag{3.37}$$

เมื่อ

$$\mathbf{u}^\bullet(\xi,z,\omega) = \left[u_r^\bullet \;\; u_z^\bullet\right]^T \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\bullet(\xi,z,\omega) = \left[\sigma_{zr}^\bullet \;\; \sigma_{zz}^\bullet\right]^T \tag{3.39}$$

$$\mathbf{C}(\xi,\omega) = [A \;\; B \;\; C \;\; D]^T \tag{3.40}$$

โดย

$$\mathbf{R}(\xi,z,\omega) = \begin{bmatrix} -e^{-k_2\alpha_1 z} & -e^{k_2\alpha_1 z} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z} & -k_2\alpha_2 e^{k_2\alpha_2 z} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z}}{\xi} & \dfrac{k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z} & \xi e^{k_2\alpha_2 z} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$$\mathbf{S}(\xi,z,\omega) = \mu\begin{bmatrix} 2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z} & -2k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z} & -\left(2\xi^2 + k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z} & -\left(2\xi^2 + k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z} \\ \dfrac{\left(2\xi^2 + k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z}}{\xi} & \dfrac{\left(2\xi^2 + k_2^2\right)e^{k_2\alpha_1 z}}{\xi} & -2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z} & 2k_2\alpha_2\xi e^{k_2\alpha_2 z} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

สัญลักษณ์ T ที่ปรากฏ หมายถึง ทรานสโพสของเมทริกซ์

3.3.2 <u>สมการสติฟเนสเมทริกซ์</u>

พิจารณาแบบจำลองโครงสร้างชั้นถนนที่มี N ชั้นตามรูปที่ 3.8 ในกรณีนี้เราจะสามารถแบ่งชั้นของโครงสร้างถนนได้เป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ ส่วนที่เป็นชั้นที่มีความลึกจำกัด (จำนวน N ชั้น) และส่วนที่เป็นชั้นดินยืดหยุ่นที่มีความลึกอนันต์ (ชั้นที่ $N+1$ ในรูปที่ 3.8 ก) พิจารณาความสัมพันธ์ของการทรุดตัวและความเค้นที่ผิวบนและล่างของชั้นที่มีความลึกจำกัดชั้นที่ n (n= 1, 2, 3,.., N) จะได้ความสัมพันธ์จากสมการที่ 3.36 และ 3.37 เป็นดังนี้

$$\mathbf{U}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(\xi, z_n, \omega) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{R}_n(\xi, z_{n+1}, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{C}_n \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{U}_n^* = \mathbf{R}_n \mathbf{C}_n \tag{3.43}$$

$$\mathbf{F}_n^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_n(\xi, z_n, \omega) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{S}_n(\xi, z_{n+1}, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{C}_n \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{F}_n^* = \mathbf{S}_n \mathbf{C}_n \tag{3.44}$$

เมื่อ
$$\mathbf{U}_n^* = \left[\mathbf{u}_n^*(\xi, z_n, \omega) \;\; \mathbf{u}_n^*(\xi, z_{n+1}, \omega) \right]^T \tag{3.45}$$

$$\mathbf{F}_n^* = \left[\boldsymbol{\sigma}_n^*(\xi, z_n, \omega) \;\; \boldsymbol{\sigma}_n^*(\xi, z_{n+1}, \omega) \right]^T \tag{3.46}$$

ในสมการข้างต้น $\mathbf{U}_n^*$ และ $\mathbf{F}_n^*$ เป็นเวคเตอร์ของค่าการทรุดตัวและหน่วยแรงที่ผิวบนและล่างของแต่ละชั้นตามลำดับ ส่วนค่า $\mathbf{C}_n$ ในสมการที่ 3.43 และ 3.44 เป็นเวคเตอร์ของฟังก์ชันค่าเลือกที่สอดคล้องในแต่ละชั้น จากการจัดรูปสมการที่ 3.43 และ 3.44 ใหม่จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\mathbf{U}_n^*$ และ $\mathbf{F}_n^*$ ดังนี้

$$\mathbf{F}_n^* = \mathbf{K}_n^* \mathbf{U}_n^* \qquad (n = 1\ 2\ 3,.., N) \tag{3.47}$$

โดยที่
$$\mathbf{K}_n^* = \mathbf{S}_n \mathbf{R}_n^{-1} \tag{3.48}$$

เมื่อ

$$\mathbf{R}_n(\xi,z,\omega)=\begin{bmatrix} -e^{-k_2\alpha_1 z_n} & -e^{k_2\alpha_1 z_n} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z_n} & -k_2\alpha_2 e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_n}}{\xi} & \dfrac{k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_n}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z_n} & \xi e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ -e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}} & -e^{k_2\alpha_1 z_{n+1}} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & -k_2\alpha_2 e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}}}{\xi} & \dfrac{k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_{n+1}}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & \xi e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$$\mathbf{S}_n(\xi,z,\omega)=\mu\begin{bmatrix} -2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_n} & 2k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_n} & \left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z_n} & \left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ -\dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z_n}}{\xi} & -\dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_n}}{\xi} & 2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z_n} & -2k_2\alpha_2\xi e^{k_2\alpha_2 z_n} \\ 2k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}} & -2k_2\alpha_1 e^{k_2\alpha_1 z_{n+1}} & -\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & -\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \\ \dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1 z_{n+1}}}{\xi} & \dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}}}{\xi} & -2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2 z_{n+1}} & 2k_2\alpha_2\xi e^{k_2\alpha_2 z_{n+1}} \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

เมื่อ $\mathbf{K}^*_n$ ในสมการที่ 3.47 และ 3.48 คือ สติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ n ซึ่ง $\mathbf{K}^*_n$ จะเป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด 4×4 และขึ้นอยู่กับ ความหนาของชั้น ค่าคุณสมบัติของวัสดุ และค่าพารามิเตอร์ ξ และ ω

