

การจำลองและการสร้างภาพนามธรรมของการดูซ้ำโซเดียมไอออนของดินอิมตัวอันเป็นผลจากการลำเลียง  
สารละลายโซเดียมคลอไรด์บนหน้าตัดดิน



นางสาวจันทร์รัตน์ ผลอุทิศ

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคณนา ภาควิชาคณิตศาสตร์

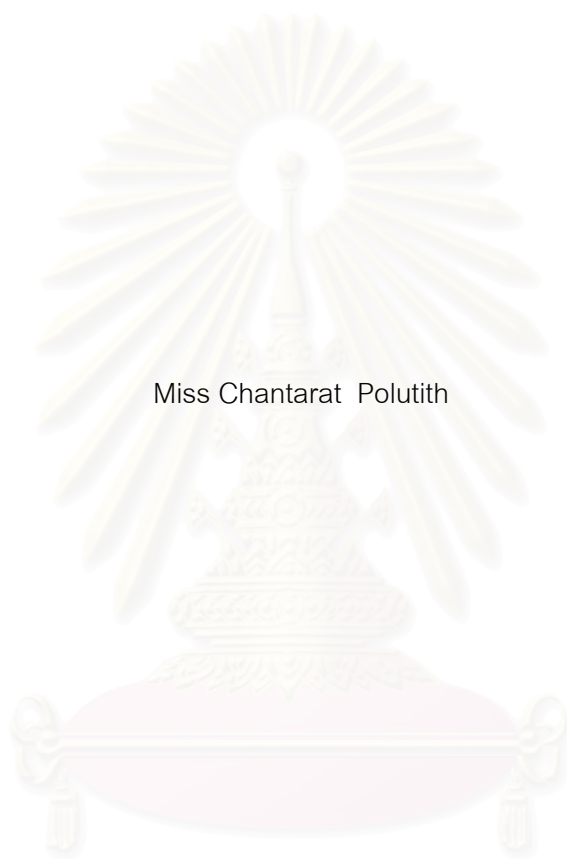
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-17-5114-1

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

SIMULATION AND VISUALIZATION OF  $\text{Na}^+$  ADSORPTION OF SATURATED SOIL AFFECTED BY  
TRANSPORTING SODIUM CHLORIDE SOLUTION ON A SOIL PROFILE



Miss Chantarat Polutith

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science Program in Computational Science

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic year 2005

ISBN 974-17-5114-1



นางสาวจันทร์ฉวี ผลอุทิศ ชื่อวิทยานิพนธ์ : การจำลองและการสร้างภาพนามธรรมของการดูดซับ  
ไอออนของดินอิ่มตัวอันเป็นผลจากการลำเลียงสารละลายไอออนคลอไรด์บนหน้าตัดดิน  
(SIMULATION AND VISUALIZATION OF  $\text{Na}^+$  ADSORPTION OF SATURATED SOIL  
AFFECTED BY TRANSPORTING SODIUM CHLORIDE SOLUTION ON A SOIL PROFILE)  
อ. ที่ปรึกษา : รศ.สุชาดา สิริพันธุ์, อ.ที่ปรึกษาร่วม : ศ.ดร.ชิดชนก เหลือสินทรัพย์, 66 หน้า. ISBN  
974-17-5114-1.

สารเคมีที่นำมาใช้เพื่อผลทางการเกษตรมีผลกับดินโดยตรง สารละลายเคมีที่เพียงพอทำให้เกิด  
ประโยชน์กับพืช แต่ถ้าหากมากเกินไปพืชไม่นำไปใช้จะเกิดการตกค้างของสารเคมีในดินซึ่งกลับเป็นผลเสีย  
ต่อพืช ไอออนเป็นสารเคมีชนิดหนึ่งที่ทำให้เกิดผลเสียกับดิน เราได้ทำการทดลองหาปริมาณการดูดซับ  
ไอออนของดินร่วนปนทราย โดยใช้สารละลายไอออนคลอไรด์ แล้วนำข้อมูลที่ได้มาหาแบบจำลองปริมาณ  
การดูดซับไอออนของดินโดยใช้สมการ Convection-dispersion อธิบายการเคลื่อนที่ของสารละลาย การ  
เคลื่อนที่ของสารละลายในดินคือความสามารถในการดูดซับ ดังนั้นผลเฉลยจากสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถ  
พยากรณ์ปริมาณไอออนที่ดินดูดซับได้ที่ความลึกและเวลาต่างๆ กัน แบบจำลองนี้สามารถนำไปพิจารณา  
การดูดซับสารเคมีในดินชนิดต่างๆ ได้ โดยกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ของสมการจากสถานะเริ่มต้นในระบบดินที่  
สนใจ

## สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์..... ลายมือชื่อนิสิต..... จันทร์ฉวี ผลอุทิศ  
สาขาวิชา.....วิทยาการคอมพิวเตอร์..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..... สุชาดา สิริพันธุ์  
ปีการศึกษา .....2548..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม..... C. Long

## 4572245923 : MAJOR COMPUTATIONAL SCIENCE

KEY WORD: SIMULATION / SOLUTE TRANSPORT / ADSORPTION / MODELING / CDE

CHANTARAT POLUTITH: SIMULATION AND VISUALIZATION OF  $\text{Na}^+$  ADSORPTION OF SATURATED SOIL AFFECTED BY TRANSPORTING SODIUM CHLORIDE SOLUTION ON A SOIL PROFILE. THESIS ADVISOR: ASSOC. PROF. SUCHADA SIRIPANT, THESIS COADVISOR : PROF.CHIDCHANOK LURSINSAP, Ph.D., 66 pp. ISBN 974-17-5114-1.

The chemical substance used for agricultural planting has a direct effect on soil. An adequate quantity of chemical substance used has benefit to crops. The exceeded quantities of the chemical used will store in soil. Sodium is one of the chemical substances causing toxic to soil texture and crops. In experiment, we have observed the sodium adsorption in a sandy loam soil from sodium chloride solution and collected the data to obtain the adsorption modeling. The Convection – dispersion equation (CDE) is proposed to describe the solute transport. The result of CDE can predict the amount of sodium at different depths from the ground surface and also at different times. The model can be used to consider the adsorption of the various soils by the initial and boundary condition of the specified soil system.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department.....Mathematics.....Student's signature.....*Chantarat Polutit*  
Field of study.....Computational Science.....Advisor's signature.....*Suchada Siripant*  
Academic year.....2005.....Co-advisor's signature.....*C. Lursinsap*



## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์ด้วยความกรุณาช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ สุชาติ ศิริพันธุ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และศาสตราจารย์ ดร.ชิตชนก เหลือสินทรัพย์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ให้คำปรึกษา คำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย รวมทั้งช่วยตรวจสอบแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น จึงขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงมา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.จักษ์ อัสวานันท์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิมลรัตน์ งามอร่ามวารงกูร และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภจิตรา ชัชวาลย์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาตรวจสอบและให้คำแนะนำแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จด้วยดี

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.วิสุทธิ์ วีรสาร อาจารย์เกวลิน ศรีจันทร์ ที่ให้ความรู้ คำปรึกษา คำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งในการทำาททดลอง นายทองหล่อ หมั่นราษฎร์ เจ้าหน้าที่ห้องปฏิบัติการฟิสิกส์ของคินและเจ้าหน้าที่ทุกท่านในภาควิชาฟิสิกส์วิทยา คณะเกษตรศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ที่ให้ความช่วยเหลือและคำปรึกษาในการทำงานวิจัย

ขอขอบคุณ เพื่อนร่วมรุ่นคณาทุกคน และเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ที่ศูนย์วิจัย AVIC ทุกคน สำหรับคำปรึกษา คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ และความช่วยเหลือในทุกๆเรื่อง ตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย

ขอขอบคุณ ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ ที่ได้สนับสนุนทุนสำหรับการทำวิจัยครั้งนี้

ขอขอบคุณ นายอนุชิต จิตพัฒนกุล สำหรับกำลังใจและความเข้าใจ ตลอดจนการเสียสละเวลาช่วยทำการทดลองและคำปรึกษา คำแนะนำในการทำวิจัย

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณนางดวงกมล น้อยโสภิต และคุณชายพิมพ์ ผลประสิทธิ์ ที่ได้ให้กำลังใจช่วยเหลือและสนับสนุนในด้านต่างๆอย่างดีตลอดมาจนวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ความดีของการศึกษาและคุณค่าของวิทยานิพนธ์นี้ ผู้วิจัยขออุทิศแด่บูรพาจารย์และผู้มีพระคุณทุกท่าน

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฌ
บทที่	
1. บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	1
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.5 วิธีดำเนินการวิจัย.....	2
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความเค็มและการเติบโตของพืช.....	4
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของสารละลายในดิน.....	5
2.3 งานวิจัยที่ศึกษาความสัมพันธ์ของการดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลาย.....	6
3. ทฤษฎีพื้นฐาน.....	8
3.1 ความชื้นและความหนาแน่นของดิน.....	8
3.2 การเคลื่อนที่ของน้ำในดิน.....	9
3.3 การเคลื่อนที่ของสารละลายในพื้นที่หน้าตัดดิน.....	9
3.4 แบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสารละลายที่ถูกดูดซับกับระดับความเข้มข้นของสารละลาย.....	13
3.5 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.....	14
3.6 การวิเคราะห์การถดถอย.....	18
4. การจำลองแบบ.....	23
4.1 การเก็บข้อมูล.....	23
4.2 การจำลองแบบ.....	28
4.3 สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์.....	33

	หน้า
4.4 การสร้างภาพนามธรรม.....	37
5. ผลการวิจัย.....	39
5.1 สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (CDE).....	39
5.2 ผลการจำลองแบบ.....	43
5.3 ผลการสร้างภาพนามธรรม.....	44
6. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	47
6.1 สรุปผลการวิจัย.....	47
6.2 ข้อเสนอแนะ.....	48
รายการอ้างอิง.....	49
ภาคผนวก.....	51
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	56

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## สารบัญญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 3.1 การเคลื่อนที่ของสารละลายผ่านหน้าตัดดินชั้นเล็กๆ.....	10
รูปที่ 3.2 แผนภาพการคำนวณ โดยระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสัน.....	16
รูปที่ 3.3 ค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละจุด $(x_i, y_i)$ .....	20
รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วการไหลของน้ำที่ไหลผ่านคอลัมน์ดินกับลาด ชลศาสตร์.....	25
รูปที่ 4.2 การวัดสภาพการนำน้ำของดินโดยใช้วิธี Constant head.....	25
รูปที่ 4.3 ดินตัวอย่างที่ใช้ในการทดลอง.....	27
รูปที่ 4.4 ดินที่ผ่านการร่อนโดยตะแกรง 2.0 มิลลิเมตร.....	27
รูปที่ 4.5 การทดลองเพื่อวิเคราะห์หาปริมาณโซเดียมในดิน.....	27
รูปที่ 4.6 การทดลองหาการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่เวลาต่างๆ.....	28
รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลาย โซเดียมคลอไรด์ในระดับต่างๆ.....	29
รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากการทดลองกับแบบจำลองLangmuir.....	31
รูปที่ 4.9 แสดงข้อมูลความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นล่างของคอลัมน์ที่เวลาต่างๆ.....	32
รูปที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากการทดลองกับแบบจำลองลอจิสติก.....	33
รูปที่ 4.11 แสดงขั้นตอนการสร้างหน้าตัดดิน.....	37
รูปที่ 4.12 แสดงความเข้มข้นของโซเดียมในหน้าตัดดิน.....	38
รูปที่ 4.13 แสดงภาพนามธรรมการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมที่ขึ้นความลึกและที่เวลา ต่างๆกัน.....	38
รูปที่ 5.1 แสดงผลการทดลองและแบบจำลองLangmuir.....	40
รูปที่ 5.2 แสดงผลจากการทดลองและแบบจำลองลอจิสติก.....	41
รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบข้อมูลจากการทดลองกับผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการการ เคลื่อนที่.....	42
รูปที่ 5.4 แสดงผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายที่เวลาต่างๆ.....	43
รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบข้อมูลจากการทดลองกับผลเฉลยของสมการ CDE .....	44
รูปที่ 5.6 ภาพนามธรรมของสารละลายโซเดียมที่เคลื่อนที่ผ่านคอลัมน์ดินยาว 10 เซนติเมตร ที่เวลาต่างๆ .....	44

บทที่

หน้า

รูปที่ 5.7 ภาพนามธรรมของสารละลายโซเดียมที่เคลื่อนที่ผ่านคอลัมน์ดินยาว 100 เซนติเมตร  
ที่เวลาต่างๆ..... 45



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ

### ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาดินเค็มเกิดขึ้นในหลายภูมิภาคของประเทศไทย การเพาะเลี้ยงกุ้งกุลาดำในพื้นที่น้ำจืดเป็นปัญหาหนึ่งของปัญหาดินเค็มที่น่าสนใจ เนื่องจากการเพาะเลี้ยงกุ้งกุลาดำในพื้นที่น้ำจืดมีกระบวนการหนึ่งที่ต้องนำน้ำเค็มเข้ามาในพื้นที่ ทำให้เกิดการสะสมของสารละลายหลายชนิดโดยสารละลายที่เราสนใจคือในรูปของเกลือโซเดียม หากเกลือโซเดียมที่นำเข้ามาในพื้นที่เคลื่อนที่ลงสู่ระดับน้ำใต้ดินแล้วจะทำให้มีการกระจายตัวของเกลืออย่างรวดเร็ว ทำให้เกิดการปนเปื้อนของเกลือโซเดียมออกสู่สิ่งแวดล้อมส่งผลให้เกิดปัญหาดินเค็มขึ้นเป็นบริเวณกว้าง เนื่องจากพื้นที่การเพาะเลี้ยงกุ้งส่วนใหญ่เป็นแบบเช่าทำการเพาะเลี้ยง ดังนั้นปัญหาเกี่ยวกับการเพาะปลูกจะเกิดขึ้นเมื่อเลิกทำนากุ้งและเกษตรกรต้องการกลับมาใช้บ่อกุ้งในรูปแบบของการทำแปลงเกษตรกรรม ดินบริเวณการเพาะเลี้ยงกุ้งมีเกลือโซเดียมสะสมอยู่ทำให้ดินมีลักษณะแน่นทึบทำให้น้ำและอากาศไม่สามารถไหลซึมผ่านได้สะดวกซึ่งส่งผลโดยตรงต่อการเติบโตและการให้ผลผลิตของพืช ดังนั้นในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาการเคลื่อนที่ของเกลือโซเดียมในหน้าตัดดินและปริมาณโซเดียมที่สะสมในดิน เพื่อเป็นแนวทางในการอธิบายผลกระทบและการวางแผนการปรับปรุงพัฒนาพื้นที่บริเวณดังกล่าว

### วัตถุประสงค์ของการวิจัย

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยมีดังนี้

1. เพื่อหาแบบจำลองที่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดิน และความเข้มข้นระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์
2. เพื่อหาแบบจำลองที่อธิบายการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียม ที่เวลาต่างๆภายในหน้าตัดดิน

### ขอบเขตของการวิจัย

1. ดินที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นดินร่วนปนทรายในชั้นหน้าตัดที่มีความลึกจากผิวดินประมาณ 20-30 เซนติเมตร
2. ความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์อยู่ในช่วง 0-4.5 เปอร์เซ็นต์

3. คอลัมน์ของดินที่ใช้ทดลองการเคลื่อนที่ของสารละลายเป็นแบบอ้อมด้วยน้ำมีความยาวประมาณ 10 เซนติเมตร

### ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

แบบจำลองที่อธิบายถึงปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดิน และความเข้มข้นของสารละลายที่เคลื่อนที่ลงสู่ดิน ที่ขึ้นความลึกและที่เวลาต่างๆ สามารถใช้เพื่อการวางแผนการเพาะปลูกพืชในบริเวณที่เกิดปัญหาดินเค็ม และปรับปรุงสภาพดินสำหรับการเกษตร

### วิธีดำเนินการวิจัย

การจำลองการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมในหน้าตัดดิน มีรายละเอียดของแต่ละขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปฐพีวิทยาเบื้องต้น สมบัติต่างๆของดิน ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินและความเข้มข้นระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ และการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมในหน้าตัดดิน
2. ทำการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินด้วยความเข้มข้นระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ และเก็บข้อมูลการเคลื่อนที่ของความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านคอลัมน์ดินทุก 1 ชั่วโมง เพื่อนำมาวิเคราะห์หาแบบจำลองที่เหมาะสม
3. สร้างสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินกับความเข้มข้นระดับต่างๆของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ และทำการทดสอบสมการที่สร้างขึ้นเปรียบเทียบกับข้อมูลจากการทดลอง
4. ทำการจำลองแบบการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมซึ่งมีลักษณะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลา และทำการทดสอบเปรียบเทียบกับข้อมูลจากการทดลอง
5. จัดทำเอกสารรูปเล่มวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ได้แบ่งออกเป็น 6 บท โดยบทที่ 2 จะกล่าวถึงเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัย บทที่ 4 จะกล่าวถึงการจำลองแบบ บทที่ 5 จะกล่าวถึงผลการวิจัย และส่วนสุดท้าย สรุปผลและข้อเสนอแนะของงานวิจัย จะอยู่ในบทที่ 6

## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### แนวคิดและทฤษฎี

ดินเค็ม หมายถึง ดินที่มีเกลือที่เกิดจากโซเดียม แมกนีเซียม แคลเซียม ของไอออนลบ คลอไรด์ ซัลเฟต ไบคาร์บอเนต และคาร์บอเนต เป็นองค์ประกอบ และมีค่าเปอร์เซ็นต์ของโซเดียมที่แลกเปลี่ยนได้ (exchangeable sodium percentage : ESP) น้อยกว่า 15 เปอร์เซ็นต์

สาเหตุการเกิดดินเค็ม เกิดจากการที่เกลือในรูปแบบเกลือแองและสารผสมในรูปแบบเกลือชนิดต่างๆ ที่ละลายอยู่ในดินนั้นซึมขึ้นไปตามช่องว่างคาร์ปิลลารีของดิน เมื่อน้ำระเหยจะมีคราบเกลือเกาะติดดินในบริเวณที่น้ำซึมถึงทำให้ดินกลายสภาพเป็นดินเค็ม โดยทั่วไปแบ่งชนิดของดินเค็มเป็น 3 ประเภท คือ

1. ดินเค็ม (saline soils) คือ ดินที่มีเกลือที่ละลายได้ในสารละลายดิน ปริมาณมากจนส่งผลกระทบต่ออาการเจริญเติบโตและผลผลิตของพืช
2. ดินโซดิก (sodic soils) คือ ดินที่ไม่เค็มแต่มีค่าโซเดียมที่แลกเปลี่ยนได้ (ESP) มากเกินไป ส่งผลต่อสมบัติทางกายภาพของดิน โครงสร้างของดินเสีย อนุภาคดินฟุ้งกระจายแทรกตามรอยแตกและช่องว่างดินทำให้ดินแน่นทึบน้ำซึมผ่านชั้นดินได้ยาก ไถพรวนยาก ค่าการซาบซึมน้ำของดินต่ำ
3. ดินเค็มโซดิก (saline sodic soils) คือ ดินที่มีทั้งเกลือที่ละลายได้และโซเดียมที่แลกเปลี่ยนได้ปริมาณมากจนเป็นอันตรายต่อการเจริญเติบโตของพืช

