บทที่ 2

งานวิจัย นิยาม และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่เป็นพื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ โดยจะกล่าวถึงขั้นตอนวิธีของเมกิดโด (1983) สำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติ ที่ได้มีการแสดงให้เห็นว่า เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาเร็วกว่าวิธีซิมเพล็กซ์ และยังใช้ได้กับทุกเงื่อนไขบังคับในสองมิติ และในปี ค.ศ. 2010 เอื้ออารีได้นำแนวคิดของเมกิดโดมาปรับปรุงให้มีประสิทธิภาพที่ดีขึ้น พร้อมทั้งเสนอทฤษฎีบทต่างๆ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา

2.1 วิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติของเมกิดโด

นักคอมพิวเตอร์ชาวอเมริกันชื่อ เมกิดโด (Megiddo) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติ (ใช้ชื่อว่าปัญหา LP2) ไว้ดังนี้

สำหรับการหาค่าต่ำสุด ของฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1 x_1 + c_2 x_2$ (*)

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \geq b_i \quad 1 \leq i \leq n$ (1)

โดยที่จำนวนเงื่อนไขบังคับมีทั้งหมด n สมการ

เมื่อ c แทนเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชันจุดประสงค์โดยที่ $c = [c_1 \quad c_2]^T$

A แทนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับและ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}$

B แทนเวกเตอร์ด้านขวามือและ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของเมกิดโดมีดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 จากสมการ (*) กำหนดให้ $y = c_1 x_1 + c_2 x_2$

จัดรูปตัวแปรใหม่โดยการเลือกใช้สมการใดสมการหนึ่งดังนี้

$$x_1 = \frac{y - c_2 x_2}{c_1} \text{ เมื่อ } c_1 \neq 0 \tag{2.1}$$

$$x_2 = \frac{y - c_1 x_1}{c_2} \text{ เมื่อ } c_2 \neq 0 \tag{2.2}$$

$$y = c_2 x_2 \text{ เมื่อ } c_1 = 0 \tag{2.3}$$

$$y = c_1 x_1 \text{ เมื่อ } c_2 = 0 \tag{2.4}$$

สำหรับกรณีที่ทั้ง c_1 และ c_2 เป็นศูนย์พร้อมกันทำให้ได้ค่าเหมาะที่สุดคือศูนย์ ขั้นตอนต่อไปคือการแปลงปัญหาให้เป็นปัญหาที่สมมูลกับปัญหาเริ่มต้น

ขั้นที่ 2 เลือกใช้สมการ (2.1) ถึง (2.5) สมการใดสมการหนึ่ง แทนในสมการที่ (1) จะได้ปัญหาใหม่คือ

(จากปัญหา(*) หากใช้สมการ 2.1)

หาค่าต่ำสุดของ y

สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\begin{gathered} y \geq \left(c_2 - \frac{a_{i2} c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}} b_i \;\; ; \; \frac{a_{i1}}{c_1} > 0 \\ y \leq \left(c_2 - \frac{a_{i2} c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}} b_i \;\; ; \; \frac{a_{i1}}{c_1} < 0 \\ a_{i2} x_2 \geq b_i \; ; a_{i1} = 0 \\ 1 \leq i \leq m \end{gathered} \tag{3}$$

ทฤษฎีบทตั้ง 2.1 ปัญหาเริ่มต้น นิยามปัญหาที่แปลงแล้วโดยใช้สมการ (3) ใช้ชื่อว่า ปัญหา LPT

(ปัญหา LPT) หาค่าต่ำสุดของ y

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$y \ge \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}} b_i \;\; ; \;\; \frac{a_{i1}}{c_1} > 0$$

$$y \le \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}} b_i \;\; ; \;\; \frac{a_{i1}}{c_1} < 0$$

$$a_{i2}x_2 \ge b_i ; a_{i1} = 0 \qquad 1 \le i \le m$$

สำหรับ $c_1 > 0$ และสเกลาร์ $x_1^{'}, x_2^{'}, y^{'}$ ได้ว่า

1. $(x_1^{'}, x_2^{'})$ เป็นจุดที่เหมาะที่สุดในปัญหา LP2 ก็ต่อเมื่อ $(y^{'}, x_2^{'})$ เป็นจุดที่เหมาะที่สุดในปัญหา LPT

2. ปัญหา LP2 ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อปัญหา LPT ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

3. ปัญหา LP2 เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อปัญหา LPT เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

<u>พิสูจน์</u> นิยามบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหา

$$F_2 = \{(x_1, x_2) | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i ; 1 \le i \le m\}$$

$$F_t = \{(y, x_2) | y \ge \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + b_i \;; a_{i1} > 0 \;,\; y \le \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + b_i \;; a_{i1} < 0,$$
$$a_{i2}x_2 \ge b_i ;\; a_{i1} = 0\}$$

1. $(\rightarrow)$ ให้ $(x_1^{'}, x_2^{'})$ เป็นจุดที่เหมาะที่สุดใน LP2 และกำหนด $y' = c_1x_1^{'} + c_2x_2^{'}$

ดังนั้นสำหรับทุกจุด $(x_1, x_2) \in F_2 \quad c_1x_1 + c_2x_2 \ge c_1x_1^{'} + c_2x_2^{'}$

ให้ $(y, x_2) \in F_t$ นิยาม $x_1 = \left(\dfrac{y - c_2x_2}{c_1} \right)$

สำหรับเงื่อนไขใน LPT

$$F_i=\{(y,x_2)|\, y\geq\left(c_2-\frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2+b_i\ ;a_{i1}>0\ ,\ y\leq\left(c_2-\frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2+b_i\ ;a_{i1}<0,$$
$$a_{i2}x_2\geq b_i;\ a_{i1}=0\}$$

สำหรับ $a_{i1}>0$

$$y\geq c_2x_2-\frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2+\frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$
$$y\geq\left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2-a_{i2}x_2+b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$
$$\frac{a_{i1}y}{c_1}\geq\left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}-a_{i2}\right)x_2+b_i$$
$$\frac{a_{i1}y}{c_1}-\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2+a_{i2}x_2\geq b_i$$
$$a_{i1}\left(\frac{y-c_2x_2}{c_1}\right)+a_{i2}x_2\geq b_i$$
$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\geq b_i$$

ได้ว่าจุด $(x_1,x_2)\in F_2$ มีค่าต่ำสุดเป็น $y=c_1x_1+c_2x_2$

และจาก $c_1x_1+c_2x_2\geq c_1x_1'+c_2x_2'$ นั่นคือ $y\geq y'$ ดังนั้น จุดที่เหมาะที่สุดใน LPT คือ (y',x_2') #

($\leftarrow$) ให้ (y',x_2') เป็นจุดที่เหมาะที่สุดของ LPT ได้ว่าสำหรับทุกจุดใน LPT $y\geq y'$

ให้ $(x_1,x_2)\in F_2$ นิยาม $y=c_1x_1+c_2x_2$

สำหรับ $a_{i1}>0$ เงื่อนไขใน LP2

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2 x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

$$y \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$y \geq c_2 x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \geq \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2 + \frac{a_{i1}}{c_1}b_i$$

สำหรับ $a_{i1} < 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2 x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

เนื่องจาก $c_1 > 0$ จะได้ว่า $\frac{a_{i1}}{c_1} < 0$

$$y \leq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$y \leq c_2 x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \leq \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2 + \frac{a_{i1}}{c_1}b_i$$

สำหรับ $a_{i1} = 0$ ได้ $a_{i2}x_2 \geq b_i$

ได้ว่าจุด $(y, x_2) \in F_i$ มีค่าต่ำสุดเป็น y

และจาก $y \geq y'$ ดังนั้น $c_1x_1 + c_2x_2 \geq c_1x_1' + c_2x_2'$ จุดที่เหมาะที่สุดใน LP2 คือ (x_1', x_2')