สำหรับความสัมพันธ์ของการทรุดตัวและความเค้นที่ผิวบนของชั้นที่มีความลึกอนันต์ (ชั้นกึ่งปริภูมิ) หรือชั้นที่ $N+1$ (รูปที่ 3.8 ก) เป็นดังนี้

$$\mathbf{F}^*_{N+1}=\mathbf{K}^*_{N+1}\mathbf{U}^*_{N+1} \tag{3.51}$$

เมื่อ

$$\mathbf{U}^*_{N+1}=\left[\mathbf{u}^*_{N+1}(\xi,z_{N+1},\omega)\right]^T \tag{3.52}$$

$$\mathbf{F}^*_{N+1}=\left[\boldsymbol{\sigma}^*_{N+1}(\xi,z_{N+1},\omega)\right]^T \tag{3.53}$$

และโดยเงื่อนไขสภาพขอบ ที่ความลึกอนันต์นั้น การทรุดตัวและความเค้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ ค่า B และ D ในสมการที่ 3.32 ถึง 3.35 จะเท่ากับศูนย์ จะได้

$$\mathbf{R}_{N+1}(\xi,z,\omega)=\begin{bmatrix} -e^{-k_2\alpha_1 z_{N+1}} & k_2\alpha_2 e^{-k_2\alpha_2 z_{N+1}} \\ \dfrac{-k_2\alpha_1 e^{-k_2\alpha_1 z_{N+1}}}{\xi} & \xi e^{-k_2\alpha_2 z_{N+1}} \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$\mathbf{S}_{N+1}(\xi,z,\omega)=\mu\begin{bmatrix}-2k_2\alpha_1e^{-k_2\alpha_1z_{N+1}} & \left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_2z_{N+1}}\\ -\dfrac{\left(2\xi^2+k_2^2\right)e^{-k_2\alpha_1z_{N+1}}}{\xi} & 2k_2\alpha_2\xi e^{-k_2\alpha_2z_{N+1}}\end{bmatrix} \tag{3.55}$$

และ
$$\mathrm{K}^{\bullet}_{N+1}=\mathrm{S}_{N+1}\mathrm{R}^{-1}_{N+1} \tag{3.56}$$
นั่นคือ
$$\mathbf{K}^{\bullet}_{N+1}=\frac{\mu}{k_2^2\alpha_1\alpha_2-\xi^2}\begin{bmatrix}k_2^3\alpha_1 & \xi\left(2k_2^2\alpha_1\alpha_2-2\xi^2-k_2^2\right)\\ \xi\left(2k_2^2\alpha_1\alpha_2-2\xi^2-k_2^2\right) & k_2^3\alpha_{21}\end{bmatrix} \tag{3.57}$$

จะเห็นได้ว่าสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ $N+1$ หรือ $\mathbf{K}^{\bullet}_{N+1}$ นั้นจะเป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด 2×2 และขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติของวัสดุ และค่าพารามิเตอร์ ξ และ ω เท่านั้น

จากนั้นก็ทำการรวมสติฟเนสเมทริกซ์ในแต่ละชั้น ก็จะได้สติฟเนสเมทริกซ์รวมของทั้งโครงสร้าง คือ

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{F}^{(1)}\\ \mathbf{F}^{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{F}^{(N)}\\ \mathbf{F}^{(N+1)}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{K}^{(1)}} & & & \\ & \boxed{\mathbf{K}^{(2)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbf{K}^{(N)}}\\ & & & \boxed{\mathbf{K}^{(N+1)}}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{U}^{(1)}\\ \mathbf{U}^{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{U}^{(N)}\\ \mathbf{U}^{(N+1)}\end{Bmatrix} \tag{3.58}$$

สำหรับค่าหน่วยแรงทางด้านซ้ายมือของสมการที่ 3.58 นั้น $F^{(1)}$ จะมีค่าเท่ากับหน่วยแรงที่กระทำที่ผิวบนของโครงสร้างถนนซึ่งประกอบด้วยความเค้นในแนวตั้งฉากกับผิวถนนที่มีค่าเท่ากับความเค้นเนื่องจากน้ำหนักทดสอบจากเครื่อง FWD และความเค้นเฉือนที่มีค่าเป็นศูนย์ ส่วน F อื่นๆ จะเท่ากับศูนย์เพราะไม่มีแรงกระทำภายนอกที่ผิวรอยต่อระหว่างชั้นของถนน

จาก $\mathbf{K}^{\bullet}_{n}$ ของทุกชั้น และ $\mathbf{K}^{\bullet}_{N+1}$ จะสามารถสร้างโกลบัลสติฟเนสเมทริกซ์ (Global Stiffness Matrix) ที่มีขนาด $2(N+1)\times2(N+1)$ กรณีที่โครงสร้างชั้นถนนวางอยู่บนชั้นดินยืดหยุ่น และมีขนาด $2N\times2N$ กรณีที่โครงสร้างชั้นถนนวางอยู่บนชั้นหินแข็ง

เพื่อให้การทดสอบด้วยเครื่อง FWD มีความสอดคล้องกันกับสมมติฐานของงานวิจัย ที่สมมติให้ตัวกลางยืดหยุ่นหลายชั้นมีอาณาบริเวณของเนื้อวัสดุทางด้านข้างขยายออกไปอย่างไม่จำกัดนั้น ก็ควรจะทำการทดสอบที่ตำแหน่งห่างออกมาจากขอบของถนน เป็นระยะทางไม่น้อย

กว่าระยะทางระหว่างตำแหน่งที่ให้น้ำหนักกระทำกับตำแหน่งของ Geophone ตัวที่อยู่ไกลที่สุด เพื่อไม่ให้เกิดความคลาดเคลื่อนเนื่องจากผลของการสะท้อนของคลื่นในขณะทดสอบ ความคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะไม่เกิดขึ้นในกรณีที่ทดสอบกับโครงสร้างขนาดใหญ่ เช่น สนามบิน เป็นต้น

