บทที่ 1

บทนำ

1.1 กำหนดการเชิงเส้น

ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (Linear programming problem) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดที่มีฟังก์ชันจุดประสงค์ และเงื่อนไขบังคับเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปรอิสระ วัตถุประสงค์ของการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น คือการหาค่าของตัวแปรอิสระทั้งหมดในระบบที่ทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าสูงสุด หรือต่ำสุดตามเงื่อนไขที่กำหนด

รูปทั่วไปของปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีตัวแปรมากกว่าสองตัวคือ

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}x_n &\le b_n
\end{aligned}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ และเมทริกซ์ได้เป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c^T x$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $Ax \le b$ (1.1)

เมื่อ $c = (c_1, c_2, \dots\dots\dots c_n)^T$ คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันจุดประสงค์

$x = (x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n)^T$ คือเวกเตอร์ของตัวแปร

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับขนาด $m \times n$

$b = (b_1, b_2, \dots\dots\dots\dots, b_n)^T$ คือเวกเตอร์ค่าคงที่ทางขวามือ

สำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติจะมีรูปแบบเป็น

การหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\le b_m \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Danzig, G. (1947) ได้คิดค้นวิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex method) [1],[2] ซึ่งเป็นกระบวนการทำซ้ำเพื่อหาจุดที่เหมาะที่สุด โดยจะดำเนินการอย่างมีระบบโดยทุกครั้งของการทำซ้ำ ผลเฉลยใหม่จะให้ค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ไม่ด้อยกว่าผลเฉลยครั้งก่อน ซึ่งสามารถรับประกันการลู่เข้าสู่จุดที่เหมาะที่สุดเสมอ วิธีซิมเพล็กซ์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากแต่เมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ก็จะใช้เวลาในการหาผลเฉลยนาน ซึ่งมีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่าวิธีซิมเพล็กซ์ใช้เวลาในการหาผลเฉลยแบบฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล

ต่อมาในปี ค.ศ. 1972 ได้มีการคิดวิธีการแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดแบบทรงรี (ellipsoid method) และมีการแสดงให้เห็นในปี ค.ศ. 1979 ว่าวิธีทรงรีใช้เวลาในการหาผลเฉลยสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นแบบฟังก์ชันพหุนาม ถึงแม้ว่าจะเร็วกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ แต่วิธีนี้มีความยุ่งยากในการนำไปใช้

ในปี ค.ศ. 1984 Karmakar, N. ได้นำเสนอ Karmakar's algorithm ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีที่เกิดจากการศึกษาวิธีจุดภายใน (Interior point method) ที่คิดค้นโดย Fiacco และ McCormic ในปี 1968 เพื่อแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุด โดย Karmakar's algorithm สามารถคำนวณหาผลเฉลยสำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นโดยใช้เวลาแบบฟังก์ชันพหุนามและมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ สำหรับปัญหาขนาดใหญ่

ตัวอย่างของปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่พบในชีวิตประจำวันมีดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1

ร้านขนมแห่งหนึ่งผลิตขนมมาสองชนิดคือคุกกี้และเค้ก โดยที่คุกกี้ 1 กล่องจะมีกำไรจากการขายกล่องละ 40 บาท และเค้ก 1 ชิ้นจะมีกำไรจากการขายชิ้นละ 15 บาท ซึ่งขนมทั้ง 2 ชนิดนั้นจะใช้ส่วนผสมที่ต่างกันไป โดยที่คุกกี้จะใช้แป้ง 3 กิโลกรัมต่อการทำคุกกี้ 1 กล่อง และใช้น้ำตาล 4 กิโลกรัมต่อการผลิตคุกกี้ 1 กล่อง ส่วนเค้ก 1 ชิ้นใช้แป้ง 1 กิโลกรัมและใช้น้ำตาล 2 กิโลกรัม ในแต่ละวันร้านทำขนมจะมีแป้งอยู่ในร้านเพียง 75 กิโลกรัมและมีน้ำตาล 120 กิโลกรัมต่อวันตามลำดับ โดยสมมติฐานที่ว่า สินค้าที่ผลิตขึ้นมานั้นขายได้หมด ร้านขนมจะต้องผลิตสินค้าอย่างละกี่ชิ้นจึงจะมีกำไรมากที่สุด