(สำหรับกรณี $a_{i1} < 0$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน)

2. ($\rightarrow$) โดยวิธีแย้งสลับที่ ให้ LPT มีบริเวณที่เป็นไปได้

นั่นคือ จะมีจุด $(y, x_2) \in F_i$ นิยาม $x_1 = \left(\dfrac{y - c_2x_2}{c_1} \right)$ สำหรับ $a_{i1} > 0$

$$y \geq c_2x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \geq \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i \right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1} - a_{i2} \right)x_2 + b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2x_2}{c_1} \right) + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

สำหรับ $a_{i1} < 0$

$$y \leq c_2x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \leq \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i \right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

เนื่องจาก $\dfrac{c_1}{a_{i1}} < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2 x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

สำหรับ $a_{i1} = 0$

$$a_{i2}x_2 \geq b_i$$

นั่นคือมีจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขใน LP2 และ LP2 มีบริเวณที่เป็นไปได้

เพราะฉะนั้น ถ้า LP2 ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้แล้ว LPT ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

($\leftarrow$) โดยวิธีแย้งสลับที่ ให้ LP2 มีบริเวณที่เป็นไปได้

นั่นคือจะมีจุด $(x_1, x_2) \in F_2$ นิยาม $y = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2 x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

$$y \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$y \geq c_2 x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \geq \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2 + \frac{a_{i1}}{c_1}b_i$$

สำหรับ $a_{i1} < 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

เนื่องจาก $c_1 > 0$ จะได้ว่า $\frac{a_{i1}}{c_1} < 0$

$$y \leq \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$y \leq c_2x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \leq \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2 + \frac{a_{i1}}{c_1}b_i$$

สำหรับ $a_{i1} = 0$ ได้ $a_{i2}x_2 \geq b_i$

นั่นคือ มีจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขใน LPT และ LPT มีบริเวณที่เป็นไปได้

เพราะฉะนั้น ถ้า LPT ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้แล้ว LP2 ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

3. ($\rightarrow$) ให้ LP2 เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

ให้ $\mathrm{M} < 0$ จากปัญหาไม่มีขอบเขตได้ว่า จะมีจุด $(x_1, x_2) \in F_2$ ซึ่ง $c_1x_1 + c_2x_2 < \mathrm{M}$

กำหนดให้ $y = c_1x_1 + c_2x_2$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \ge \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

$$y \ge \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$y \ge c_2x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \ge \left(c_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}\right)x_2 + \frac{a_{i1}}{c_1}b_i$$

สำหรับ $a_{i1} < 0$

$$y \le c_2x_2 - \frac{a_{i2}c_1}{a_{i1}}x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}}b_i$$

$$y \le \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 - a_{i2}x_2 + b_i\right)\frac{c_1}{a_{i1}}$$

เนื่องจาก $\frac{c_1}{a_{i1}} < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} \ge \left(\frac{c_2a_{i1}}{c_1} - a_{i2}\right)x_2 + b_i$$

$$\frac{a_{i1}y}{c_1} - \frac{c_2a_{i1}}{c_1}x_2 + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

$$a_{i1}\left(\frac{y - c_2x_2}{c_1}\right) + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i$$

สำหรับ $a_{i1} = 0$ $\qquad a_{i2}x_2 \ge b_i$

ได้ว่า ค่าต่ำสุดใน LPT เท่ากับ $y < \mathrm{M}$ จากจุด $(y, x_2) \in F_l$

ดังนั้น LPT เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

$(\leftarrow)$ ให้ LPT เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

ให้ $\mathrm{M} < 0$ จากปัญหาไม่มีขอบเขตได้ว่า จะมีจุด $(y, x_2) \in F_l$ ซึ่ง $y < \mathrm{M}$

กำหนด $x_1 = \left(\dfrac{y - c_2 x_2}{c_1} \right)$

$$y \geq c_2 x_2 - \frac{a_{i2} c_1}{a_{i1}} x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}} b_i$$

$$y \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} x_2 - a_{i2} x_2 + b_i \right) \frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$\frac{a_{i1} y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} - a_{i2} \right) x_2 + b_i$$

$$\frac{a_{i1} y}{c_1} - \frac{c_2 a_{i1}}{c_1} x_2 + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1} \left(\frac{y - c_2 x_2}{c_1} \right) + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

สำหรับ $a_{i1} < 0$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

$$a_{i1} \left(\frac{y - c_2 x_2}{c_1} \right) + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1} y}{c_1} - \frac{c_2 a_{i1}}{c_1} x_2 + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

$$\frac{a_{i1} y}{c_1} \geq \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} - a_{i2} \right) x_2 + b_i$$

เนื่องจาก $c_1 > 0$ จะได้ว่า $\dfrac{a_{i1}}{c_1} < 0$

$$y \le \left(\frac{c_2 a_{i1}}{c_1} x_2 - a_{i2} x_2 + b_i \right) \frac{c_1}{a_{i1}}$$

$$y \le c_2 x_2 - \frac{a_{i2} c_1}{a_{i1}} x_2 + \frac{c_1}{a_{i1}} b_i$$

$$y \le \left(c_2 - \frac{a_{i2} c_1}{a_{i1}} \right) x_2 + \frac{a_{i1}}{c_1} b_i$$

สำหรับ $a_{i1} = 0$ ได้ $a_{i2} x_2 \ge b_i$

ได้ว่า ค่าต่ำสุดใน LP2 เท่ากับ $y < \mathrm{M}$ จากจุด $(x_1, x_2) \in F_2$

ดังนั้น LP2 เป็นปัญหาที่ไม่มีขอบเขต

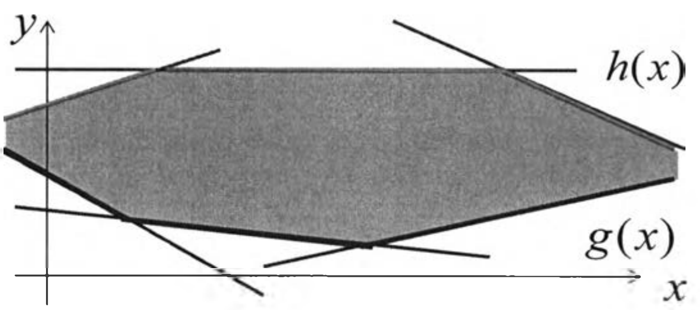
สำหรับกรณีที่ $c_1 < 0$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน

ขั้นที่ 3

จากปัญหาที่ (4) กำหนดกลุ่มของเงื่อนไขบังคับในรูป $y \ge a_{m1} x_i + b$ ให้เป็นกลุ่ม I_1 และเงื่อนไขบังคับในรูป $y \le a_{l1} x_i + b$ ให้เป็นกลุ่ม I_2 พร้อมทั้งนิยามฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ ดังนี้

$g(x)$ = ส่วนของเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_1 ที่เป็นส่วนหนึ่งของบริเวณที่เป็นไปได้

$h(x)$ = ส่วนของเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_2 ที่เป็นส่วนหนึ่งของบริเวณที่เป็นไปได้



รูป 2.1 แสดงลักษณะของฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ กับบริเวณที่เป็นไปได้