3.3.3 การหาค่าสติฟเนสเมทริกซ์ของโครงสร้างถนน

การวิเคราะห์หาค่าการทรุดตัวของโครงสร้างถนนจะถูกจำลองให้มีลักษณะเป็นตัวกลางยืดหยุ่นหลายชั้น โดยความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่มากระทำ และการทรุดตัวที่เกิดขึ้นในแต่ละชั้นจะถูกจัดให้อยู่ในรูปของสมการสติฟเนสเมทริกซ์ขนาด 4×4 ยกเว้นกรณีในชั้นกึ่งปริภูมิที่สมการสติฟเนสเมทริกซ์จะมีขนาด 2×2 ในการหาค่าการทรุดตัวที่ผิวบนของถนนจำเป็นต้องทำการรวมสติฟเนสเมทริกซ์ของแต่ละชั้นก่อนเพื่อให้ได้สติฟเนสเมทริกซ์รวมของทั้งโครงสร้างดังสมการที่ 3.58 จากนั้นใช้วิธีการหาเมทริกซ์ผกผันก็จะได้ค่าการทรุดตัวที่เกิดขึ้น เนื่องจากการคำนวณโดยวิธีการดังกล่าวนั้นสติฟเนสเมทริกซ์รวมที่หาได้มีขนาดค่อนข้างใหญ่ขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นของถนน และต้องการทราบเพียงการเคลื่อนที่ที่ผิวบนของถนนเท่านั้น เพื่อให้การคำนวณโดยการโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความง่ายขึ้น จึงได้ทำการจัดรูปสมการสติฟเนสเมทริกซ์ใหม่ ก่อนที่จะเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ ทั้งนี้จะใช้ผลของความสมดุลของแรงภายในที่ทำให้แรงกระทำภายนอกระหว่างชั้นของโครงสร้างถนนที่ค่าเป็นศูนย์หรือค่า $\mathbf{F}^{(n)}$ เมื่อ n ไม่เท่ากับ 1 ในสมการที่ 3.58 จะมีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง ในการจัดรูปสมการสติฟเนสเมทริกซ์สามารถทำได้โดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำกับการทรุดตัวที่เกิดขึ้นของโครงสร้างถนนชั้นที่ n ดังสมการที่ 3.47 โดย

$$\mathrm{U}_n^* = \begin{Bmatrix} \mathrm{u}_n^*(\xi, z_n, \omega) \\ \mathrm{u}_n^*(\xi, z_{n+1}, \omega) \end{Bmatrix} \qquad (3.59)$$

$$\mathbf{K}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n^1 & \mathbf{K}_n^2 \\ \mathbf{K}_n^3 & \mathbf{K}_n^4 \end{bmatrix} \qquad (3.60)$$

$$\mathrm{F}_n^* = \begin{Bmatrix} \sigma_n^*(\xi, z_n, \omega) \\ \sigma_n^*(\xi, z_{n+1}, \omega) \end{Bmatrix} \qquad (3.61)$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_n^1 & \mathrm{K}_n^2 \\ \mathrm{K}_n^3 & \mathrm{K}_n^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{u}_n^*(\xi, z_n, \omega) \\ \mathrm{u}_n^*(\xi, z_{n+1}, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_n^*(\xi, z_n, \omega) \\ \sigma_n^*(\xi, z_{n+1}, \omega) \end{Bmatrix} \qquad (3.62)$$

โดยที่ $\mathbf{K}_n^1$ $\mathbf{K}_n^2$ $\mathbf{K}_n^3$ และ $\mathbf{K}_n^4$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathbf{K}_n^*$

3.3.3.1 กรณีโครงสร้างถนน N ชั้นวางตัวอยู่บนชั้นกึ่งปริภูมิ

ในกรณีที่โครงสร้างถนนวางตัวอยู่บนชั้นกึ่งปริภูมิดังรูปที่ 3.9 สมการสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ $N+1$ จะถูกนำไปรวมกับสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ N ซึ่งทำให้ค่า $\sigma_N^*(\xi,z_N,\omega)$ หลังจากการรวมสติฟเนสเมทริกซ์มีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมากระทำที่ผิวรอยต่อของชั้นที่ N และชั้นที่ $N+1$ ผลที่ได้คือสมการสติฟเนสเมทริกซ์รวมของชั้นที่ N จะเป็น

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_N^1 & \mathrm{K}_N^2 \\ \mathrm{K}_N^3 & \mathrm{K}_N^4+\mathrm{K}_{N+1}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N^*(\xi,z_N,\omega) \\ \mathbf{u}_N^*(\xi,z_{N+1},\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_N^*(\xi,z_N,\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.63}$$

เมื่อ $\mathbf{K}_{N+1}^1$ เป็นสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นกึ่งปริภูมิที่มีขนาด 2×2

3.3.3.2 กรณีโครงสร้างถนน N ชั้นวางตัวอยู่บนชั้นหินแข็ง

ในกรณีที่โครงสร้างถนนวางตัวอยู่บนชั้นหินแข็งดังรูปที่ 3.10 ค่า $\mathbf{u}_N^*(\xi,z_{N+1},\omega)$ จะเป็นศูนย์ตามเงื่อนไขสภาพขอบ คือที่ผิวของชั้นหินแข็งจะไม่มีการเคลื่อนที่ จะได้สมการสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ N เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_N^1 & \mathrm{K}_N^2 \\ \mathrm{K}_N^3 & K_N^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N^*(\xi,z_N,\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_N^*(\xi,z_N,\omega) \\ \sigma_N^*(\xi,z_{N+1},\omega) \end{Bmatrix} \tag{3.64}$$

