บทที่ 3

ทฤษฎีการจับอนุภาคแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยว

จากบทที่ 2 ได้แสดงการหาสนามแม่เหล็กรอบตัวจับ ทั้งกรณีแบบจำลองตัวจับเดี่ยว และกรณีจากกลุ่มตัวจับทรงกระบอก สำหรับบทนี้จะนำสนามแม่เหล็ก (กรณีสนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยว) ที่ได้นี้หาสมการการเคลื่อนที่ต่อไป สำหรับการที่จะหาสมการการเคลื่อนที่ได้นั้น จำเป็นต้องทราบแรงต่างๆที่กระทำกับอนุภาคแม่เหล็ก ซึ่งจะกล่าวอย่างละเอียดต่อไป

3.1 แรงที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก

ตัวกรองชนิดแม่เหล็กที่จะกล่าวถึงในบทนี้ตัวจับอนุภาคแม่เหล็กเป็นสารเฟร์โรแมกเนติก รูปร่างเป็นทรงกระบอกรัศมีคงที่ สนามแม่เหล็กภายนอกความเข้มสม่ำเสมอ ($\vec{H}$) ทำมุมตั้งฉากกับแกนทรงกระบอก บรรจุในกล่องที่ทำด้วยวัสดุไม่เป็นสารแม่เหล็ก (nonmagneticcanister) ตัวจับอนุภาคแม่เหล็กที่อยู่ในกล่องนี้ถูกแมกนิไตซ์โดยสนามแม่เหล็กภายนอก เมื่ออนุภาคแม่เหล็กที่ปะปนมากับของไหลเคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรอง อนุภาคแม่เหล็กจะถูกแรงต่างๆกระทำ สำหรับอนุภาคแม่เหล็กที่มีขนาดเล็กมาก (เส้นผ่านศูนย์กลางน้อยกว่า 200 ไมคอน) แรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational force) และแรงเฉื่อย (inertia force) มีค่าน้อย แรงที่มีผลต่ออนุภาคแม่เหล็กในของไหลที่สำคัญ คือ แรงแม่เหล็ก (magnetic force) และแรงหนืด (viscous drag force) ซึ่งจะนำไปหาสมการการเคลื่อนที่ได้ สำหรับแรงที่มีผลต่ออนุภาคแม่เหล็กสามารถแยกพิจารณาได้ดังนี้

3.1.1 แรงแม่เหล็ก ($\vec{F}_m$)

โดยธรรมชาติของสารแม่เหล็กที่อยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอก ($\vec{H}$) โมเมนต์แม่เหล็ก ($\vec{m}$) ของแต่ละอะตอมเรียงกันอย่างเป็นระเบียบคือทิศของโมเมนต์แม่เหล็กชี้ไปในทิศทางสนามแม่เหล็กภายนอก เรียกว่าแมกนิไตเซชันหรือเรียกว่าสารนี้ถูกแมกนิไตซ์ แมกนิไตเซชัน ($\vec{M}$) ของสารชนิดใดๆก็คือโมเมนต์แม่เหล็กของสารนั้นถูกแมกนิไตซ์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรดังนั้น

$$\vec{M} = \vec{m}/V \qquad (3.1)$$

สำหรับสารที่เป็นพาราแมกเนติกที่พิจารณา ให้มีสมบัติไอโซโทรปิกแบบเชิงเส้น (isotropic and linear)

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \tag{3.2}$$

เมื่อ χ คือสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็กของสารเป็นค่าคงที่ แต่เนื่องจากความเหนี่ยวนำแม่เหล็ก ($\vec{B}$) มีความสัมพันธ์กับสนามแม่เหล็ก ($\vec{H}$) ดังนี้