จากขั้นที่ 3 ทำให้ได้ปัญหารูปใหม่คือ

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $g(x)$

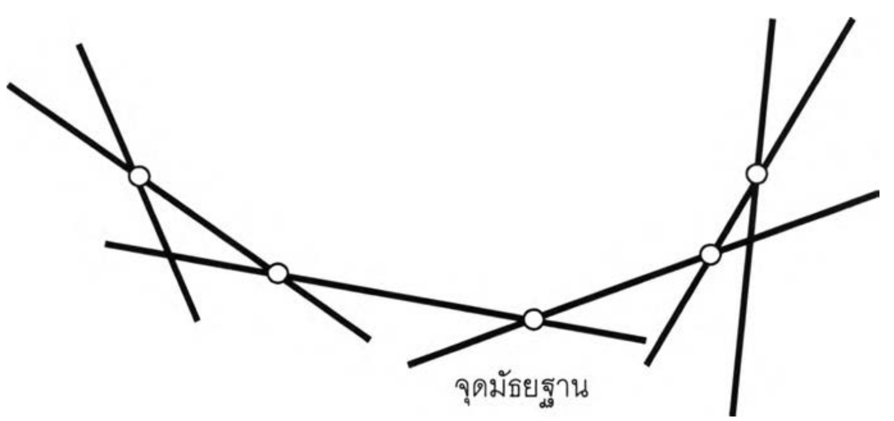
สอดคล้องกับเงื่อนไข $g(x) \leq h(x)$ (4)

หรือ หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $h(x)$

สอดคล้องกับเงื่อนไข $g(x) \leq h(x)$ (5)

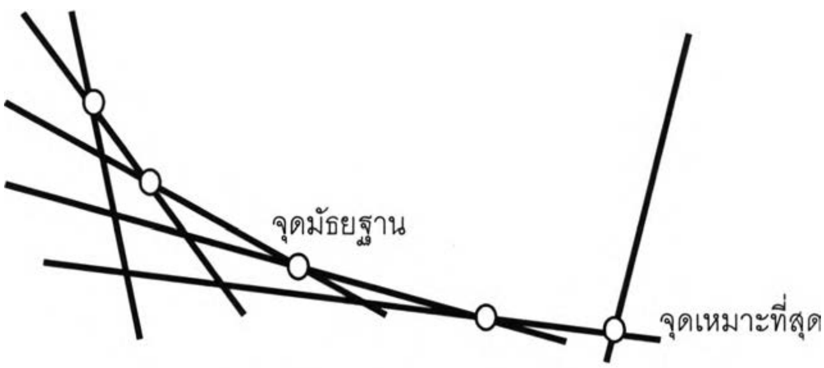
ขั้นที่ 4

สำหรับการหาค่าต่ำสุด จะพิจารณาเงื่อนไขบังคับที่อยู่ในกลุ่ม I_1 ส่วนการหาค่าสูงสุด ให้พิจารณาเงื่อนไขบังคับที่อยู่ในกลุ่ม I_2 โดยทำการเรียงค่าความชันจากน้อยไปหามากภายในกลุ่มเงื่อนไขนั้น พิจารณาค่าความชันที่อยู่ตรงกลางจากการเรียงค่าความชัน โดยสมมติฐานที่ว่าค่าที่อยู่ตรงกลางเป็นค่าที่เหมาะที่สุด จึงนำเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันเป็นมัธยฐานและเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันใกล้เคียงกับเงื่อนไขดังกล่าวในการหาคำตอบ หากจุดดังกล่าวไม่ใช่คำตอบ จะต้องลดช่วงในการหาคำตอบต่อไป โดยการหาเงื่อนไขที่มีค่าความชันเป็นอยู่ตรงกลางจากกลุ่มเงื่อนไขบังคับที่เหลืออยู่อีกครั้ง ทำซ้ำจนกว่าจะได้จุดที่เหมาะที่สุด



รูป 2.2 แสดงการหาคำตอบของเมกิดโด

วิธีการหาคำตอบของเมกิดโด มีข้อเสียคือจากขั้นที่ 4 จะได้ผลเฉลยเร็วที่สุด (ลดช่วงในการหาคำตอบน้อยครั้งที่สุด) เมื่อจำนวนเงื่อนไขที่มีค่าความชันเป็นบวก และเงื่อนไขที่มีค่าความชันเป็นลบ มีจำนวนที่เท่ากัน (ดังแสดงในรูปที่ 2.2) แต่ถ้าหากว่าไม่เท่ากันแล้ว จะทำให้การทำงานในขั้นตอนที่ 4 ใช้เวลาในการหาคำตอบที่นาน (ดังแสดงในรูป 2.3)



รูป 2.3 แสดงปัญหาเมื่อจุดที่เหมาะที่สุดไม่ใช่จุดมัธยฐาน

2.2 การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นในสองมิติโดยวิธีของเอื้ออารี (Krung & Aua-aree method - KA Method)

เอื้ออารี [9] พบว่า จากการแก้ปัญหาของเมกิดโด จุดที่ให้ค่าเหมาะที่สุดนั้นจะมาจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดจากกลุ่มของเงื่อนไขบังคับที่พิจารณา โดยมีเงื่อนไขว่าทุกเงื่อนไขบังคับที่นำมาพิจารณาจะต้องประกอบเป็นบริเวณที่เป็นไปได้ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ถึงขั้นที่ 3 ใช้วิธีการเดียวกับวิธีของเมกิดโด

ขั้นที่ 4

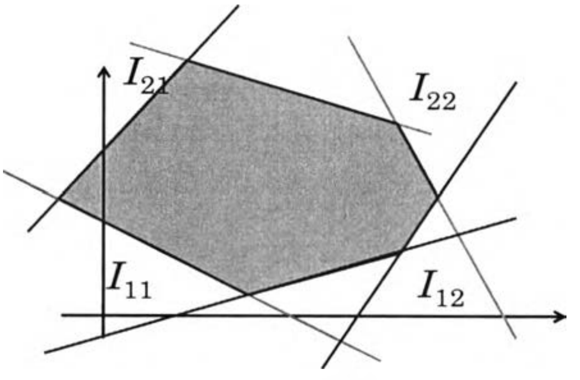
จากขั้นที่ 3 ทำการแบ่งเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_1 และ I_2 ออกอีกเป็น 2 กลุ่มย่อยตามค่าความชันดังนี้

I_{11} = เซตของเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_1 ที่มีความชันเป็นลบ

I_{12} = เซตของเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_1 ที่มีความชันเป็นบวก

I_{21} = เซตของเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_2 ที่มีความชันเป็นบวก

I_{22} = เซตของเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_2 ที่มีความชันเป็นลบ

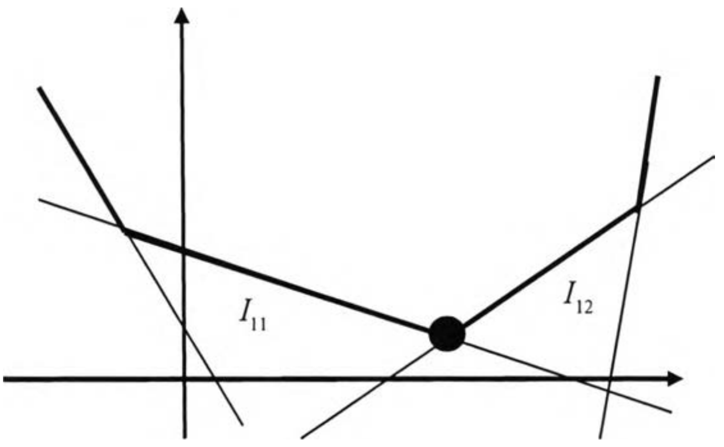


รูป 2.4 แสดงการแบ่งกลุ่มของเอื้ออารีเป็น 4 กลุ่มย่อย

ทฤษฎีบท 2.1 (การหาคำตอบโดยวิธีของเอื้ออารี)

1. จุดต่ำสุดของปัญหา (*) จะมาจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{11} กับเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{12}

2. จุดสูงสุดของปัญหา (*) จะมาจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{21} กับเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากสุดในกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{22}



รูป 2.5 ประกอบคำอธิบายทฤษฎีบทที่ 2.1 (1)