ดังนั้นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่มากระทำกับการทรุดตัวที่ผิวบนของชั้นที่ N เป็นดังนี้

$$\mathrm{K}_N^1\,\mathbf{u}_N^*(\xi,z_N,\omega) = \sigma_N^*(\xi,z_N,\omega) \tag{3.65}$$

ซึ่งค่าสติฟเนสเมทริกซ์ของสมการที่ 3.65 จะถูกนำไปรวมกับสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นที่ $N-1$ ซึ่งทำให้ค่า $\sigma_{N-1}^*(\xi,z_{N-1},\omega)$ หลังจากการรวมสติฟเนสเมทริกซ์มีค่าเป็นศูนย์ ด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับกรณีที่ผ่านมา ซึ่งทำให้สมการสติฟเนสเมทริกซ์รวมของชั้นที่ $N-1$ เป็น

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_{N-1}^1 & \mathrm{K}_{N-1}^2 \\ \mathrm{K}_{N-1}^3 & \mathrm{K}_{N-1}^4+\mathrm{K}_N^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{N-1}^*(\xi,z_{N-1},\omega) \\ \mathbf{u}_{N-1}^*(\xi,z_N,\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{N-1}^{**}(\xi,z_{N-1},\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.66}$$

โดยสมการที่ 3.63 และ 3.66 จะอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_m^1 & \mathrm{K}_m^2 \\ \mathrm{K}_m^3 & \mathrm{K}_m^4+\mathrm{K}_{m+1}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) \\ \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_{m+1}, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.67}$$

โดยที่ m เท่ากับ N และ $N-1$ ในกรณีที่พิจารณาสมการที่ 3.63 และ 3.66 ตามลำดับและ สมการที่ 3.67 สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathrm{K}_m^1\, \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) + \mathrm{K}_m^2\, \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_{m+1}, \omega) = \boldsymbol{\sigma}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) \tag{3.68}$$

$$\mathrm{K}_m^3\, \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) + \left(\mathrm{K}_m^4 + \mathrm{K}_{m+1}^1\right) \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_{m+1}, \omega) = 0 \tag{3.69}$$

จากสมการที่ 3.69 สามารถจัดได้เป็น

$$\mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_{m+1}, \omega) = -\left(\mathrm{K}_m^4 + \mathrm{K}_{m+1}^1\right)^{-1} \mathrm{K}_m^3\, \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) \tag{3.70}$$

แทนค่าสมการที่ 3.70 ในสมการที่ 3.68 จะได้

$$\{\, \mathrm{K}_m^1 - \mathrm{K}_m^2 \left(\mathrm{K}_m^4 + \mathrm{K}_{m+1}^1\right)^{-1} \mathrm{K}_m^3 \,\}\, \mathbf{u}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) = \boldsymbol{\sigma}_m^{\bullet}(\xi, z_m, \omega) \tag{3.71}$$

หรือ

$$\mathbf{K}_m \mathbf{u}_m = \boldsymbol{\sigma}_m \tag{3.72}$$

เมื่อ

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_m^1 - \mathbf{K}_m^2 \left(\mathbf{K}_m^4 + \mathbf{K}_{m+1}^1\right)^{-1} \mathbf{K}_m^3 \tag{3.73}$$

โดยสติฟเนสเมทริกซ์จากสมการที่ 3.72 จะถูกนำไปรวมกับสติฟเนสเมทริกซ์ของชั้นถัดขึ้นไปจนได้ความสัมพันธ์ของแรงที่มากระทำกับค่าการทรุดตัวที่ผิวบนของถนน แล้วจึงทำการแก้สมการหาค่าการทรุดตัวที่เกิดขึ้นต่อไป

3.3.4 <u>การหาส่วนผกผันของการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์ (FFT Inversion)</u>

ค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้ในโดเมนของความถี่จากวิธีการข้างต้นนั้นจะถูกแปลงให้อยู่ในโดเมนของเวลา โดยใช้วิธีการหาส่วนผกผันของการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์ เนื่องจากไม่สามารถทำการปริพันธ์เพื่อหาส่วนผกผันของการแปลงฟูเรียร์ได้ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าการทรุดตัวในโดเมนของเวลาและค่าการทรุดตัวในโดเมนของความถี่มีดังนี้

$$G\left(\frac{n}{NT}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} g(kT)e^{-i2\pi nk/N} \qquad n=0,1,...,N-1 \tag{3.74}$$

และ

$$g(kT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right)e^{i2\pi nk/N} \qquad k=0,1,...,N-1 \tag{3.75}$$

เมื่อ $G\left(\frac{n}{NT}\right)$ คือ ค่าการทรุดตัวในโดเมนของความถี่

$g(kT)$ คือ ค่าการทรุดตัวในโดเมนของเวลา

T คือ ช่วงเวลาของข้อมูลค่าการทรุดตัวในโดเมนของเวลา

N คือ จำนวนชุดข้อมูลค่าการทรุดตัว

$N=2^{\gamma}$

γ คือ จำนวนเต็มใดๆ

สมการที่ 3.74 และ 3.75 คือ การแปลงฟาสต์ฟูเรียร์และส่วนผกผันการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์ตามลำดับ โดยที่ช่วงเวลาในโดเมนของความถี่ (Δf) มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{NT}$ ดังนั้นเมื่อได้ค่าการทรุดตัวในโดเมนของความถี่จากการแปลงฮันเกล จะสามารถหาค่าการทรุดตัวในโดเมนของเวลาได้จากสมการที่ 3.75