#### ผลกระทบของดินเค็มต่อความอุดมสมบูรณ์ของดินและการเจริญเติบโตของพืช

เนื่องจากดินเค็มมีหลายชนิดความเป็นต่างของดินเค็มจะมีค่า pH โดยประมาณ 8.5 อาจจะสูงหรือต่ำกว่านี้ได้ ซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของเกลือ ดินเค็มมีความเป็นต่างจากการทำปฏิกิริยากับน้ำเกลือของโซเดียมทำให้มีผลต่อสมดุลของธาตุอาหารพืช ธาตุบางชนิดละลายออกสู่สารละลายดินได้มากเกินไปจนเป็นพิษ เช่น โซเดียม คลอไรด์ หรือไอออนลบของไบคาร์บอเนต เป็นต้น นอกจากนี้โซเดียมมีผลทำให้ดินมีสมบัติทางกายภาพไม่ดี ดินฟุ้งกระจาย แน่นทึบ อึมน้ำมากเกินไป การระบายน้ำและการถ่ายเทอากาศไม่ดี ไม่เหมาะต่อการเจริญเติบโตของพืช

เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย เพื่อหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของสารละลายในดินและการจัดการทางการเกษตรในพื้นที่ดินเค็มที่ได้ทำการศึกษาไว้ สามารถแบ่งประเภทของงานวิจัยออกได้เป็น 3 แบบดังนี้

1. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความเค็มและการเจริญเติบโตของพืช
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของสารละลายในดิน
3. งานวิจัยที่ศึกษาความสัมพันธ์ของการดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลาย

## 2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความเค็มและการเจริญเติบโตของพืช

การแก้ไขพื้นฟูดินเค็มให้กลับมาใช้ประโยชน์ในการเพาะปลูกพืชเศรษฐกิจได้ ด้วยวิธีการแก้ไขลดระดับความเค็มดินลงและเพิ่มความอุดมสมบูรณ์ดินด้วยวิธีการต่าง ๆ นั้น ต้องลงทุนสูงและใช้ระยะเวลานาน การเลือกปลูกพืชทนเค็มชนิดที่เหมาะสมกับระดับความเค็มและสภาพพื้นที่เป็นทางเลือกที่ทำให้เกษตรกรสามารถลดต้นทุนการผลิตในการแก้ไขปรับปรุงดินได้ สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องพอที่จะสรุปได้ดังนี้

ในปี ค.ศ.1992 อรุณี ยูวะนิยม และ ดร.สมศรี อรุณินท์ [1] ทำการวิจัยเกี่ยวกับการคัดเลือกพันธุ์พืชชอบเกลือ โดยการคัดเลือกพันธุ์พืช 2 ประเภท คือ พืชน้ำจืด เช่น หญ้า *Sporobolus virginicus*, *Spartina patens* และ *Batis maritima* เป็นต้น และพืชพื้นเมือง เช่น ผักเบี้ยทะเล หญ้าแพรก แพงพวยทะเล และ ผักบู่ทะเล เป็นต้น นำพืชมาปลูกในกระถางทรายหยาบที่เลี้ยงด้วยสารละลายธาตุอาหาร ที่ได้ปรับระดับความเค็มของสารละลายเป็น 0 10 20 30 และ 40 ppt NaCl พบว่าพืชที่นำเข้ามาจากต่างประเทศสามารถทนเค็มได้สูงกว่าพืชพันธุ์พื้นเมือง ในการเจริญเติบโตของพืช พืชมีการเจริญเติบโตลดลงในระดับความเค็มที่เพิ่มขึ้น

ในปี ค.ศ.1993 อรุณี ยูวะนิยม และ ดร.สมศรี อรุณินท์ [2] ศึกษากลไกการทนเค็มของพืชชอบเกลือ ดำเนินการทดลองในเรือนทดลองโดยปลูกพืชในสารละลายที่ปรับความเค็มระดับต่างๆ พบว่าสามารถแบ่งกลไกความทนเค็มของพืชเป็น 2 ลักษณะ ลักษณะแรกเป็นกลไกการหลีกเลี่ยงเกลือ (salt avoidance) เช่น การอวบน้ำ (succulence) เพื่อรักษาสมดุลออสโมติกในพืช ตั้งแต่ในระดับเซลล์ สำหรับพืชทนเค็มบางชนิดเมื่อดูดเกลือปริมาณมากเข้าไปสะสมในต้นและใบ ทำให้เป็น พิษต่อพืชถึงตาย พืชมีกระบวนการหลีกเลี่ยงเกลือโดยรากจะเคลื่อนไปในทิศทางที่ดินไม่เค็มมากหรือมีความชื้นเพียงพอที่จะเจือจางเกลือในสารละลายดิน จึงทำให้ทนเค็มได้ปานกลาง เช่น หญ้า ชันอากาศ หญ้าแพรก และหญ้าคาล่า สำหรับลักษณะที่สองคือกลไกการกำจัดเกลือ (salt excluded) เช่นการคายเกลือ (excretion) ออกจากใบและกาบใบเพื่อปรับสมดุลออสโมติกในพืช



ในปี ค.ศ.1998 สุทัต โปรมยกุล, รังสรรค์ อ๋มเอิบ, ประสิทธิ์ ดันประภาส และจูไร ทองมาก [3] ศึกษาพันธุ์ไม้ชายเลนที่ปลูกในดินเค็มชายทะเลที่เสื่อมโทรมจากการทำนาุ้งและถูกทิ้งร้างเป็นระยะเวลานาน 4-5 ปี ดำเนินการทดลองโดยใช้พันธุ์ไม้ชายเลน 7 ชนิด ผลการศึกษาเป็นระยะเวลา 2 ปี พบว่า ประสักคอกแดงเป็นไม้ชายเลนที่มีอัตราการรอดตายและอัตราการเจริญเติบโตสูงกว่าไม้ชายเลนชนิดอื่นๆ อีก 6 ชนิด เมื่อปลูกในดินเลนที่มีสภาพเป็นดินเลนแข็ง ส่วนไม้ชายเลนชนิดตะบันตายทั้งหมด

ในปี ค.ศ. 2004 J.Gebauer, K. El-Siddig, A.A. Salih, และ G. Ebert [4] ศึกษาเกี่ยวกับความสามารถทนเค็มของต้นมะขาม (*Tamarindus indica L.*) โดยศึกษาถึงผลกระทบเกี่ยวกับการเจริญเติบโต การดูดธาตุอาหาร ปริมาณคอโรฟิลในใบ ทำการทดลองโดยเติมโซเดียมคลอไรด์ลงในสารละลายธาตุอาหาร ซึ่งแบ่งปริมาณของโซเดียมคลอไรด์ออกเป็น 0 20 40 60 และ 80 mM NaCl ผลจากการทดลองพบว่าต้นมะขามมีการเจริญเติบโตลดลงเล็กน้อยที่ปริมาณของโซเดียมคลอไรด์ 20 และ 40 mM NaCl แต่ในปริมาณของโซเดียมคลอไรด์ 60 และ 80 mM NaCl การเติบโตของต้นมะขามจะลดลงมาก ดังนั้นจากงานวิจัยนี้สรุปได้ว่าความเค็มมีผลต่อการเติบโตของต้นมะขามและต้นมะขามมีความสามารถในการทนเค็มได้ไม่เกิน 40 mM NaCl

## 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของสารละลายในดิน

ในปี ค.ศ.1999 R.C. Schwartz, K.J. McInnes, A.S.R. Juo, L.P. Wilding , และ D.L.Reddell [5] ศึกษาเกี่ยวกับอิทธิพลของการไหลเข้าและไหลออกของสารละลายและการสร้างเงื่อนไขค่าขอบจากความเข้มข้นของสารละลาย Bromine ( $Br^-$ ) ในดินละเอียดที่ไม่อิ่มตัวด้วยน้ำ เพื่อใช้ในการทำนายค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ ในงานวิจัยนี้ใช้สมการ Convective-Dispersive มาอธิบายการเคลื่อนที่ของสารละลายโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆเช่น ค่าความชื้น ค่าความหนาแน่น และค่าอัตราการไหลของสารละลาย ซึ่งคำนวณได้จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น และนำเงื่อนไขค่าขอบที่ได้จากการทดลองด้วยความเข้มข้นต่างๆของสารละลาย  $Br^-$  ใช้วิธีวิเคราะห์หาค่าตอบของสมการการเคลื่อนที่ จากนั้นนำผลที่ได้เปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ผลปรากฏว่าค่าที่ได้ไม่ใกล้เคียงกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ทั้งนี้เนื่องจากอิทธิพลของค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ที่ได้จากการประเมินจากค่าขอบของคอลัมน์ของสารละลายที่ความเข้มข้นต่างกันมีค่าต่างกัน ดังนั้นในการคำนวณหาค่าตอบของสมการการเคลื่อนที่ที่มีค่าความเข้มข้นของสารละลายต่างกัน จึงไม่สามารถใช้สัมประสิทธิ์การแพร่ตัวเดียวกันได้

ในปี ค.ศ.2001 K.V. Ramana Rao และ A.K. Bhattacharya [6] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการกระจายของเกลือในดินชั้นราก ในงานวิจัยนี้ใช้สมการ Convection-Dispersion ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของเกลือเฉพาะในแนวตั้ง และใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องแบบแครงก์-นิโคลสัน แก้ปัญหาสมการดังกล่าว สำหรับค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของเกลือในในงานวิจัยนี้ให้ค่าอยู่ในช่วง 0.5-2.0 ซึ่งในแต่ละการทดลองที่มีความเข้มข้นของเกลือต่างกัน ส่งผลให้ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ต่างกัน ผลการวิจัยเปรียบเทียบข้อมูลจากการทดลองกับข้อมูลจากการแก้สมการ Convection-Dispersion มีค่าใกล้เคียงกันมาก

ในปี ค.ศ.2003 Lin Wang, Kyle R. Mankin และ George L. Marchin [7] ศึกษาแบบจำลองการเคลื่อนที่อันดับสองควบคู่กับสมการการเคลื่อนที่ของสารละลาย (Convection-Dispersion equation, CDE) ซึ่งนำมาอธิบายการเคลื่อนที่ของ *E.coli* ที่อยู่ในสารละลายโซเดียมคลอไรด์ โดยทำการทดลองในดินทราย 2 ลักษณะคือ ดินทรายที่มีลักษณะหยาบและดินทรายที่มีลักษณะละเอียด ภายใต้สภาวะเดียวกันคือดินมีสภาพอิ่มตัวด้วยน้ำ ความเร็วการไหลมีค่าเท่ากับ 0.05 มิลลิเมตรต่อวินาที วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายคือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของ Lax-Wendroff นำผลการทดลองที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าคำตอบที่ได้จากการแก้สมการ CDE ให้ผลสรุปดังนี้ การทดลองในดินทรายที่มีลักษณะหยาบมีค่าความถูกต้องมากกว่าในดินทรายที่มีลักษณะละเอียด ซึ่งมีค่าความถูกต้อง 91% และ 61% ตามลำดับ จากผลการศึกษาสรุปได้ว่าการใช้สมการ CDE สามารถใช้สำหรับ *E. coli* ที่เคลื่อนที่ในดินทรายที่มีลักษณะหยาบได้ดีกว่าในดินทรายที่มีลักษณะละเอียด

### 2.3 งานวิจัยที่ศึกษาความสัมพันธ์ของการดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลาย

ปี ค.ศ.2003 A.Islam, A.J.M.S. Karim, H.M. Khaled, B.K. Mitra และ M.A.M. Miah [8] ศึกษาการดูดซับ Arsenic ในดิน 4 ชนิดในพื้นที่เกษตรกรรมในประเทศบังกลาเทศ โดยนำแบบจำลอง 3 แบบจำลองมาใช้ในการอธิบายการดูดซับ Arsenic ผลจากการวิเคราะห์แบบจำลองทั้ง 3 ให้ค่าสหสัมพันธ์ในดินทั้ง 4 ชนิดดังนี้ แบบจำลอง Langmuir 0.9974, 0.9571, 0.9324, 0.9905 แบบจำลอง Freundlich 0.9687, 0.9968, 0.9902, 0.9840 แบบจำลอง Temkin 0.9842, 0.9331, 0.9052, 0.9584 จากค่าสหสัมพันธ์ได้สรุปว่าในดินชนิดที่ 1 และ 4 สามารถอธิบายการดูดซับของดินด้วยแบบจำลอง Langmuir และในดินชนิดที่ 2 และ 3 สามารถอธิบายการดูดซับของดินด้วยแบบจำลอง Freundlich อธิบายได้

ปี ค.ศ.2003 A.T.M.A. Choudhury และ Y.M.Khanif [9] ศึกษาปริมาณการดูดซับแมกนีเซียมในดินซึ่งเป็นดินเนื้ออ่อนข้างละเอียด 3 ชนิดที่ใส่ปลูกข้าว โดยใช้ความเข้มข้นของ

แมกนีเซียม 6 ระดับในการทดลอง นำสมการการดูดซับ 3 สมการคือสมการ Langmuir, Freundlich และ Temkin มาทดสอบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ผลการวิจัยปรากฏว่าในดิน Guar และ Kangar ที่ใช้ทดลองการดูดซับแมกนีเซียมสามารถใช้สมการ Langmuir อธิบายได้ และในดิน Hutan ใช้สมการ Freundlich และ Temkin อธิบายได้ดีกว่าสมการ Langmuir ทั้งนี้ยังสามารถสรุปได้ว่าปริมาณแมกนีเซียมที่ถูกดูดซับขึ้นอยู่กับคุณสมบัติต่างๆของดินนั้นๆ เช่น ค่า pH ค่าอินทรีย์วัตถุในดิน เป็นต้น

ปี ค.ศ.2004 C.M. Gonzalez-Garcia, M.L. Gonzalez-Martin, R. Denoyel, A.M. Gallardo-Moreno, L. Labajos-Broncano และ J.M. Bruque [10] ได้ศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของการดูดซับในสารละลายที่มีความเข้มข้นต่ำ จากการศึกษาโดยใช้แบบจำลองของ Langmuir พบว่า ความสัมพันธ์ของการดูดซับในสารละลายที่มีความเข้มข้นต่ำนั้นไม่สามารถใช้สมการ Langmuir เพียงสมการเดียวมาอธิบายได้ ดังนั้น จึงนำสมการ Langmuir 2 สมการมารวมกัน โดยเรียกว่า Double Langmuir ผลที่ได้ให้ค่าความถูกต้องสูงกว่าการใช้สมการ Langmuir เพียงสมการเดียว

ปี ค.ศ. 2004 M.Nasiruddin Khan และ U.Zareen [11] ศึกษาการดูดซับสารละลาย Triton X-100 ของหินแกรนิต โดยทำการทดลองในห้องปฏิบัติการและนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองมาทำการวิเคราะห์และหาแบบจำลองมาอธิบาย แบบจำลองที่ใช้ในการอธิบายการดูดซับนี้มี 2 แบบ จำลองคือแบบจำลอง Langmuir และแบบจำลอง Freundlich นำผลที่ได้จากการทดลองและแบบจำลองมาหาค่าสหสัมพันธ์ผลปรากฏว่า แบบจำลอง Langmuir ให้ค่าสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9539 และแบบจำลอง Freundlich ให้ค่าสหสัมพันธ์เท่ากับ 0.9805 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าข้อมูลที่ได้จากการทดลองการดูดซับสารละลาย Triton X-100 ของหินแกรนิต สามารถใช้แบบจำลอง Freundlich อธิบายได้ดีกว่าแบบจำลอง Langmuir

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 3

### ทฤษฎีพื้นฐาน

ในการศึกษาวิจัยในด้านใดด้านหนึ่งนั้น ผู้วิจัยจะต้องศึกษาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานและปัจจัยต่างๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นกับงานวิจัยนั้นๆ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานในการศึกษาการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมผ่านหน้าตัดดิน ส่วนแรกที่จะกล่าวถึงคือคุณสมบัติของดินเช่น ความหนาแน่นของดิน ความชื้นในดิน และการวิเคราะห์อัตราการไหลของน้ำในดิน เป็นต้น จากนั้นจะพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายในดินที่ประกอบไปด้วยปัจจัยต่างๆ และความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินกับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ระดับต่างๆ เพื่อนำมาวิเคราะห์ถึงพฤติกรรมของดินตัวอย่างในการดูดซับสารละลาย หลังจากนั้นจะศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งจะนำมาแก้ปัญหามสมการการเคลื่อนที่ของสารละลาย ในส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงการศึกษาการหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆในสมการ โดยใช้วิธีวิเคราะห์เชิงถดถอย

#### 3.1 ความชื้นและความหนาแน่นของดิน (Water Content and Bulk Density)

น้ำปรากฏตัวในดินได้ 2 ลักษณะคือ ถูกดูดซับเป็นฟิล์มรอบผิวอนุภาคขณะดินค่อนข้างแห้ง และขังอยู่ในช่องขนาดเล็กระหว่างดินชื้น ธรรมชาติที่ระบุน้ำความมากน้อยของน้ำในดินเรียกว่าระดับความชื้นของดิน (soil water content) ระดับความชื้นของดินอาจแสดงได้หลายรูปแบบ ในที่นี้สนใจระดับความชื้นโดยมวล (mass water content,  $\theta_m$ ) ซึ่งหมายถึงสัดส่วนระหว่างมวลของน้ำในดิน ( $m_w$ ) กับมวลแห้งของดิน ( $m_s$ )

$$\theta_m = \frac{m_w}{m_s}$$

ระดับความชื้นโดยมวลหาได้โดยการเก็บตัวอย่างดินใส่กระป๋องที่ทราบมวลแล้ว ซึ่งกระป๋องใส่ดินชื้นแล้วนำเข้าเตาอบที่อุณหภูมิ  $105 - 110^\circ C$  จนดินแห้ง จากนั้นชั่งกระป๋องรวมดินแห้งอีกครั้งแล้วนำไปคำนวณหาค่า  $\theta_m$

ความหนาแน่น (density) หมายถึง มวลของวัตถุหนึ่งต่อหน่วยปริมาตร กล่าวคือ

$$\rho = \frac{M}{V}$$

โดย  $\rho$  หมายถึงความหนาแน่น หน่วยของมวลอาจใช้เป็นกิโลกรัม (kg) หรือกรัม (g) และหน่วยของปริมาตรอาจใช้เป็นลูกบาศก์เมตร ( $m^3$ ) หรือลูกบาศก์เซนติเมตร ( $cm^3$ ) ดังนั้นความหนาแน่นจะมีหน่วยเป็นกิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร หรือกรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมที่รายการเอกสารอ้างอิงที่ [12]