ขั้นที่ 5

จากทฤษฎีบทที่ 2.1 พบว่ายังไม่ครอบคลุมทุกกรณีสำหรับการหาผลเฉลย นั่นคือ ในการหาค่าต่ำสุดจุดคำตอบต้องมาจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่อยู่ในกลุ่ม I_{11} และ I_{12} แต่ถ้าเกิดกลุ่มเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งเป็นเซตว่าง ก็ยังมีโอกาสที่จะมีค่าต่ำสุดได้ จึงมีการขยายทฤษฎีบทที่ 2.1 ออกไป จากการแบ่งกลุ่มเงื่อนไขบังคับออกเป็น 4 กลุ่มย่อย ทำให้ได้ปัญหาที่เป็นไปได้ทั้งหมด 15 รูปแบบ (ไม่รวมกรณีที่ทุกกลุ่มเงื่อนไขเป็นเซตว่างพร้อมกัน) ซึ่งจะส่งผลที่ไม่เหมือนกันในการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

สำหรับการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดจะไม่มีคำตอบเมื่อ

- ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้
- ปัญหาไม่มีขอบเขต เมื่อมีเงื่อนไขบังคับเพียงกลุ่มเดียว

ปัญหาค่าต่ำสุดจะมีคำตอบเมื่อ

- มีเงื่อนไขบังคับอยู่ทั้งในกลุ่ม I_{11} และ I_{12} (ปัญหากลุ่มที่ 1)
- มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{11} และ I_{22} แต่ไม่มีเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{12} (ปัญหากลุ่มที่ 2)
- มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{12} และ I_{21} แต่ไม่มีเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{11} (ปัญหากลุ่มที่ 3)

ปัญหาค่าสูงสุดจะมีคำตอบเมื่อ

- มีเงื่อนไขบังคับอยู่ทั้งในกลุ่ม I_{21} และ I_{22} (ปัญหากลุ่มที่ 4)
- มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{12} และ I_{21} แต่ไม่มีเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{22} (ปัญหากลุ่มที่ 5)
- มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{11} และ I_{22} แต่ไม่มีเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{21} (ปัญหากลุ่มที่ 6)

บทแทรก 2.2 (บทขยายของทฤษฎีบท 2.1)

วิธีการหาค่าต่ำสุดทำได้ดังนี้

1. หากมีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{11} และ I_{12} จุดต่ำสุดจะเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{11} และเงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{12}

2. หากมีเพียงเงื่อนไขที่อยู่ในกลุ่ม I_{11} เท่านั้น ให้พิจารณาเงื่อนไขในกลุ่ม I_{22} หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความความชันน้อยสุดของกลุ่ม I_{22} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{11} จะได้ว่าปัญหานั้นมีผลเฉลย

3.หากมีเพียงเงื่อนไขที่อยู่ในกลุ่ม I_{12} เท่านั้น ให้พิจารณาเงื่อนไขในกลุ่ม I_{21} หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความความชันมากสุดของกลุ่ม I_{21} มีค่าความชันมากกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{12} จะได้ว่าปัญหานั้นมีผลเฉลย

หลังจากนั้นต้องทำการตรวจสอบว่าปัญหามีบริเวณที่เป็นไปได้โดยแทนค่าผลเฉลยกับทุกเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{21} และ I_{22} หากสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขจะได้ว่าผลเฉลยดังกล่าวเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่ถ้าไม่สอดคล้องกับบางเงื่อนไขแล้ว ปัญหาดังกล่าวจะไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

วิธีการหาค่าสูงสุดทำได้ดังนี้

1. หากมีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{21} และ I_{22} จุดต่ำสุดจะเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{21} และเงื่อนไขที่บังคับมีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{22}

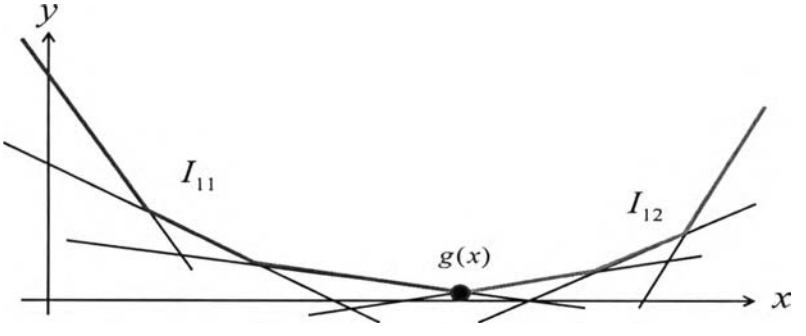
2. หากมีเพียงเงื่อนไขที่อยู่ในกลุ่ม I_{22} เท่านั้น ให้พิจารณาเงื่อนไขในกลุ่ม I_{11} หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความความชันมากสุดของกลุ่ม I_{22} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{11} จะได้ว่าปัญหานั้นมีผลเฉลย

3. หากมีเพียงเงื่อนไขบังคับที่อยู่ในกลุ่ม I_{21} เท่านั้น ให้พิจารณาเงื่อนไขในกลุ่ม I_{12} หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความความชันน้อยสุดของกลุ่ม I_{12} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{21} จะได้ว่าปัญหานั้นมีผลเฉลย

หลังจากนั้นต้องทำการตรวจสอบว่าปัญหามีบริเวณที่เป็นไปได้โดยแทนค่าผลเฉลยกับทุกเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{11} และ I_{12} หากสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขจะได้ว่าผลเฉลยดังกล่าวเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่ถ้าไม่สอดคล้องกับบางเงื่อนไขแล้ว ปัญหาดังกล่าวจะไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

อธิบายความหมายของบทแทรก 2.2 โดยใช้ภาพดังนี้

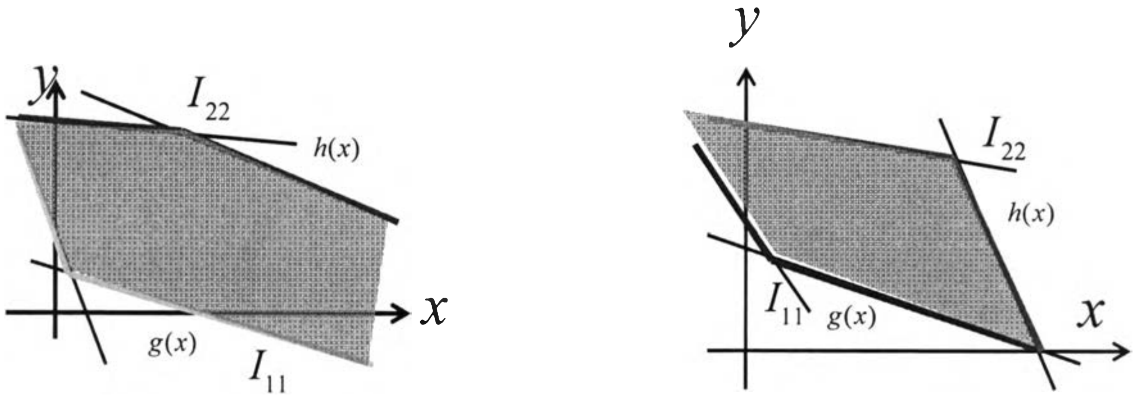
ปัญหากลุ่มที่ 1 นั่นคือปัญหาที่กลุ่ม I_{11} และ I_{12} ต่างก็ไม่เป็นเซตว่างพร้อมกัน ผลเฉลยจะเกิดจากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{11} และเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{12}



รูป 2.6 แสดงการหาผลเฉลยของปัญหากลุ่มที่ 1

ปัญหากลุ่มที่ 2 คือปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{12} จึงพิจารณาเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{11} กับ I_{22}