การหาส่วนผกผันการแปลงฟาสต์ฟูเรียร์จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการหาส่วนผกผันการแปลงลาปลาซ นอกจากนี้ยังจำลองลักษณะการสะท้อนของคลื่นที่เกิดจากน้ำหนักกระทำจากเครื่องทดสอบเมื่อแบบจำลองโครงสร้างถนนวางอยู่บนชั้นหินแข็งได้ด้วย ทำให้ค่าการทรุดตัวที่ได้มีค่าถูกต้องยิ่งขึ้น

3.3.5 <u>การหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization Method)</u>

ในการคำนวณย้อนกลับนั้นมีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างถนนที่จะสามารถอธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างถนนได้ดีที่สุด การพิจารณาว่าค่าโมดูลัสยืดหยุ่นที่ใช้ในแบบจำลองให้ค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้ใกล้เคียงกับผลการทดสอบเพียงใดนั้นจำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันจุดประสงค์ที่แสดงถึงค่าความแตกต่างของค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้กับค่าที่ได้จากการทดสอบขึ้นมา จากนั้นจึงใช้กระบวนการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุดเพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นที่เป็นคำตอบ ซึ่งทำให้ค่าที่ได้จากฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าน้อยที่สุด โดยฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เรียกว่า ผลรวมของผลต่างสัมพัทธ์กำลังสอง (Sum of square relative differences)

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d_i^c(\mathbf{x})-d_i^m}{d_i^m}\right]^2 \qquad (3.76)$$

เมื่อ $d_i^c(\mathbf{x})$ คือ ค่าการทรุดตัวที่คำนวณได้จากแบบจำลองโดยใช้ค่า $\mathbf{x}$

$\mathbf{x}$ คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นและความหนาที่ไม่ทราบค่า

$\mathbf{x} = \{E_1, h_1, E_2, h_2, E_3, h_3, \ldots, E_M, h_M\}$

d_i^m คือ ค่าการทรุดตัวที่บันทึกได้จากการทดสอบ ค่าที่ i

M คือ จำนวนชั้นของโครงสร้างถนน

n คือ จำนวนข้อมูลการทรุดตัวที่บันทึกได้และนำมาใช้ในการคำนวณย้อนกลับ

สำหรับการเลือกฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดังกล่าวนั้น ได้พิจารณาถึงวิธีการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุดร่วมด้วย ซึ่งปกติแล้ววิธีหาค่าเหมาะสมที่สุดมักจะใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา และโดยการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม (Random error) ของเครื่อง FWD Sivanneswaran et al. (1991) พบว่าสมการที่ 3.76 เหมาะที่จะใช้ในปัญหาการคำนวณย้อนกลับจากข้อมูลการทดสอบด้วยเครื่อง FWD

การคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่น ของวัสดุในแต่ละชั้นของโครงสร้างถนนจะใช้หลักการของ Nonlinear Least Square Optimization โดยใช้วิธี Modified Levenberg-Marquardt Algorithm (Dennis and Schnabel 1983) โดยวิธีดังกล่าวได้ประยุกต์มาจากวิธีของนิวตันโดยได้รวมเอาข้อดีของวิธีของนิวตัน (Newton's method) กับวิธี Gradient method มาไว้ด้วยกัน คือ ในการวิเคราะห์จะมีการลู่เข้าสู่คำตอบได้อย่างรวดเร็วซึ่งเป็นข้อดีของวิธีของนิวตันและมีความสามารถวิเคราะห์หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสมบูรณ์ได้เป็นอย่างดีซึ่งเป็นข้อดีของวิธี Gradient method (Polyak, 1987) สำหรับหลักการวิเคราะห์นั้น จะพิจารณาให้ฟังก์ชัน f ใดๆ สามารถกระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor series) และโดยการประมาณค่าจะสามารถจัด f ให้อยู่ในรูปของ Quadratic form ได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{x}_0)+(\nabla f(\mathbf{x}_0))^T\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T\cdot\mathbf{H}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \qquad (3.77)$$

เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ $\mathbf{x}_0$ เวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของตัวแปรอิสระ ∇ คือสัญลักษณ์ของเกรเดียน หรือเวกเตอร์ของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน $\mathbf{H}$ คือ Hessian matrix หรือ เมทริกซ์ของอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน

พิจารณาค่าเกรเดียนของฟังก์ชันจากสมการที่ 3.77 จะได้

$$\nabla f(\mathbf{x}) \;=\; \nabla f(\mathbf{x}_0)+\mathbf{H}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \qquad (3.78)$$

โดยวิธีของนิวตัน จะกำหนดให้ $\nabla f(\mathbf{x})$ เท่ากับศูนย์ก็จะได้ค่า $\mathbf{x}$ ในการคำนวณซ้ำรอบถัดไป นั่นคือ

$$\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{x}_0 - \mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) \tag{3.79}$$

