บทที่ 4

ทฤษฎีการจับอนุภาคแม่เหล็กโดยกลุ่มทรงกระบอกพาราแมกเนติก

จากบทที่ 2 ได้แสดงการหาสนามแม่เหล็กรอบตัวจับจากกลุ่มตัวจับทรงกระบอก ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งที่จะนำมาใช้หาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็ก ดังแสดงการหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กกรณีสนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยวไว้ในบทที่ 3 สำหรับบทนี้จะได้แสดงการหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กกรณีสนามแม่เหล็กรอบตัวจับจากกลุ่มตัวจับทรงกระบอก สำหรับการจะหาสมการการเคลื่อนที่ได้นั้น จำเป็นจะต้องทราบแรงต่างๆที่กระทำกับอนุภาคแม่เหล็กดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 3

4.1 สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กโดยกลุ่มตัวจับแบบทรงกระบอก

จากบทที่ผ่านมาได้แสดงการหาสนามแม่เหล็กรอบตัวจับกลุ่มตัวจับทรงกระบอก โดยวิธีตัวกลางยังผล รวมถึงแรงต่างๆที่มีผลต่ออนุภาคแม่เหล็ก ซึ่งจากข้อมูลดังกล่าวสามารถนำไปคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กโดยวิธีตัวกลางยังผลได้ ดังแสดงสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กตามแบบตัวจับเดี่ยวไว้ในบทที่ 2 สำหรับแรงแม่เหล็ก ($\vec{F}_m$) ที่กระทำกับอนุภาคแม่เหล็กกรณีใช้สนามแม่เหล็กยังผลคำนวณได้โดยแทนค่า $\vec{H}$ จากสมการ (2.31) ลงในสมการ (3.12) ซึ่งได้ผลดังนี้

$$\vec{F}_m = (-2/a)\mu_o\chi_p V_p A^2 H_o^2 K_c\, [((K_c/r_a^5) + (1/r_a^3)\cos(2\theta))\hat{r} + (1/r_a^3)\sin(2\theta)\hat{\theta}],\ r_a = r/a \tag{4.1}$$

สำหรับแรงเนื่องจากความหนืดของของไหล ($\vec{F}_d$) ดังนี้

$$\vec{F}_d = -6\pi\eta R(\vec{v}_p - \vec{v}_f) \tag{4.2}$$

เมื่อ η, R, v_p และ v_f เป็นความหนืดของของไหล รัศมีอนุภาคแม่เหล็ก ความเร็วของอนุภาค และความเร็วของไหลตามลำดับ ผลจากการรวมแรงทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ในแนวขนานกับรัศมีและตั้งฉากกับรัศมีดังนี้

$$dr_a/dt = -(v_m/a)A^2[K_c/r_a^5+(1/r_a^3)\cos(2\theta)]-(v_o/a)(1-1/r_a^2)\cos\theta \tag{4.3}$$

$$r_a(d\theta/dt) = -(v_m/a)A^2\sin(2\theta)+(v_o/a)(1+1/r_a^2)\sin\theta_v \tag{4.4}$$