### 3.2 การเคลื่อนที่ของน้ำในดิน (Water Transport in Soil)

น้ำในดินมีการเคลื่อนที่ที่อยู่เสมอ และสามารถเคลื่อนที่ได้ทุกทิศทางตามแรงขับเคลื่อนของน้ำ ทิศทางการเคลื่อนที่ที่สำคัญคือทิศทางดิ่งลงหรือขึ้นในหน้าตัดดิน กฎที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของน้ำคือ กฎของดาร์ซี (Darcy's law) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J_w = -k_{sat} \frac{\Delta H}{\Delta Z}$$

เมื่อ  $J_w$  คือ อัตราการไหลของน้ำผ่านดิน (เซนติเมตรต่อวินาที)

$k_{sat}$  คือ สภาพนำน้ำของดิน (saturated hydraulic conductivity) (เซนติเมตรต่อวินาที)

$\Delta H$  คือ ความแตกต่างของแรงขับชลศาสตร์ (hydraulic head) ระหว่างจุดปลายทางและจุดต้นทาง (เซนติเมตร) เนื่องจากน้ำไหลจากต้นทางไปยังปลายทาง

$\Delta Z$  คือ ความยาวของดินวัดจากจุดต้นทางจนถึงจุดปลายทางในแนวดิ่ง (เซนติเมตร)

เราสามารถประเมินอัตราการไหลของน้ำผ่านดินได้โดยกำหนดให้

$$J_w = -k_{sat} \frac{\Delta H}{\Delta Z} = \frac{Q}{At}$$

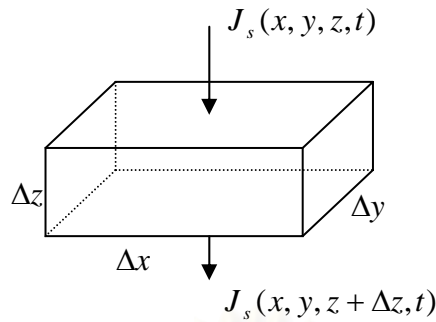
เมื่อ  $Q$  คือ ปริมาตร (ลูกบาศก์เซนติเมตร) ของน้ำที่ไหลผ่านเนื้อที่หน้าตัดดิน  $A$  (ตารางเซนติเมตร) ในเวลา  $t$  (วินาที)

อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมที่รายการเอกสารอ้างอิงที่ [12]

### 3.3 การเคลื่อนที่ของสารละลายในพื้นที่หน้าตัดดิน (Solute Transport)

การเคลื่อนที่ของสารละลายในดินสามารถเริ่มอธิบายจากกฎการอนุรักษ์มวลได้ดังนี้ กำหนดให้ปริมาตรของดินที่มีหน้าตัดดินขนาดเล็ก  $\Delta x \Delta y$  มีค่าเท่ากับ  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ดังแสดงในรูปที่ 3.1





รูปที่ 3.1 การเคลื่อนที่ของสารละลายผ่านหน้าตัดดินชั้นเล็กๆ

กำหนดให้  $J_s$  คือ อัตราการไหลของสารละลาย (กรัมของสารละลายต่อตารางเซนติเมตรต่อนาที)

ในการเคลื่อนที่ของสารละลายลงสู่ดิน สามารถเขียนได้ดังนี้

ปริมาณสารละลายที่ไหลเข้า = ปริมาณสารละลายที่ไหลออก + ปริมาณสารละลายที่เพิ่มขึ้นในดิน  
+ ปริมาณที่หายไป (เช่น พืชดูดไปใช้งาน เป็นต้น) (3.1)

ซึ่งในส่วนของปริมาณที่หายไปนั้น งานวิจัยนี้จะไม่นำมาพิจารณาเนื่องจากสารละลายที่ใช้คือสารละลายโซเดียมซึ่งพืชไม่สามารถนำไปใช้ได้และบริเวณพื้นที่ที่สนใจคือ บริเวณใต้บ่อเลี้ยงกุ้ง ดังนั้นการระเหยของน้ำจะถือว่าไม่มีผลต่อสมการ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของสารละลายผ่านหน้าตัดดิน  $\Delta x \Delta y$  ในทิศทางของ  $z$  ด้วยระยะเวลาจาก  $t$  ถึง  $t + \Delta t$  ถ้าพิจารณาค่าเฉลี่ยของ  $t$  ที่จุดกลาง  $t + \frac{1}{2} \Delta t$  จะได้

$$\text{ปริมาณสารละลายที่ไหลเข้า ณ ความลึก } z = J_s(x, y, z, t + \frac{1}{2} \Delta t) \Delta x \Delta y \Delta t$$

$$\text{ปริมาณสารละลายที่ไหลออก ณ ความลึก } z + \Delta z = J_s(x, y, z + \Delta z, t + \frac{1}{2} \Delta t) \Delta x \Delta y \Delta t$$

ในทำนองเดียวกัน กำหนดให้สารละลายที่สะสมในดิน ณ เวลา  $\Delta t$  แทนด้วย  $C_T$

ดังนั้น ปริมาณสารละลายที่เพิ่มขึ้นในดินมีค่าเท่ากับ  $\Delta C_T \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\text{โดยที่ } \Delta C_T = C_T(x, y, z + \frac{1}{2} \Delta z, t + \Delta t) - C_T(x, y, z + \frac{1}{2} \Delta z, t)$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (3.1) จะได้

$$\begin{aligned} J_s(x, y, z, t + \frac{1}{2} \Delta t) \Delta x \Delta y \Delta t &= J_s(x, y, z + \Delta z, t + \frac{1}{2} \Delta t) \Delta x \Delta y \Delta t \\ &+ C_T(x, y, z + \frac{1}{2} \Delta z, t + \Delta t) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &- C_T(x, y, z + \frac{1}{2} \Delta z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.2)$$



จากสมการที่ (3.2) ทำการหารทั้งสองข้างด้วย  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$  จะได้

$$\frac{J_s(x, y, z + \Delta z, t + \frac{1}{2} \Delta t) - J_s(x, y, z, t + \frac{1}{2} \Delta t)}{\Delta z} + \frac{C_T(x, y, z + \frac{1}{2} \Delta z, t + \Delta t) - C_T(x, y, z + \frac{1}{2} \Delta z, t)}{\Delta t} = 0$$

เมื่อพิจารณาลิมิต  $\Delta z \rightarrow 0$  และ  $\Delta t \rightarrow 0$  จะได้

$$\frac{\partial J_s}{\partial z} + \frac{\partial C_T}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

ซึ่งสมการที่ (3.3) เรียกว่าสมการความต่อเนื่อง (continuity equation)

เมื่อพิจารณาเทอมของ  $J_s$  ซึ่งประกอบด้วย

$$J_s = J_l + J_g$$

เมื่อ  $J_l$  คือ อัตราการไหลของสารละลาย (กรัมของสารละลายต่อตารางเซนติเมตรต่อนาที)

$J_g$  คือ อัตราการไหลของแก๊ส (กรัมของสารละลายต่อตารางเซนติเมตรต่อนาที)

แต่เนื่องจากในงานวิจัยนี้ไม่คำนึงถึงค่าการระเหย ดังนั้นพจน์  $J_g$  ไม่นำมาคำนวณ ดังนั้นจะได้

$$J_s = J_l \quad (3.4)$$

อัตราการไหลของสารละลาย ( $J_l$ ) ประกอบด้วย

1.  $J_{lc}$  คือ อัตราการไหลแบบการนำพาสารละลาย (convection)
2.  $J_{lh}$  คือ อัตราการไหลแบบการกระจายเชิงอุทกพลวัต (hydrodynamic dispersion)
3.  $J_{ld}$  คือ อัตราการไหลแบบการแพร่ (diffusion)

การนำพาสารละลาย คือ การเคลื่อนที่ของสารผ่านดินไปกับน้ำที่กำลังเคลื่อนที่ในช่องขนาดใหญ่ ทำให้สารเคลื่อนที่ลงสู่หน้าตัดดินอย่างรวดเร็ว สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$J_{lc} = J_w C_l$$

เมื่อ  $J_w$  คือ อัตราการไหลของสารละลายผ่านดิน (ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อตารางเซนติเมตรต่อ นาที)

$C_l$  คือ ความเข้มข้นของสารละลาย (กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตรของสารละลาย)

การกระจายเชิงอุทกพลวัต คือ รูปแบบหนึ่งของการเคลื่อนที่ของสารผ่านดินซึ่งไหลไปกับน้ำที่กำลังเคลื่อนที่ โดยเฉพาะเมื่อดินมีการกระจายของขนาดของช่องไม่สม่ำเสมอ ทำให้สารที่เคลื่อนที่ไปกับน้ำในช่องขนาดใหญ่ซึ่งไหลเร็วกระจายลึกลงไปในหน้าตัดดินเร็วกว่าสารที่เคลื่อนที่ไปกับน้ำในช่องขนาดเล็กซึ่งไหลช้า สามารถเขียนสมการการไหลแบบการกระจายเชิงอุทกพลวัตได้ดังนี้

$$J_{lh} = -D_{lh} \frac{\partial Cl}{\partial z}$$

เมื่อ  $D_{lh}$  คือ สัมประสิทธิ์ของการกระจายเชิงอุทกพลวัต (ตารางเซนติเมตรต่อนาที)

การแพร่ คือ การเคลื่อนที่ของสารในระดับโมเลกุลหรือไอออนในดินสืบเนื่องจากความแตกต่างของความเข้มข้น สามารถเขียนสมการการไหลแบบการแพร่ได้ดังนี้

$$J_{lh} = -D_e^s \frac{\partial Cl}{\partial z}$$

เมื่อ  $D_e^s$  คือ สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจายของสารละลาย (ตารางเซนติเมตรต่อนาที)

นำการไหลทั้ง 3 แบบแทนลงในสมการที่ (3.4) จะได้

$$\begin{aligned} J_s &= J_l \\ &= J_{lc} + J_{lh} + J_{ld} \\ &= J_w Cl - D_{lh} \frac{\partial Cl}{\partial z} - D_e^s \frac{\partial Cl}{\partial z} \\ J_s &= J_w Cl - D_e \frac{\partial Cl}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

โดยที่  $D_e = D_{lh} + D_e^s$

เนื่องจากปริมาณสารละลายที่สะสมในดิน ( $C_T$ ) เป็นปริมาณที่เกิดจากมวลของสารที่ถูกดูดซับในดินในรูปแบบของแข็งและมวลของสารในรูปแบบของของเหลว ดังนั้นปริมาณของสารละลายในดินเขียนได้ดังนี้

$$C_T = \rho_b Ca + \theta Cl \quad (3.6)$$

เมื่อ  $\rho_b$  คือ ความหนาแน่นรวม (กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตรของดิน)

$Ca$  คือ ปริมาณของสารที่ถูกดูดซับ (กรัมของสารต่อกรัมของดิน)

$\theta$  คือ ความชื้นของดิน

$Cl$  คือ ความเข้มข้นของสารละลาย (กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตรของสารละลาย)

แทนสมการที่ (3.5) และ สมการที่ (3.6) ลงในสมการ (3.3) จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b Ca + \theta Cl) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(J_w Cl - D_e \frac{\partial Cl}{\partial z}\right) \\ \rho_b \frac{\partial Ca}{\partial t} + \theta \frac{\partial Cl}{\partial t} &= D_e \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Cl}{\partial z}\right) - J_w \frac{\partial Cl}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่รายการเอกสารอ้างอิงที่ [13] และ [14]

จากสมการ(3.7) ต้องหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณของสารที่ถูกดูดซับกับปริมาณของสารในสารละลายเสียก่อนจึงจะสามารถหาคำตอบของสมการได้ สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

### 3.4 แบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณของสารที่ถูกดูดซับกับปริมาณของสารในสารละลาย (Adsorption Modeling)

การดูดซับปริมาณของสารในดินขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยเช่น ความหนาแน่นของดิน ความชื้นของดิน ชนิดของดิน เป็นต้น ดังนั้นในการหาปริมาณการดูดซับของสารในดินภายใต้อิทธิพลของความเข้มข้นจึงต้องกำหนดเงื่อนไขของปัจจัยต่างๆให้มีสมบัติเหมือนกัน แบบจำลองที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณของสารที่ถูกดูดซับในดินกับปริมาณของสารในสารละลายมีอยู่หลายแบบจำลองด้วยกัน เช่นแบบจำลองเชิงเส้น แบบจำลอง Freundlich และแบบจำลอง Langmuir เป็นต้น โดยในที่นี้จะนำแบบจำลอง Langmuir มาอธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าว

#### 3.4.1 แบบจำลอง Langmuir

แบบจำลอง Langmuir ถูกพัฒนาขึ้นโดย Irving Langmuir นักเคมีและฟิสิกส์ชาวสหรัฐอเมริกาในปี ค.ศ.1918 [15] แบบจำลองนี้เป็นที่นิยมในการนำมาใช้อธิบายการดูดซับของโมเลกุล เนื่องจากสามารถอธิบายพฤติกรรมทางกายภาพของการดูดซับได้ โดยแบบจำลองนี้อธิบายการดูดซับของโมเลกุลบนพื้นที่ของตัวดูดซับที่มีสมบัติเหมือนกันและโมเลกุลที่ถูกดูดซับไม่มีปฏิกิริยาต่อกัน โดยมีสมมติฐานว่า อัตราการดูดซับ ( $R_A$ ) ขึ้นอยู่กับพื้นที่ว่างของวัตถุและมวลของโมเลกุลในสารละลาย สามารถเขียนได้ดังนี้

$$R_A = k_1(Q_m - Ca)Cl \quad (3.8)$$

เมื่อ $Ca$	คือ ปริมาณของสารที่ถูกดูดซับ (โมเลกุล)
$Q_m$	คือ ปริมาณของสารสูงสุดที่วัตถุสามารถดูดซับได้
$Cl$	คือ ความเข้มข้นของสารละลาย

อัตราการคายตัว ( $R_D$ ) ขึ้นอยู่กับปริมาณของสารที่ถูกดูดซับ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$R_D = k_2 Ca \quad (3.9)$$

เมื่อ  $k_1, k_2$  คือสัมประสิทธิ์ของการดูดซับและการคายตัว ตามลำดับ

ที่จุดสมดุล อัตราการดูดซับปริมาณของสารจะเท่ากับอัตราการคายตัวของปริมาณของสาร ดังนั้น

$$R_A = R_D$$

หรือ

$$k_1(Q_m - Ca)Cl = k_2 Ca \quad (3.10)$$

จัดรูปแบบสมการที่ (3.10) ใหม่จะได้ว่า

$$Ca = \frac{KQ_m Cl}{1 + KCl} \quad (3.11)$$

เมื่อ  $K = \frac{k_1}{k_2}$  คือสัดส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์การดูดซับและการคายปริมาณของสาร

### 3.5 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

#### 3.5.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิก (Parabolic Equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิกเป็นรูปแบบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$\frac{\partial C(z,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 C(z,t)}{\partial z^2}$$

โดยที่  $k$  อาจเป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของ  $z$

ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น จำเป็นต้องทราบเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น โดยเงื่อนไขขอบ (Boundary condition) หมายถึง เงื่อนไขที่กำหนดให้ที่ขอบของปัญหานั้น ยกตัวอย่างเช่น เงื่อนไขขอบของปัญหาการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะ อาจประกอบด้วย การกำหนดอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองของแท่งโลหะนั้น เป็นต้น โดยทั่วไปเงื่อนไขขอบสามารถจำแนกได้เป็น 2 แบบคือ

- 1) เงื่อนไขแบบดิริคเลต (Dirichlet condition) เป็นเงื่อนไขการกำหนดตัวแปรตาม  $C$  ที่ขอบ

- 2) เงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann condition) เป็นเงื่อนไขของการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรตาม  $C$  ที่ขอบนั้น นั่นคือ กำหนด  $\frac{\partial C}{\partial z}$

ดังนั้นอาจเขียนสมการพาราโบลา พร้อมเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นได้ดังนี้

$$\frac{\partial C(z,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 C(z,t)}{\partial z^2}$$

เงื่อนไขขอบ  $C(0,t) = a \quad ; \quad t > 0$   
 $C(l,t) = b \quad ; \quad t > 0$

เงื่อนไขเริ่มต้น  $C(z,0) = f(z) \quad ; \quad 0 \leq z \leq l$

เมื่อ  $a, b$  อาจเป็นค่าคงที่หรือฟังก์ชันของ  $t$

จากนั้นทำการศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลา โดยพบว่ามียุทธวิธีหลายระเบียบวิธี ซึ่งแต่ละระเบียบวิธีมีลักษณะขั้นตอนในการแก้สมการที่มีทั้งข้อดีและข้อเสียแตกต่างกันไป สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้เลือกระเบียบวิธีของ แครงก์-นิโคลสันอ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่รายการอ้างอิงที่[16]

### 3.5.2 ระเบียบวิธีของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method)

ระเบียบวิธีของแครงก์-นิโคลสัน เป็นระเบียบวิธีแบบปริยายวิธีหนึ่งซึ่งให้ค่าความผิดพลาดอันดับสองทั้งกับเวลาและระยะทาง หลักการของระเบียบวิธีของ แครงก์-นิโคลสัน คือ การประมาณพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาที่กึ่งกลางระหว่างช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $j$  และ  $j+1$  ในระยะทางที่  $i$  ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{(C_{i,j+1} - C_{i,j})}{\Delta t}$$

และทำเช่นเดียวกันกับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองที่แปรผันกับระยะทาง ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \left( \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2(\Delta z)} + \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1}}{2(\Delta z)} \right) (1-\theta)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{C_{i-1,j} - 2C_{i,j} + C_{i+1,j}}{(\Delta z)^2} (1-\theta) + \frac{C_{i-1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i+1,j+1}}{(\Delta z)^2} (1-\theta)$$

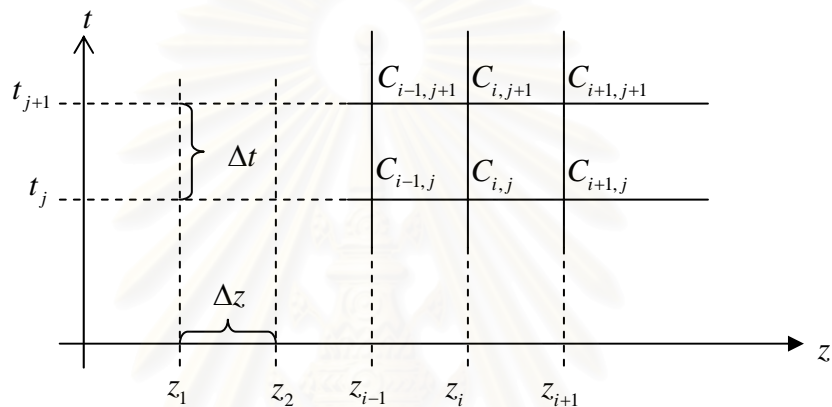
โดยระเบียบวิธีของแครงก์-นิโคลสันได้ทำการสรุปถึงค่า  $\theta$  ที่เหมาะสมในการนำมาใช้ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{2}$  อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมที่รายการเอกสารอ้างอิงที่ [17]