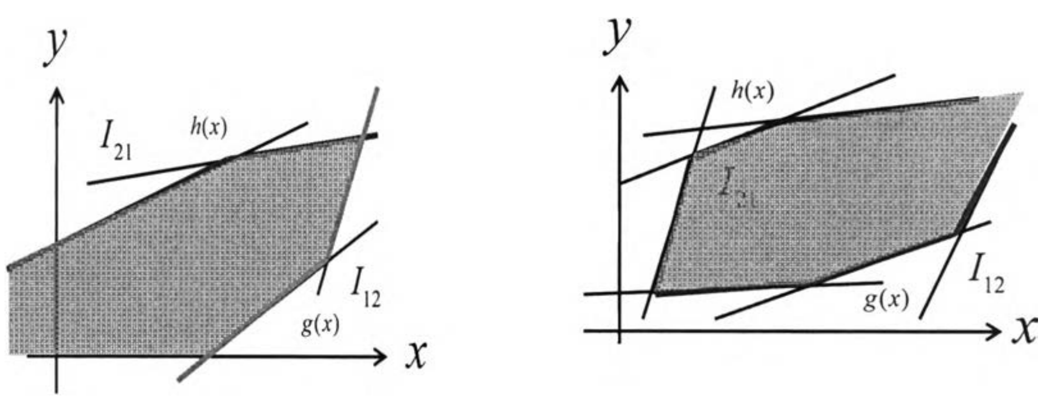
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{11} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{22} แล้ว ปัญหานั้นจะไม่มีขอบเขต
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{11} มีค่าความชันมากกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{22} แล้ว ปัญหานั้นจะมีผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของทั้งสองเงื่อนไขบังคับนั้น



รูป 2.7 แสดงการหาคำตอบของปัญหากลุ่มที่ 2

ปัญหาที่กลุ่มที่ 3 คือปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{11} จึงพิจารณาเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{21} กับ I_{12}

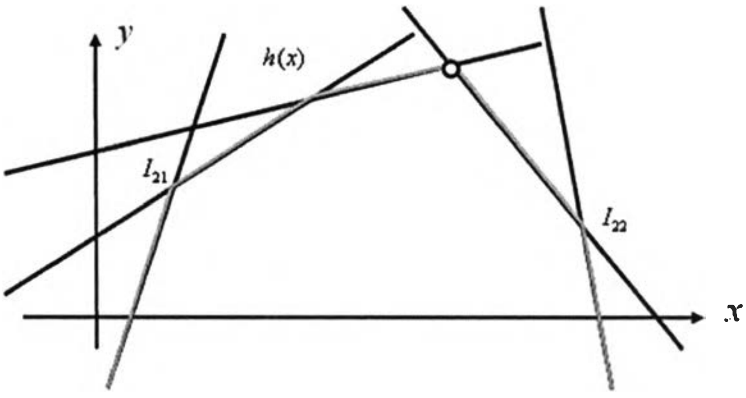
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{12} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{21} แล้ว ปัญหานั้นจะไม่มีขอบเขต
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{12} มีค่าความชันมากกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{21} แล้ว ปัญหานั้นจะมีผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของทั้งสองเงื่อนไขบังคับนั้น



รูป 2.8 แสดงการหาคำตอบของปัญหากลุ่มที่ 3

เนื่องจากปัญหาใน 3 กลุ่มนี้เป็นการหาค่าต่ำสุด ขั้นตอนต่อไปคือการตรวจสอบว่าปัญหามีบริเวณที่เป็นไปได้หรือไม่ นั่นคือการตรวจสอบผลเฉลยกับเงื่อนไขในกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{21} และ I_{22} หากสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับแล้ว ได้ว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่ถ้าไม่สอดคล้องกับบางเงื่อนไขแล้ว ปัญหาดังกล่าวจะไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

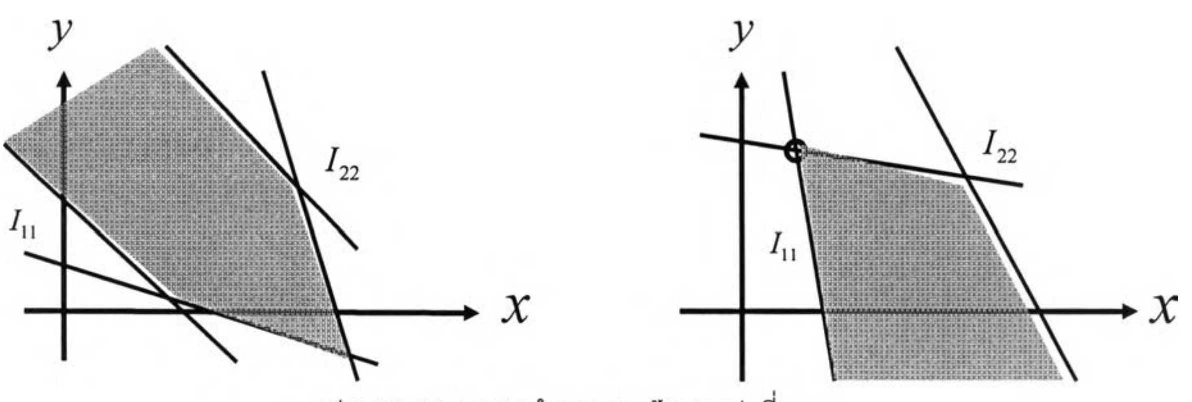
ปัญหากลุ่มที่ 4 คือปัญหาการหาค่าสูงสุด เมื่อเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{21} และ I_{22} ต่างก็ไม่เป็นเซตว่าง ผลเฉลยจะมาจากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{21} และเงื่อนไขที่มีค่าความชันมากสุดในกลุ่ม I_{22}



รูป 2.9 แสดงการหาคำตอบของปัญหากลุ่มที่ 4

ปัญหากลุ่มที่ 5 คือปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{21} จึงพิจารณาเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{11} กับ I_{22}

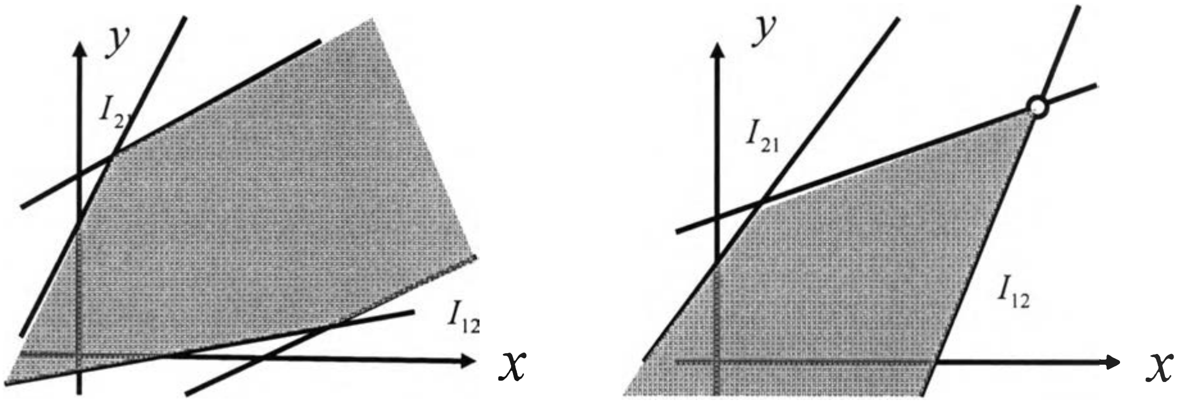
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{22} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{11} แล้ว ปัญหานั้นจะไม่มีขอบเขต
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{22} มีค่าความชันมากกว่าเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{11} แล้ว ปัญหานั้นจะมีผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของทั้งสองเงื่อนไขบังคับนั้น