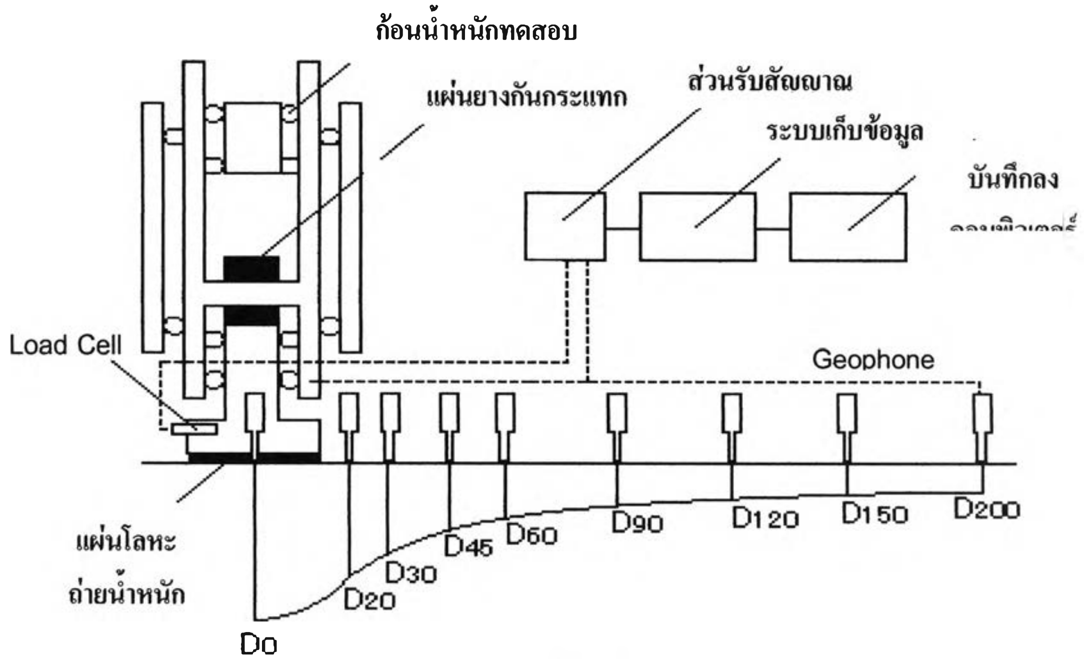
สำหรับวิธี Levenberg-Marquardt Method ได้พัฒนาสมการที่ 3.79 โดยปรับปรุงค่า $\mathbf{H}$ ใหม่ ดังนี้

$$\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{x}_0 - (\mathbf{H} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) \tag{3.80}$$

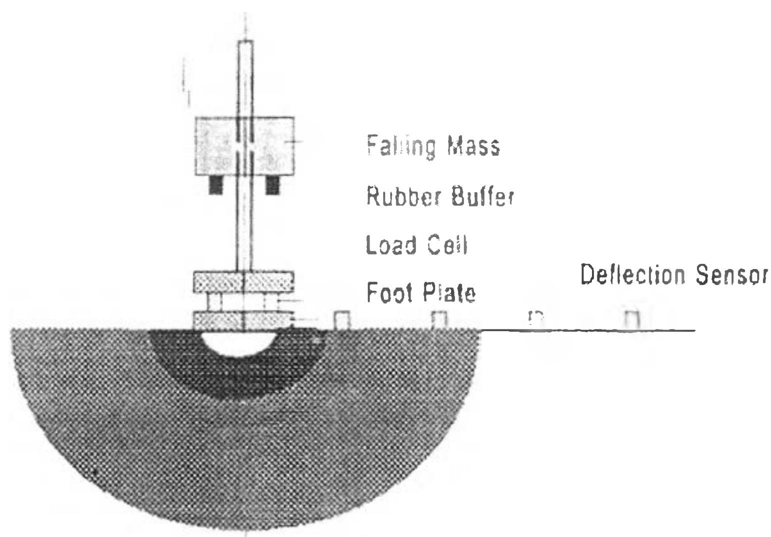
เมื่อ $\mathbf{I}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ และ α คือ Levenberg-Marquardt parameter ($\alpha \geq 0$) หลังจากกำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรอิสระให้กับฟังก์ชัน โดยการคำนวณซ้ำตามสมการที่ 3.80 ก็จะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบออกมาได้ในที่สุด

ในการวิเคราะห์เพื่อประเมินสภาพความแข็งแรงของโครงสร้างถนนนั้นทำได้โดยการทำการคำนวณย้อนกลับเพื่อหาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของชั้นถนนแต่ละชั้นจากข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ FWD ซึ่งในงานวิจัยได้ทำการสร้างแบบจำลองถนนยืดหยุ่นหลายชั้นที่รับแรงกระทำแบบพลวัตขึ้นมา โดยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) และใช้วิธีการแก้ปัญหาค่าขีดสุดที่เหมาะสม เพื่อให้วิธีการคำนวณย้อนกลับมีประสิทธิภาพ ซึ่งมีโปรแกรมย่อยสำหรับการหาค่าเหมาะสมที่สุดคือ BCLSF

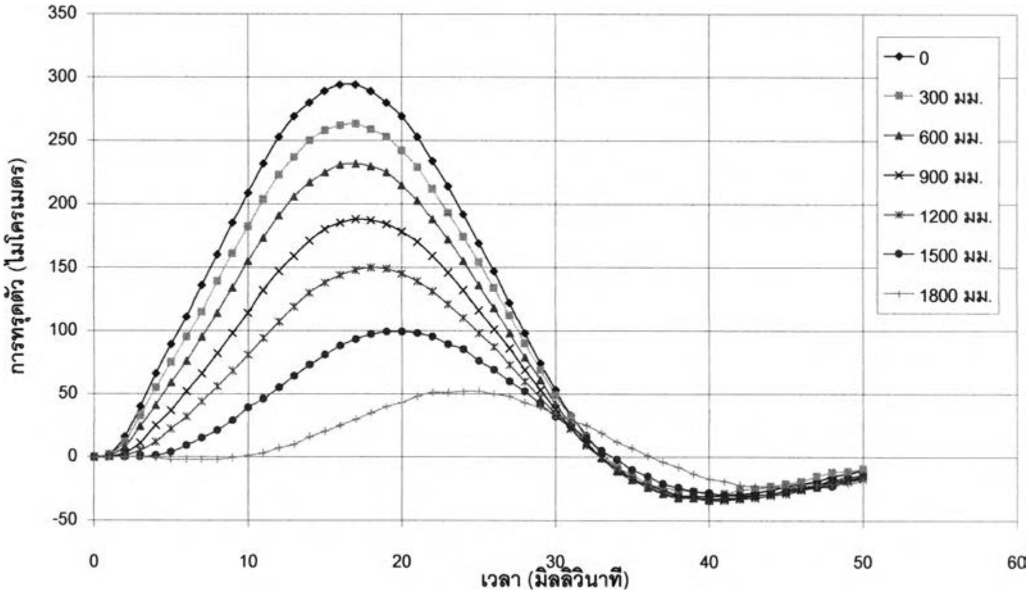
รูปที่ 3.1 รูปแสดงตัวอย่างเครื่อง Falling Weight Deflectometer (FWD)