ดังนั้นสามารถเขียนอนุพันธ์ที่แปรผันกับระยะทางได้ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2(\Delta z)} + \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1}}{2(\Delta z)} \right)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{C_{i-1,j} - 2C_{i,j} + C_{i+1,j}}{(\Delta z)^2} + \frac{C_{i-1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i+1,j+1}}{(\Delta z)^2} \right)$$

โดยเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 แผนภาพการคำนวณ โดยระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสัน

ตัวอย่างการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลาโบลิก โดยใช้ระเบียบวิธีของเครงก์-นิโคลสัน

$$\frac{\partial C}{\partial t}(z,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \quad 0 < z < l, \quad t > 0$$

ใช้ระเบียบวิธีของเครงก์-นิโคลสันและจัดรูปใหม่จะได้

$$\beta C_{i-1,j} + 2(1-\beta)C_{i,j} + \beta C_{i+1,j} + \beta C_{i-1,j+1} + 2(1-\beta)C_{i,j+1} + \beta C_{i+1,j+1} = 0$$

เมื่อ  $\beta = \frac{\alpha^2 \Delta t}{(\Delta z)^2}$

นำสมการข้างต้นมาเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้



$$\begin{bmatrix} 2(1+\beta) & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & 2(1+\beta) & -\beta & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta \\ 0 & \cdots & 0 & -\beta & 2(1+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,j+1} \\ C_{2,j+1} \\ \vdots \\ C_{m-1,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2(1-\beta) & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 2(1-\beta) & \beta & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & 2(1-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,j} \\ C_{2,j} \\ \vdots \\ C_{m-1,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta(C_{0,j} + C_{0,j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(C_{m,j} + C_{m,j+1}) \end{bmatrix}$$

เมื่อจัดสมการอยู่ในรูปเมตริกซ์แล้วจึงนำไปคำนวณหาคำตอบ ซึ่งวิธีการหาคำตอบของระบบสมการมีอยู่หลายวิธี สำหรับในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการแยกตัวประกอบแบบคราท์ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

### 3.5.3 การแยกตัวประกอบแบบคราท์ (Crout Factorization)

ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition method) เป็นวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น หลักการของระเบียบวิธีนี้เกิดจากแนวความคิดที่ว่าระบบสมการใดที่มีรูปแบบของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมส่วนบนแล้ว จะทำให้การหาผลเฉลยเป็นไปได้โดยง่าย เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

กล่าวคือ สัมประสิทธิ์ต่างๆ ที่อยู่ในแถบล่างซ้ายของเมตริกซ์ต่างมีค่าเป็นศูนย์ แล้วเราก็สามารถคำนวณหาผลลัพธ์โดยการแทนค่าย้อนกลับได้โดยง่าย ระเบียบวิธีแยกตัวประกอบแบบคราท์จึงใช้วิธีการแยกเมตริกซ์  $[A]$  ออกเป็นผลคูณของ 2 เมตริกซ์  $[A] = [L][U]$  เมตริกซ์  $[L]$  เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ตลอดแถบบนขวาเป็นศูนย์หมดในขณะที่เมตริกซ์  $[U]$  เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ตลอดแถบล่างซ้ายเป็นศูนย์หมดเช่นกัน

หากเราพิจารณาระบบสมการสามแนวทแยงโดยการแยกของเมตริกซ์  $[A]$  ออกเป็นเมตริกซ์  $[L]$  และเมตริกซ์  $[U]$  ดังสมการ(3.12) จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ตลอดแนวแกนเฉียงของเมตริกซ์  $[L]$  นั้นเป็นค่าใดๆ ในขณะที่สัมประสิทธิ์ตลอดแนวแกนเฉียงของเมตริกซ์  $[U]$

นั้นต่างมีค่าเท่ากับ 1 การจัดรูปแบบเมตริกซ์  $[L]$  และเมตริกซ์  $[U]$  ลักษณะเช่นนี้เรียกว่าเป็นการจัดของเคราท์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{43} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนการคำนวณของการแยกตัวประกอบแบบเคราท์ [18]

ขั้นตอนที่ 1 ให้  $l_{11} = u_{11}$  ,  $u_{12} = a_{12}/l_{11}$  ,  $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$

ขั้นตอนที่ 2 สำหรับ  $i=2, \dots, n-1$  ให้

$$l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$$

$$l_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i}$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{i,i}$$

$$z_i = \frac{1}{l_{i,i}} [a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1}]$$

ขั้นตอนที่ 3 ให้  $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$

$$l_{n,n} = a_{n,n} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$$

$$z_n = \frac{1}{l_{n,n}} [a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1}]$$

ขั้นตอนที่ 4 ให้  $x_n = z_n$

สำหรับ  $i=n-1, \dots, 1$  ให้  $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$

### 3.6 การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis)

เป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงสถิติระหว่างตัวแปร 2 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งเรียกว่า ตัวแปรอิสระ (independent variable) ซึ่งจะมีที่ตัวแปรก็ได้กับตัวแปรอีกกลุ่มหนึ่งเพียงตัวแปรเดียว เรียกว่า ตัวแปรตาม (dependent variable) โดยที่ค่าวัดของตัวแปรอิสระจะเป็นค่าวัดประเภทใดก็ได้แต่สำหรับตัวแปรตามต้องเป็นค่าวัดแบบช่วงหรือแบบอัตราส่วนหรือเรียกว่าตัวแปรต่อเนื่อง

ลักษณะและรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระนั้นจะนำไปใช้ประโยชน์สำหรับการประมาณค่าหรือพยากรณ์ค่าของตัวแปรตามเมื่อทราบค่าของตัวแปรอิสระต่างๆเหล่านั้น

### 3.6.1 การวิเคราะห์การถดถอยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Regression Analysis)

ข้อมูลต่างๆ สำหรับงานทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ส่วนใหญ่ ลักษณะการกระจายของข้อมูลมักไม่อยู่ในรูปแบบของเชิงเส้น ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามที่มีความสัมพันธ์ในรูปแบบไม่เชิงเส้น เขียนอยู่ในรูปแบบสมการถดถอยได้ดังนี้

$$y = y(x; a) \quad (3.13)$$

โดยที่  $y$  คือ ตัวแปรตามของสมการถดถอย

$x$  คือ ตัวแปรอิสระของสมการถดถอย

$a$  คือ พารามิเตอร์สมการถดถอย

### 3.6.2 การหาค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอย

ในการวิเคราะห์การถดถอย นอกจากจะต้องทราบว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรตาม หรือตัวแปรอิสระแล้ว ผู้วิเคราะห์จะต้องกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระให้ถูกต้องเหมาะสมกับความเป็นจริง และเมื่อกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองได้แล้ว ผู้วิเคราะห์จะทำการประมาณค่าคงตัวความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองนั้น โดยที่เราจะเรียกค่าคงตัวประมาณความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองนี้ว่า สัมประสิทธิ์การถดถอยหรือค่าพารามิเตอร์การถดถอย

สำหรับเทคนิคหรือวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการการถดถอย ที่นิยมที่สุดคือ Levenberg-Marquart method ซึ่งใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ของสมการถดถอยไม่เชิงเส้น

### 3.6.3 Levenberg-Marquardt Method

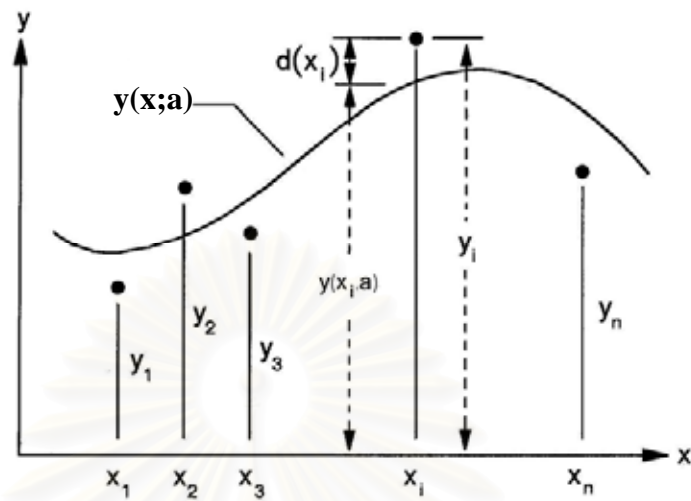
วิธี Levenberg-Marquardt เป็นวิธีที่เหมาะสมและนิยมใช้สำหรับการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้น เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการ มีวิธีการดังต่อไปนี้

สมมติว่าต้องการหาสมการ ที่แทนข้อมูลจำนวน  $n$  จุด  $(x_i, y_i)$  ;  $i = 1, 2, \dots, n$  โดยมีพารามิเตอร์ที่ต้องการหา  $m$  ตัว คือ  $a_j$  ;  $j = 1, 2, \dots, m$  เพื่อที่จะหาสมการการถดถอยที่แทนความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ  $x$  กับตัวแปรตาม  $y$  จากสมการ (3.13) คือ

$$y(x) = y(x; a)$$

เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์  $a$  ในสมการที่ (3.13) แล้วนำสมการที่ได้มาเปรียบเทียบกับข้อมูลที่กำหนดให้ พบว่าเกิดค่าความคลาดเคลื่อน  $d(x_i)$  ที่จุด  $x_i$  ดังแสดงในรูปที่ (3.13) โดยที่ค่า  $d(x_i)$  คือ

$$d(x_i) = y_i - y(x_i; a) \quad (3.14)$$



รูปที่ 3.3 ค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละจุด  $(x_i, y_i)$

สมการที่หาได้จะก่อให้เกิด ค่าความผิดพลาดกำลังสองที่น้อยที่สุดจากข้อมูลทั้งหมดที่กำหนดให้ ขั้นตอนในการหาสมการการถดถอยไม่เชิงเส้นนี้ เริ่มจากการหาค่าความคลาดเคลื่อน  $E$  ที่เกิดจากข้อมูลจำนวน  $n$  ข้อมูลในรูปแบบดังนี้

$$E = \sum_{i=1}^n [d(x_i)]^2 \quad (3.15)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$E(a) = \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i; a)]^2 \quad (3.16)$$

โดยที่  $y_i$  เป็นตัวแปรตามที่ได้จากข้อมูลตัวที่  $i$   
 $x_i$  เป็นตัวแปรอิสระที่ได้จากข้อมูลตัวที่  $i$   
 $y$  เป็นตัวแปรตามที่ได้จากสมการถดถอยโดยมีพารามิเตอร์  $a$   
 $a$  เป็นพารามิเตอร์การถดถอย

กำหนดให้ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนคือ  $E(a)$  และเขียนอยู่ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสองได้ดังนี้

$$E(a_{n+1}) \approx E(a_n) + \nabla E(a_n)^T \cdot (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2} (a_{n+1} - a_n)^T \cdot \nabla^2 E(a_n) \cdot (a_{n+1} - a_n) \quad (3.18)$$

$$\text{โดยที่ } \nabla E(a_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_{1n}} \\ \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_{2n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2 E(a_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{1n} \partial a_{1n}} & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{1n} \partial a_{2n}} & \dots & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{1n} \partial a_{mn}} \\ \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{2n} \partial a_{1n}} & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{2n} \partial a_{2n}} & \dots & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{2n} \partial a_{mn}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{mn} \partial a_{1n}} & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{mn} \partial a_{2n}} & \dots & \frac{\partial^2 E(a_n)}{\partial a_{mn} \partial a_{mn}} \end{bmatrix}$$

จากสมการที่ (3.18) เขียนให้อยู่ในรูปเกรเดียนต์เวกเตอร์ (Gradient vector)  $g$  และ เฮสเซียนเมทริกซ์ (Hessian matrix)  $H$  ได้ดังนี้

$$E(a_{n+1}) = E(a_n) + g^T \cdot (a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2} (a_{n+1} - a_n)^T \cdot H \cdot (a_{n+1} - a_n) \quad (3.19)$$

โดยที่  $g$  คือ เวกเตอร์อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ  $E(a_n)$   
 $H$  คือ เมทริกซ์อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ  $E(a_n)$

สำหรับการหาค่าพารามิเตอร์  $a$  ที่ทำให้มีค่าความคลาดเคลื่อน  $E(a)$  น้อยที่สุดทำได้ โดยการหาอนุพันธ์เทียบ  $a_n$  ได้ดังนี้

$$\frac{\partial E(a_{n+1})}{\partial a_n} = \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_n} + \frac{\partial g^T (a_{n+1} - a_n)}{\partial a_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (a_{n+1} - a_n)^T \cdot H \cdot (a_{n+1} - a_n)}{\partial a_n}$$

$$0 = \frac{\partial E(a_n)}{\partial a_n} + g^T (-1) + H(a_{n+1} - a_n)(-1)$$

พิจารณาจุดต่ำสุดโดยให้  $\frac{\partial E(a_n)}{\partial a_n} = 0$  จะได้

$$0 = g^T + H(a_{n+1} - a_n)$$

จะได้

$$a_{n+1} = a_n - H^{-1} g \quad (3.20)$$

พิจารณาเทอม  $H^{-1}g$  ในสมการที่ (3.20) พบว่าเทอม  $H^{-1}g$  คือค่า Step size หรือขนาดที่เปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์  $a$  ในแต่ละรอบการทำซ้ำ Levenberg-Marquardt เสนอให้เปลี่ยนเทอม  $H^{-1}g$  เป็น  $(H + \lambda I)^{-1}g$  เพื่อลดจำนวนรอบการทำซ้ำ คือเมื่อค่า  $\lambda$  มากทำให้ step size เล็กลงและเมื่อค่า  $\lambda$  น้อย step size จะมีขนาดใหญ่ ซึ่งส่งผลให้จำนวนรอบในการทำซ้ำลดลง สมการใหม่ที่ได้มีรูปแบบดังนี้

$$a_{n+1} = a_n - (H + \lambda I)^{-1}g \quad (3.21)$$

โดยที่  $\lambda$  จะเปลี่ยนไปทุกรอบการทำซ้ำขึ้นอยู่กับค่า  $E(a)$

อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้ที่รายการเอกสารอ้างอิงที่ [19] และ [20]



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 4

### การจำลองแบบ

จากการศึกษาคุณสมบัติต่างๆ และสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายในบทที่ 3 ทำให้ทราบว่าปัจจัยใดมีส่วนเกี่ยวข้องในการศึกษาการเคลื่อนที่ของสารละลายในหน้าตัดดิน ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีดำเนินการหาปัจจัยเหล่านั้นจากการทดลองซึ่งสามารถจำแนกได้เป็น การเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับคุณสมบัติของดิน การทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมในระดับต่างๆ การทดลองหาความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นสุดท้ายของคอลัมน์ดินที่ระยะเวลาต่างๆ จากนั้นนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และใช้แบบจำลองที่ได้มาช่วยในการหาผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียม ในส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงการสร้างภาพนามธรรมของการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมผ่านหน้าตัดดิน

#### 4.1 การเก็บข้อมูล (Data Collection)

จากการศึกษาสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายพบว่าเราจำเป็นต้องทราบค่าสัมประสิทธิ์บางตัวในสมการเสียก่อนจึงจะดำเนินการแก้ปัญหาสมการดังกล่าวได้ ดังนั้นจึงต้องนำสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายมาวิเคราะห์และวางแผนการทดลอง จากการวิเคราะห์ได้ผลดังนี้

ข้อมูลที่เก็บรวบรวมเพื่อนำไปสร้างแบบจำลองนั้น ได้มาจากการทดลองซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ส่วนด้วยกัน คือ ส่วนแรกทำการทดลองหาคุณสมบัติพื้นฐานของดินที่นำมาศึกษา ส่วนที่สองทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับและความเข้มข้นในระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ ( $\text{NaCl}$ ) และส่วนสุดท้ายคือการทดลองหาการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของสารละลายโซเดียม ( $\text{Na}^+$ ) ที่เวลาต่างๆ ในคอลัมน์ของดินที่อัดตัวด้วยน้ำที่มีความยาว 10 เซนติเมตร

##### 4.1.1 คุณสมบัติพื้นฐานของดิน

คุณสมบัติของดินที่ทำการศึกษาในงานวิจัยนี้ คือ ค่าความหนาแน่นรวม (bulk density) ค่าความชื้นของดิน (water content) ค่าสภาพการนำน้ำของดิน (hydraulic conductivity) และปริมาณโซเดียมในดินตัวอย่างที่นำมาทดลอง ซึ่งเก็บข้อมูลจากดินตัวอย่างที่เก็บจากพื้นที่เพาะปลูกภายในมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน

#### 4.1.1.1 การทดลองหาค่าความหนาแน่นรวมของดิน

วิธีการวัดค่าความหนาแน่นรวมของดิน ทำได้ดังนี้

1. เก็บตัวอย่างดินแบบไม่รบกวนโครงสร้าง
2. หาน้ำหนักแห้งของตัวอย่างดิน ( $m_s$ ) และปริมาตรรวมของตัวอย่างดิน ( $V_b$ )
3. หาค่าความหนาแน่นรวม ( $\rho_b$ ) ดังนี้

$$\rho_b = \frac{m_s}{V_b}$$

#### 4.1.1.2 การทดลองหาค่าความชื้นของดิน

วิธีการวัดค่าความชื้นในดิน ทำได้ดังนี้

1. เก็บตัวอย่างดินแบบรบกวนโครงสร้าง (disturbed soil sample) ที่ ระดับความ ลึกประมาณ 20 เซนติเมตร
2. ชั่งน้ำหนัก moisture can ( $M_m$ ) และใส่ดินลงใน moisture can ชั่งน้ำหนัก ทั้งหมด ( $M_1$ )
3. นำไปอบที่อุณหภูมิ  $105^\circ C$  ประมาณ 24 ชั่วโมง
4. นำออกมาชั่งน้ำหนัก ( $M_2$ )
5. คำนวณหาความชื้นโดยมวล ( $\theta_m$ ) จาก

$$\theta_m = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_m}$$

#### 4.1.1.3 การวัดสภาพการนำน้ำของดินขณะอิ่มตัว

การวัดสภาพการนำน้ำของดินสามารถทำได้โดยใช้วิธี Constant head ซึ่ง เป็นวิธีควบคุมศักย์ความดัน ที่ผิวดินทั้งขาเข้าและออกให้คงที่ และตรวจวัด ความเร็วการไหลของน้ำผ่านดิน ( $J_w$ ) เมื่อทราบค่าความเร็วการไหลของน้ำแล้ว จะประเมินค่าสภาพการนำน้ำ ( $k_{sat}$ ) จากผลหารของความเร็วการไหลของน้ำกับ ลาดชลศาสตร์ (hydraulic gradient) ( $\Delta H / \Delta Z$ ) กล่าวคือ

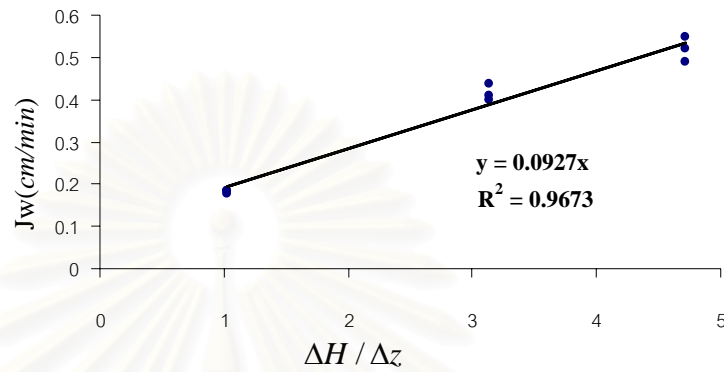
$$k_{sat} = \frac{J_w}{(\Delta H / \Delta Z)}$$