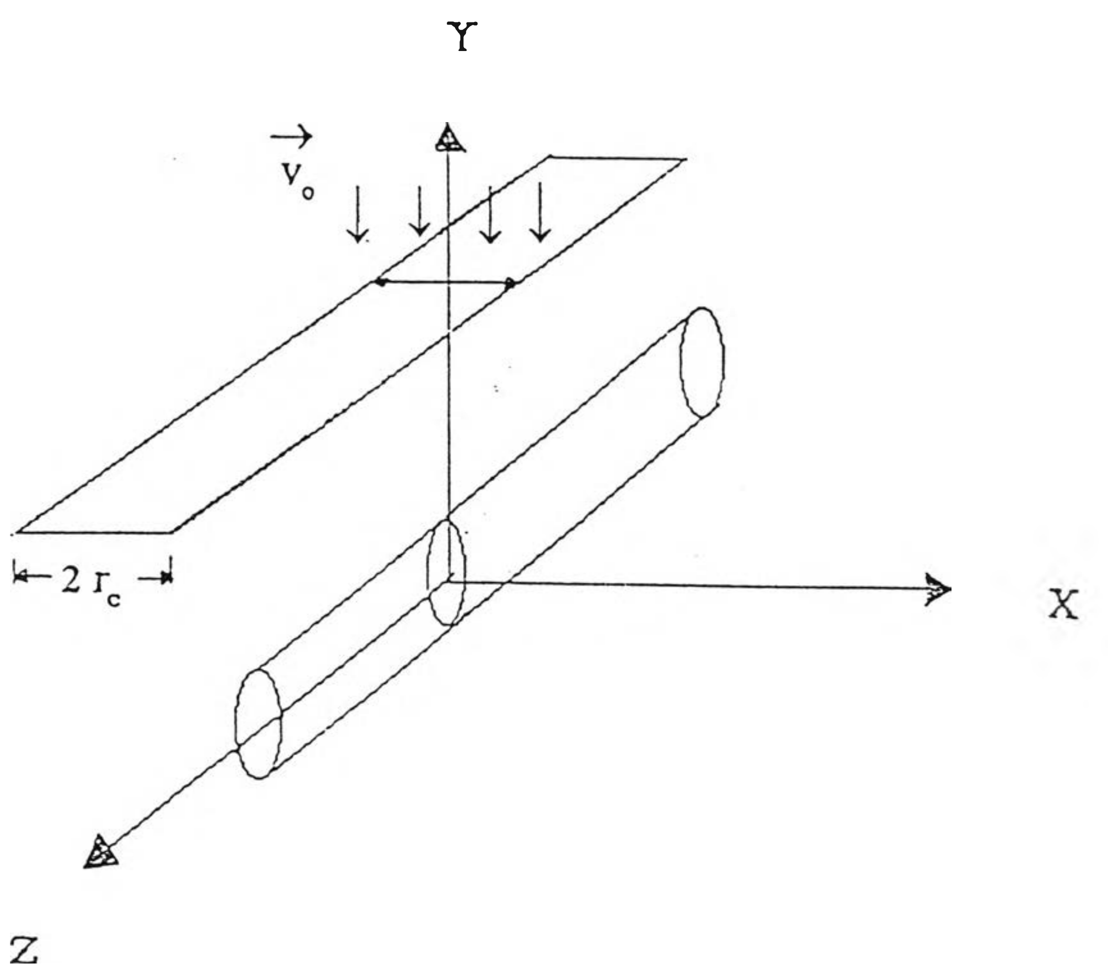
เมื่อ $v_m = 4/9\ (\mu_o\chi_p K_c H_o^2 R^2/\ \eta a)$ เรียกความเร็วเนื่องจากแรงแม่เหล็ก (magnetic velocity) มีหน่วยเป็นเมตร/วินาที $K_c = (\nu-1)/(\nu+1)$ ซึ่งเรียกค่าคงที่ทางแม่เหล็ก $A^2 = 1/(1-FK_c)^2$ เมื่อ F เป็นสัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาค(packing fraction) v_o คือความเร็วเริ่มต้นของอนุภาคแม่เหล็กที่เคลื่อนที่เข้ามาในตัวกรอง $r_a = r/a$ และ $\theta_v = (\theta-\alpha)$ เมื่อ $\alpha = 0$ เป็นแบบตามยาวและ $\alpha = \pi/2$ เป็นแบบตามขวาง สมการ (4.3) หารโดย (4.4) ให้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$1/r_a(dr_a/d\theta) = f(v_m/v_o,F,K_c)$$

นั้นคือเส้นทางการเคลื่อนที่ของอุนภาคแม่เหล็กขึ้นกับพารามิเตอร์อัตราส่วนระหว่างความเร็วเนื่องจากแม่เหล็กต่อความเร็วเริ่มต้นขณะเคลื่อนที่เข้ามาของอนุภาคในระบบของไหล (v_m/v_o) สัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาค (F) และค่าคงที่ทางแม่เหล็ก (K_c)

4.2 พื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็ก (capture area, A_c)

พื้นการจับอนุภาคแม่เหล็ก คือพื้นที่อนุภาคแม่เหล็กเริ่มเคลื่อนที่เข้ามาในระบบตัวกรอง และอยู่ภายในรัศมีการจับอนุภาคแม่เหล็กแสดงดังในรูปที่ 4.1 จากบทที่ 3 และ 4 เราได้หาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแม่เหล็กกรณีใช้สนามแม่เหล็กตามแบบจำลองตัวจับเดี่ยวและกรณีใช้สนามแม่เหล็กยังผลตามลำดับ ซึ่งสามารถนำมาคำนวณหารัศมีการจับอนุภาคแม่เหล็กโดยวิธีคำนวณเชิงตัวเลข (numerical calculation) ด้วยวิธีรังก์กัตตา (Runge-Gutta's method) ทำให้สามารถหาพื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็กได้ การศึกษาพื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็กในงานวิจัยนี้จะไม่แสดงรายละเอียดมาก เนื่องจากพบว่ากรณีการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามยาวและแบบตามขวางหาได้จากสมการ $A_c = 2r_cL$ เมื่อ L คือความยาวของตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก r_c คือรัศมีการจับอนุภาคแม่เหล็ก ซึ่งได้แสดงการคำนวณอย่างละเอียดในหัวข้อที่ 5.1 เมื่อเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง A_{ca} $(A_{ca} = A_c/a)$ กับ (v_m/v_o) เพื่อเปรียบเทียบพื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็กกรณีการกรองชนิดแม่เหล็กแบบตามยาว กับ แบบตามขวางที่คำนวณโดยใช้สนามแม่เหล็กตัวกลางยังผล พบว่าพื้นที่การจับกรณีการกรองแม่เหล็กแบบตามขวางจะมากกว่าแบบตามยาว



รูปที่ 4.1 แสดงพื้นที่การจับอนุภาคแม่เหล็ก (A_c)

4.3 ประสิทธิภาพการจับอนุภาคแม่เหล็ก ($\in$)

ประสิทธิภาพการกรองชนิดแม่เหล็ก เป็นอัตราส่วนระหว่างอนุภาคแม่เหล็กที่ถูกจับในการกรองต่ออนุภาคแม่เหล็กที่เข้ามาในระบบตัวกรอง ประสิทธิภาพการกรองแม่เหล็กจะบอกถึงคุณภาพของเครื่องกรอง ซึ่งทำให้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ตามความเหมาะสม

เมื่อพิจารณาที่ชั้นของตัวกรองชนิดแม่เหล็กซึ่งมีความหนาเท่ากับ ds พื้นที่ภาคตัดขวางเท่ากับ A วางตั้งฉากกับทิศของความเร็วเริ่มต้นของของไหล ซึ่งจำนวนของตัวจับทรงกระบอกในชั้นตัวกรองนี้เป็น N เท่ากับ $(FAds)/(\pi a^2L)$ เมื่อ F , L และ a เป็นสัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก ความยาวของตัวจับทรงกระบอกและ รัศมีของตัวจับทรงกระบอก ตามลำดับ กำหนดให้ A_c เป็นพื้นที่การจับ (capture area) ให้ความหนาแน่นอนุภาค (particle condensation) ที่ชั้นตัวกรอง ณ ตำแหน่ง s เป็น n(s) สามารถหาประสิทธิภาพของการกรอง ได้ดังนี้

พิจารณาที่ชั้นตัวกรองตำแหน่ง s มีความหาแน่นของอนุภาค $n_1 = n(s)$ ที่ตำแหน่ง s+ds มีความหนาแน่นของอนุภาคเป็น $n_2 = n(s+ds)$

โอกาสที่อนุภาคถูกจับในชั้นตัวกรองความหนา ds มีค่าเท่ากับ $(n_1-n_2)/n_1$ = พื้นที่การจับรวม/พื้นที่ภาคตัดขวางของชั้นตัวกรอง

หรือ
$$(n_1-n_2)/n_1 = NA_c/A \tag{4.5}$$

จากความสัมพันธ์
$$dn(s)/ds = (n(s+ds)-n(s))/(s+ds)-s) = -(n_1-n_2)/ds$$

ซึ่งจะได้
$$-dn(s)/n(s) = NA_c/A \tag{4.6}$$

จากสมการ(4.6.) และแทนค่า N

$$-dn(s)/n(s) = (A_cFds)/(\pi a^2L) \tag{4.7}$$

แทนค่า A_c ด้วย $2r_cL$ ได้ผลดังนี้

$$-dn(s)/n(s) = (2r_cFds)/(\pi a^2) \tag{4.8}$$

อินทิเกรตสมการ (4.8) จาก $s = 0$ ถึง $s = x$ เมื่อ x เป็นความหนาของระบบตัวกรอง จะได้

$$n_x = n_o \exp[(2r_c F/\pi a^2)x] \quad (4.9)$$

และจากนิยามประสิทธิภาพของการกรองเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\in = (n_o - n_x)/n_o \quad (4.10)$$

เมื่อแทนสมการ (4.9) ลงในสมการ (4.10) จะได้ประสิทธิภาพของการกรองชนิดแม่เหล็กเป็น

$$\in = 1 - \exp[(-2r_c F/\pi a^2)x]$$

$$\in = 1 - \exp[-2r_{\text{ต}} F x_{\text{ร}}/\pi] \quad (4.11)$$

เมื่อ F คือสัดส่วนการบรรจุตัวจับอนุภาคแม่เหล็ก $r_{\text{ต}}$ $(= r_c/a)$ คือรัศมีการจับอนุภาคแม่เหล็กและ $x_{\text{ร}}$ $(= x/a)$ คือความหนาของระบบตัวกรอง