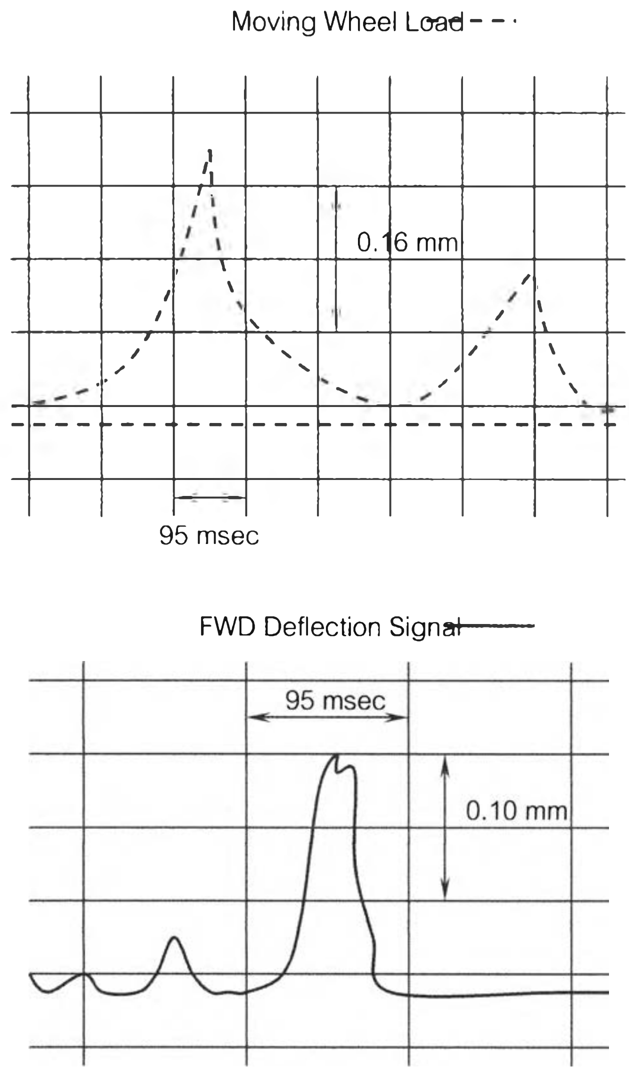
รูปที่ 3.2 รูปแสดงส่วนประกอบที่สำคัญของเครื่อง Falling Weight Deflectometer (FWD)



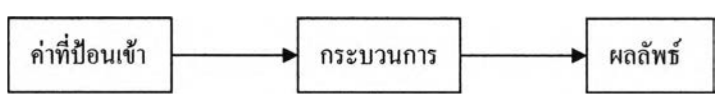
รูปที่ 3.3 ลักษณะการแผ่กระจายของคลื่นพลังงานขณะทำการทดสอบด้วยเครื่อง FWD



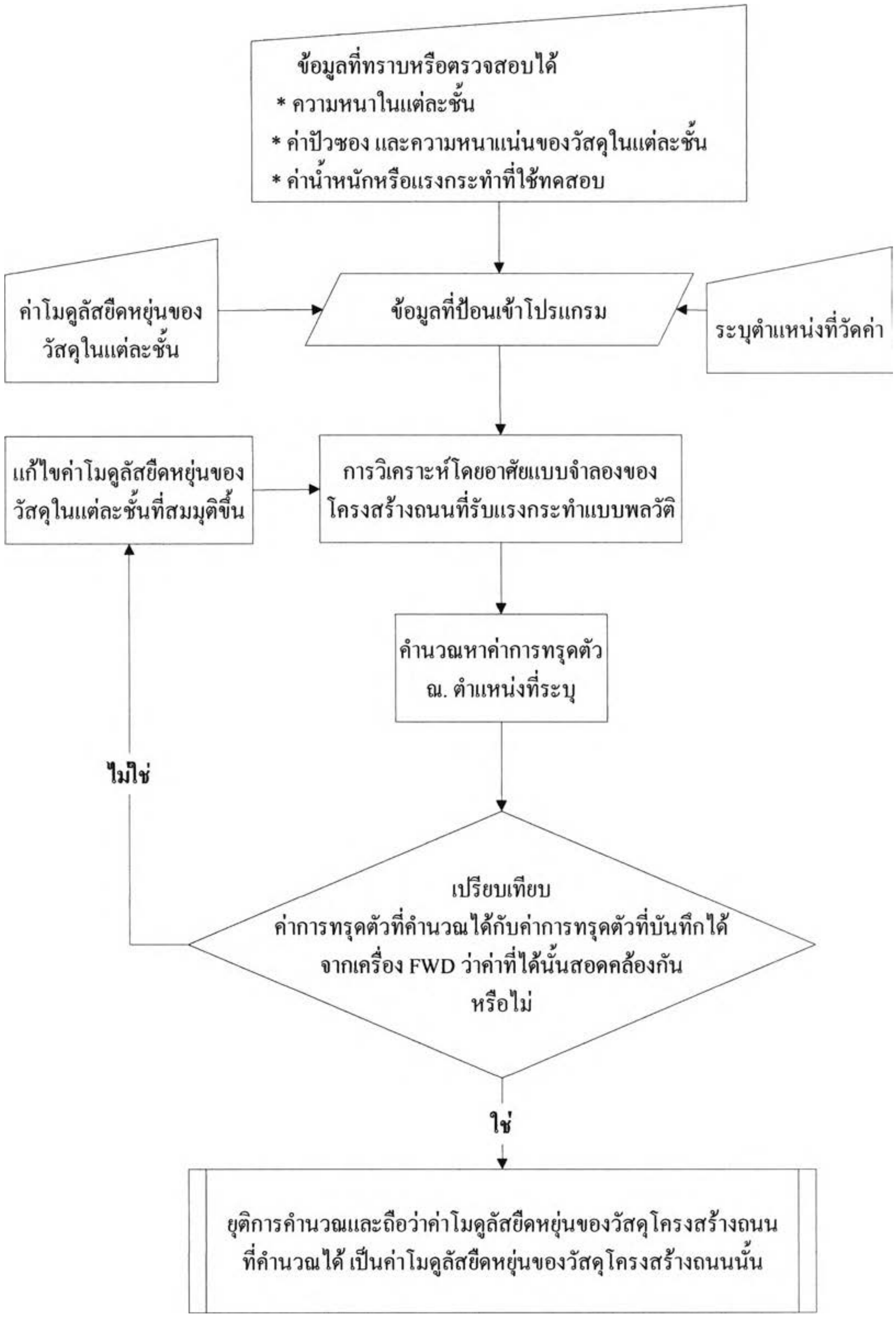
รูปที่ 3.4 ลักษณะทั่วไปของข้อมูลการทรุดตัวที่บันทึกได้ ณ.ตำแหน่งต่างๆ จากเครื่อง FWD