การประเมินสภาพการนำน้ำของดินขณะอิ่มตัวโดยวิธี Constant head method

1. เตรียมตัวอย่างดินให้อิ่มตัวด้วยน้ำ
2. ตรวจวัดปริมาตรของน้ำ  $Q$  (ลูกบาศก์เซนติเมตร) ที่ไหลผ่านหน้าตัดดิน ในเวลา  $t$  (นาท) คำนวณ  $J_w$  (เซนติเมตรต่อนาท) จากสมการ

$$J_w = Q / At$$

3. เปลี่ยนค่าลาดศักรน้ำ ( $\Delta H / \Delta Z$ ) ให้แตกต่างจากเดิมแล้วประเมิน  $J_w$  ใหม่ทำซ้ำหลายๆ ครั้ง
4. ประเมิน  $k_{sat}$  (เซนติเมตรต่อนาที) โดยการเขียนกราฟระหว่าง  $J_w$  กับ  $\Delta H / \Delta Z$  ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วการไหลของน้ำที่ไหลผ่านคอลัมน์ดิน ( $J_w$ ) กับลาดชลศาสตร์ ( $\Delta H / \Delta Z$ )



รูปที่ 4.2 การวัดสภาพการนำน้ำของดินโดยใช้วิธี Constant head

อ่านรายละเอียดการทดลองในหัวข้อ 4.1.1.1, 4.1.1.2 และ 4.1.1.3 เพิ่มเติมได้ที่  
รายการเอกสาร อ้างอิงที่ [12]

#### 4.1.2 การทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับและความเข้มข้นในระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl)

การศึกษาค้นคว้าความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินกับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ในระดับต่างๆนั้น ใช้ตัวอย่างดินที่เก็บจากบริเวณภายในมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน ซึ่งมีลักษณะเป็นดินร่วนปนทราย โดยเก็บตัวอย่างดินประมาณเดือนเมษายน พ.ศ.2547 จากการศึกษาความเข้มข้นของน้ำทะเลพบว่าน้ำทะเลมีความเข้มข้นของโซเดียมคลอไรด์สูงสุดประมาณ 3.5 เปอร์เซ็นต์ (ในสารละลาย 100 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีปริมาณโซเดียมคลอไรด์ 3.5 กรัม) ดังนั้นในการทดลองจึงแบ่งความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ออกเป็นระดับต่างๆ ดังนี้ 0.0% 0.5% 1.0% 1.5% 2.0% 2.5% 3.0% 3.5% 4.0% 4.5% โดยขั้นตอนการทดลองมีดังต่อไปนี้

- ขั้นตอนที่ 1 นำดินตัวอย่างที่เก็บมาผึ่งลมให้แห้ง จากนั้นนำมาบดให้ละเอียดผ่านตะแกรงร่อนขนาด 2.0 มิลลิเมตร
- ขั้นตอนที่ 2 ตวงดินที่ผ่านการร่อนแล้ว 10 กรัม ผสมกับสารละลายโซเดียมคลอไรด์ปริมาตร 20 ลูกบาศก์เซนติเมตรทิ้งไว้ 30 นาที โดยเขย่าทุกๆ 5 นาที
- ขั้นตอนที่ 3 นำดินจากขั้นตอนที่ 2 ไปกรองและนำดินที่กรองเรียบร้อยแล้วแช่ในน้ำยาแอมโมเนียมอะซิเตท ( $NH_4OAc$ ) ในปริมาตร 250 ลูกบาศก์เซนติเมตร ทิ้งไว้ประมาณ 12 ชั่วโมง
- ขั้นตอนที่ 4 นำดินจากขั้นตอนที่ 3 มากรองโดยในระหว่างนั้นนำน้ำยาแอมโมเนียมอะซิเตท ( $NH_4OAc$ ) มาชะล้างโซเดียมไอออนออกโดยใช้ปริมาตรประมาณ 250 ลูกบาศก์เซนติเมตร
- ขั้นตอนที่ 5 นำสิ่งที่กรองได้จากขั้นตอนที่ 4 ไปวิเคราะห์หาปริมาณโซเดียมโดยใช้เครื่อง Atomic Absorption Spectrophotometer (AAS)



รูปที่ 4.3 ดินตัวอย่างที่ใช้ในการทดลอง



รูปที่ 4.4 ดินที่ผ่านการร่อนโดยตะแกรง 2.0 มม.



รูปที่ 4.5 การทดลองเพื่อวิเคราะห์หาปริมาณ โขเดียมในดิน

#### 4.1.3 การทดลองหาการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่เวลาต่างๆ

การทดลองการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมนี้ จะทำการทดลองโดยเก็บสารละลายที่ออกมาจากด้านล่างของคอลัมน์ที่เตรียมไว้ โดยทำการจับเวลาเก็บสารละลายทุกๆ 1 ชั่วโมง ทั้งนี้เนื่องจากเราสามารถประเมินการไหลออกจากคอลัมน์ของสารละลายด้วยคุณสมบัติของดินและการหาอัตราการไหลของน้ำในดินที่อิ่มตัว ทำให้สามารถทำนายได้ว่าสารละลายจะเริ่มไหลออกจากด้านล่างของคอลัมน์เมื่อใด และทำการจัดเก็บสารละลายตามเวลาที่กำหนดไว้ ดังนั้นจึงวางแผนการทดลองโดยมีขั้นตอนดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1 นำดินที่ผ่านการร่อนแล้วบรรจุใส่ในคอลัมน์โดยคำนวณปริมาตรของดินจากค่าความหนาแน่นที่วัดได้จากดินตัวอย่างที่เก็บจากภาคสนาม
- ขั้นตอนที่ 2 ทำให้คอลัมน์ดินอิ่มตัวด้วยน้ำ และทดสอบหาอัตราการไหลของน้ำ จากนั้นประเมินการไหลออกของสารละลายที่ชั้นล่างของคอลัมน์เพื่อนำมาคำนวณเวลาที่ใช้ในการทดลอง



- ขั้นตอนที่ 3 ปลอ่ยสารละลายโซเดียมคลอไรด์ลงไปในด้านบนของคอลัมน์ พร้อมทั้งนำภาชนะรองไว้ที่ด้านล่างของคอลัมน์และเริ่มจับเวลา
- ขั้นตอนที่ 4 นำสารละลายในภาชนะที่รองรับ ในทุกๆ ชั่วโมงไปวิเคราะห์หาปริมาณของโซเดียมด้วยเครื่อง Atomic Absorption Spectrophotometer (AAS)

การทดลองการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมแสดงในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 การทดลองหาการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่เวลาต่างๆ

ข้อมูลที่เก็บได้จากการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ โซเดียมที่ถูกดูดซับและความเข้มข้นในระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl) และการทดลองการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของสารละลายที่เวลาต่างๆ เก็บไว้ในตารางในภาคผนวก

#### 4.2 การจำลองแบบ (Simulation)

การจำลองแบบเป็นวิธีการหนึ่งในกระบวนการแก้ปัญหาในด้านต่างๆ ซึ่งจำกัดความของการจำลองแบบก็คือ กระบวนการสร้างแบบจำลองของปัญหา แล้วดำเนินการทดลองโดยใช้แบบจำลองนั้นเพื่อการเรียนรู้พฤติกรรมของปัญหานั้นๆ ภายใต้ข้อกำหนดที่วางไว้

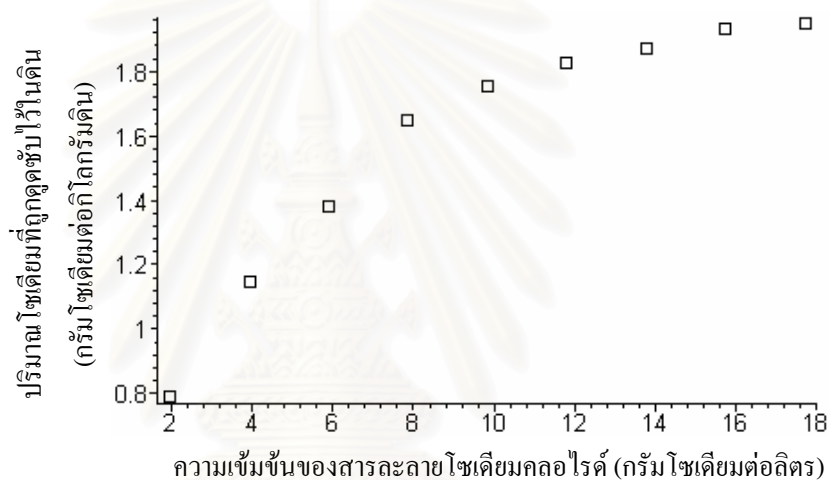
สำหรับการจำลองแบบในงานวิจัยนี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ แบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl) และอีกแบบจำลองหนึ่งคือแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของโซเดียมที่เวลาต่างๆ ซึ่งหาได้จากการนำ



ข้อมูลที่เกี่ยวข้องได้จากการทดลองมาวิเคราะห์ โดยจะได้รับความสัมพันธ์อยู่ในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ ดังที่จะกล่าวใน ส่วนต่อไป

#### 4.2.1 แบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ ( NaCl )

ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง เมื่อนำมาวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (กรัมต่อลิตร) กับปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับไว้ในดิน (กรัมโซเดียมต่อกิโลกรัมดิน) จะได้ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ในระดับต่างๆ

จากกราฟพบว่า เมื่อความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์เพิ่มขึ้นปริมาณของโซเดียมที่ถูกดินดูดซับไว้มีปริมาณเพิ่มขึ้นด้วย โดยในช่วงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ต่ำอัตราการดูดซับจะมีมากกว่าในช่วงความเข้มข้นสูงและมีแนวโน้มว่าอัตราการดูดซับจะคงที่ในความเข้มข้นที่สูงขึ้น จากการสังเกตกราฟข้างต้นพบว่ากราฟมีลักษณะคล้ายคลึงกับแบบจำลอง Langmuir ซึ่งแบบจำลอง Langmuir เป็นแบบจำลองที่นิยมนำมาใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสารละลายที่ถูกดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลาย โดยแบบจำลองดังกล่าวมีลักษณะสมการดังนี้

$$Ca = \frac{Q_m kCl}{1 + kCl}$$

หรือเขียนใหม่ได้ในรูป

$$y(x) = \frac{Q_m kx}{1 + kx} \quad (4.1)$$

โดยที่  $y(x)$  คือ ปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับไว้ในดิน (กรัมโซเดียมต่อกิโลกรัมดิน)  
 $x$  คือ ความเข้มข้นของสารละลาย (กรัมโซเดียมต่อลิตร)  
 $Q_m$  คือ ปริมาณโซเดียมสูงสุดที่ดินสามารถดูดซับไว้ได้ (กรัมโซเดียมต่อกิโลกรัมดิน)  
 $k$  คือ อัตราส่วนระหว่างการคายและการดูดโมเลกุล

#### 4.2.2 การหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับและความเข้มข้นในระดับต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl)

แบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl) มีพารามิเตอร์ทั้งหมด 2 ตัว คือ  $Q_m$  และ  $k$  การหาค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ ทำได้โดยการวิเคราะห์การถดถอย โดยใช้วิธี Levenberg-Marquardt ซึ่งพารามิเตอร์ของแบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl) สามารถหาได้ดังนี้

กำหนดให้  $y_i$  แทนข้อมูลปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับที่ความเข้มข้นที่  $i$  และกำหนดให้  $y(x_i; a)$  แทนแบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl)  $x_i$  โดยมี  $a$  เป็นเซตของพารามิเตอร์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y(x) = \frac{Q_m k x}{1 + k x}$$

โดยที่  $a$  ประกอบด้วยพารามิเตอร์  $Q_m, k$

จากข้อมูลปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับ  $y_i$  กับแบบจำลอง  $y(x_i; a)$  เราจึงได้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองระหว่างข้อมูลปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับกับแบบจำลอง Langmuir โดยมีเซตพารามิเตอร์  $a$  คือ

$$E(a) = \sum_{i=1}^m (y_i - y(x_i; a))^2$$

โดยที่  $m$  คือจำนวนข้อมูลที่เก็บได้จากการทดลอง

ขั้นตอนต่อไปสำหรับการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสม สำหรับแบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl) คือการใช้

สมการของ Levenberg-Marquardt ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$a_{n+1} = a_n - (H + \lambda I)^{-1} g$$

โดยที่  $a_{n+1}$  คือ พารามิเตอร์ในรอบการทำซ้ำที่  $n+1$   
 $a_n$  คือ พารามิเตอร์ในรอบการทำซ้ำที่  $n$   
 $H$  คือ เมตริกซ์อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ  $E(a)$   
 $g$  คือ เวกเตอร์อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ  $E(a)$   
 $\lambda$  คือ ค่าที่ช่วยในการลู่ออกผลเฉลย

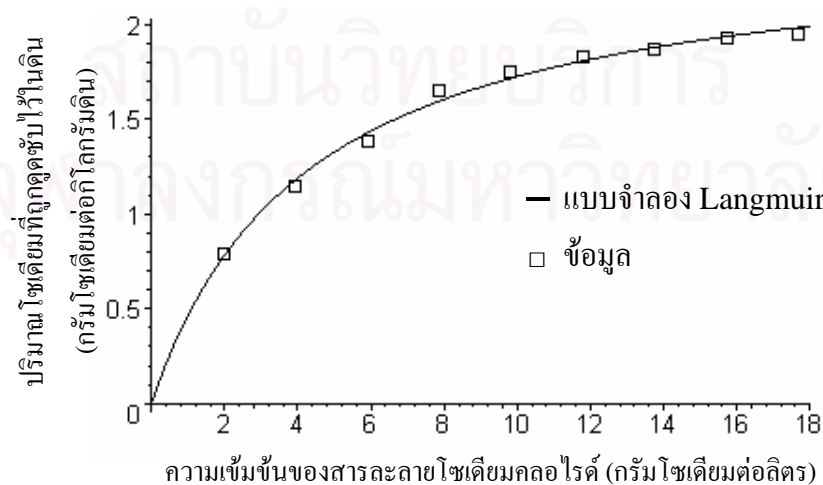
ซึ่งสมการ Levenberg-Marquardt ข้างต้นนี้ เป็นการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองที่ทำให้มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมน้อยที่สุด สำหรับค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของแบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (NaCl) เมื่อกำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้น และผ่านขั้นตอนการทำซ้ำ จะได้พารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้

$$Q_m = 2.441 \quad k = 0.094$$

จากสมการที่ 4.1 เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารละลายและปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินดังนี้

$$Ca = \frac{2.441 * 0.094 * Cl}{1 + 0.094 * Cl} \quad (4.2)$$

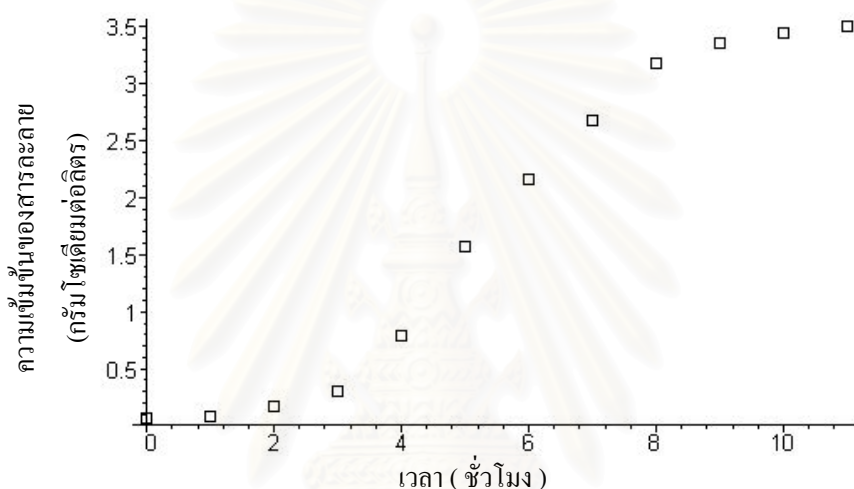
เมื่อนำแบบจำลองที่ได้วาดกราฟเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองจะได้กราฟดังนี้



รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากการทดลองกับแบบจำลองของ Langmuir

### 4.2.3 แบบจำลองความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านคอลัมน์ในเวลาต่างๆ

ในการทดลองหาความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านคอลัมน์ยาว 10 เซนติเมตร ที่ระยะเวลาต่าง ๆ นั้น จากความเข้มข้นของน้ำทะเลที่เก็บมาศึกษาเมื่อทำการวัดหาปริมาณโซเดียมในน้ำทะเล พบว่ามีค่าโซเดียมคลอไรด์ประมาณ 1.0-1.2% ดังนั้นในงานวิจัยนี้ การทดลองจึงใช้ความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ที่ 1.0% หรือมีค่าความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมประมาณ 3.6 กรัมโซเดียมต่อลิตร เมื่อนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองมาวาดกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 แสดงข้อมูลความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นล่างของคอลัมน์ที่เวลาต่างๆ

โดยที่  $Cl$  คือ ความเข้มข้นของสารละลาย (กรัมโซเดียมต่อลิตร)

$t$  คือ เวลา (ชั่วโมง)

เมื่อพิจารณารูปที่ 4.8 พบว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมก็จะเพิ่มขึ้นด้วย โดยในช่วงแรกจะมีความเข้มข้นเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ เนื่องจากสารละลายที่ไหลลงไปยังเคลื่อนที่ลงมาไม่ถึงชั้นที่เก็บไปวัดดังนั้นช่วงแรกคือความเข้มข้นของโซเดียมเดิมที่อยู่ในดิน และในช่วงถัดมาเมื่อสารละลายเริ่มเคลื่อนที่มาถึงจุดที่เก็บไปวัด ความเข้มข้นจะเกิดการสะสมทำให้ปริมาณความเข้มข้นเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและสุดท้ายความเข้มข้นจะเริ่มคงที่ จากการสังเกตกราฟข้างต้นพบว่ามีลักษณะคล้ายคลึงกับสมการลอจิสติก (Logistic equation) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$Cl(t) = \frac{a}{1 + b e^{-ct}} \quad (4.3)$$

เมื่อ  $Cl(t)$  คือ ความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นสุดท้ายของคอลัมน์ที่เวลา  $t$   
(กรัมโซเดียมต่อลิตร)

$t$  คือ เวลา (ชั่วโมง)