รูป 2.10 แสดงการหาคำตอบของปัญหากลุ่มที่ 5

ปัญหากลุ่มที่ 6 คือปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับอยู่ในกลุ่ม I_{22} จึงพิจารณาเงื่อนไขบังคับในกลุ่ม I_{21} กับ I_{12}

- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{21} มีค่าความชันน้อยกว่าเงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{12} แล้ว ปัญหานั้นจะไม่มีขอบเขต
- หากเงื่อนไขบังคับที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{21} มีค่าความชันมากกว่าเงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{12} แล้ว ปัญหานั้นจะมีผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของทั้งสองเงื่อนไขบังคับนั้น



รูป 2.11 แสดงการหาคำตอบของปัญหากลุ่มที่ 6

ปัญหาในกลุ่มที่ 4-6 เป็นการหาค่าสูงสุด ขั้นตอนต่อไปคือการตรวจสอบว่าปัญหามีบริเวณที่เป็นไปได้หรือไม่ นั่นคือการตรวจสอบผลเฉลยกับเงื่อนไขในกลุ่มเงื่อนไขบังคับ I_{11} และ I_{12} หากสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับแล้ว ได้ว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด แต่ถ้าไม่สอดคล้องกับบางเงื่อนไขแล้ว ปัญหาดังกล่าวจะไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้

นอกจากนี้ ยังมีบางเงื่อนไขบังคับซึ่งเมื่อแปลงโดยใช้สมการ (3.1)หรือ (3.2) แล้ว จะเหลือเพียงเฉพาะตัวแปร y เพียงตัวเดียว ซึ่งเงื่อนไขบังคับดังกล่าวคือเงื่อนไขบังคับที่มีเวกเตอร์ตั้งฉากชี้ไปทิศเดียวกันกับเวกเตอร์ตั้งฉากของฟังก์ชันจุดประสงค์ ตัวอย่างเช่น

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $3x_1 + x_2$

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ $3x_1 + x_2 \geq 4$

เมื่อใช้สมการ (3.2) ได้ว่า

$$y = 3x_1 + x_2$$
$$x_2 = y - 3x_1$$

แทนค่า x_2 ลงในเงื่อนไขบังคับ จะได้ปัญหาเมื่อแทนค่าใหม่คือ

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ y

สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ $y \geq 4$

จะเห็นว่า เงื่อนไข $y \geq 4$ เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีเฉพาะตัวแปร y เพียงอย่างเดียว และยังเป็นการกำหนดว่า ค่าต่ำสุดของ y จะไม่มีทางต่ำกว่า 4 และหากว่าเงื่อนไขบังคับนั้นไม่เป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็น ทำให้ได้ค่าที่ต่ำที่สุดตามต้องการ สรุปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2 สำหรับฟังก์ชันจุดประสงค์ $c_1x_1 + c_2x_2$

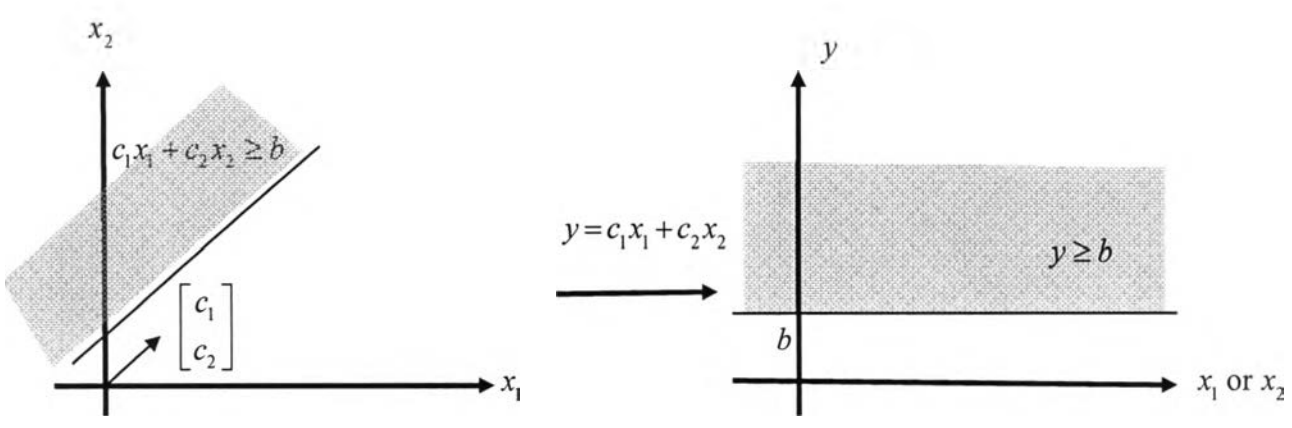
กำหนดให้ C เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีทิศทางเดียวกับฟังก์ชันจุดประสงค์

$$\mathrm{C}_1 : c_1x_1 + c_2x_2 \geq b$$

$$\mathrm{C}_2 : c_1x_1 + c_2x_2 \leq d$$

หาก C_1 ไม่เป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นแล้ว ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์มากกว่าหรือเท่ากับ b

หาก C_2 ไม่เป็นเงื่อนไขบังคับที่เกินจำเป็นแล้ว ค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์น้อยกว่าหรือเท่ากับ d



รูป 2.12 ประกอบการอธิบายทฤษฎีบทที่ 2.2

<u>พิสูจน์</u> ให้ $y = c_1x_1 + c_2x_2$ เป็นค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์

และเงื่อนไขที่มีเกรียนเดียนต์เวกเตอร์เดียวกันกับเวกเตอร์ฟังก์ชันจุดประสงค์ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$

เนื่องจากว่ามีทิศทางเดียวกัน จะได้ว่า $a_{i1} = c_1, a_{i2} = c_2$

นั่นคือ $y \geq b_i$ ซึ่งจะมีค่าต่ำสุดเท่ากับ b_i

ซึ่งสามารถแสดงกรณีที่เป็นค่าสูงสุด โดยเครื่องหมายของเงื่อนไขบังคับเป็นน้อยกว่าหรือเท่ากับได้เช่นเดียวกัน

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาตามขั้นตอนของเอื้ออารี

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $3x + 2y$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$-x+y\leq 1$$

$$x+4y\leq 4$$

$$3x+2y\geq -3$$

$$x+y\leq 2$$

$$-4x+3y\geq -12$$

ไม่จำกัดค่าของ x, y

<u>วิธีทำ</u> โดยวิธีการของเอื้ออารี

ให้ $z=3x+2y$ จะได้ว่า $y=\dfrac{z-3x}{2}$ และแทนค่ากลับไปในปัญหาเริ่มต้น จะได้ปัญหาที่จัดรูปใหม่คือ

หาค่าต่ำสุด และสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ z

สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$z \leq 5x+2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a) \in I_{21}$$

$$z \leq \frac{5x+4}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{b}) \in I_{21}$$

$$z \geq -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

$$z \leq x+4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d) \in I_{21}$$

$$z \geq \frac{17x}{2} - 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e) \in I_{12}$$

จะเห็นว่า เงื่อนไขที่แปลงแล้วจะเป็นเงื่อนไขในรูปตัวแปร x และ z เท่านั้น และเงื่อนไข (c) เป็นเงื่อนไขที่มีเฉพาะตัวแปร z เท่านั้น หากเงื่อนไข (c) เป็นเงื่อนไขที่เป็นส่วนหนึ่งในบริเวณที่เป็นไปได้แล้ว จะได้ว่า ค่าต่ำสุดของปัญหานี้เท่ากับ -3 (ดูรูป 2.13 ประกอบ)