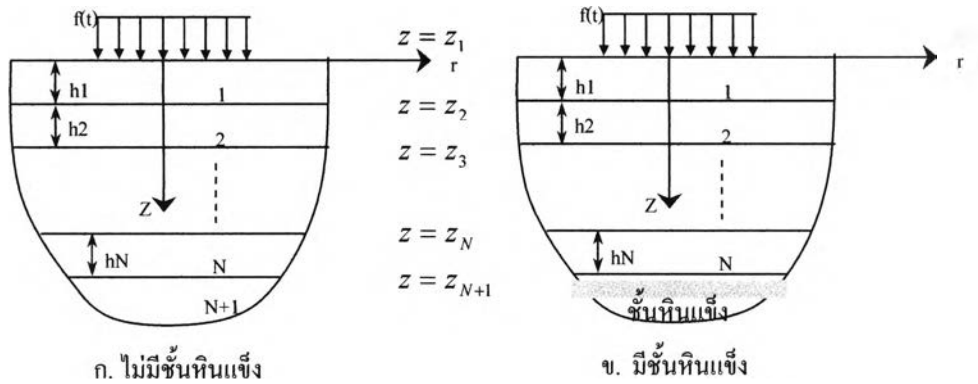
รูปที่ 3.5 ลักษณะสัญญาณค่าการทรุดตัวจากเครื่อง FWD และล้อรถหนักที่สัญจรบนถนนเมื่อพิจารณาเทียบกับเวลา



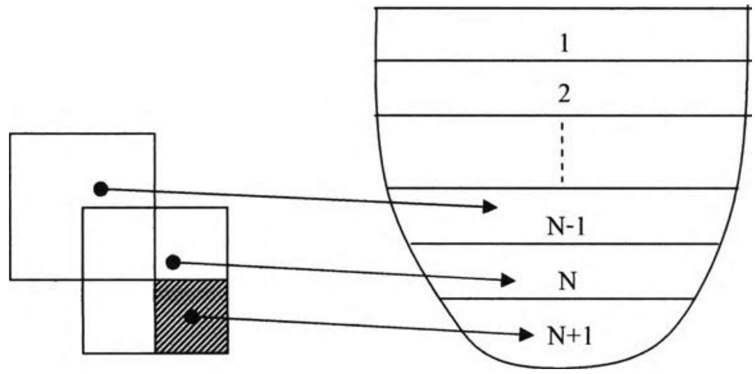
รูปที่ 3.6 รูปแบบปัญหาการคำนวณย้อนกลับ



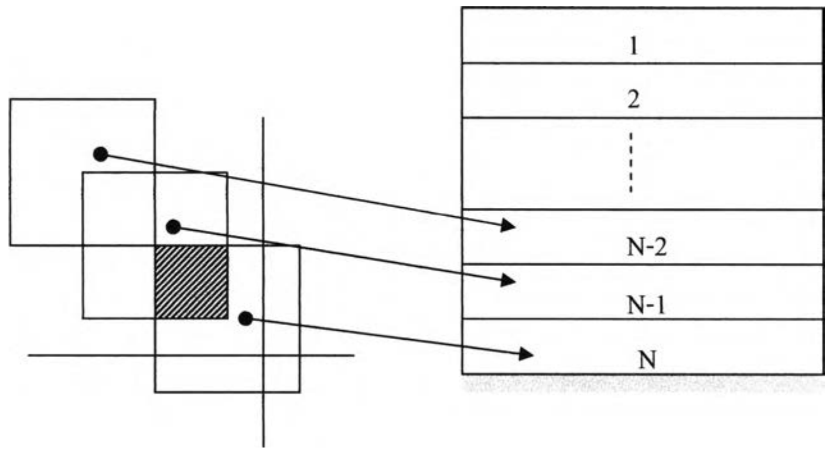
รูปที่ 3.7 แผนผังแสดงการคำนวณย้อนกลับเพื่อพิจารณาค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างถนน



รูปที่ 3.8 ภาพแสดงแบบจำลองโครงสร้างถนนหลายชั้น



รูปที่ 3.9 การรวมสติฟเนสเมทริกซ์ของโครงสร้างถนนที่วางตัวอยู่บนกึ่งปริภูมิ



รูปที่ 3.10 การรวมสติฟเนสเมทริกซ์ของโครงสร้างถนนที่วางตัวอยู่บนชั้นหินแข็ง