$a, b, c$  คือ ค่าพารามิเตอร์ของสมการลอจิสติก

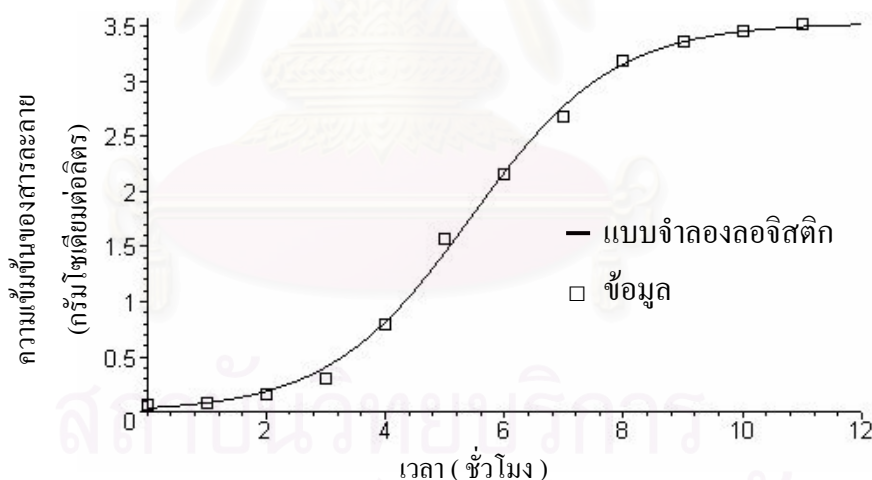
จากสมการที่ 4.3 หากค่าพารามิเตอร์โดยวิธีการข้างต้นจะได้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนี้

$$a = 3.523 , b = 94.3 , c = 0.836$$

จากสมการที่ 4.3 เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นสุดท้ายของคอลัมน์ในเวลาต่างๆ ดังสมการ

$$Cl(t) = \frac{3.523}{1 + 94e^{-0.836t}} \quad (4.4)$$

เมื่อนำแบบจำลองที่ได้ วาดกราฟเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองจะได้กราฟดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากการทดลองกับแบบจำลองลอจิสติก

#### 4.3 สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (Convection-Dispersion Equation)

พิจารณาสมการ(3.6) เมื่อแทนค่าความหนาแน่นรวมของดิน (bulk density) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.4 กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ค่าความชื้นของดินที่อิ่มตัวด้วยน้ำ (water content) มีค่าเท่ากับ

0.43 อัตราการไหลของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ที่ความเข้มข้น 1% มีค่าเท่ากับ 1.2 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อตารางเซนติเมตรต่อชั่วโมง จะได้

$$1.4 \frac{\partial Ca}{\partial t} + 0.43 \frac{\partial Cl}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2} - 1.2 \frac{\partial Cl}{\partial z} \quad (4.5)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับกับความเข้มข้นของสารละลายในสมการที่ (4.2) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$Ca = \frac{0.229454Cl}{1+0.094Cl}$$

ทำการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา เพื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ (4.5) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial Ca}{\partial t} = \frac{(1+0.094Cl)(0.229454) \frac{\partial Cl}{\partial t} - (0.229454Cl)(0.094) \frac{\partial Cl}{\partial t}}{(1+0.094Cl)^2}$$

$$\frac{\partial Ca}{\partial t} = \frac{0.229454}{(1+0.094Cl)^2} \frac{\partial Cl}{\partial t}$$

แทนค่า  $\frac{\partial Ca}{\partial t} = \frac{0.229454}{(1+0.094Cl)^2} \frac{\partial Cl}{\partial t}$  ลงในสมการ (4.5) จะได้รูปแบบสมการใหม่ ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านหน้าตัดดินที่ขึ้นอยู่กับเวลาและความลึก ดังสมการที่ (4.6)

$$\frac{(1.4)(0.229454)}{(1+0.094Cl)^2} \frac{\partial Cl}{\partial t} + 0.43 \frac{\partial Cl}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2} - 1.2 \frac{\partial Cl}{\partial z}$$

$$\left( \frac{0.3212356}{(1+0.094Cl)^2} + 0.43 \right) \frac{\partial Cl}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2} - 1.2 \frac{\partial Cl}{\partial z} \quad (4.6)$$

จากวิธีของแครงก์-นิโคลสันแทนพจน์ต่างๆโดยทำการ Discretize ตัวไม่ทราบค่าต่างๆในสมการที่ (4.6) ได้แก่  $\frac{\partial Cl}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial Cl}{\partial z}$  และ  $\frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2}$  ได้ดังนี้

$$\frac{\partial Cl}{\partial t} = \frac{(C_{i,j+1} - C_{i,j})}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2} = \frac{(C_{i-1,j} - 2C_{i,j} + C_{i+1,j}) + (C_{i-1,j+1} - 2C_{i,j+1} + C_{i+1,j+1})}{2(\Delta z)^2}$$



$$\frac{\partial Cl}{\partial z} = \frac{(C_{i+1,j} - C_{i-1,j}) + (C_{i+1,j+1} - C_{i-1,j+1})}{4\Delta z}$$

เมื่อแทนทั้งหมดลงในสมการ(4.6) จัดรูปแบบสมการใหม่โดยเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์เพื่อสะดวกในการคำนวณจะได้

$$\begin{bmatrix} \alpha+2\beta & -\beta+\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\beta-\gamma & \alpha+2\beta & -\beta+\gamma & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta+\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\beta-\gamma & \alpha+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,j+1} \\ C_{2,j+1} \\ \vdots \\ C_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-2\beta & \beta-\gamma & 0 & \dots & 0 \\ \beta+\gamma & \alpha-2\beta & \beta-\gamma & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta-\gamma \\ 0 & \dots & 0 & \beta+\gamma & \alpha-2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,j} \\ C_{2,j} \\ \vdots \\ C_{m-1,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\beta+\gamma)(C_{0,j} + C_{0,j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (\beta-\gamma)(C_{m,j} + C_{m,j+1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{โดยที่ } \alpha = (4h^2) \left( 1.4 * \frac{2.441 * 0.094}{(1.0 + 0.094 * C_{i,j-1})^2} + 0.43 \right) \quad \beta = 2kD_e \quad \text{และ} \quad \gamma = 1.2kh$$

$$\text{กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น } C(z,0)=0.67 \quad (4.7)$$

$$\text{เงื่อนไขค่าขอบ [21] } C(0,t)=3.6 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial C(L,t)}{\partial t}=0$$

โดยที่เงื่อนไขค่าเริ่มต้นหาจากการทดลองหาปริมาณโซเดียมที่สะสมอยู่ในดินตัวอย่างที่เก็บมาจากภาคสนามและเงื่อนไขขอบเขตบนคือความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่เริ่มต้นใส่ในคอลัมน์ และ  $C_{i,j-1}$  คือ ค่าความเข้มข้นของสารละลายที่เวลา  $j-1$  เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เป็นเชิงเส้นอันเกิดจากพจน์ของ  $C_{i,j-1}$  ดังนั้นเราจึงใช้วิธีการทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังกล่าวเป็นสมการเชิงเส้น(Linearization)[17] แล้วจึงนำไปแก้สมการต่อไป วิธีการคือการกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับ  $C_{i,j-1}$  โดยใช้สมการเส้นตรงซึ่งหาจากค่าขอบทั้งสองด้านของคอลัมน์ เช่น เงื่อนไขค่าขอบคือ  $C(0,t)=3.6$  และ  $C(10,t)=0.07$  ดังนั้น จะได้ค่าเริ่มต้นของพจน์  $C_{i,j-1}$  คือ  $C_{i,0} = \frac{10}{3.53}(z_i - 3.6)$

จากสมการที่ (4.6) สามารถแบ่งขั้นตอนการดำเนินการออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนการหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย และขั้นตอนการหาค่าตอบของสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียม ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

### 4.3.1 การหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย

ในงานวิจัยนี้ไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย ( $D_e$ ) ที่ปรากฏในสมการที่ (4.6) ได้จากการทดลองโดยตรง แต่เนื่องจากผลจากการทดลองทำให้ทราบค่าความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมในชั้นล่างของคอลัมน์ ณ เวลาต่างๆ ซึ่งคือค่าคำตอบที่ได้จากการทดลองนั่นเอง โดยสามารถเขียนเป็นแบบจำลองลอจิสติก (logistic) ดังสมการที่ (4.4) ดังนั้นเราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจายที่เหมาะสมกับสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายได้โดยกำหนดเงื่อนไขค่าขอบล่างเท่ากับค่าที่ได้จากการทดลอง เนื่องม้งานวิจัยที่ศึกษาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย[6] ได้สรุปผลการวิจัยว่าค่าสัมประสิทธิ์การกระจายของเกลือมีค่าอยู่ระหว่าง 0.5-2.0 ดังนั้นสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจายได้โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- |              |   |
|--------------|---|
| ขั้นตอนที่ 1 | เขียนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปเมทริกซ์โดยใช้วิธีของ แครงก์-นิโคลสัน   |
| ขั้นตอนที่ 2 | กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต   |
| ขั้นตอนที่ 3 | กำหนดค่าเริ่มต้นของ $D_e = 0.0$   |
| ขั้นตอนที่ 4 | แก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยโดยใช้ระเบียบวิธีของเคราท์  |
| ขั้นตอนที่ 5 | ตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อน <ul style="list-style-type: none"> <li>- ถ้าความคลาดเคลื่อนมีค่ามากกว่าค่าความคลาดเคลื่อนที่ตั้งไว้ให้ <math>D_e = D_e + 0.001</math> และกลับไปทำขั้นตอนที่ 4</li> <li>- ถ้าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าความคลาดเคลื่อนที่ตั้งไว้ให้จบการทำงาน</li> </ul> |

### 4.3.2 การหาคำตอบของสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียม

เมื่อหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจายได้ในหัวข้อ 4.3.1 นำค่าสัมประสิทธิ์การกระจายแทนลงในสมการที่ 4.6 พร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตตามสมการที่ 4.7 จากนั้นแก้สมการการเคลื่อนที่ดังกล่าวโดยใช้ระเบียบวิธีของเคราท์ ผลลัพธ์จากการแก้สมการสามารถนำมาอธิบายได้ว่า ณ ชั้นความลึกของดินที่เวลาต่างๆ จะมีค่าความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมอยู่เท่าใด โดยที่การแก้สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมสามารถเขียนเป็นขั้นตอนต่างๆ ได้ดังนี้

- |              |   |
|--------------|---|
| ขั้นตอนที่ 1 | เขียนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปเมทริกซ์โดยใช้วิธีของ แครงก์-นิโคลสัน |
| ขั้นตอนที่ 2 | กำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต                                   |

### ขั้นตอนที่ 3    แก้มการโดยใช้ระเบียบวิธีของเคราท์

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้มการที่ 4.6 อยู่ในรูปแบบเชิงตัวเลข เพื่อแสดงให้เห็นผลลัพธ์ดังกล่าวได้ชัดเจนมากขึ้น ในงานวิจัยนี้จึงนำผลลัพธ์ดังกล่าวมาสร้างภาพนามธรรม (Visualization) ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

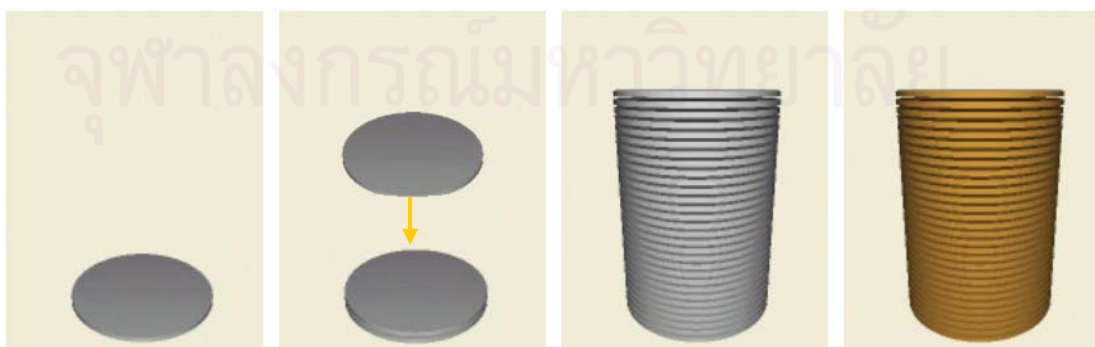
#### 4.4 การสร้างภาพนามธรรม (Visualization)

การสร้างภาพนามธรรมเป็นขั้นตอนที่สำคัญขั้นตอนหนึ่ง กล่าวคือ ผลที่ได้จากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการจำลองแบบเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมผ่านหน้าตัดดิน สามารถทำความเข้าใจได้ยาก เนื่องจากผลที่ได้อยู่ในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยตัวแปรจำนวนมาก และอยู่ในรูปแบบข้อมูลเชิงตัวเลข ถ้าไม่ใช้ผู้เชี่ยวชาญในสาขาคณิตศาสตร์ หรือสาขาฟิสิกส์ สามารถทำความเข้าใจได้ยาก ดังนั้นเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น การสร้างภาพนามธรรมจึงเป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแก้ปัญหานี้

การสร้างภาพนามธรรมสามารถทำได้หลายแบบ แต่มีจุดประสงค์เดียวกันคือ การทำให้เข้าใจข้อมูลได้ง่ายขึ้น ในงานวิจัยนี้จะทำการสร้างภาพนามธรรมการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมผ่านหน้าตัดดิน โดยแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน คือขั้นแรกสร้างภาพนามธรรมเชิงโครงสร้าง และขั้นตอนที่สองสร้างภาพนามธรรมเชิงฟังก์ชัน

##### 4.4.1 การสร้างภาพนามธรรมเชิงโครงสร้าง (Structural visualization)

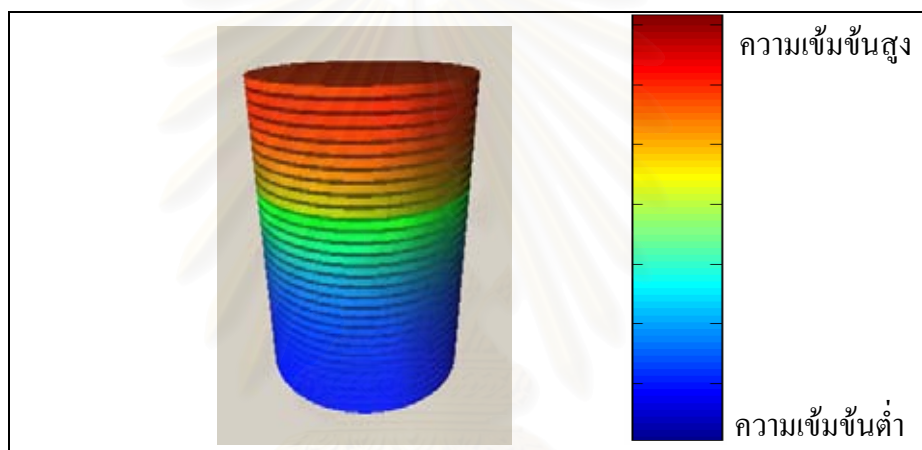
การสร้างภาพนามธรรมเชิงโครงสร้างส่วนใหญ่ นิยมนำรูปทรงเรขาคณิตเข้ามาใช้ในการสร้างรูปทรงต่างๆ อาทิเช่น รูปทรงกลม รูปทรงกระบอก เป็นต้น สำหรับงานวิจัยนี้ได้นำรูปทรงกระบอก หลายรูปมาประกอบกัน และใช้สีน้ำตาลแทนพื้นผิว เป็นภาพหน้าตัดดิน แสดงดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 แสดงขั้นตอนการสร้างหน้าตัดดิน

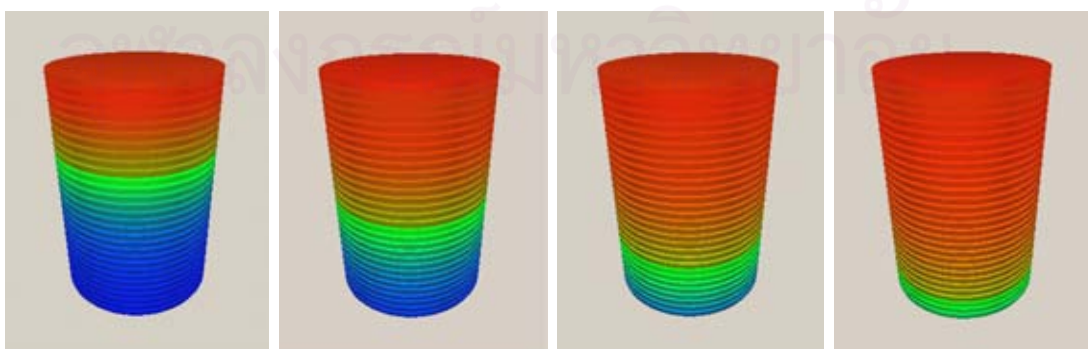
#### 4.4.2 การสร้างภาพนามธรรมเชิงฟังก์ชัน (Functional visualization)

การสร้างภาพนามธรรมเชิงฟังก์ชัน เป็นการนำฟังก์ชันต่างๆ มาใช้ในการสร้างภาพนามธรรม เช่น การนำฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา ทำให้ภาพนามธรรมที่สร้างเปลี่ยนแปลงได้ที่เวลาต่างๆ สำหรับงานวิจัยนี้ ศึกษาการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมผ่านหน้าตัดดิน ภาพนามธรรมที่สร้างจะแสดงความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่เวลาต่างๆ โดยความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมจะใช้เป็นตัวแทน กล่าวคือ สีแดงจะแทนสารละลายโซเดียมที่มีความเข้มข้นมาก และสีน้ำเงินจะแทนสารละลายโซเดียมที่มีความเข้มข้นต่ำ แสดงดังรูปที่ 4.12 สมมติให้หน้าตัดดินชั้นบนสุดมีความเข้มข้นสูงและ ชั้นล่างสุดมีความเข้มข้นต่ำสุด



รูปที่ 4.12 แสดงความเข้มข้นของโซเดียมในหน้าตัดดิน

ผลที่ได้จากการจำลองแบบในหัวข้อ 4.3 เป็นความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ชั้นความลึกต่างๆ และที่เวลาต่างกัน ดังนั้นเมื่อนำผลจากการจำลองแบบที่เวลาต่างๆ มาสร้างภาพนามธรรม เมื่อนำมาเรียงต่อกันทำให้ได้ภาพเคลื่อนไหว แสดงดังรูป 4.13



รูปที่ 4.13 แสดงภาพนามธรรมการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมที่ชั้นความลึกและที่เวลาต่างๆ

## บทที่ 5

### ผลการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลที่ได้จากการวิจัย คือ สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ในดิน แบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ แบบจำลองความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านคอลัมน์ในระยะเวลาต่างๆ ค่าสัมประสิทธิ์การกระจายในสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ผ่านหน้าตัดดิน ผลการจำลองแบบ และผลการสร้างภาพนามธรรมจากการแก้สมการการเคลื่อนที่ของสารละลาย

#### 5.1 สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ (CDE)

การเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ในหน้าตัดดินสามารถใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลิกอธิบายได้ดังนี้

$$\rho_b \frac{\partial Ca}{\partial t} + \theta \frac{\partial Cl}{\partial t} = D_e \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial Cl}{\partial z} \right) - J_w \frac{\partial Cl}{\partial z} \quad (5.1)$$