ดังนั้น สำหรับการหาค่าต่ำสุดแล้ว เราสามารถแยกหาคำตอบได้ดังนี้

<u>กรณีที่1</u> หากจัดให้เงื่อนไขบังคับ (c) อยู่ในกลุ่มเงื่อนไข I_{11}

โดยบทแทรก 2.2 ได้ว่าเงื่อนไขจะอยู่ในกลุ่มที่ 1 นั่นคือ ผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไขที่มีค่าความชันมากที่สุดในกลุ่ม I_{11} (ซึ่งในที่นี้คือเงื่อนไข (c)) กับเงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{12} (ซึ่งในที่นี้คือเงื่อนไข (e))

ผลเฉลยที่ได้คือ

$$z = -3$$

$$x = (-3+8)\times\frac{2}{17} = \frac{10}{17}$$

$$y = \frac{-3-3(\frac{15}{17})}{2} = \frac{-81}{34}$$

ค่าต่ำสุดคือ -3 ที่จุด $(x, y) = \left(\frac{10}{17}, \frac{-81}{34}\right)$

<u>กรณีที่ 2</u> หากจัดให้เงื่อนไข (c) อยู่ในกลุ่มเงื่อนไข I_{12}

โดยบทแทรก 2.2ได้ว่า ปัญหานี้จะให้ผลอยู่ในกลุ่มที่ 3 ซึ่ง เงื่อนไขที่มีค่าความชันมากสุดในกลุ่ม I_{21} มีค่าเท่ากับ 5 (เงื่อนไข (a)) ซึ่งมากกว่า เงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยสุดในกลุ่ม I_{12} ซึ่งมีค่าความชันเท่ากับ 0 (เงื่อนไข (c)) โดยขั้นที่ 5 ได้ว่า ผลเฉลยจะเกิดจากการตัดกันของเงื่อนไข (a) และเงื่อนไข (c)

ผลเฉลยคือ

$$z = -3$$

$$x = \frac{-3-2}{5} = -1$$

$$y = \frac{-3-3(-1)}{2} = 0$$

ค่าต่ำสุดคือ -3 ที่จุด $(x, y) = (1, 0)$

สังเกตว่า ไม่ว่าจะแบ่งเงื่อนไข (c) ให้อยู่ในกลุ่มใด ก็จะได้ค่าต่ำสุดเท่าเดิม เนื่องจากว่า เงื่อนไข (c) เป็นเงื่อนไขที่มีทิศทางเดียวกันกับทิศทางของฟังก์ชันจุดประสงค์ และสอดคล้องกับทฤษฎีบท 2.2

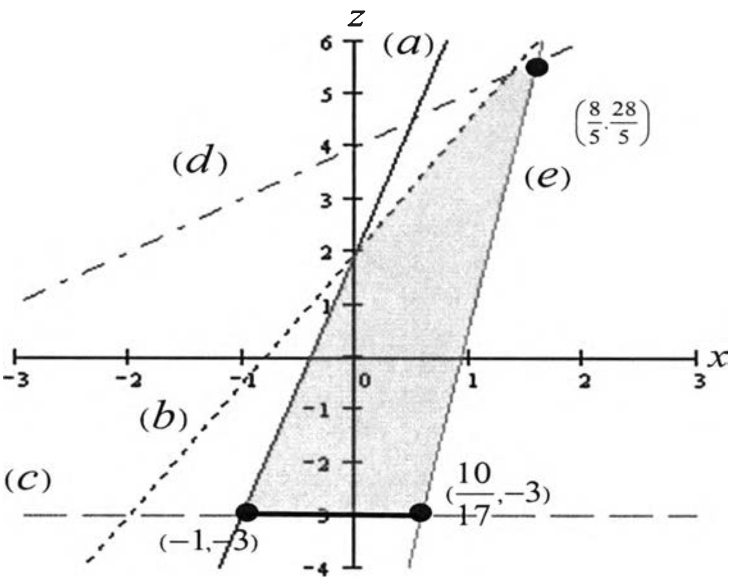
<u>กรณีการหาค่าสูงสุด</u>

หากจัดเงื่อนไข (c) ให้อยู่ในกลุ่ม I_{12} แล้ว (ซึ่งไม่มีผลต่อการหาค่าสูงสุด) โดยบทแทรก2.2 จะได้ว่าปัญหาดังกล่าวจะอยู่ในกลุ่มที่ 5 ซึ่งเงื่อนไขที่มีค่าความชันน้อยที่สุดในกลุ่ม I_{21} มีค่าความชันเท่ากับ 1 (เงื่อนไข (d)) ซึ่งน้อยกว่าเงื่อนไขที่มีค่าความชันมากสุดในกลุ่ม I_{12} ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{17}{2}$ (เงื่อนไข (e)) โดยขั้นที่ 5 ได้ว่า ปัญหานี้จะมีผลเฉลย ซึ่งจะมาจากการตัดกันของเงื่อนไข (d) และ (e)

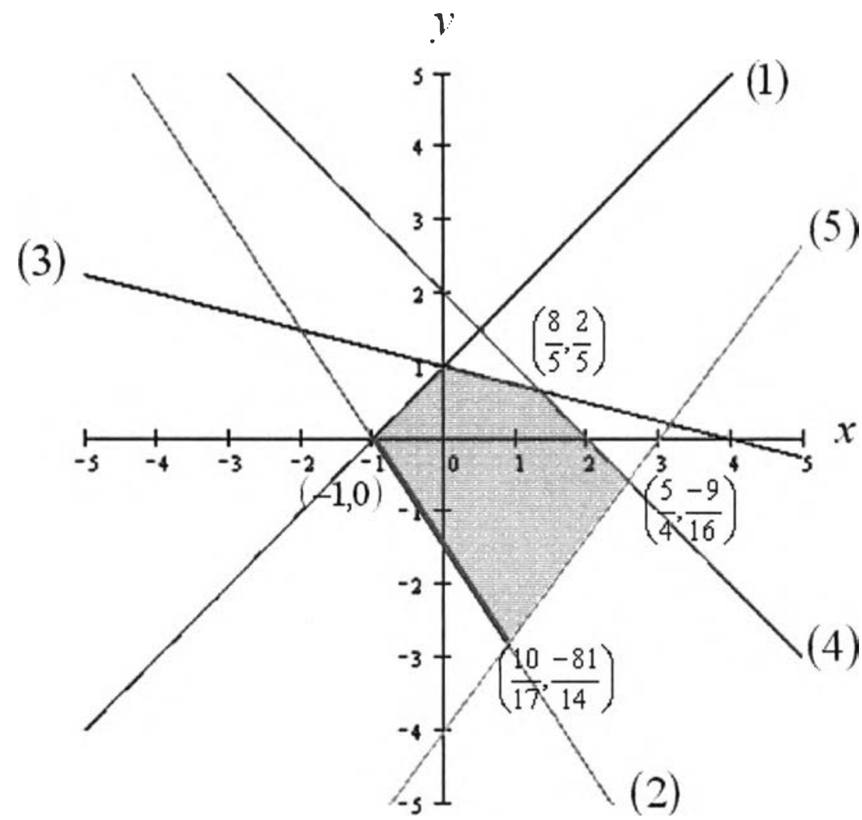
ผลเฉลยคือ $x=\frac{8}{5}, z=\frac{28}{5}, y=\frac{2}{5}$

ค่าสูงสุดมีค่าเท่ากับ $\frac{28}{5}$ ที่จุด $(x,y)=\left(\frac{8}{5},\frac{2}{5}\right)$ #

ซึ่งจะตรวจสอบคำตอบที่ได้เปรียบเทียบกับการแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟ ได้ดังนี้



รูป 2.13 แสดงการแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟของปัญหาที่แปลงตัวแปรแล้ว