จากปัญหาข้างต้น เราสามารถสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นได้ดังนี้

ให้ x แทนจำนวนคุกกี้ที่ผลิต มีหน่วยเป็นกล่อง

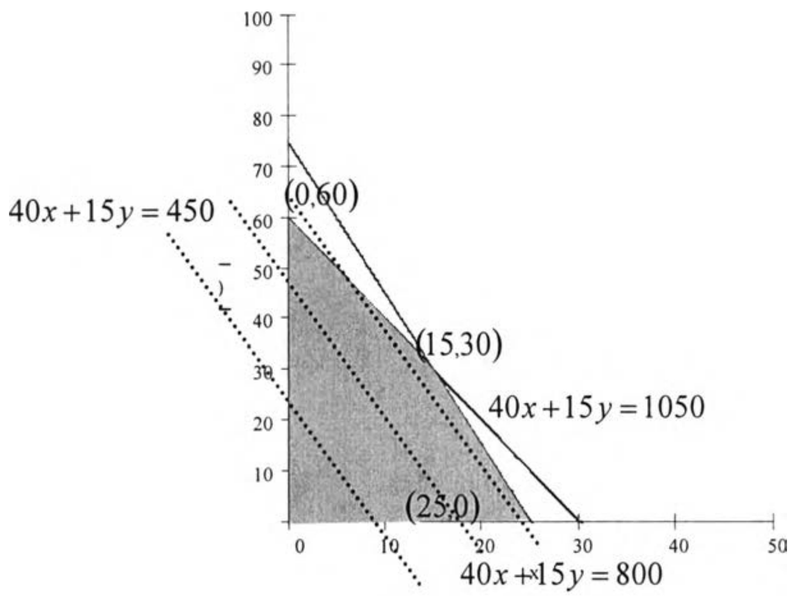
ให้ y แทนจำนวนเค้กที่ผลิต มีหน่วยเป็นชิ้น

และเขียนปัญหากำหนดการเชิงเส้นได้เป็น

หาค่าสูงสุดของ $40x+15y$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ
$$\begin{aligned} &3x+y\le 75 \\ &4x+2y\le 120 \\ &x\ge 0, y\ge 0 \end{aligned}$$

แนวคิดหนึ่งการหาผลเฉลยคือการวาดบริเวณที่เป็นไปได้จากเงื่อนไขบังคับทั้งหมดที่โจทย์กำหนด ผลเฉลยจะหาได้โดยที่เขียนเส้นค่าคงที่ของฟังก์ชันจุดประสงค์ (Level curve of the objective function) และเคลื่อนเส้นดังกล่าวตามทิศทางของฟังก์ชันจุดประสงค์ ซึ่งก็คือทิศของเวกเตอร์เกรเดียนต์ของ $c_1x_1+c_2x_2$ (สำหรับการหาค่าสูงสุด หรือในทิศตรงข้ามสำหรับการหาค่าต่ำสุด) จนกระทั่งเส้นดังกล่าวตัดกับจุดสุดท้ายของบริเวณที่เป็นไปได้ จุดดังกล่าวจะเป็นคำตอบ จากตัวอย่างนี้จะได้กราฟต่อไปนี้



รูป 1.1 การแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ

จากรูปข้างต้น เส้นค่าคงที่ของฟังก์ชันจุดประสงค์ตัดกับบริเวณที่เป็นไปได้จุดสุดท้ายคือจุด (15, 30) และมีค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์มากที่สุดคือ 1,050 ดังนั้น หากต้องการได้กำไรสูงสุดจากการขายนี้ ร้านขนมควรผลิตคุกกี้วันละ 15 กล่องและเค้กวันละ 30 ชิ้นจึงจะได้กำไรสูงสุด และได้กำไร 1,050 บาท

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าปัญหาที่มีขนาดเล็ก สามารถใช้กราฟในการหาผลเฉลยได้ แต่เนื่องจากวิธีกราฟต้องอาศัยการวาดภาพเพื่อหาบริเวณที่เป็นไปได้ เมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้นทำให้เกิดความยุ่งยากในการวาดหาบริเวณที่เป็นไปได้ ดังนั้นวิธีกราฟจะเหมาะกับปัญหาที่มีจำนวนเงื่อนไขบังคับน้อย