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{M}+\vec{H}) \tag{3.3}$$

โดยแทนค่า $\vec{M}$ จาก (3.2) ลงใน (3.3) จะได้ $\vec{B} = \mu\vec{H}$ เมื่อ μ คือสภาพซึมได้ทางแม่เหล็กของสาร และค่าสภาพซึมได้ทางแม่เหล็กขึ้นอยู่กับค่าสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็กของสารนั้น ดังสมการ

$$\mu = \mu_o(1+\chi) \tag{3.4}$$

เมื่อ μ_o คือสภาพซึมได้ทางแม่เหล็กของสุญญากาศ

พลังงานศักย์แม่เหล็ก (U) ในตัวกลางไอโซโทรปิกแบบเชิงเส้นในปริมาตร V_p คือ

$$U = (1/2)\int_{V_p} \vec{H}.\vec{B}dv \tag{3.5}$$

และจากสมการที่ (3.3) และ (3.5) จะได้พลังงานศักย์ของตัวกลางปริมาตร V_p เล็กมากเป็น

$$U = (1/2)\mu V_p H^2 \tag{3.6}$$

จากสมการที่ (3.6) พลังงานแม่เหล็กของของไหลในปริมาตร V_p คือ

$$U_f = (1/2)\mu_f V_p H^2 \tag{3.7}$$

$$\mu_f = \mu_o(1+\chi_f) \tag{3.8}$$

และพลังงานแม่เหล็กของอนุภาคแม่เหล็กในของไหลที่มีปริมาตร V_p คือ

$$U_p = (1/2)\mu_p V_p H^2 \tag{3.9}$$

$$\mu_p = \mu_o(1+\chi_p) \tag{3.10}$$

ดังนั้นสามารถหาพลังงานแม่เหล็กรวมของระบบซึ่งประกอบด้วยอนุภาคแม่เหล็กและของไหลได้ดังสมการ

$$U = (1/2)(\mu p-\mu_f)V_p H^2 \tag{3.11}$$

จากสมการที่ (3.11) สามารถหา แรงที่กระทำต่ออนุภาคได้คือ

$$\vec{F}_m = (1/2)\mu_o \chi V_p \vec{\nabla} H^2 \tag{3.12}$$

เมื่อ $\chi = \chi_f - \chi_p$ คือความแตกต่างระหว่างค่าสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็ก (magnetic susceptibilities) ของอนุภาคและของไหล

3.1.2 แรงเนื่องจากความหนืดของของไหล ($\vec{F}_d$)

แรงหนืดที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก (รัศมี R) เกิดจากความหนืดของของไหล (η) ที่ไหลผ่านกลุ่มตัวจับทรงกระบอก แรงหนืดที่กระทำต่ออนุภาคที่เคลื่อนที่ในตัวกลางของไหล สอดคล้องกับกฎของสโตกส์ (Stoke's law) กล่าวคือ

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta R(\vec{v}_p - \vec{v}_f) \tag{3.13}$$

เมื่อ $\vec{v}_p$ คือความเร็วของอนุภาค และ $\vec{v}_f$ คือความเร็วของไหล ซึ่งจะได้กล่าวถึง ในหัวข้อที่ 3.2 ต่อไป

3.2 สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็ก

จากแรงแม่เหล็กและแรงหนืดที่กระทำกับอนุภาคแม่เหล็ก สามารถนำไปหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กโดยแยกพิจารณาภายในทรงกระบอกและ ภายนอกทรงกระบอกของ ได้ดังนี้

ก) ภายในทรงกระบอก $(0 < r < a)$

สามารถหาค่า $\vec{\nabla} H^2$ โดยแทนค่า H จากสมการที่ (2.11) ดังแสดงต่อไปนี้

$$H^2 = H_o^2[(1 + a^4K_s^2/r^4) + (2a^2K_s\cos 2\theta)/r^2] \qquad (3.14)$$

$$\vec{\nabla} H^2 = H_o^2[(-4K_s^2/ar_a^5) - (4/ar_a^3)K_s\cos(2\theta)]\hat{r} - [(4/ar_a^3)H_o^2K_s\sin(2\theta)]\hat{\theta} \qquad (3.15)$$

$$\vec{F}_m = (-2/a)\mu_o\chi_p V_p H_o^2 K_s[((K_s/r_a^5) + (1/r_a^3)\cos(2\theta))\hat{r} + (1/r_a^3)\sin(2\theta)\hat{\theta}],$$

เมื่อ $V_p = (4/3)\pi R^3$ (3.16)

จากสมการที่ (3.16) สามารถเขียนในส่วนประกอบย่อยของแรงที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก

$$\vec{F}_m = \vec{F}_{mr} + \vec{F}_{m\theta}$$

กรณีแรงหนืดที่กระทำกับอนุภาคแม่เหล็ก $(\vec{F}_d)$ หาได้ดังนี้ จาก

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta R(\vec{v}_p - \vec{v}_f) \qquad (3.17)$$

เมื่อแยกพิจารณาแต่ละส่วนประกอบย่อยของแรงที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็ก จะได้ดังนี้

$$F_{dr} + F_{d\theta} = -6\pi\eta R((dr/dt) - v_{fr}) - 6\pi\eta R((rd\theta/dt) - v_{f\theta}) \qquad (3.18)$$

เมื่อ $v_{fr} = [v_o(1 - a^2/r^2)\cos\theta_v]\hat{r}$, $v_{f\theta} = -[v_o\sin\theta_v(1 + a^2/r^2)]\hat{\theta}$, $\theta_v = (\theta - \alpha)$ θ คือมุมที่อนุภาคแม่เหล็กทำกับสนามแม่เหล็กภายนอก $(\vec{H}_o)$ α คือมุมที่ $\vec{v}_o$ ทำกับสนามแม่เหล็กภายนอก $(\vec{H}_o)$ แสดงดังรูปที่ 1.6

แทน v_{fr} และ $v_{f\theta}$ ในสมการที่ (3.18) จะได้

$$\vec{F}_{dr}+\vec{F}_{d\theta} = -6\pi\eta R[((dr/dt)-v_o(1-a^2/r^2)\cos\theta_v)\hat{r}+((rd\theta/dt)+v_o\sin\theta_v(1+a^2/r^2))\hat{\theta}] \tag{3.19}$$

เมื่อรวมแรงภายนอกที่กระทำต่ออนุภาคแม่เหล็กและแรงหนืดโดยไม่คิดแรงเฉื่อยในการเคลื่อนที่จะได้ $\vec{F}_m+\vec{F}_d \simeq 0$ ซึ่งทำให้ได้แรงส่วนประกอบย่อยในแนวรัศมี ($\hat{r}$) ได้ดังนี้

$$(1/2a)\mu_o\chi_p v_p(-4)H_o^2K_s[(K_s/r_a^5)+(1/r_a^3)\cos(2\theta)]-6\pi\eta R[(dr/dt)-v_o(1-a^2/r^2)\cos\theta_v] = 0$$

ซึ่งหาความเร็วของอนุภาคตามแนวรัศมีได้เป็น

$$dr_a/dt = -(v_m/a)[(K_s/r_a^5)+(1+r_a^3)\cos(2\theta)]-(v_o/a)(1-1/r_a^2)\cos\theta_v \tag{3.20}$$

เมื่อ $v_m = (4/9)(\mu_o\chi_p K_s H_o^2 R^2/\eta a)$ เรียกความเร็วเนื่องจากแรงแม่เหล็ก (magnetic velocity) มีหน่วยเป็นเมตร/วินาที $K_s = M_s/2\mu_o H_o$ ซึ่งเรียกค่าคงที่ทางแม่เหล็ก และ $r_a = r/a$ สำหรับส่วนประกอบย่อยในทิศตั้งฉากกับแนวรัศมี (θ) ได้

$$-6\pi\eta R[(rd\theta/dt)+v_o\sin\theta_v(1+a^2/r^2)]+(-2/a)(\mu_o\chi_p V_p H_o^2 K_s(1/r_a^3)\sin(2\theta) = 0$$

ซึ่งหาความเร็วของอนุภาคในทิศตั้งฉากกับรัศมีได้เป็น

$$r_a(d\theta/dt) = (-4/9\eta)\,\mu_o\chi_p R^2 K_s H_o^2\sin(2\theta)+(v_o/a)(1+1/r_a^2)\sin\theta_v \tag{3.21}$$

เมื่อแทนค่า $v_m = (4/9)(\mu_o\chi_p K_s H_o^2 R^2/\eta a)$ ในสมการ (3.21) จะได้ผลดังนี้

$$r_a(d\theta/dt) = -(v_m/a)\sin(2\theta)+(v_o/a)(1+1/r_a^2)\sin\theta_v \tag{3.22}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.20) และสมการที่ (3.22) พบว่าสมการดังกล่าวคือสมการการเคลื่อนที่ของ J.H.P. Watson ที่แสดงไว้ในบทที่ 2 นั้นเอง สำหรับสมการที่ (3.20) และสมการที่ (3.22) เขียนเป็นความสัมพันธ์ได้เป็น

$$1/r_a(dr_a/dt) = f(v_m/v_o, K_s)$$