โดยที่  $\rho_b$  คือ ความหนาแน่นรวม (กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร)

$\theta$  คือ ความชื้นของดิน

$J_w$  คือ ความเร็วการไหลของสารละลายผ่านดิน (เซนติเมตรต่อชั่วโมง)

$D_e$  คือ สัมประสิทธิ์การกระจาย (เซนติเมตรต่อชั่วโมง)

$Ca$  คือ ปริมาณของสารละลายที่ถูกดูดซับ (กรัมโซเดียมต่อกิโลกรัมดิน)

$Cl$  คือ ความเข้มข้นของสารละลาย (กรัมโซเดียมต่อลิตร)

$t$  คือ เวลา (ชั่วโมง)

$z$  คือ ความลึกของดิน (เซนติเมตร)

จากนั้นทำการทดลองหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ได้แก่ ค่าความหนาแน่น ค่าความชื้น และค่าอัตราการไหลของสารละลาย โดยจากการทดลองได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 สรุปผลการทดลองดังนี้ ค่าความหนาแน่น มีค่าเท่ากับ 1.4 กรัมต่อลูกบาศก์เซนติเมตร ค่าความชื้นมีค่าเท่ากับ 0.43 อัตราการไหลของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ที่ความเข้มข้น 1 เปอร์เซ็นต์ มีค่าเท่ากับ 1.2 เซนติเมตรต่อชั่วโมง เมื่อทำการแทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (5.1) จะได้

$$1.4 \frac{\partial Ca}{\partial t} + 0.43 \frac{\partial Cl}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2} - 1.2 \frac{\partial Cl}{\partial z} \quad (5.2)$$



จากสมการ (5.2) ทำการหาความสัมพันธ์ของปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ซึ่งได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 สามารถสรุปได้ดังนี้

แบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในระดับความเข้มข้นต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ หาได้จากข้อมูลที่ได้จากการทดลอง โดยนำเอาข้อมูลที่ได้จากการทดลองมาวิเคราะห์หาตัวแบบ จากนั้นหาค่าพารามิเตอร์โดยการวิเคราะห์การถดถอยโดยใช้วิธี Levenberg-Marquardt แบบจำลองที่ได้เป็นแบบจำลอง Langmuir โดยมีตัวแปรอิสระคือความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ แบบจำลองที่ได้มีลักษณะดังนี้

$$Ca(Cl) = \frac{2.441 * 0.094 * Cl}{1 + 0.094 * Cl}$$

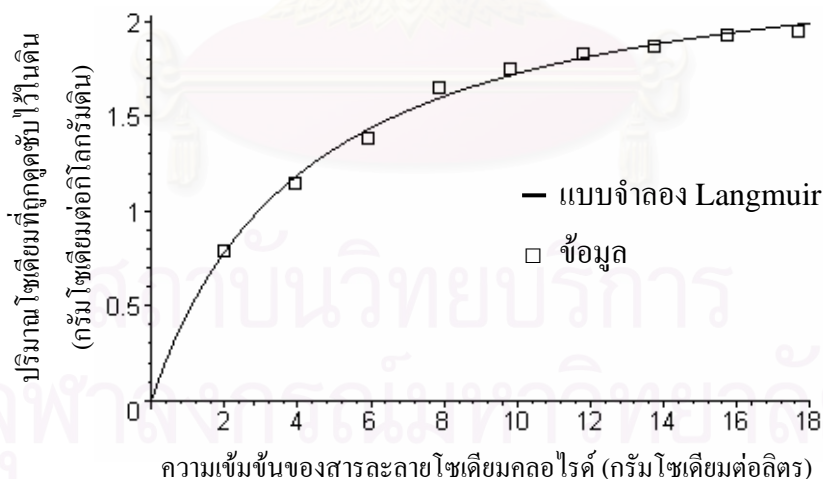
โดยที่  $Cl$  คือ ความเข้มข้นของสารละลาย (กรัมโซเดียมต่อลิตร)

$Ca$  คือ ปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับไว้ในดิน (กรัมโซเดียมต่อกิโลกรัมดิน)

จากการทดลองพบว่าเมื่อระดับความเข้มข้นของสารละลายเพิ่มขึ้นการดูดซับก็จะมากขึ้นด้วย จนกระทั่งถึงระดับความเข้มข้นหนึ่งการดูดซับจะเริ่มคงที่ ซึ่งหมายความว่า การแลกเปลี่ยนไอออนในดินนั้นสามารถแลกเปลี่ยนได้ในระดับความเข้มข้นหนึ่งเท่านั้น

นำข้อมูลที่ได้จากการทดลองวาดกราฟเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากแบบจำลอง

Langmuir ดังแสดงผลในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 แสดงผลการทดลองกับแบบจำลองของ Langmuir

เมื่อนำแบบจำลอง Langmuir แทนลงในสมการ (5.2) จะได้

$$\left( \frac{0.3212356}{(1 + 0.094Cl)^2} + 0.43 \right) \frac{\partial Cl}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 Cl}{\partial z^2} - 1.2 \frac{\partial Cl}{\partial z} \tag{5.3}$$



ทำการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย ( $De$ ) จากการแก้สมการที่ (5.3) โดยกำหนดเงื่อนไข ค่าเริ่มต้น เงื่อนไขขอบเขตบนซึ่งเป็นค่าคงที่ที่ได้จากการทดลอง ส่วนเงื่อนไขขอบเขตล่างคือค่าความเข้มข้นที่ไหลผ่านชั้นสุดท้ายของคอลัมน์ในทุก 1 ชั่วโมง โดยการทดลองการหาข้อมูลของเงื่อนไขขอบเขตล่างกล่าวไว้ในบทที่ 4 สามารถสรุปได้ดังนี้

แบบจำลองความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นล่างคอลัมน์ในระยะเวลาต่างๆ หาได้จากข้อมูลที่ได้จากการทดลองเมื่อนำมาวาดกราฟพบว่ามีลักษณะคล้ายกับแบบจำลองลอจิสติก (Logistic) จากนั้นนำมาวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีการเดียวกับการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ แบบจำลองที่ได้มีลักษณะดังนี้

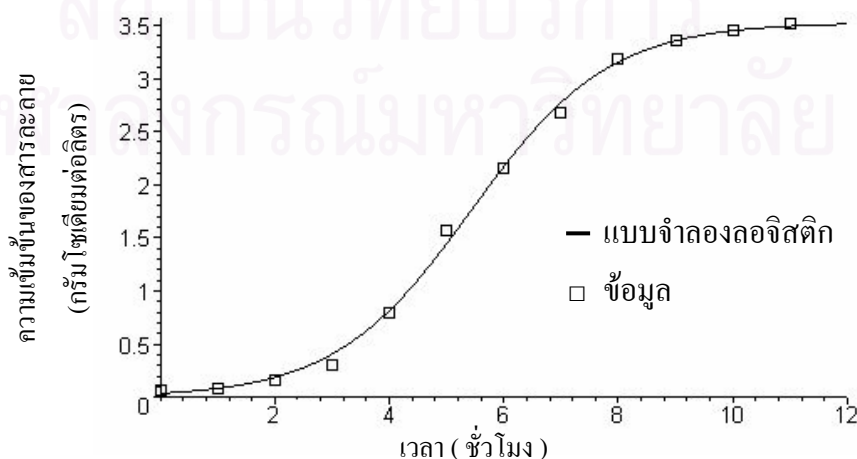
$$Cl(t) = \frac{3.523}{1 + 94e^{-0.836t}}$$

เมื่อ  $Cl(t)$  คือ ความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านชั้นสุดท้ายของคอลัมน์ที่เวลา  $t$   
(กรัมโซเดียมต่อลิตร)

$t$  คือ เวลา (ชั่วโมง)

จากการทดลองพบว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมก็จะเพิ่มขึ้นด้วย โดยในช่วงแรกจะมีความเข้มข้นเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ เนื่องจากสารละลายที่ไหลไปยังเคลื่อนที่ลงมาไม่ถึงชั้นที่เก็บไปวัดดังนั้นช่วงแรกคือปริมาณโซเดียมเดิมที่อยู่ในดิน และในช่วงถัดมาเมื่อสารละลายเริ่มเคลื่อนที่มาถึงจุดที่เก็บไปวัด ความเข้มข้นจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและสุดท้ายความเข้มข้นจะเริ่มคงที่

นำข้อมูลที่ได้จากการทดลองวาดกราฟเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากแบบจำลองลอจิสติก ดังแสดงผลในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 แสดงผลการทดลองกับแบบจำลองลอจิสติก

หลังจากนั้นแก้สมการ (5.3) โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น  $C(z,0)=0.67$  เงื่อนไขขอบเขตบน  $C(0,t)=3.6$  และเงื่อนไขขอบเขตล่างแทนด้วยแบบจำลองลอจิสติก ผลลัพธ์ที่ได้ค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย ( $De$ ) มีค่าเท่ากับ 1.091 นำค่าสัมประสิทธิ์การกระจายที่ได้แทนกลับลงในสมการ (5.3) แสดงได้ดังนี้

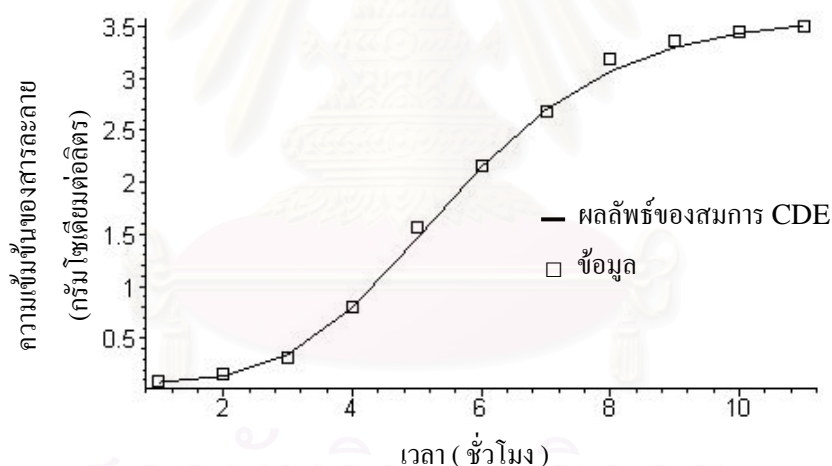
$$\left( \frac{0.3212356}{(1+0.094C)^2} + 0.43 \right) \frac{\partial C}{\partial t} = 1.091 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - 1.2 \frac{\partial C}{\partial z} \quad (5.4)$$

จากนั้นทำการแก้สมการ(5.4) โดยใช้วิธีของแครงก์-นิโคลสัน และกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตใหม่ ดังนี้ เงื่อนไขค่าเริ่มต้น  $C(z,0)=0.67$

$$\text{เงื่อนไขค่าขอบ } C(0,t)=3.6 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial C(L,t)}{\partial t}=0$$

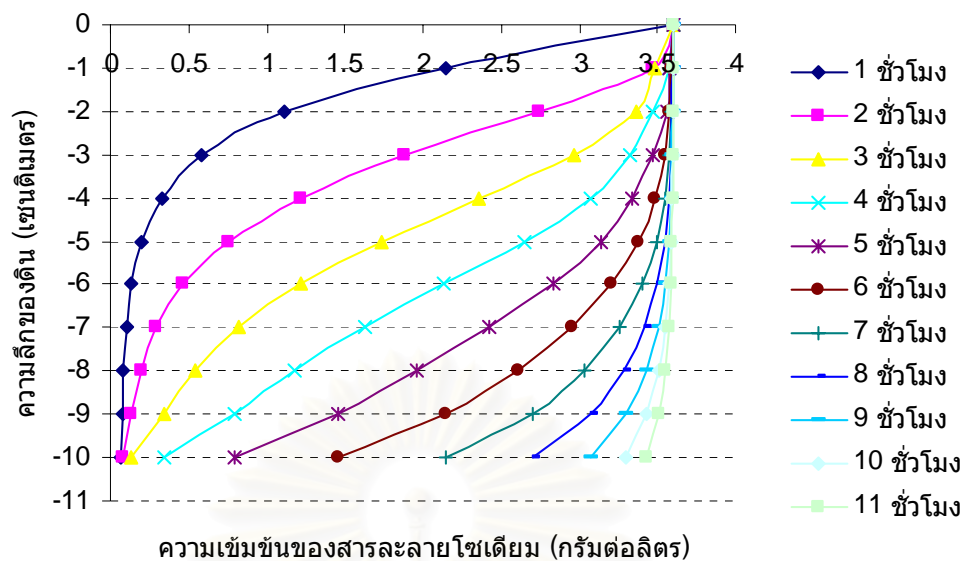
ผลที่ได้จากการแก้สมการคือค่าความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ชั้นและเวลาต่างๆ

เมื่อนำข้อมูลที่ได้จากการแก้สมการการเคลื่อนที่ของสารละลายวาดกราฟเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ให้ผลดังแสดงดังรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 การเปรียบเทียบข้อมูลจากการทดลองกับผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการการเคลื่อนที่

เมื่อนำผลลัพธ์ทั้งหมดที่ได้จากการแก้สมการการเคลื่อนที่นำมาวาดกราฟที่เวลาแตกต่างกันเพื่อพิจารณาลักษณะของการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียม จะได้กราฟลักษณะดังรูปที่ 5.4 ซึ่งแต่ละเส้นกราฟแสดงให้เห็นถึงปริมาณความเข้มข้นของสารละลายที่สะสมมากขึ้นในระดับความลึกต่างๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น



รูปที่ 5.4 แสดงผลลัพธ์ของสมการการเคลื่อนที่ของสารละลายที่เวลาต่างๆ

## 5.2 ผลการจำลองแบบ

ค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองทั้งสองเมื่อพิจารณาความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$Error = \frac{\sum_{i=1}^N \left| \frac{x_i - x'_i}{x_i} \right|}{N} \times 100$$

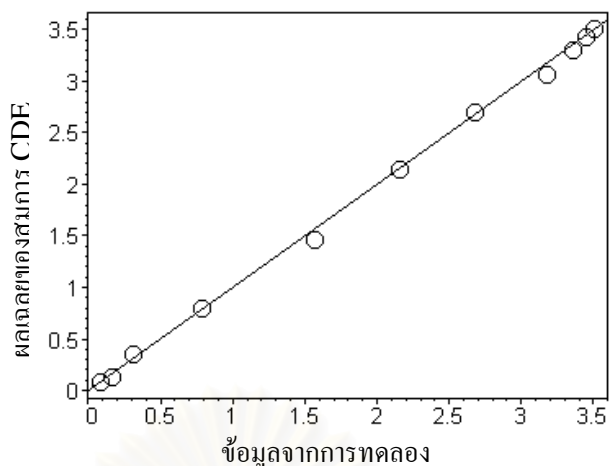
โดยที่  $x_i$  คือ ค่าที่ได้จากการทดลอง

$x'_i$  คือ ค่าที่ได้จากแบบจำลอง

$N$  คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

ผลการวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนสามารถสรุปได้ดังนี้

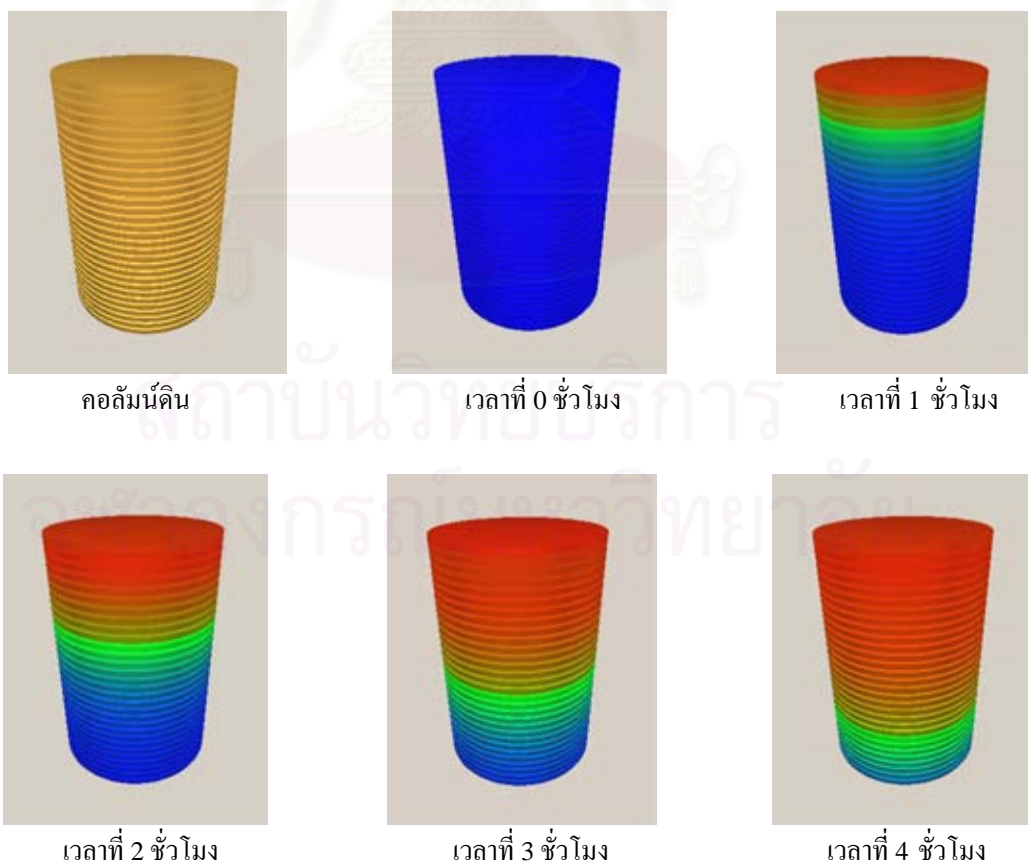
แบบจำลอง Langmuir ที่ใช้แทนผลการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในระดับความเข้มข้นต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ ให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ 1.84 เปอร์เซ็นต์ เมื่อนำผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการการเคลื่อนที่เปรียบเทียบกับข้อมูลจากการทดลอง ค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้มีค่าเท่ากับ 5.24 เปอร์เซ็นต์ ได้ผลดังรูปที่ 5.5

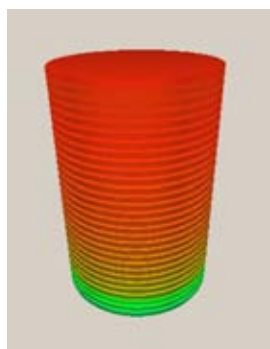


รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบข้อมูลจากการทดลองกับผลเฉลยของสมการ CDE

### 5.3 ผลการสร้างภาพนามธรรม

ผลการสร้างภาพนามธรรมของการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมที่เวลาต่างๆ เริ่มต้นด้วยการสร้างคอลัมน์ดิน และทำการปล่อยสารละลายโซเดียมคลอไรด์ให้ไหลลงไปในคอลัมน์ สังเกตการณ์เปลี่ยนแปลงในชั้นของคอลัมน์ทุกๆ 1 ชั่วโมง ในคอลัมน์ดินความยาว 10 เซนติเมตร ดังแสดงในรูปที่ 5.6