รูป 2.14 แสดงการแก้ปัญหาโดยวิธีกราฟของปัญหาเริ่มต้น

2.3 **เงื่อนไข** Karush-Kuhn-Tucker

2.3.1 **ปัญหาคู่ควบ** (Dual Problem)

ในปัญหากำหนดการเชิงเส้นทุกปัญหา จะมีปัญหาอีกหนึ่งปัญหาที่ใช้ข้อมูลคล้ายกับปัญหาตั้งต้นที่เรียกว่า ปัญหาคู่ควบอยู่ด้วยเสมอ ปัญหาคู่ควบถูกนำมาใช้ตรวจสอบร่วมกับผลเฉลยของปัญหาเริ่มต้นพร้อมเงื่อนไขหย่อนเติมเต็ม (Complementary slackness) สำหรับผลเฉลยที่สอดคล้องกับการเป็นผลเฉลยที่เหมาะที่สุด โดยที่ทิศทางของจุดประสงค์ของปัญหาคู่ควบจะตรงข้ามกับปัญหาเริ่มต้นเสมอ กล่าวคือ ถ้าปัญหาเริ่มต้นเป็นการหาค่าต่ำสุด ในปัญหาคู่ควบจะเป็นการหาค่าสูงสุด เป็นต้น

ให้ $u=(u_1,u_2,.......u_m)^T$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรคู่ควบ

สำหรับปัญหาเริ่มต้นที่เราศึกษาคือ

$$\text{หาค่าต่ำสุดของ } c^T x$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขบังคับ } Ax \geq b \qquad (10)$$

$$\text{ไม่จำกัดค่าของ } x$$

จะมีปัญหาคู่ควบคือ

$$\text{หาค่าสูงสุดของ } u^T b$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขบังคับ } u^T A = c^T \qquad (11)$$

$$u \geq 0$$

การสร้างปัญหาคู่ควบทำได้ดังนี้

หากปัญหาเริ่มต้นเป็นการหาค่าต่ำสุด ปัญหาคู่ควบจะเป็นการหาค่าสูงสุด

- หากเงื่อนไขบังคับของปัญหาเริ่มต้นเป็นมากกว่าหรือเท่ากับแล้ว ตัวแปรของปัญหาคู่ควบมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์
- หากเงื่อนไขบังคับองปัญหาเริ่มต้นเป็นน้อยกว่าหรือเท่ากับแล้ว ตัวแปรของปัญหาคู่ควบมีค่ามากกว่าหรือเท่าศูนย์
- หากเงื่อนไขบังคับของปัญหาเริ่มต้นเป็นเท่ากับแล้ว ตัวแปรของปัญหาคู่ควบจะไม่จำกัดค่า
- หากตัวแปรของปัญหาเริ่มต้นเป็นมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์แล้ว เงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่ควบจะเป็นมากกว่าหรือเท่ากับ
- หากตัวแปรของปัญหาเริ่มต้นเป็นน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์แล้ว เงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่ควบจะเป็นน้อยกว่าหรือเท่ากับ
- หากตัวแปรของปัญหาเริ่มต้นไม่จำกัดค่าแล้ว เงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่ควบจะเป็นเท่ากับ

หากปัญหาเดิมเป็นการหาค่าสูงสุด ปัญหาคู่ควบจะเป็นการหาค่าต่ำสุด

- หากเงื่อนไขบังคับของปัญหาเริ่มต้นเป็นมากกว่าหรือเท่ากับแล้ว ตัวแปรของปัญหาคู่ควบจะมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

- หากเงื่อนไขบังคับของปัญหาเริ่มต้นเป็นน้อยกว่าหรือเท่ากับแล้ว ตัวแปรของปัญหาคู่ควบจะน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์
- หากเงื่อนไขบังคับของปัญหาเริ่มต้นเป็นเท่ากับแล้ว ตัวแปรของปัญหาคู่ควบจะไม่จำกัดค่า
- หากตัวแปรของปัญหาเริ่มต้นมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์แล้ว เงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่ควบจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ
- หากตัวแปรของปัญหาเริ่มต้นน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์แล้ว เงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่ควบจะมากกว่าหรือเท่ากับ
- หากตัวแปรของปัญหาเริ่มต้นไม่จำกัดค่าแล้ว เงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่ควบจะเป็นเท่ากับ

ตัวอย่าง2.2 จากปัญหากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $3x + 2y$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ $-x + y \le 1$

$$x + 4y \le 4$$

$$3x + 2y \ge -3$$

$$x + y \le 2$$

$$-4x + 3y \ge -12$$

ไม่จำกัดค่าของ x, y

เราเขียนปัญหาคู่ควบได้โดยกำหนด $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรคู่ควบ

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 2u_4 - 12u_5$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข
$$-u_1 + u_2 + 3u_3 + u_4 - 4u_5 = 3$$
$$u_1 + 4u_2 + 2u_3 + u_4 + 3u_5 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \ge 0$$

2.3.2 **เงื่อนไขที่เหมาะที่สุด** Karush-Kuhn-Tucker (KKT Optimal Conditions)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขที่ทดสอบจุดที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้น กล่าวคือ ถ้า x^* เป็นจุดที่เหมาะที่สุดของปัญหากำหนดการเชิงเส้นแล้ว x^* จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเคเคที (KKT Conditions) ต่อไปนี้

- จุด x^* อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาเริ่มต้น (Primal Feasibility)
- จุด u^* ซึ่งเป็นจุดของปัญหาคู่ควบอยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหาคู่ควบ (Dual Feasibility)
- จุด x^* สอดคล้องกับเงื่อนไขหย่อนเติมเต็ม (Complementary slackness)

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

x^* เป็นจุดเหมาะสมที่สุดเมื่อ

$$\begin{aligned}&1.\ Ax^* \geq b\\&2.\ u^{*T}A = c^T, u^* \geq 0\\&3.\ u^{*T}(Ax^* - b) = 0\end{aligned} \qquad (12)$$

ตัวอย่าง 2.3 จากตัวอย่าง 2.1 และ 2.2 จงแสดงว่าจุด (x, y) = (-1,0) เป็นจุดเหมาะที่สุดที่ให้ค่าต่ำสุดโดยใช้เงื่อนไขเคเคที

<u>วิธีทำ</u> โดยเงื่อนไขแรกของ KKT จุด (1, 0) สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขบังคับของปัญหา

หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $3x + 2y$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned}&-x + y \leq 1 && (1 = 1)\\&x + 4y \leq 4 && (-1 < 4)\\&3x + 2y \geq -3 && (-3 = -3)\\&x + y \leq 2 && (-1 < 2)\\&-4x + 3y \geq -12 && (4 > -12)\end{aligned}$$

ไม่จำกัดค่าของ x, y

จากตัวอย่าง 2.2 เลือก $u=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรคู่ควบโดยปัญหาคู่ควบของปัญหานี้คือ

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ $u_1+4u_2-3u_3+2u_4-12u_5$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข
$$-u_1+u_2+3u_3+u_4-4u_5=3$$
$$u_1+4u_2+2u_3+u_4+3u_5=2$$

$$u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\geq 0$$

เนื่องจากจุด (-1, 0) มาจากการตัดกันของเงื่อนไขบังคับที่ 1 และ 3 โดยเงื่อนไขที่สามของเคเคที ได้ว่า $u_2=u_4=u_5=0$ และปัญหาคู่ควบจะเหลือเพียง

หาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ u_1-3u_3

สอดคล้องกับเงื่อนไข
$$-u_1+3u_3=3$$
$$u_1+2u_3=2$$
$$u_1,u_3\geq 0$$

แก้ระบบสมการได้ $u_1=0, u_3=1$ ซึ่งต่างก็มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ดังนั้น จุด $(x,y)=(1,0)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามของเคเคที และเป็นจุดที่เหมาะที่สุด #