ในปัจจุบันได้มีความพยายามที่จะสร้างขั้นตอนวิธีใหม่ที่มีประสิทธิภาพที่ดีขึ้นเช่น การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีการทำมุมน้อยสุดในสองมิติ และสามมิติ ขั้นตอนวิธีความชันน้อยสุดเป็นต้น ควบคู่ไปกับการปรับปรุงวิธีซิมเพล็กซ์ ในงานวิจัยนี้นำเสนอขั้นตอนวิธีอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งเป็นการพัฒนามาจากขั้นตอนวิธีความชันน้อยสุดที่คิดค้นโดยเมกิดโด และปรับปรุงโดยเอื้ออารี โดยขั้นตอนวิธีที่ได้รับการปรับปรุงนั้นให้ความสำคัญกับความชันของเงื่อนไขบังคับ สำหรับในสองมิติค่าของความชันสามารถแบ่งออกได้เป็นบวก เป็นลบ และเป็นศูนย์ สำหรับในมิติที่สูงขึ้น ค่าความชันจะหมายถึงเกรเดียนท์ ซึ่งจะมีความหมายของทิศทางรวมอยู่ด้วย ซึ่งเป็นการยากที่จะทำการแบ่งกลุ่ม ดังนั้น ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีในสองมิติเท่านั้น ขั้นตอนวิธีที่เมกิดโดสร้างขึ้นไม่มีการใช้ความชันของเงื่อนไขบังคับ แต่ใช้เพียงการหาจุดตัดทั้งหมด ทำให้ใช้เวลานานในการหาผลเฉลย สำหรับวิธีของเอื้ออารียังไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นรวมอยู่ ในงานวิจัยนี้จะสร้างขั้นตอนวิธีให้สามารถใช้ได้กับปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติทั่วไป ที่

อาจจะมีเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นรวมอยู่ด้วย รวมถึงการพิสูจน์ขั้นตอนวิธีที่สร้างขึ้น พร้อมกับตัวอย่างการทำงานของขั้นตอนวิธีดังกล่าว ในบทที่ 2 จะเป็นการกล่าวถึงขั้นตอนวิธีที่เป็นพื้นฐานในการศึกษา คือขั้นตอนวิธีของเมกิดโด และขั้นตอนวิธีของเอื้ออารี บทที่ 3 กล่าวถึงขั้นตอนวิธีใหม่ที่สร้างขึ้นพร้อมทั้งการพิสูจน์ และในบทที่ 4 จะเป็นการเปรียบเทียบการทำงานระหว่างวิธีที่สร้างขึ้น กับวิธีซิมเพล็กซ์ โดยใช้ซอฟต์แวร์ Matlab พร้อมทั้งข้อสรุป และปัญหาที่เกิดขึ้น

1.2 ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติที่ใช้ในวิทยานิพนธ์มีลักษณะเป็นดังนี้

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ c_1x+c_2y

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ
$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y &\geq b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y &\geq b_2 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x+a_{m2}y &\geq b_m \end{aligned} \tag{1.3}$$

จากสมการ (1.3) ได้ว่า

เกรเดียนท์เวกเตอร์ของฟังก์ชันจุดประสงค์คือ $c=(c_1,c_2)^T$

ให้ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์, X เป็นเวกเตอร์ตัวแปร และ B เป็นเวกเตอร์ทางขวามือ

ซึ่งเขียนเงื่อนไขในรูปเมทริกซ์ได้เป็น $AX=B$ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{ij} คือสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ A และมีเกรเดียนท์ของเงื่อนไขบังคับคือ $(a_{i1}, a_{i2})^T$ ซึ่งหลักที่หนึ่งของเมทริกซ์ A (แทนด้วย $A_{.1}$) คือสัมประสิทธิ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร x และหลักที่สอง (แทนด้วย $A_{.2}$) คือสัมประสิทธิ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร y

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$a_{11} = -1, a_{32} = 2, A_{.1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#