เวลาที่ 5 ชั่วโมง



เวลาที่ 6 ชั่วโมง



เวลาที่ 7 ชั่วโมง



เวลาที่ 8 ชั่วโมง



เวลาที่ 9 ชั่วโมง



เวลาที่ 10 ชั่วโมง

รูปที่ 5.6 ภาพนามธรรมของสารละลายโซเดียมที่เคลื่อนที่ผ่านคอลัมน์ดินยาว 10 เซนติเมตร ที่เวลาต่างๆ

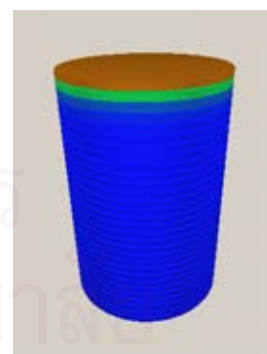
ทำการเปลี่ยนค่าขอบเขตให้คอลัมน์ดินมีความยาว 1 เมตรหรือ 100 เซนติเมตร สังเกตการเคลื่อนที่ของสารละลายโซเดียมที่เวลาต่างๆจะได้ดังรูปที่ 5.7



คอลัมน์ดิน

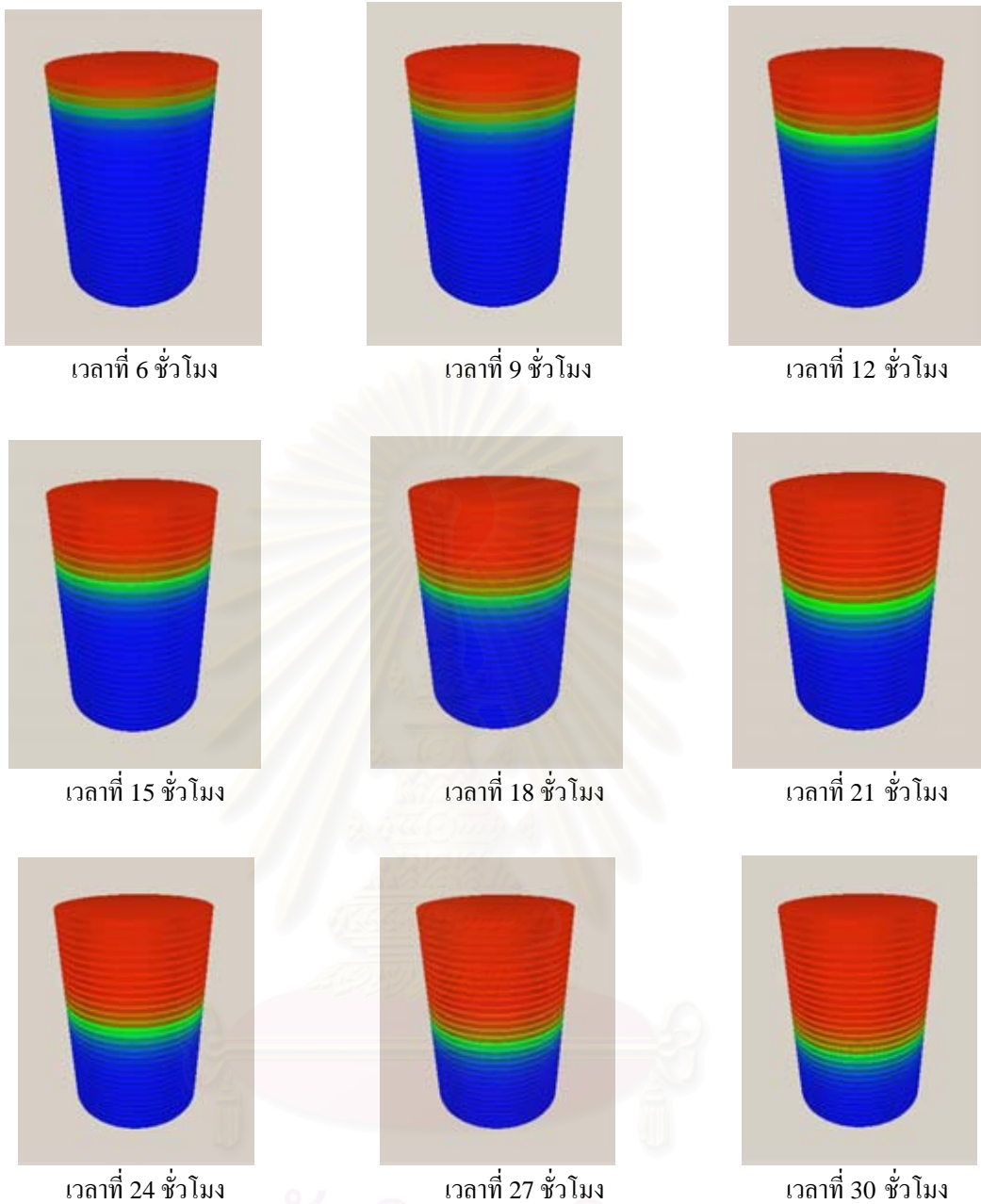


เวลาที่ 0 ชั่วโมง



เวลาที่ 3 ชั่วโมง





รูปที่ 5.7 ภาพนามธรรมของสารละลายโซเดียมที่เคลื่อนที่ผ่านคอลัมน์ดินยาว 100 เซนติเมตร ที่เวลาต่างๆ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 6

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

#### 6.1 สรุปผลการวิจัย

จากการหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินกับความเข้มข้นของโซเดียมคลอไรด์ที่ระดับต่างๆ และการหาความเข้มข้นของโซเดียมในดินจากการทดลองใส่สารละลายโซเดียมลงในคอลัมน์เพื่อสังเกตการเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของโซเดียมที่เวลาต่างๆ สามารถสรุปงานวิจัยดังกล่าวได้ดังนี้

1. จากการศึกษาความเข้มข้นของน้ำทะเลพบว่าน้ำทะเลมีความเข้มข้นอยู่ระหว่าง 0-3.5% ดังนั้นในการทดลองหาปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินจึงใช้ความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ระหว่าง 0-4.5% จากข้อมูลที่ได้จากการทดลองเมื่อนำมาวาดกราฟพบว่ามีลักษณะคล้ายคลึงกับแบบจำลอง Langmuir ซึ่งเป็นแบบจำลองที่นิยมใช้ในการอธิบายการดูดซับสารละลายต่างๆ ในดิน
2. จากการทดลองการดูดซับของโซเดียมในดินพบว่า ดินมีความสามารถในการแลกเปลี่ยนไอออนได้ในระดับหนึ่งเท่านั้น ปริมาณไอออนสูงสุดที่ดินสามารถดูดซับไว้ได้เรียกว่า Cation Exchange Capacity หรือเรียกว่า ค่า CEC ดังนั้นในการทดลองหาปริมาณการดูดซับโซเดียมในดินเราสามารถตรวจสอบค่าที่ทดลองได้กับค่า CEC เนื่องจากค่าที่ทดลองได้ต้องมีค่าไม่เกินค่า CEC
3. การทดลองหาความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ไหลออกจากชั้นสุดท้ายของคอลัมน์ดิน ในเวลาต่างๆนั้น เลือความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ที่นำมาทดสอบ คือที่ความเข้มข้น 1% เนื่องจากการเก็บตัวอย่างของน้ำทะเลมาวัดค่าโซเดียมพบว่ามีค่าใกล้เคียงกับสารละลายโซเดียมคลอไรด์ที่ความเข้มข้น 1% ข้อมูลที่ได้จากการทดลองเมื่อนำมาวาดกราฟจะได้กราฟมีลักษณะเป็นตัวเอสและสมมาตรกัน ดังนั้นจึงใช้สมการลอจิสติก (logistic) แทนข้อมูลดังกล่าว
4. ความคลาดเคลื่อนจากการใช้แบบจำลอง Langmuir แทนความสัมพันธ์ของปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์และแบบจำลองลอจิสติกแทนความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ไหลออกจากคอลัมน์ที่เวลาต่างๆ มีค่าเท่ากับ 1.84 และ 6.20 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ

5. การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลาโลก ใช้ระเบียบวิธีของเครงก์-นิโคลสันในการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์และใช้วิธีของเคราท์ในการแก้สมการดังกล่าว ผลจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะได้ ค่าความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมในแต่ละชั้น ความลึกและที่เวลาต่างๆ จากนั้นหาค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองในชั้นความลึกสุดท้าย ผลปรากฏว่าได้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเท่ากับ 5.24 เปอร์เซ็นต์
6. ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แสดงภาพนามธรรมโดยใช้สีต่างๆแทนแต่ละระดับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียม ซึ่งสีแดงใช้แทนสารละลายโซเดียมที่มีความเข้มข้นสูง และสีน้ำเงินใช้แทนสารละลายโซเดียมที่มีความเข้มข้นต่ำ

## 6.2 ข้อเสนอแนะ

เพื่อที่จะปรับปรุงการจำลองการเคลื่อนที่และการดูดซับของสารละลายโซเดียมในหน้าตัดดิน ผู้วิจัยภายหลังสามารถทำวิจัยโดยการเปลี่ยนแปลงชนิดของดินที่นำมาทดลองให้มีความคล้ายคลึงกับดินในพื้นที่การเพาะเลี้ยงมากขึ้น เนื่องจากในดินชนิดต่างๆกัน มีคุณสมบัติที่ต่างกัน ค่าความหนาแน่น ความพรุน ค่าสัมประสิทธิ์การนำน้ำ ก็แตกต่างกันซึ่งมีผลต่อการไหลและการดูดซับของดินเป็นอย่างมาก รวมทั้งการเตรียมคอลัมน์ของดินให้มีสภาพที่ใกล้เคียงกับธรรมชาติมากที่สุด จะสามารถให้ค่าที่ถูกต้องมากกว่าในงานวิจัยชิ้นนี้ แต่เนื่องปัจจัยต่างๆ จะส่งผลให้การทดลอง การหาแบบจำลองหรือการแก้สมการการเคลื่อนที่มีความยุ่งยากมากขึ้นด้วย ดังนั้นจึงจำเป็นต้องอาศัยผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญทางด้านปฐพีวิทยาและคณิตศาสตร์ร่วมมือกัน เชื่อได้ว่าแบบจำลองที่ได้จะมีความสมบูรณ์และจะเป็นประโยชน์ต่อเกษตรกรและนักปฐพีวิทยาไม่มากก็น้อย ในการนำมาวิเคราะห์และแก้ไขพื้นที่นั้นๆ สุดท้ายในการสร้างภาพนามธรรมให้สมจริงมากขึ้นจะช่วยให้การอธิบายกระบวนการการเคลื่อนที่ให้ผู้อื่นได้เข้าใจได้ง่ายขึ้นด้วย

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## รายการอ้างอิง

1. อรุณี ยูวะนิยม และ ดร.สมศรี อรุณินท์. การคัดเลือกพันธุ์พืชชอบเกลือ. รายงานการวิจัยกองอนุรักษ์ดินและน้ำ กรมพัฒนาที่ดิน. 2535
2. อรุณี ยูวะนิยม และ ดร.สมศรี อรุณินท์. กลไกการทนเค็มของพืชชอบเกลือ. รายงานการวิจัยกองอนุรักษ์ดินและน้ำ กรมพัฒนาที่ดิน. 2536
3. สุทัต โปรัชยกุล และคณะ. การเปรียบเทียบพันธุ์ไม้ชายเลนที่ปลูกในดินเค็มชายทะเลที่เสื่อมโทรมจากการทำนาเกลือ. รายงานการวิจัยกองอนุรักษ์ดินและน้ำ กรมพัฒนาที่ดิน. 2541
4. J. Gebauer, K. El-Siddig, AA. Salih and G. Ebert. Tamarindus indica L. seedlings are moderately salt tolerant when exposed to NaCl-induced salinity. The Journal Scientia Horticulturae 103 (2004): 1-8.
5. R.C.Schwartz, K.J.McInnes, A.S.R.Juo, and L.P.Wilding. Boundary effects on solute transport in finite soil columns. Water resources research, 35 (1999): 671-681.
6. K.V., Ramana Rao and A.K., Bhattachary, Salinity distribution in paddy root zone under subsurface drainage. The Journal Agricultural Water Management 48 (2001): 169-178.
7. Lin Wang, Kyle R. Mankin and George L. Marchin. Kinetic model for E.coli transport through sand column. The American Society of Agricultural Engineers 032151 (2003).
8. A.Islam, A.J.M.S.Karim, H.M.Khaled, B.K.Mitra and M.A.M.Miah. Arsenic sorption characteristics of four agricultural soils of Bangladesh. Asian Journal of Plant Science 2 (2003): 1149-1152.
9. A.T.M.A. Choudhury and Y.M. Khanif. Megnesium adsorption behaviour of three Malaysian rice soils. Pakistan Journal of Biological Sciences 6 (2003):1376-1379
10. C.M. Gonzalez-Garcia, M.L. Gonzalez Martin, R. Denoyel, A.M. Gallardo-Moreno, L. Labajos-Broncano and J.M. Bruque. Adsorption enthalpies of sodium dodecyl sulphate onto carbon blacks in the low concentration range. The Journal Carbon 43 (2005): 567-572.

11. M.Nasiruddin Khan and U.Zareen. Adsorptive removal of non-ionic surfactants from water using granite sand. Journal of the Iranian Chemical Society 1, 2 (2004):152-158.
12. เชียร วิทยาวารกุล. ปัญหาพิเศษการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อทำนายค่าสภาพน้ำขมระดินอิมตัวจากค่าพารามิเตอร์ทางฟิสิกส์ของดิน. ภาควิชาปฐพีวิทยา คณะเกษตร มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 2547 หน้า 3-17
13. William A. Jury, Wilford R. Gardner, Walter H. Gardner. Soil Physics. Fifth edition. Canada. John Wiley & Sons, Inc 1991
14. Young-Jin Kim, Christophe J.G. Darnault, Nathan O. Bailey, J. Yves Parlange, and Tammo S. Steenhuis. Equation for describing solute transport in field soils with preferential flow paths. Soil Science Society of America 69 (2005):291-300.
15. Leszek Czepirski, Mieczyslaw R. Balys and Ewa Komorowska-Czepirska. Some generalization of Langmuir adsorption isotherm. Internet Journal of Chemistry 30 (2000):30-59
16. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. กรุงเทพฯ:สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546
17. J. Douglas Fairs and Richard Burden. Numerical Method. Second Edition. United Stated of America. A Gary W. Ostedt 1998
18. พรชัย สาตราหา. เอกสารประกอบการสอน วิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข 1. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
19. Levenberg, K. A method for the solution of certain problems in least squares. Quart. Appl. Math 2 (1944): 164-168.
20. Marquardt, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. SIAM J. Appl. Math 11 (1963): 431-441.
21. Valdimir Kudrna, Milan Jahoda, Njabulo Siyakatshana, Jirina Cermakova, Vaclav Machon. General solution of the dispersion model for a one-dimensional stirred flow system using Danckwerts' boundary conditions. Chemical Engineering Science 59 (2004):3013-3020.



**ภาคผนวก**

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### ภาคผนวก

ภาคผนวกนี้ แสดงตารางที่เก็บข้อมูลจากการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินจากการใส่สารละลายโซเดียมคลอไรด์ที่ความเข้มข้นต่างๆ ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับความเข้มข้นของโซเดียมที่ไหลผ่านหน้าตัดดินในแต่ละความเข้มข้นของโซเดียมคลอไรด์ ตารางเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างข้อมูลที่ได้จากการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในระดับความเข้มข้นต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์กับแบบจำลอง Langmuir และตารางแสดงข้อมูลที่ได้จากการทดลองเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการ CDE

ตารางแสดง ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในดินกับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมคลอไรด์ในระดับต่างๆ

ความเข้มข้นของ NaCl (กรัมโซเดียมคลอไรด์/ ลิตร)	ความเข้มข้นของ Na <sup>+</sup> (กรัมโซเดียม/ลิตร)	ปริมาณ Na <sup>+</sup> ที่ถูกดูดซับ (กรัมโซเดียม/กิโลกรัมดิน)		
		ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3
0	0	0.14469	0.14469	0.14469
5	1.9658	0.66495	0.95900	0.74310
10	3.9316	1.39350	1.05900	0.99150
15	5.8974	1.43350	1.34700	1.35900
20	7.8632	1.64100	1.72400	1.58300
25	9.8291	1.74350	1.88250	1.63100
30	11.7948	1.79600	1.91600	1.76300
35	13.7606	1.81700	1.96700	1.83300
40	15.7265	1.89450	2.01370	1.88650
45	17.6923	1.90150	2.02310	1.92600



ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับความเข้มข้นของสารละลายโซเดียมที่ไหลออก ณ ชั้น  
สุดท้ายของคอลัมน์ดินซึ่งมีความยาว 10 เซนติเมตร

เวลา (ชั่วโมง)	ความเข้มข้น (กรัมโซเดียม/ลิตร)
0	0.07001
1	0.08907
2	0.16497
3	0.30720
4	0.79380
5	1.57060
6	2.35570
7	2.67730
8	3.18130
9	3.35840
10	3.44700
11	3.50800

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างข้อมูลที่ได้จากการทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณโซเดียมที่ถูกดูดซับในระดับความเข้มข้นต่างๆ ของสารละลายโซเดียมคลอไรด์กับแบบจำลอง Langmuir

ความเข้มข้นของ $\text{Na}^+$ (กรัมโซเดียม/ลิตร)	ข้อมูลปริมาณ $\text{Na}^+$ ที่ ถูกดูดซับ (กรัมโซเดียม/กิโลกรัมดิน)	แบบจำลอง Langmuir (กรัมโซเดียม/กิโลกรัมดิน)
1.9658	0.78902	0.77500
3.9316	1.14800	1.17906
5.8974	1.37983	1.42707
7.8632	1.64933	1.59480
9.8291	1.75233	1.71580
11.7948	1.82500	1.80721
13.7606	1.87233	1.87870
15.7265	1.93157	1.93614
17.6923	1.95020	1.98331

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางแสดงข้อมูลที่ได้จากการทดลองเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากการแก้สมการ CDE

เวลา (ชั่วโมง)	ความเข้มข้น NaCl 10 กรัมโซเดียมคลอไรด์/ลิตร	ผลเฉลยของสมการ CDE (กรัมโซเดียม/ลิตร)
1	0.08907	0.077
2	0.16497	0.135
3	0.30720	0.343
4	0.79380	0.796
5	1.57060	1.458
6	2.35570	2.148
7	2.67730	2.699
8	3.18130	3.069
9	3.35840	3.299
10	3.44700	3.434
11	3.50800	3.509

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวจันทร์ฉวี ผลอุทิศ เกิดวันจันทร์ที่ 5 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2522 สำเร็จการศึกษาปริญญาตรี  
วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยี  
พระจอมเกล้าพระนครเหนือ ในปี พ.ศ. 2543 และเข้ารับการศึกษาคือษาต่อในระดับปริญญาโท  
สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ.  
2545



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย