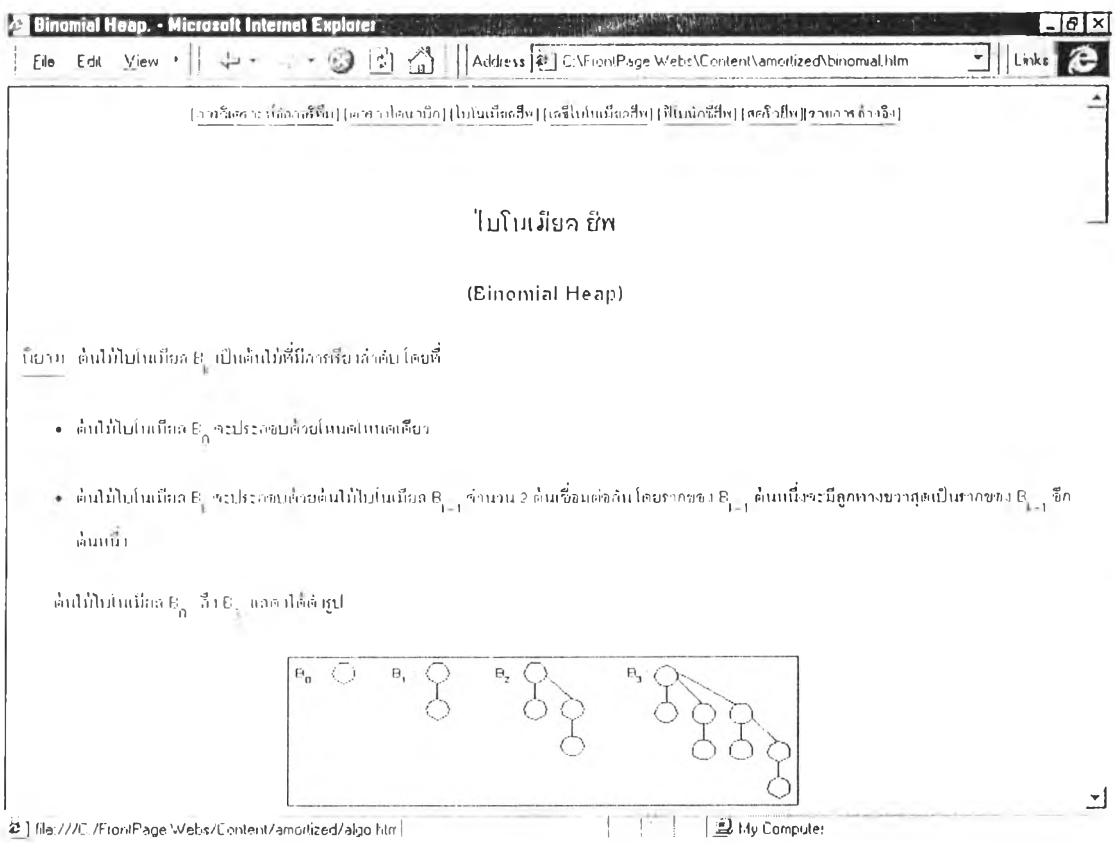
บทที่ 4
การจินตทัศน์

ในบทนี้จะแสดงการจินตทัศน์ที่พัฒนาขึ้น โดยจะแสดงถึงการดำเนินงานต่างๆ และการวิเคราะห์ถัวเฉลี่ยในแต่ละโครงสร้างข้อมูล เพื่อให้เข้าใจในแนวคิดของการวิเคราะห์แบบถัวเฉลี่ย ระบบที่พัฒนาขึ้นนี้จะแบ่งเป็น 3 รูปแบบ คือ

- รูปแบบไฮเปอร์เท็กซ์ (Hypertext version) นำเสนอในลักษณะบทความและภาพประกอบ โดยเชื่อมโยงบทความ และภาพประกอบเหล่านี้แบบไฮเปอร์เท็กซ์ ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.1

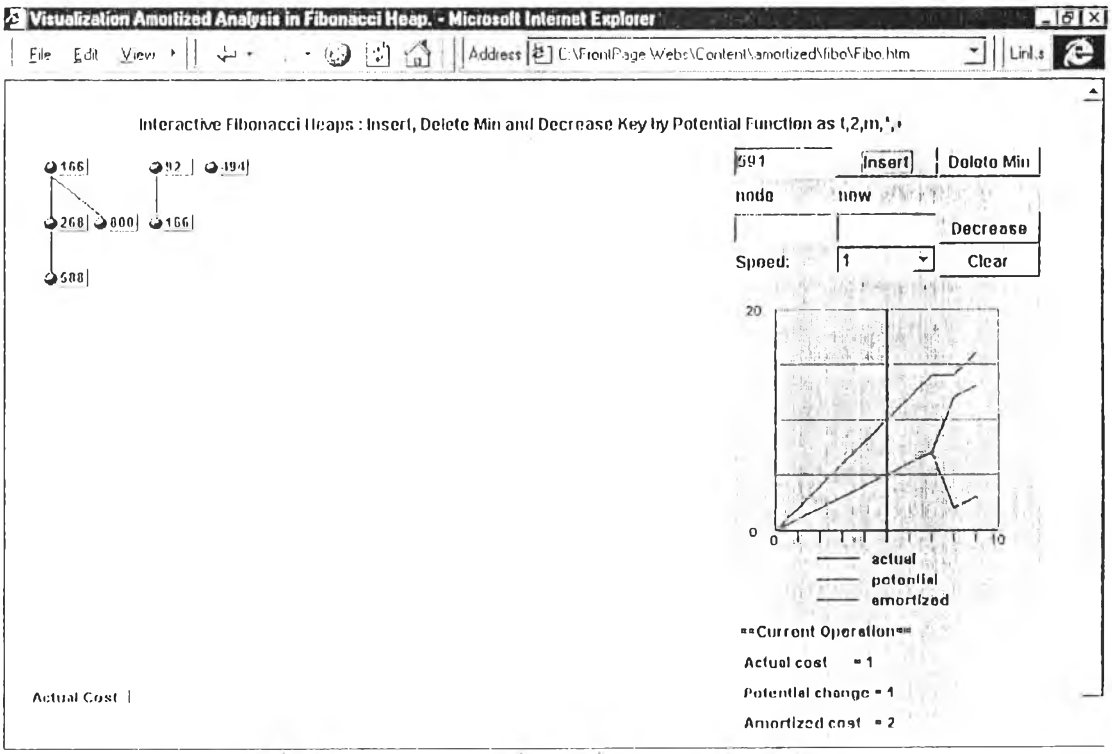


รูปที่ 4.1 ตัวอย่างรูปแบบไฮเปอร์เท็กซ์

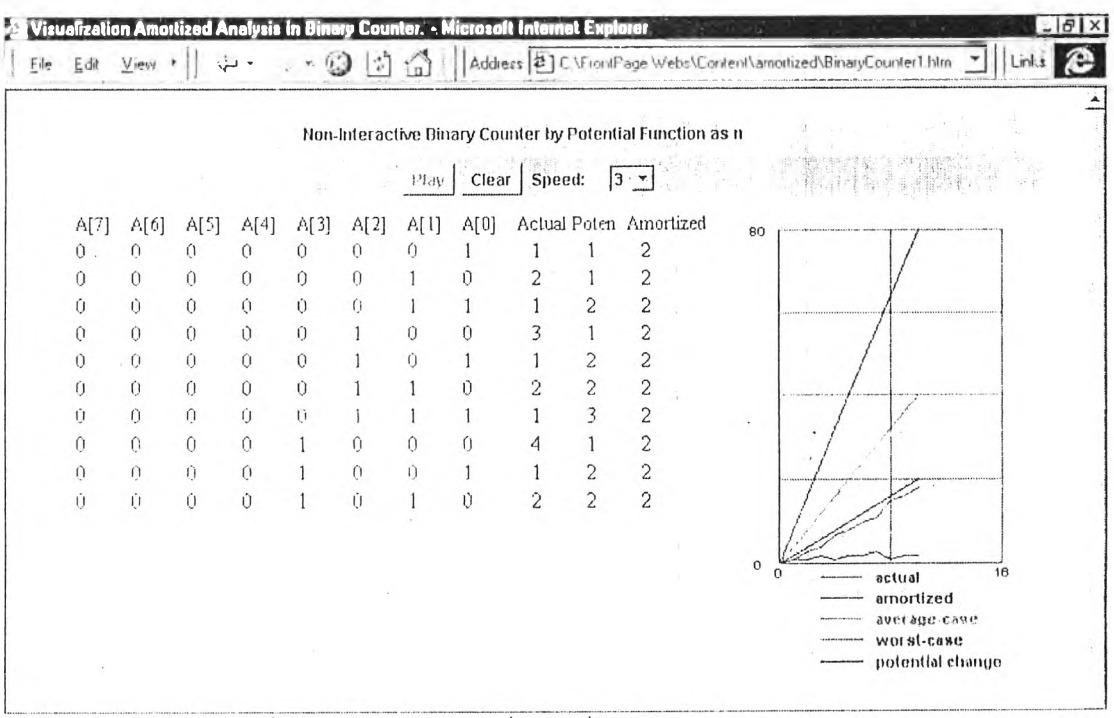
- รูปแบบภาพเคลื่อนไหวที่สามารถควบคุมและโต้ตอบได้ (Interactive animation) นำเสนอการจินตทัศน์ทั้งในส่วนอัลกอริทึม และในส่วนของการวิเคราะห์ โดยผู้ใช้จะสามารถควบคุม และโต้ตอบกับโปรแกรมได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.2
- รูปแบบภาพเคลื่อนไหวที่ไม่สามารถควบคุมและโต้ตอบได้(Non-interactive animation) นำเสนอการจินตทัศน์ทั้งในส่วนอัลกอริทึมและในส่วนของการวิเคราะห์

I19307482

แต่ในรูปแบบนี้ ผู้ใช้จะไม่สามารถควบคุม และโต้ตอบกับโปรแกรมได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.2 ตัวอย่างรูปแบบภาพเคลื่อนไหวที่สามารถควบคุมและโต้ตอบได้



รูปที่ 4.3 ตัวอย่างรูปแบบภาพเคลื่อนไหวที่ไม่สามารถควบคุมและโต้ตอบได้

ในทุกๆ โครงสร้างข้อมูลที่ใช้เป็นกรณีศึกษา ผู้ใช้จะสามารถ

- เปลี่ยนสูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ได้โดยเปลี่ยนรหัสเสชทีเอ็มแอล ในส่วน value="..." ในแท็ก (tags) param name="formula" แต่สูตรที่ใส่ต้องเป็นสูตรที่อยู่ในรูป postfix เช่น ให้ฟังก์ชันศักย์เป็น 2 เท่าของจำนวนต้นไม้(t) รหัสเสชทีเอ็มแอล เป็นดังรูปที่ 4.4

```
<applet code="xxx.class" width="740" height="410">
<param name="formula" value="2,t,*">
<!-- t:number of tree -->
</applet>
```

รูปที่ 4.4 แสดงรหัสเสชทีเอ็มแอลของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $D = 2t$

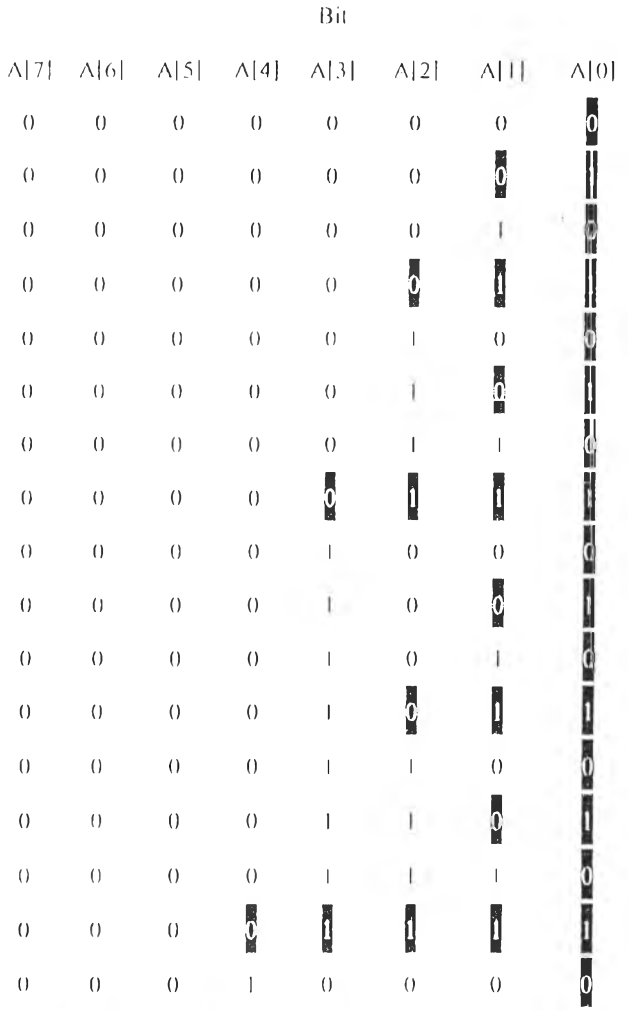
- แสดงค่าของต้นทุนจริง ความแตกต่างของฟังก์ชันศักย์ และต้นทุนถัวเฉลี่ย ของแต่ละการดำเนินงาน
- แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์
- แสดงการคิดต้นทุนจริงในแต่ละหน่วย

การจินตทัศน์การนับเลขฐานสอง

ในระบบที่พัฒนาการจินตทัศน์การนับเลขฐานสอง จะสามารถเลือกจำนวนบิตที่จะแสดงได้ คือ 7 บิต, 8 บิต, 9 บิต หรือ 10 บิต จะสามารถแสดงค่าได้ 127 ค่า, 255 ค่า, 511 ค่า หรือ 1023 ค่า ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.5 ที่แสดงการจินตทัศน์การนับเลขฐานสองใน 8 บิต

โดยบิตที่เป็นตัวเลขสีขาวระบายทึบด้วยสีดำ จะแสดงว่าเป็นบิตที่จะต้องมีการเปลี่ยนในการดำเนินงานการเพิ่มค่าครั้งต่อไป และเนื่องจากต้นทุนจริงในแต่ละการดำเนินงานจะคิดจากการเปลี่ยนของบิตในการดำเนินงานนั้นๆ ดังนั้นต้นทุนจริงของการดำเนินงานที่ i คิดจากจำนวนบิตที่ถูกระบายทึบของการดำเนินงานที่ i-1 นั่นเอง ส่วนการคิดฟังก์ชันศักย์ ถ้าคิดจากจำนวนบิต 1 จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงานมีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงเป็นกราฟ ในรูปที่ 4.6 (ก) โดยกราฟดังกล่าวได้มาจากรหัสเสชทีเอ็มแอล ในรูปที่ 4.6 (ข) ที่ซึ่งเป็นการใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยการนับจำนวนบิต 1

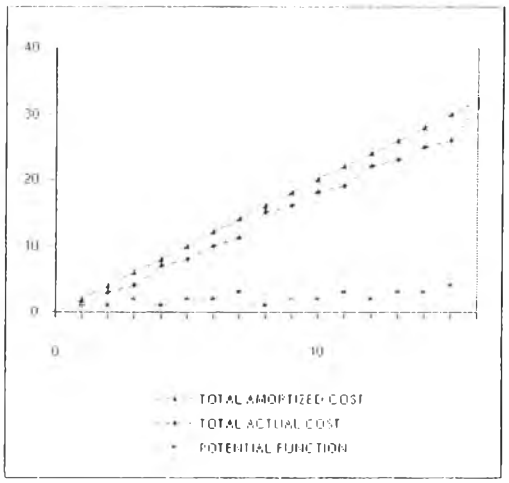
ในระบบที่พัฒนานี้สามารถเปลี่ยนการคิดฟังก์ชันศักย์ได้ เป็นคิดจากจำนวนบิต 0 แต่จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงานจะไม่เป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.7 (ก) โดยกราฟ



รูปที่ 4.5 แสดงการจินตทัศน์การเก็บเลขฐานสองของเลข 8 บิต

ดังกล่าวได้มาจากรหัสเสชทีเอ็มแอล ในรูปที่ 4.7 (ข) ที่ซึ่งเป็นการใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยการนับจำนวนบิต 0

อย่างไรก็ตาม ถ้าเปลี่ยนสูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ ให้คิดเป็นสองเท่าของจำนวนบิต 1 ก็จะไม่ถือเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงานยังคงเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงานอยู่ แต่จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ดีนัก เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าห่างกันมากกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงเป็นกราฟ ในรูปที่ 4.8 (ก) โดยกราฟดังกล่าวได้มาจากรหัสเสชทีเอ็มแอล ในรูปที่ 4.8 (ข) ที่ซึ่งเป็นการใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยคิดจากสองเท่าของจำนวนบิต 1 ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า สามารถใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ให้คิดจาก 2 เท่า หรือกี่เท่าก็ตามของจำนวนบิต 1 โดยไม่ถือว่าผิด เพียงแต่ไม่เหมาะสมเท่าใดนัก เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าห่างกันมากตามจำนวนเท่าที่มากขึ้นกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน

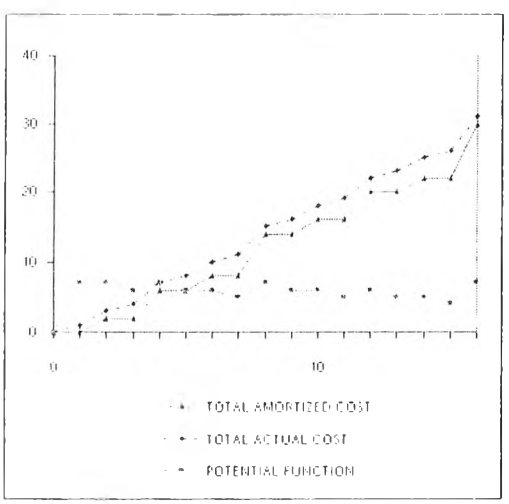


(ก)

```
<applet code="BinarySim.class" width="740" height="410">
<param name="formula" value="n">
<!-- m:number of bit 0, n:number of bit 1 -->
</applet>
```

(ข)

รูปที่ 4.6 การจำลองจุดแข็ง (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ข) รหัสโปรแกรมที่เขียนขึ้นของการกำหนดฟังก์ชันศักย์ตามสูตร $\Phi = n$

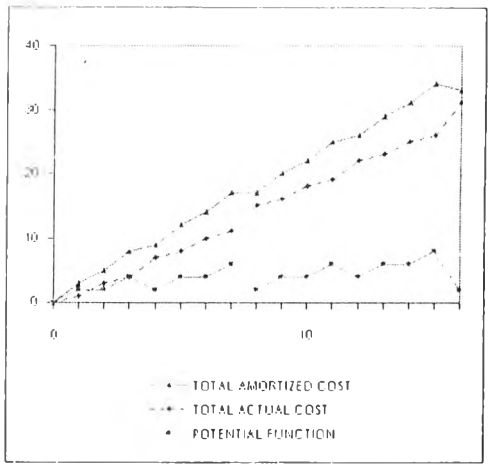


(ก)

```
<applet code="BinarySim.class" width="740" height="410">
<param name="formula" value="m">
<!-- m:number of bit 0, n:number of bit 1 -->
</applet>
```

(ข)

รูปที่ 4.7 การจำลองจุดแข็ง (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ข) รหัสโปรแกรมที่เขียนขึ้นของการกำหนดฟังก์ชันศักย์ตามสูตร $\Phi = m$



(ก)

```
<applet code="BinarySim.class" width="740" height="410">
<param name="formula" value="2,n,*">
<!-- m:number of bit 0, n:number of bit 1 -->
</applet>
```

(ข)

รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบฐานสอง (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ข) รหัสเจฟเอ็กซ์เอ็มแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = 2n$

การจินตทัศน์ตารางไดนามิก

ในระหว่างที่พัฒนาการจินตทัศน์ตารางไดนามิก จะสามารถเลือกว่าจะดำเนินการแทรก หรือลบ โดยต้นทุนจริงในแต่ละการดำเนินงานเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนการเพิ่ม ลบข้อมูล รวมถึงการย้ายข้อมูลไปไว้ในตารางใหม่ กรณีเกิดการยุบ หรือขยายตาราง ส่วนการคิดฟังก์ชันศักย์ ถ้าคิดจากสูตร

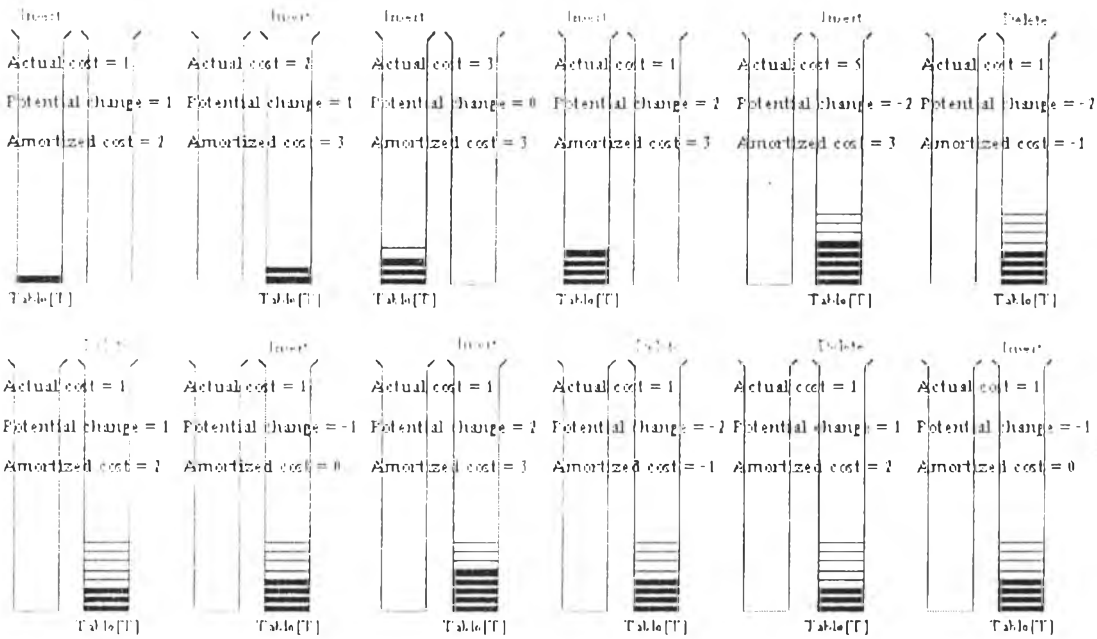
การขยายตาราง : $\Phi_i = 2num_i[T] - size_i[T]$

การยุบตาราง :

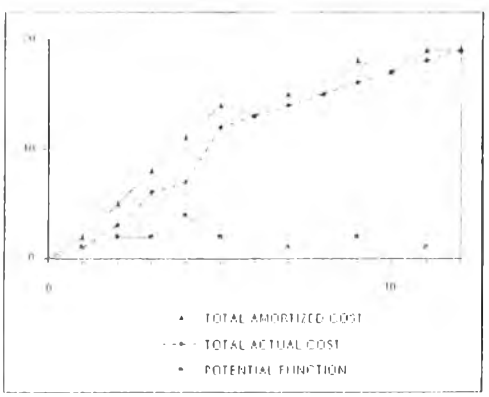
$$\Phi_i = \begin{cases} 2num_i[T] - size_i[T] & if \alpha_i \geq 1/2 \\ size_i[T]/2 - num_i[T] & if \alpha_i < 1/2 \end{cases}$$

จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงานจะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังนี้

ถ้า การขยายตารางขยายเมื่อมีข้อมูลอยู่ 100 % ในตาราง และการยุบตารางยุบเมื่อมีข้อมูลอยู่ 25 % ดังแสดงในรูปที่ 4.9 (ก) ที่แสดงการดำเนินการดำเนินงานการแทรก และการลบ เมื่อนำ



(ก)



(ข)

```
<applet CODE="dynamic.class" WIDTH="580" HEIGHT="350">
<param name="formula1" value="2,n,*,s,-">
<param name="formula2" value="s,2,/,n,-">
<!-- formula1: load factor greater than or equal half -->
<!-- formula2: load factor less than half -->
<!-- n:number of data, s:size of table -->
</applet>
```

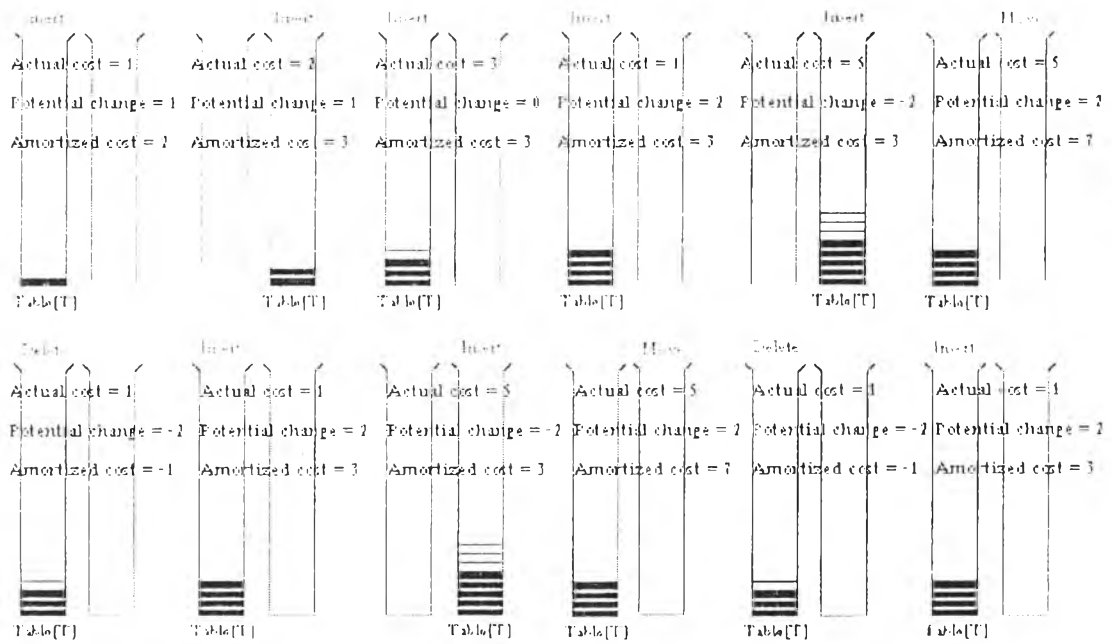
(ค)

รูปที่ 4.9 ตารางไดนามิก กรณีมีข้อมูลอยู่ในตาราง 100 % จะมีการขยายตาราง และมีข้อมูลอยู่ในตาราง 25 % จะมีการยุบตาราง (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 5 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง แทรก 2 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง และแทรก 1 ครั้ง (ข) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ย กับต้นทุนจริง และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสเอชทีเอ็มแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร

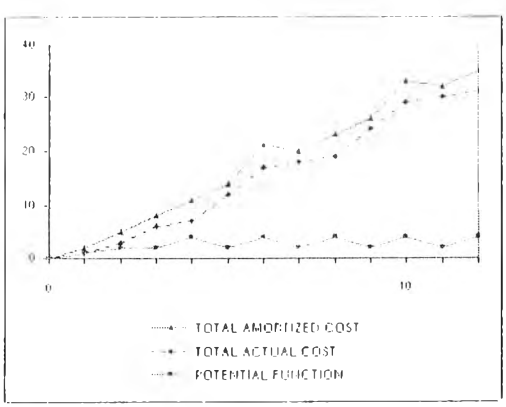
$$\Phi_i = \begin{cases} 2num_i[T] - size_i[T] & if \alpha_i \geq 1/2 \\ size_i[T]/2 - num_i[T] & if \alpha_i < 1/2 \end{cases}$$

ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.9 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.9 (ก) แสดงรหัสเอชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว

ถ้าการขยายตารางขยายเมื่อมีข้อมูลอยู่ 100 % ในตาราง การยุบตารางยุบเมื่อมีข้อมูลอยู่ 50 % ในตาราง ดังแสดงในรูปที่ 4.10 (ก) ที่แสดงการดำเนินการดำเนินงานการแทรก และการลบ เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.10 (ข) ที่จะแสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ



(ก)



(ข)

รูปที่ 4.10 ตารางไดนามิก กรณีมีข้อมูลอยู่ในตาราง 100 % จะมีการขยายตาราง และมีข้อมูลอยู่ในตาราง 50 % จะมีการยุบตาราง (ก) แสดงการดำเนินงาน การแทรก 5 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง แทรก 2 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง และแทรก 1 ครั้ง (ข) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์

จากรูป 4.9 และ 4.10 จะเห็นได้ว่าในกรณีมีข้อมูลอยู่ในตาราง 100 % จะมีการขยายตาราง และมีข้อมูลอยู่ในตาราง 50 % จะมีการยุบตาราง มีการใช้ต้นทุนจริง และต้นทุนถัวเฉลี่ยสูง เนื่องมาจากกรณีดังกล่าวมีการยุบ และขยายตารางอยู่บ่อยครั้ง จึงสรุปได้ว่าควรให้มีการขยายตารางเมื่อมีข้อมูลอยู่เต็ม และให้มีการยุบตารางเมื่อมีข้อมูลอยู่ 25 %

ถ้าคิดจากฟังก์ชันศักย์จากสูตร

การขยายตาราง : $\Phi_i = size_i[T] - num_i[T]$

การยุบตาราง :

$$\Phi_i = \begin{cases} size_i[T] - num_i[T] & if \alpha_i \geq 1/2 \\ 2num_i[T] - size_i[T] & if \alpha_i < 1/2 \end{cases}$$

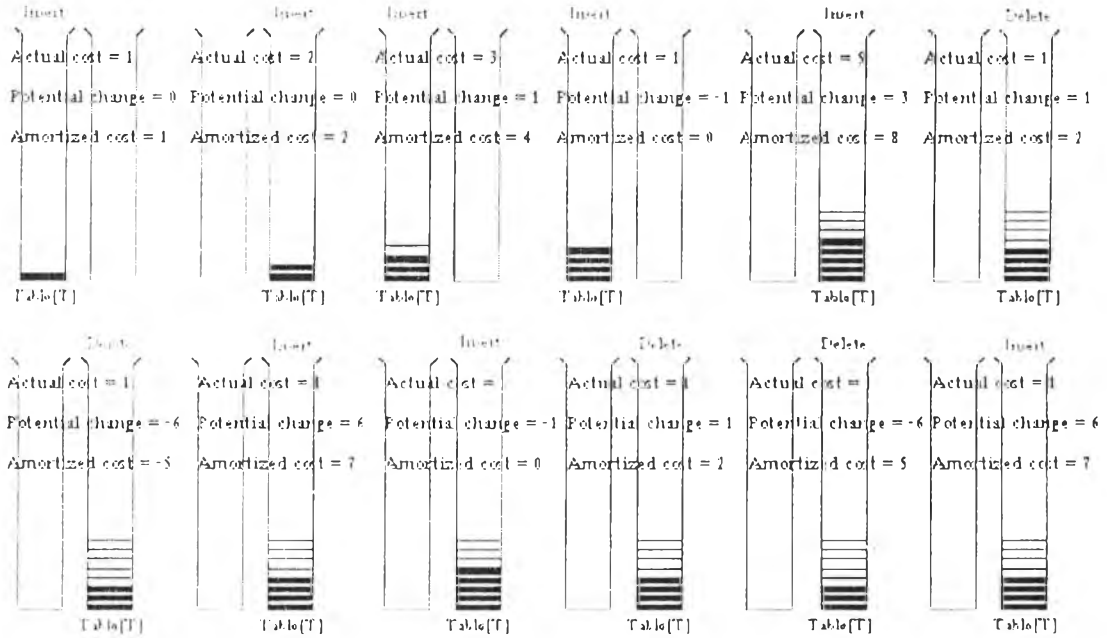
จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะไม่เป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังนี้

ถ้าการขยายตารางขยายเมื่อมีข้อมูลอยู่ 100 % ในตาราง และการยุบตารางยุบเมื่อมีข้อมูลอยู่ 25 % ดังแสดงในรูปที่ 4.11 (ก) ที่แสดงการดำเนินการดำเนินงานการแทรก และการลบ เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.11 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.11 (ก) แสดงรหัสเสชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว

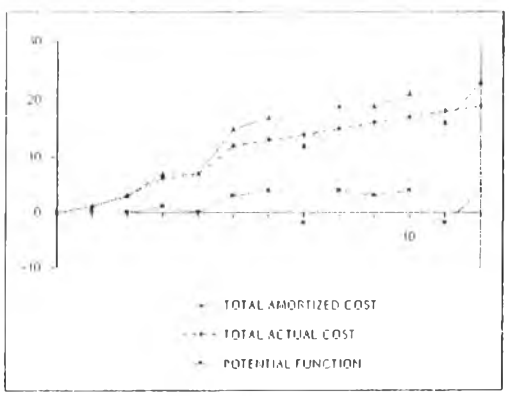
ถ้าการขยายตารางขยายเมื่อมีข้อมูลอยู่ 100 % ในตาราง การยุบตารางยุบเมื่อมีข้อมูลอยู่ 50 % ในตาราง ดังแสดงในรูปที่ 4.12 (ก) ที่แสดงการดำเนินการดำเนินงานการแทรก และการลบ เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.12 (ข) ที่จะแสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ

การจินตทัศน์ไบโนเมียล ฮีพ

ในระบบที่พัฒนาการจินตทัศน์ไบโนเมียลฮีพ สามารถเลือกว่าจะดำเนินการแทรกหรือลบโดยต้นทุนจริงในแต่ละการดำเนินงานจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน ส่วนการคิดฟังก์ชันศักย์ ถ้าคิดจากจำนวนต้นไม้ในฮีพ จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในรูปที่ 4.13 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวมและฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.13 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.13 (ค) แสดงรหัสเสชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยการนับจำนวนต้นไม้



(ก)



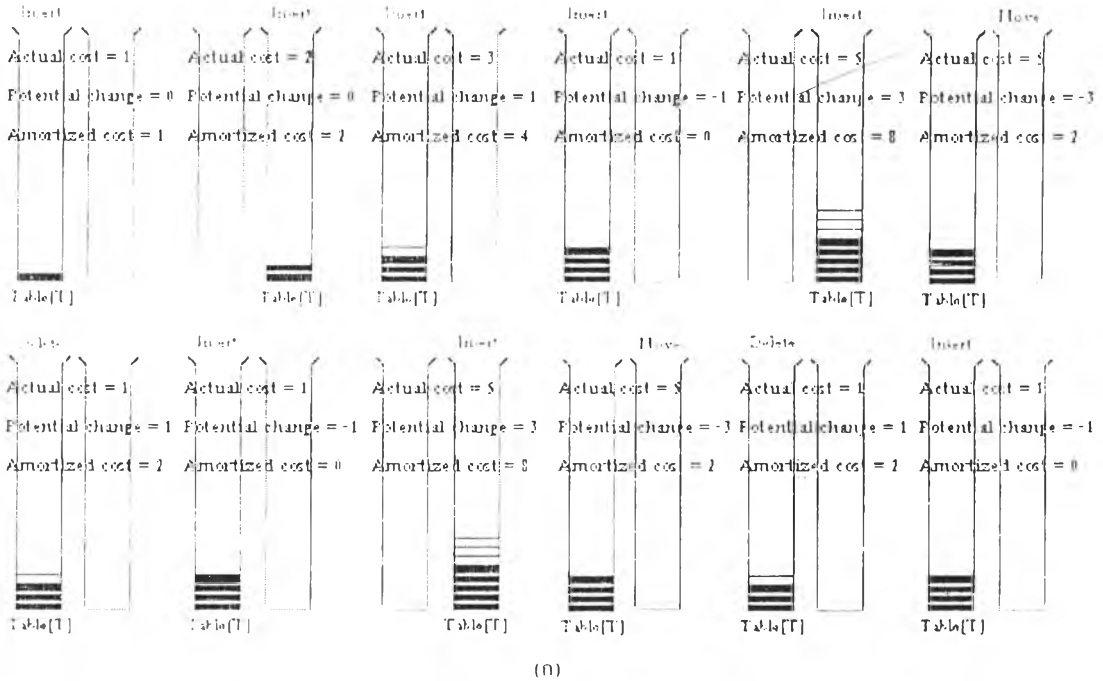
(ข)

```
<applet CODE="dynamic.class" WIDTH="580" HEIGHT="350">
<param name="formula1" value="s,n,-">
<param name="formula2" value="2,n,*,s,-">
<!-- formula1: load factor greater than or equal half -->
<!-- formula2: load factor less than half -->
<!-- n:number of data, s:size of table -->
</applet>
```

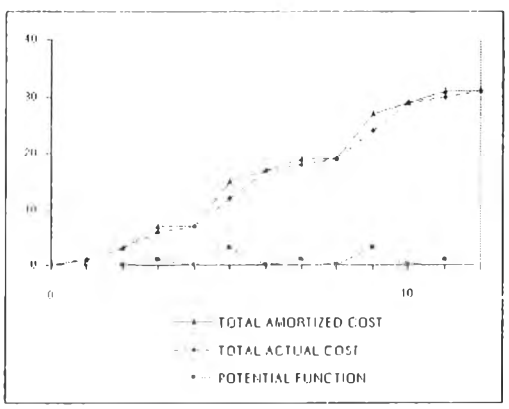
(ค)

รูปที่ 4.11 ตารางไดนามิก กรณีมีข้อมูลอยู่ในตาราง 100 % จะมีการขยายตาราง และมีข้อมูลอยู่ในตาราง 25 % จะมีการยุบตาราง (ก) แสดงการดำเนินงาน การแทรก 5 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง แทรก 2 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง และแทรก 1 ครั้ง (ข) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสแสดงที่เอ็มแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์

$$\Phi_i = \begin{cases} size_i[T] - num_i[T] & if \alpha_i \geq 1/2 \\ 2num_i[T] - size_i[T] & if \alpha_i < 1/2 \end{cases}$$



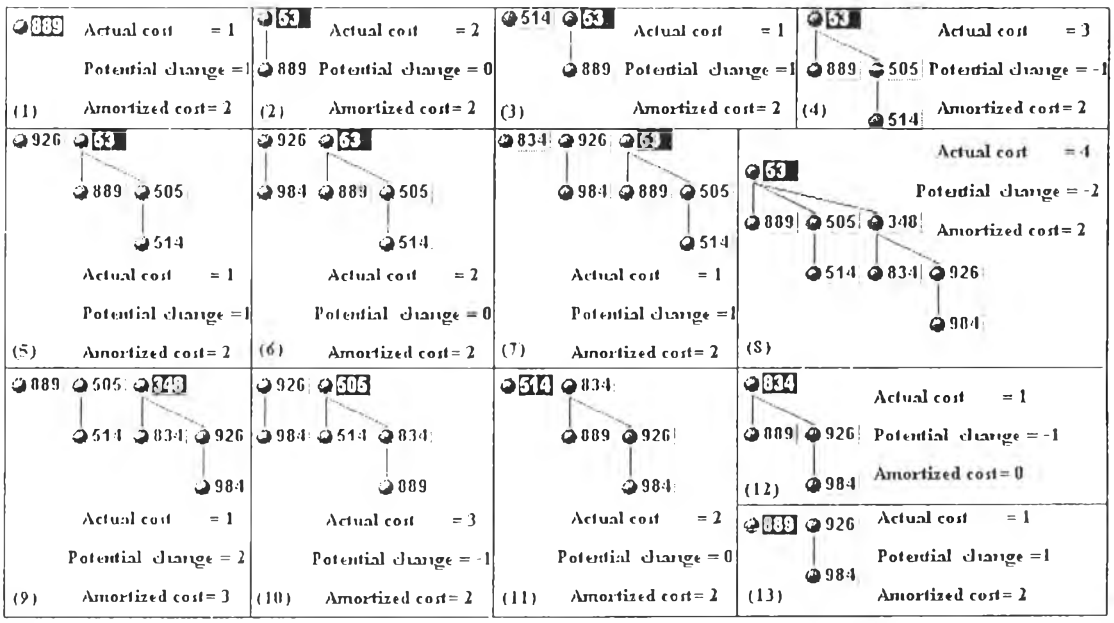
(ก)



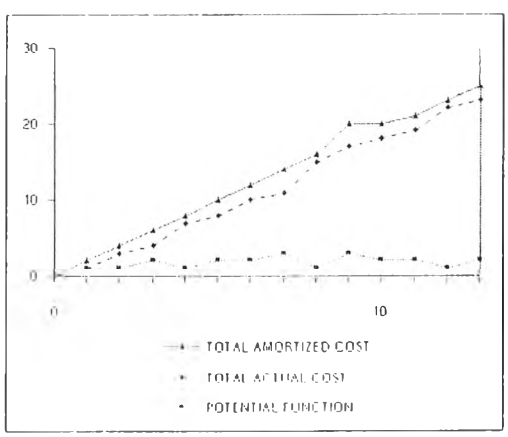
(ข)

รูปที่ 4.12 ตารางไพเพาเมิก กรณีมีข้อมูลอยู่ในตาราง 100 % จะมีการขยายตาราง และมีข้อมูลอยู่ในตาราง 50 % จะมีการยุบตาราง (ก) แสดงการดำเนินงาน การแทรก 5 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง แทรก 2 ครั้ง ลบ 2 ครั้ง และแทรก 1 ครั้ง (ข) แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนที่คลี่ยรวมต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์

จากรูปที่ 4.13 (ก) ขั้นตอนการแทรกคือในขั้นตอนที่ 1-8 สังเกตขั้นตอนที่ 4 และ 5 จะเห็นว่ามีการใช้ต้นทุนจริงที่สูงกว่าขั้นตอนอื่นๆ เพราะ เป็นขั้นตอนที่มีการรวมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน แต่อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยคือ 2 ส่วนขั้นตอนการลบคือในขั้นตอนที่ 9-13 สังเกตขั้นตอนที่ 10 จะเห็นว่ามีการใช้ต้นทุนจริงที่สูงกว่าขั้นตอนอื่นๆ เพราะ เป็นขั้นตอนที่เมื่อลบแล้วจะแตกเป็นต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากันเยอะ และจะต้องรวมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากันเหล่านั้น แต่อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยคือ 2



(ก)



(ข)

```
<applet code=BinoInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="t">
<!-- t:number of trees, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.13 ไบโนมียลฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรกเลข 889, แทรก 53, แทรก 514, แทรก 505, แทรก 962, แทรก 984, แทรก 834, แทรก 348, ลบ 53, ลบ 348, ลบ 505, ลบ 514 และลบ 834 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนตัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) โปรแกรมที่เลือกแสดงผลของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = t$

ในกรณีถ้าคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร

$$\Phi = (n/2) - 2t$$

โดยที่ Φ เป็นฟังก์ชันศักย์

n เป็นจำนวนโหนดในฮีพ

t เป็นจำนวนต้นไม้ในฮีพ

ดังแสดงในรูปที่ 4.14 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว โดยเมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.14 (ข) จะเห็นว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน แต่นั่นก็ไม่ได้หมายความว่าจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะไม่เป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังนั้นจะกล่าวได้ว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง ในรูปที่ 4.14 (ก) แสดงรหัสเอชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์เป็น $\Phi(T) = (n/2) - 2t$

จากรูป จะเห็นได้ว่า เมื่อใดก็ตามที่ฟังก์ชันศักย์ติดลบ ต้นทุนจริงรวมจะมากกว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม เมื่อใดก็ตามที่ฟังก์ชันศักย์ไม่ติดลบ ดังเช่นในการแทรก 348 ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมจะมากกว่าต้นทุนจริงรวม จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันศักย์ที่ใช้เริ่มต้นควรเป็นศูนย์และไม่ควรติดลบ

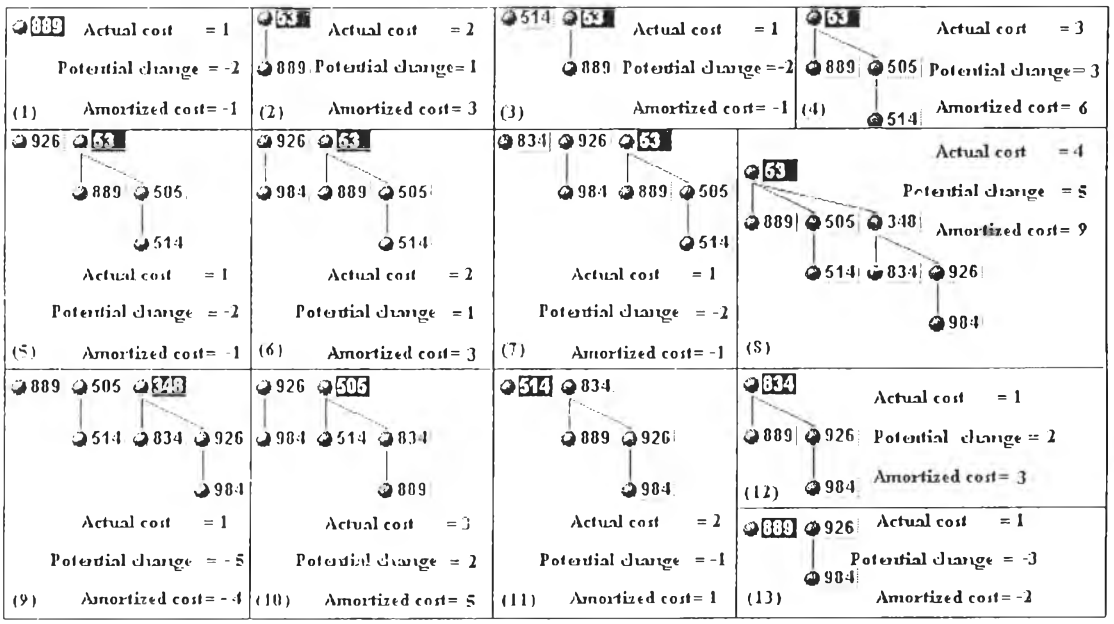
ถ้าเปลี่ยนสูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ ให้คิดจากสามเท่า ของจำนวนต้นไม้ในฮีพ ก็จะไม่ถือเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน ยังคงเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงานอยู่ แต่จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ดีนัก เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าห่างกันมากกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในรูปที่ 4.15 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.15 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.15 (ก) แสดงรหัสเอชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยคิดจากสามเท่า ของจำนวนต้นไม้ในฮีพ

ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่า สามารถใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ ให้คิดจาก 2 เท่า หรือ 3 เท่า หรือกี่เท่าก็ตามของจำนวนต้นไม้ในฮีพ โดยไม่ถือว่าผิด เพียงแต่ไม่เหมาะสมเท่าใดนัก เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน ก็จะยิ่งห่างกันมากตามจำนวนเท่าที่มากขึ้น กับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน

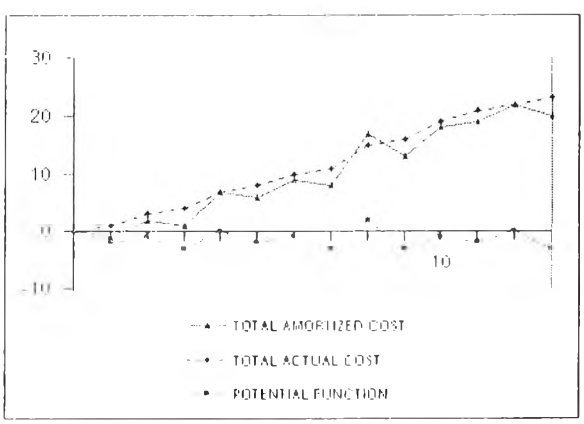
การจินตทัศน์เลซี่ ไบโนเมียล ฮีพ

ในระหว่างที่พัฒนาการจินตทัศน์เลซี่ไบโนเมียลฮีพ จะสามารถเลือกว่าจะดำเนินการแทรกหรือลบได้ ต้นทุนจริงในแต่ละการดำเนินงานจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน โดยการแทรกโหนดในเลซี่ไบโนเมียลฮีพ ไม่ต้องทำการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่า

กัน แต่จะมีการเชื่อมต้นไม้กรณีการลบโหนดที่มีค่าน้อยที่สุด ส่วนการคิดฟังก์ชันศักย์ ถ้าคิดจากจำนวนต้นไม้ในฮีพ จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำ



(ก)

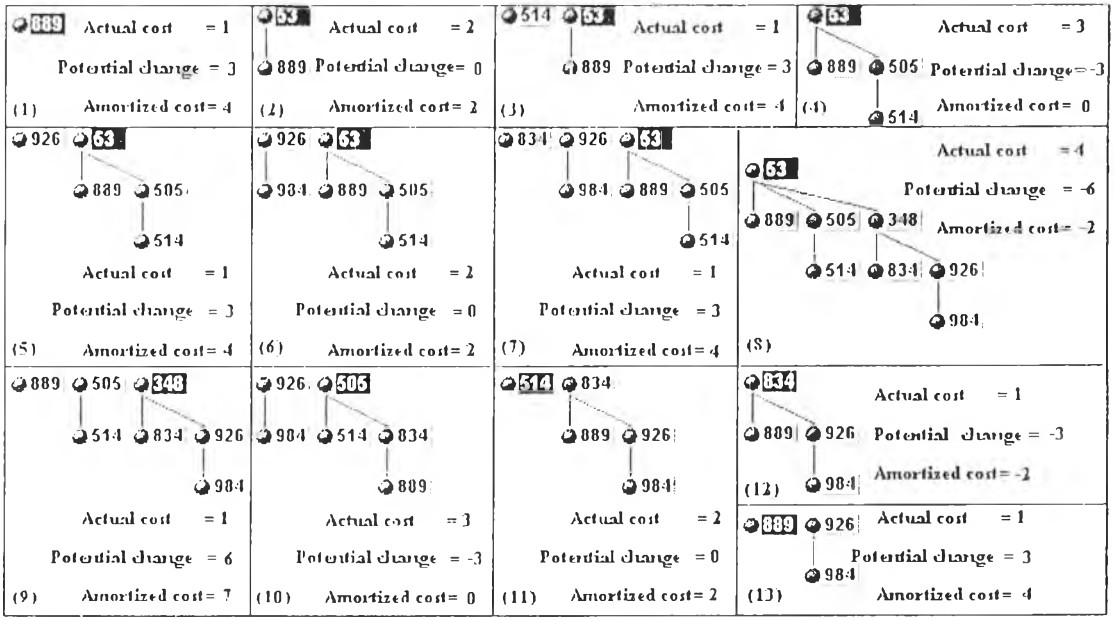


(ข)

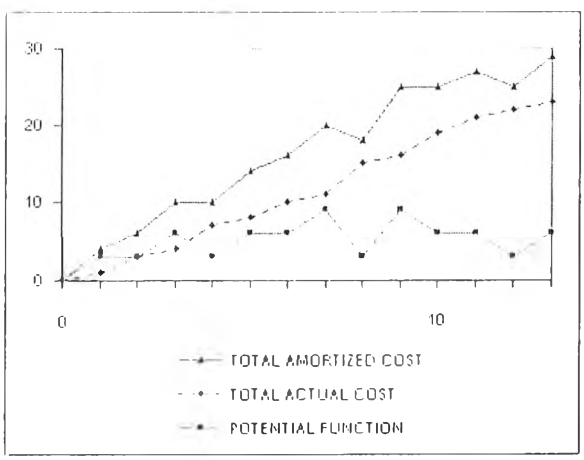
```
<applet code=BinoInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="n,2,/,2,t,*,-">
<!-- t:number of trees, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.14 ไบโนเมียลฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 889, แทรก 53, แทรก 514, แทรก 505, แทรก 962, แทรก 984, แทรก 834, แทรก 348, ลบ 53, ลบ 348, ลบ 505, ลบ 514 และลบ 834 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) โปรแกรมจำลองแบบของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi(T) = (n/2) \cdot 2t$



(ก)



(ข)

```
<applet code=BinoInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="3,t,*">
<!-- t:number of trees, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.15 ไบโนเมียลฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 889, แทรก 53, แทรก 514, แทรก 505, แทรก 962, แทรก 984, แทรก 834, แทรก 348, ลบ 53, ลบ 348, ลบ 505, ลบ 514 และลบ 834 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสแสดงนิยามของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $D(T) = 3t$

เนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในรูปที่ 4.16 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวมและฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.16 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.16 (ค) แสดงรหัสเสมือนทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยการนับจำนวนต้นไม้

จากรูปที่ 4.16 (ก) ขั้นตอนการแทรกคือในขั้นตอนที่ 1-8 ซึ่งในขั้นตอนการแทรกนี้ ต้นทุนจริงเป็น 1 เพราะเพียงแทรกโหนดเข้าไปในฮีพ ไม่ต้องทำการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน แต่อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยคือ 2 ส่วนขั้นตอนการลบคือในขั้นตอนที่ 9-12 ซึ่งในขั้นตอนการลบนี้ มีการใช้ต้นทุนจริงที่สูง เพราะจะต้องรวมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน แต่อย่างไรก็ตาม จะเห็นได้ว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยคือ 2

อย่างไรก็ตาม ถ้าเปลี่ยนสูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ ให้คิดจากจำนวนโหนดในฮีพบ้าง จะถือว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน ยังคงเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงานอยู่ แต่จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่เหมาะสมนัก เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าห่างกันมากกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน เมื่อเทียบกับสูตรการคิดฟังก์ชันศักย์จากจำนวนต้นไม้ ดังแสดงในรูปที่ 4.17 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.17 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.17 (ค) แสดงรหัสเสมือนทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยคิดจากจำนวนโหนดในฮีพ

ในกรณีถ้าคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร

$$\Phi(T) = t - n$$

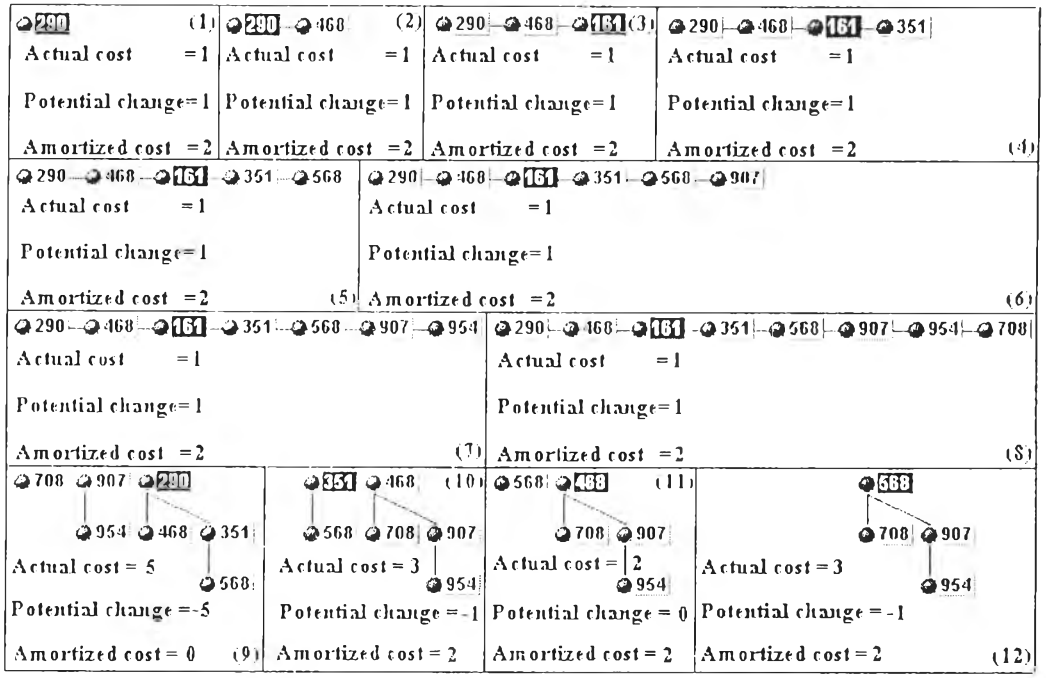
โดยที่ $\Phi(T)$ เป็นฟังก์ชันศักย์

n เป็นจำนวนโหนดในฮีพ

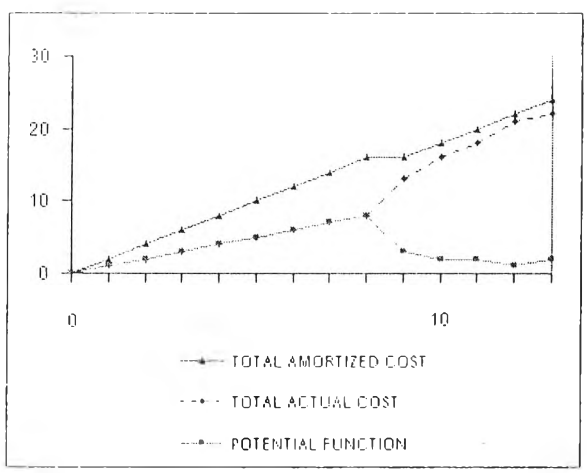
t เป็นจำนวนต้นไม้ในฮีพ

ดังแสดงในรูปที่ 4.18 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว โดยเมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.18 (ข) จะเห็นว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะไม่เป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังนั้น จะกล่าวได้ว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง ในรูปที่ 4.18 (ค) แสดงรหัสเสมือนทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์เป็น $\Phi(T) = t - n$

จากรูปที่ 4.18 เมื่อใดก็ตามที่ฟังก์ชันศักย์ติดลบต้นทุนจริงจะมากกว่าต้นทุนถัวเฉลี่ย ดังเช่นในขั้นตอนของการลบ จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันศักย์ที่ใช้เริ่มต้นควรเป็นศูนย์และไม่ควรติดลบ



(ก)

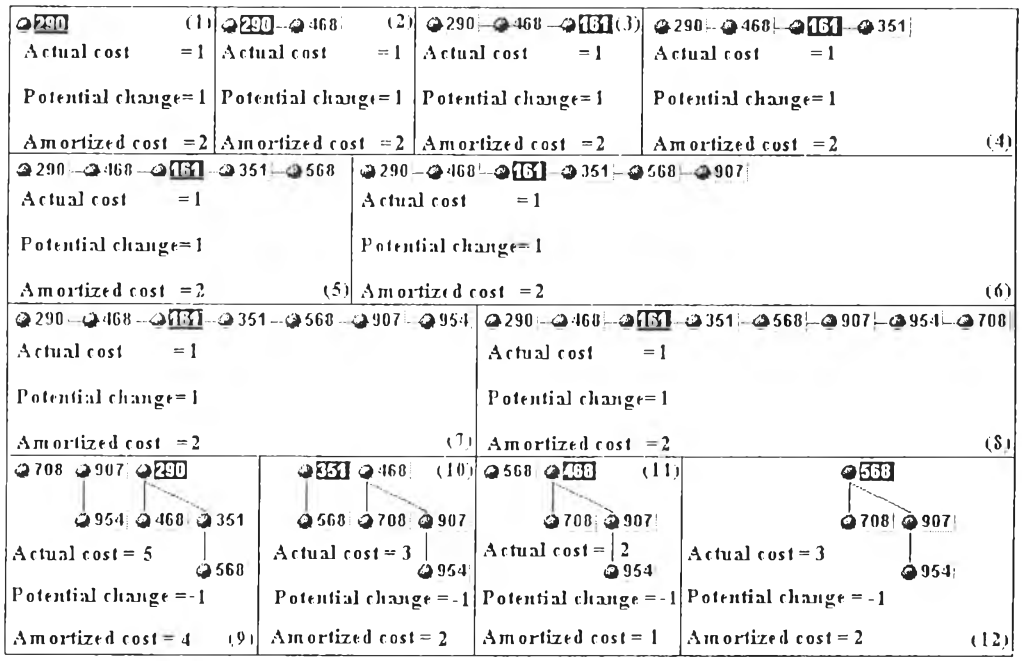


(ข)

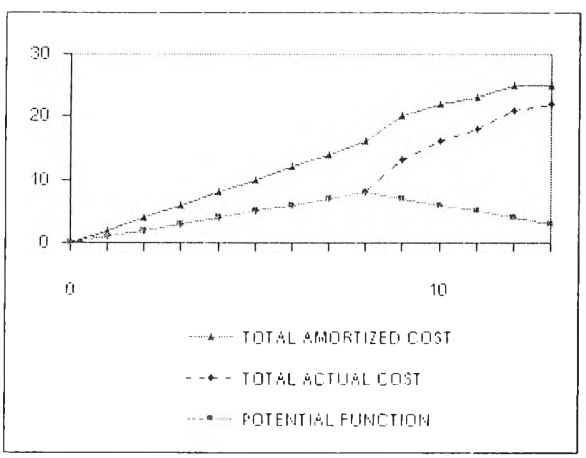
```
<applet code=LazyInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="t">
<!-- t:number of trees, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.16 เอฟ ไบโนมียลฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 290, แทรก 468, แทรก 161, แทรก 351, แทรก 568, แทรก 907, แทรก 954, แทรก 708, ลบ 161, ลบ 290, ลบ 351 และลบ 468 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสของซีดีอีมแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = t$



(ก)

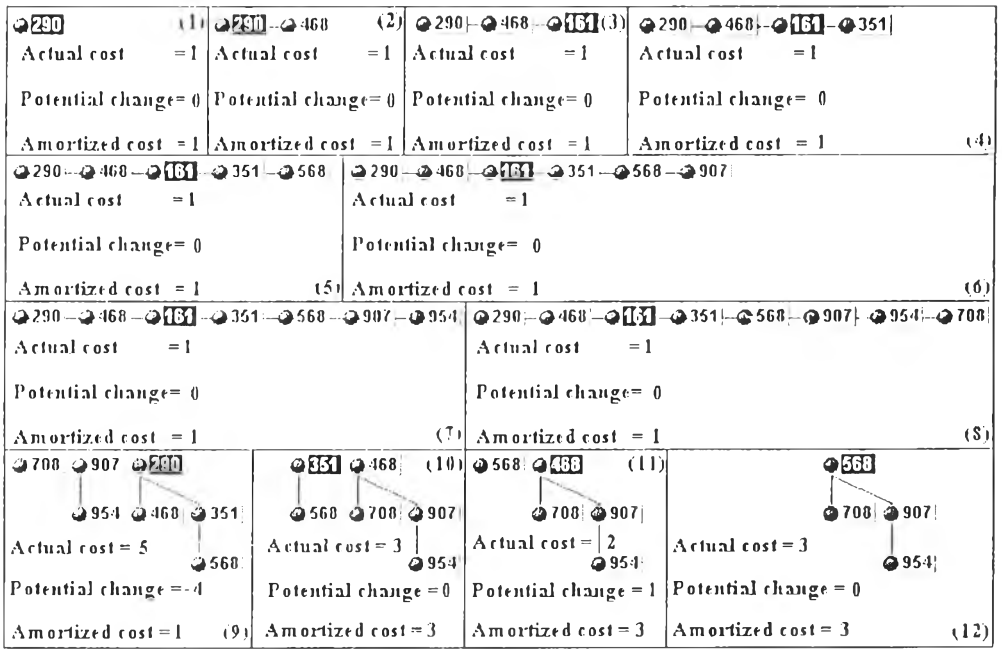


(ข)

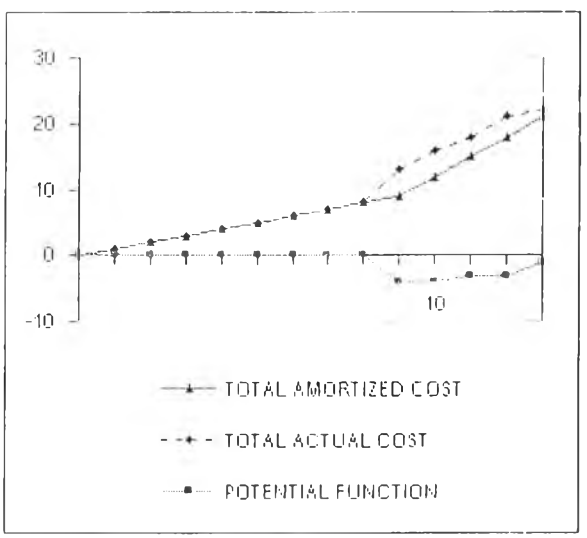
```
<applet code=LazyInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="n">
<!-- t:number of trees, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.17 เอาต์พุตจากโปรแกรมเพิ่มลบ (ก) แสดงการดำเนินงานการเพิ่มแทรก 290, แทรก 468, แทรก 161, แทรก 351, แทรก 568, แทรก 907, แทรก 954, แทรก 708, ลบ 161, ลบ 290, ลบ 351 และลบ 468 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) ซอร์สโค้ดของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = n$



(ก)



(ข)

```
<applet code=LazyInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="t,n,-">
<!-- t:number of trees, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.18 เครื่อง ไบโนเมียลฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 290, แทรก 468, แทรก 161, แทรก 351, แทรก 568, แทรก 907, แทรก 954, แทรก 708, ลบ 161, ลบ 290, ลบ 351 และลบ 468 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสจาวาแอ็พเพล็ตของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = t - n$

การจินตทัศน์สคิว ฮีพ

ในระหว่างที่พัฒนาการจินตทัศน์สคิว ฮีพ จะสามารถเลือกว่าจะดำเนินการแทรก หรือลบได้ ต้นทุนจริงในแต่ละการดำเนินงานจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนการสลับของต้นไม้ย่อย ส่วนการคิดฟังก์ชันศักย์ ถ้าคิดจากจำนวนโหนดเฮฟวี่ในฮีพ จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในรูปที่ 4.19 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ เมื่อบรรจุค่าของโหนดในฮีพจากมากไปน้อย และเมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวมและฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.19 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.19 (ค) แสดงรหัสเอชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยการนับจำนวนโหนดเฮฟวี่

อย่างไรก็ตาม ผลของการบรรจุค่าของโหนดในสคิว ฮีพ มีผลต่อการได้ต้นทุนจริงรวมและต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมที่แตกต่างกัน พิจารณาจากรูปที่ 4.20 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ เมื่อบรรจุค่าของโหนดในฮีพจากน้อยไปมาก และเมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวมและฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.20 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ กล่าวคือถ้าบรรจุค่าของโหนดในสคิว ฮีพ จากมากไปน้อย จะได้ต้นทุนจริงรวม และต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมถูกกว่านั่นเอง หรือในอีกแง่หนึ่งคือได้ต้นไม้ที่เอียงไปทางซ้าย ซึ่งถือเป็นต้นไม้ที่ดีมากในสคิว ฮีพ

ในกรณีถ้าคิดฟังก์ชันศักย์จากจำนวนโหนดเฮฟวี่บวกสองบ้าง ก็จะยังเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่เหมาะสม เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในรูปที่ 4.21 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว โดยเมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.21 (ข) และในรูปที่ 4.21 (ค) แสดงรหัสเอชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์จากจำนวนโหนดเฮฟวี่บวกสอง

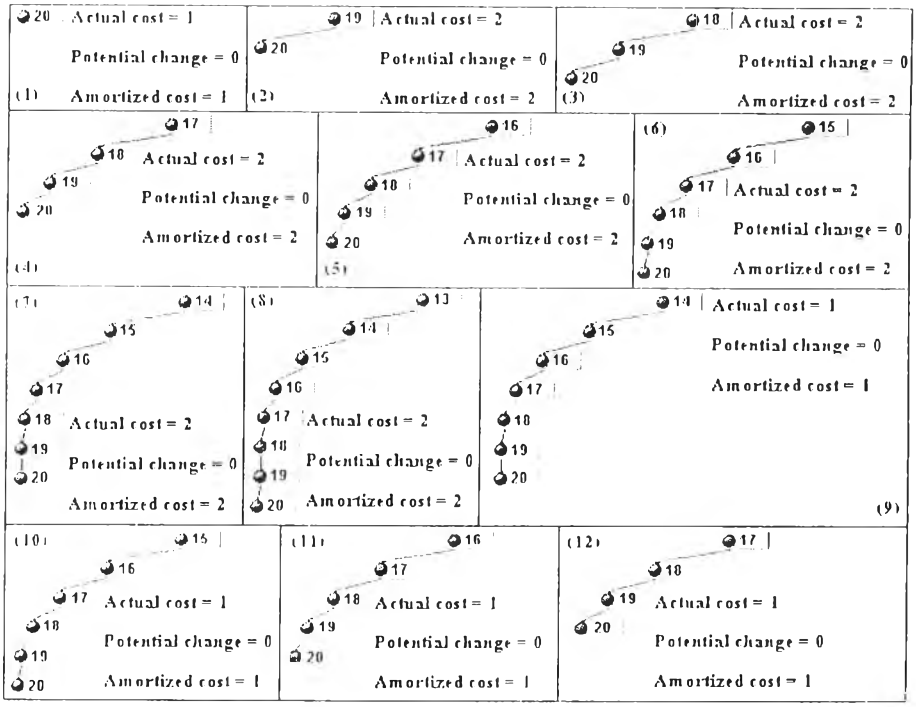
สังเกตได้ว่า ในกรณีมีการดำเนินงานการแทรก และลบแบบเดียวกันกับในรูปที่ 4.14 (ก) แต่คิดฟังก์ชันศักย์จากจำนวนโหนดเฮฟวี่ กราฟที่ได้ก็จะยังคงเป็นดังรูปที่ 4.21 (ข) จึงสรุปได้ว่าสามารถใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ Φ ได้ดังนี้ โดยถือเป็นการคิดที่ถูกต้องและเหมาะสม

$$\Phi \quad h + k$$

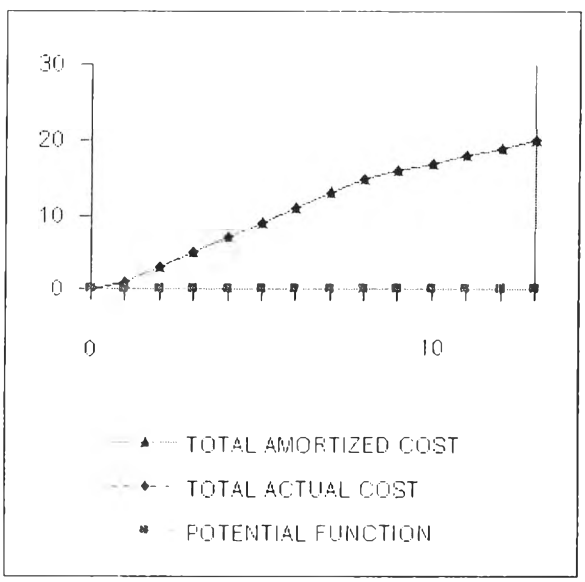
โดยที่ h เป็นจำนวนโหนดเฮฟวี่ในฮีพ และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

อย่างไรก็ตาม ถ้าคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร

$$\Phi = h - n$$



(ก)

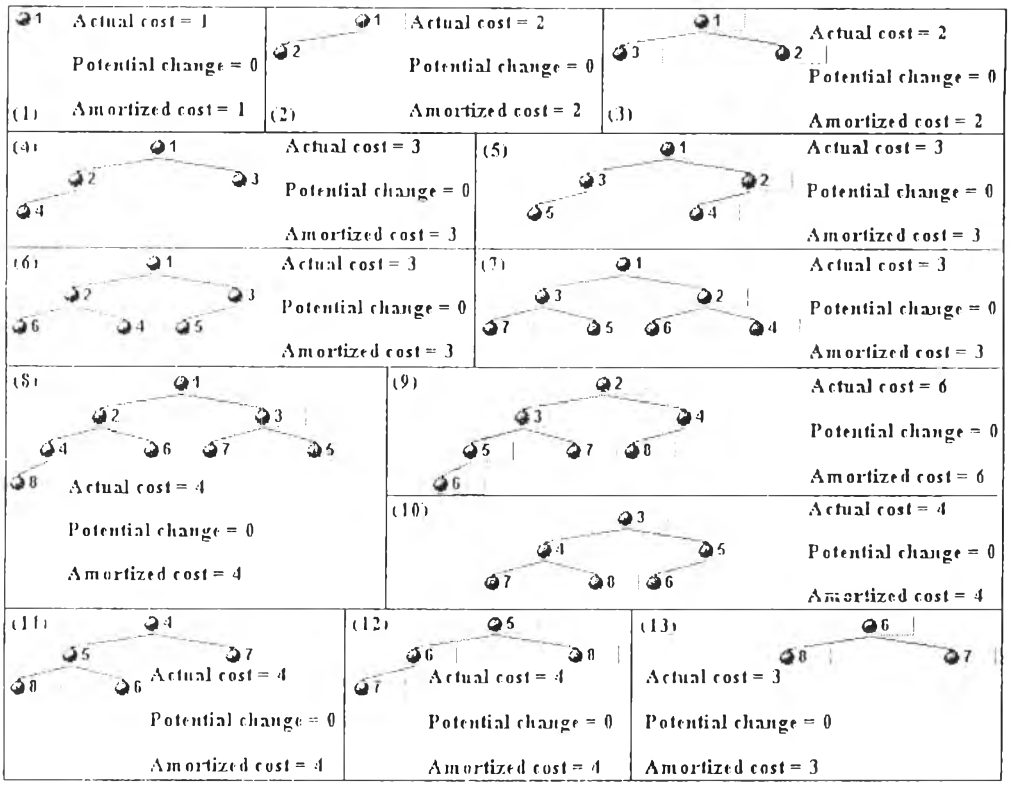


(ข)

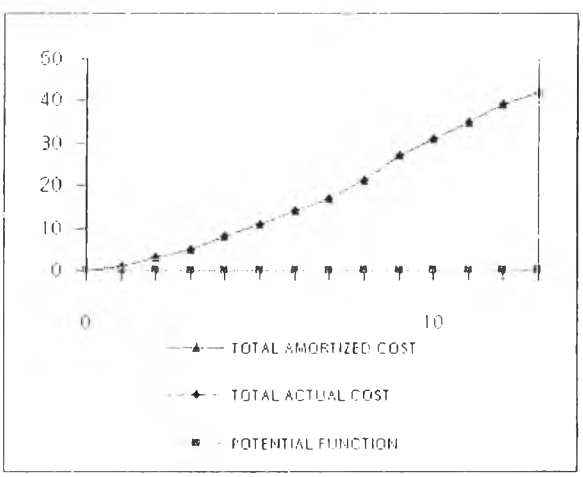
```
<applet code=SkewInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="h">
<!-- h:number of heavy nodes, n:number of nodes, r:number of right nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.19 สคิวสีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 20, แทรก 19, แทรก 18, แทรก 17, แทรก 16, แทรก 15, แทรก 14, แทรก 13, ลบ 13, ลบ 14, ลบ 15, ลบ 16 และลบ 17 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนตัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสเอชทีเอ็มแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = h$

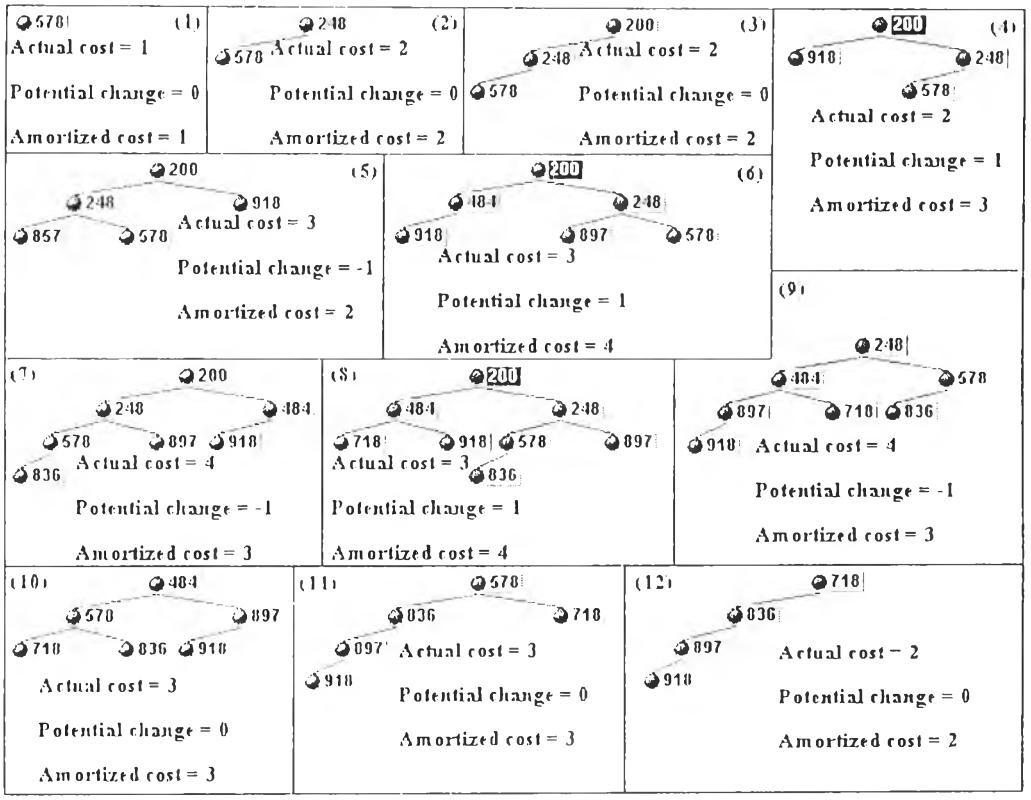


(ก)

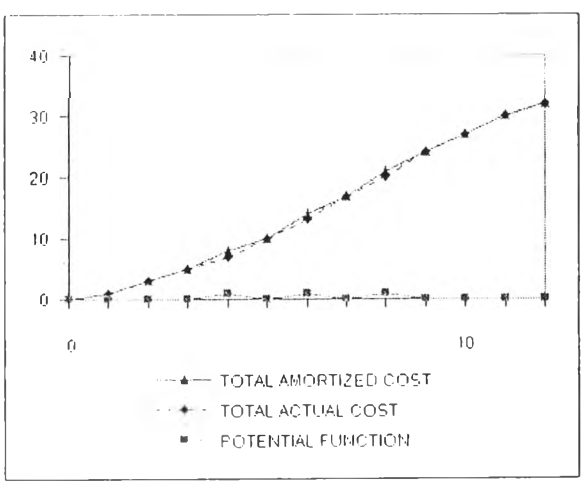


(ข)

รูปที่ 4.20 ตัวอย่าง (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 1, แทรก 2, แทรก 3, แทรก 4, แทรก 5, แทรก 6, แทรก 7, แทรก 8, ลบ 1, ลบ 2, ลบ 3, ลบ 4 และลบ 5 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์



(ก)



(ข)

```
<applet code=SkewInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="h,2,+">
<!-- h:number of heavy nodes, n:number of nodes, r:number of right nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.21 สคิวสิพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 578, แทรก 248, แทรก 200, แทรก 918, แทรก 897, แทรก 484, แทรก 836, แทรก 718, ลบ 200, ลบ 248, ลบ 484 และลบ 578 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) ราบัสเลชันที่เขียนแอด ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = h + 2$

โดยที่ ϕ เป็นฟังก์ชันศักย์

n เป็นจำนวนโหนดในฮีพ

h เป็นจำนวนโหนดเลฟวี่ในฮีพ

จะถือว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน ไม่เป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงานอยู่ ดังแสดงในรูปที่ 4.22 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.22 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.22 (ก) แสดงรหัสเสมือนทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ โดยคิดจากจำนวนโหนดในฮีพ

จากรูปที่ 4.22 จะเห็นได้ชัดว่า เมื่อใดก็ตามที่ฟังก์ชันศักย์ติดลบ ต้นทุนจริงจะมากกว่าต้นทุนถัวเฉลี่ย จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันศักย์ที่ใช้เริ่มต้นควรเป็นศูนย์และไม่ควรติดลบ

การจินตทัศน์ฟิโบนักซี่ฮีพ

ในระบบที่พัฒนาการจินตทัศน์ฟิโบนักซี่ฮีพ จะสามารถเลือกว่าจะดำเนินการแทรก ลบ หรือลดค่าคีย์ได้ ต้นทุนจริงในแต่ละการดำเนินงานจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน โดยการแทรกโหนดในฟิโบนักซี่ฮีพ ไม่ต้องทำการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน แต่จะมีการเชื่อมต้นไม้กรณีมีการลบโหนดที่มีค่าน้อยที่สุด ส่วนการคิดฟังก์ชันศักย์ ถ้าคิดจากสูตรดังนี้

$$\phi = t + 2m$$

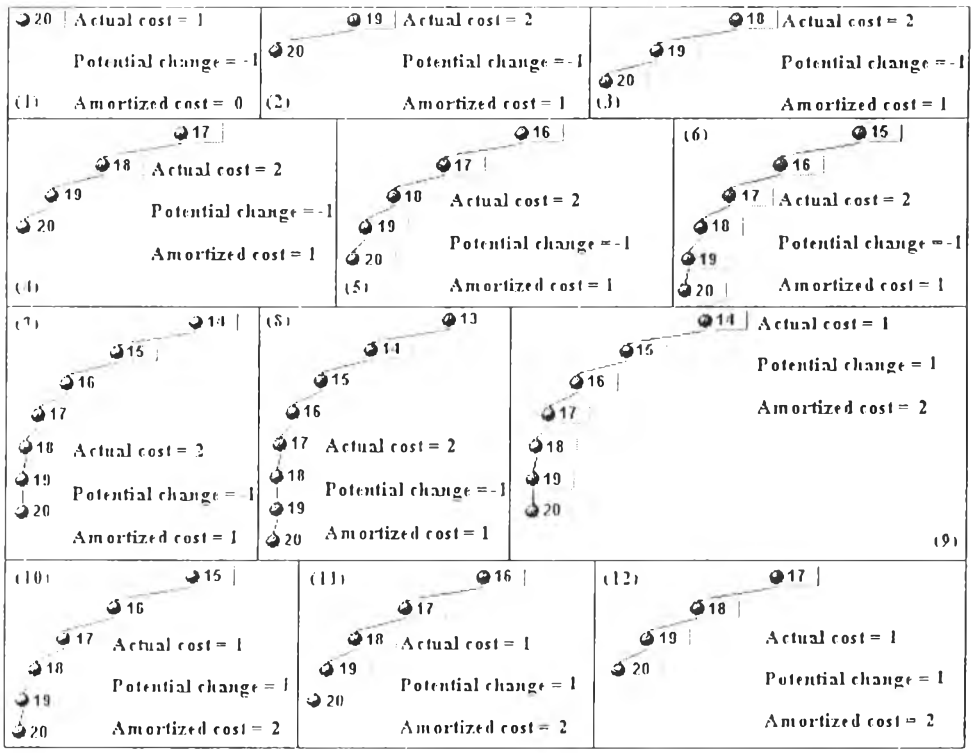
โดยที่ ϕ เป็นฟังก์ชันศักย์

m เป็นจำนวนโหนดที่ถูกมาร์ค

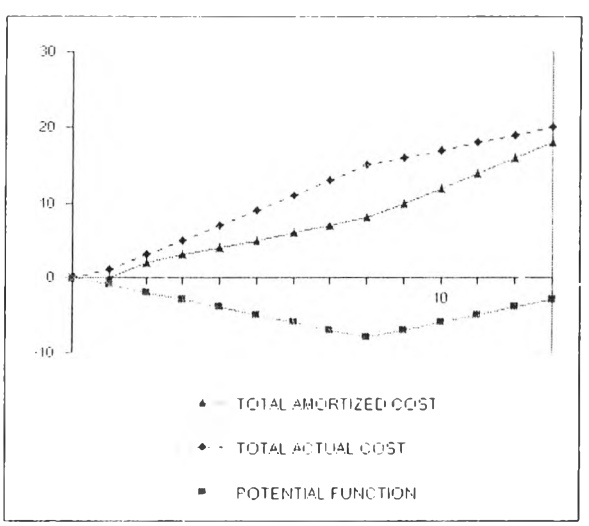
t เป็นจำนวนต้นไม้ในฮีพ

จะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ถูกต้อง เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน และจะเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี เพราะ ต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน ดังแสดงในรูปที่ 4.23 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ โดยเมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวมและฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.23 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.23 (ก) แสดงรหัสเสมือนทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ ดังกล่าว

จากรูปที่ 4.23 (ก)



(ก)

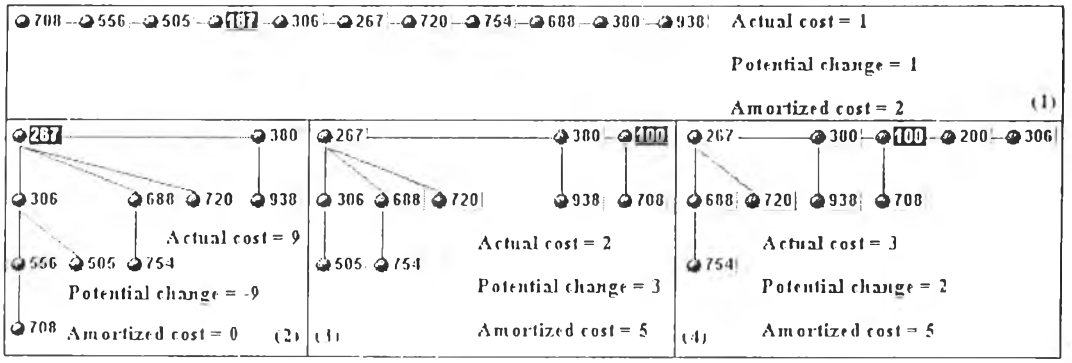


(ข)

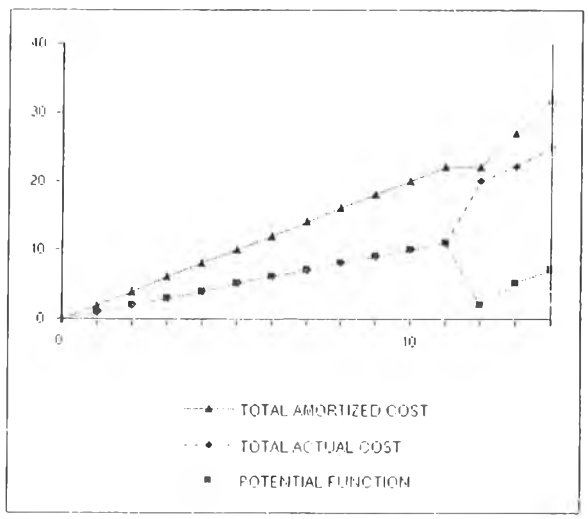
```
<applet code=SkewInDel.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="h,n,-">
<!-- h:number of heavy nodes, n:number of nodes, r:number of right nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.22 สถิติผล (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรก 20, แทรก 19, แทรก 18, แทรก 17, แทรก 16, แทรก 15, แทรก 14, แทรก 13, ลบ 13, ลบ 14, ลบ 15, ลบ 16 และลบ 17 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) ราโลสเซหนีเอ็มเบอด ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi(T) = h \quad n$



(ก)



(ข)

```
<applet code=Fibo.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="t,2,m,*,+">
<!-- t:number of trees, m:number of mark nodes, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.23 ฟิโบนัชชี่ฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรกโหนด 708 โหนด 556 โหนด 505 โหนด 187 โหนด 306 โหนด 267 โหนด 720 โหนด 754 โหนด 688 โหนด 380 โหนด 938 การลบโหนดที่มีค่าน้อยที่สุด การลดค่าคีย์ 556 เป็น 100 และการลดค่าคีย์ 505 เป็น 200 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) รหัสเชพทีเอ็มแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $t + 2m$

- ขั้นตอนที่ 1 คือขั้นตอนการแทรกโหนดดังต่อไปนี้ตามลำดับ คือ 708, 556, 505, 187, 306, 267, 720, 754, 688, 380 และ 938 ซึ่งในแต่ละขั้นตอนการแทรกนี้ ต้นทุนจริงเป็น 1 เพราะเพียงแทรกโหนดเข้าไปในฮีพ ไม่ต้องทำการเชื่อมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน

ฟังก์ชันศักย์เป็น 0 เพราะจะไม่มีโหนดที่ถูกมาร์ค เนื่องจากจะไม่มีโหนดใดที่ลูกหายไป

- ขั้นตอนที่ 2 เป็นการลบโหนดที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งคือโหนด 187 ในขั้นตอนการลบนี้ มีการใช้ต้นทุนจริงที่สูง เพราะจะต้องรวมต้นไม้ที่มีความสูงเท่ากัน ฟังก์ชันศักย์คงเป็น 0 เพราะจะไม่มีโหนดที่ถูกมาร์ค เนื่องจากจะไม่มีโหนดใดที่ลูกหายไป
- ขั้นตอนที่ 3 เป็นการลดค่าคีย์ 556 เป็น 100 ต้นทุนจริงเป็น 2 เพราะมีการตัดโหนดที่ลดค่า ให้ไปเป็นรากของต้นไม้ใหม่ ฟังก์ชันศักย์เป็น 1 เพราะพ่อของโหนดที่ถูกลดค่า (โหนด 306) จะกลายเป็นโหนดที่ถูกมาร์ค เนื่องจากโหนดที่ถูกลดค่าหายไป กลายไปเป็นต้นไม้ใหม่
- ขั้นตอนที่ 4 เป็นการลดค่าคีย์ 505 เป็น 200 ต้นทุนจริงเป็น 3 เพราะมีการตัดโหนดที่ลดค่า และเนื่องจากพ่อของโหนดที่ถูกลดค่า (โหนด 306) เป็นโหนดที่ถูกมาร์คอยู่ก่อนแล้ว ดังนั้นจะต้องโดนตัด ให้ไปเป็นรากของต้นไม้ใหม่ด้วยและจะต้องไม่ถูกมาร์ค ฟังก์ชันศักย์เป็น 1 เพราะโหนด 267 จะกลายเป็นโหนดที่ถูกมาร์ค เนื่องจากลูกหายไป

อย่างไรก็ตาม ถ้าคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร

$$\Phi(T) = t - 2m$$

โดยที่ $\Phi(T)$ เป็นฟังก์ชันศักย์

m เป็นจำนวนโหนดที่ถูกมาร์ค

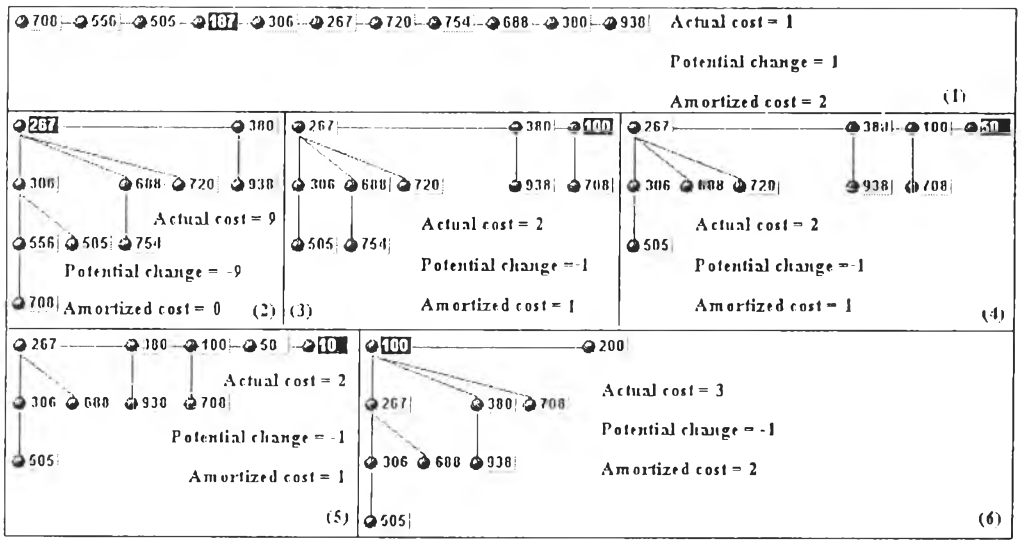
t เป็นจำนวนต้นไม้ในธีพ

จะถือว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่ถูกต้อง เพราะต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน ไม่เป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงานอยู่ ดังแสดงในรูปที่ 4.24 (ก) ที่แสดงการดำเนินงานต่างๆ ในการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว เมื่อนำต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์มาพล็อตเป็นกราฟ ได้ดังรูปที่ 4.24 (ข) แสดงกราฟที่พล็อตได้จากการดำเนินงานต่างๆ และในรูปที่ 4.24 (ค) แสดงรหัสเอชทีเอ็มแอล ที่ใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์ดังกล่าว

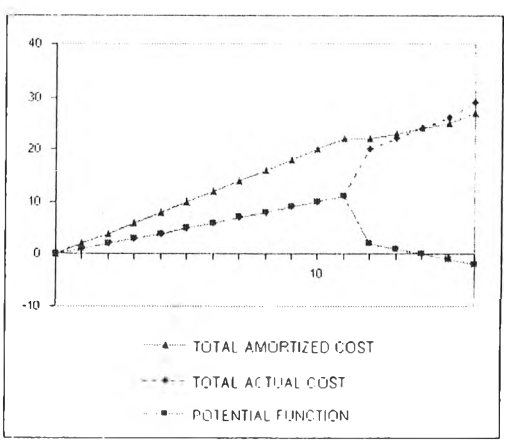
สรุปผล

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า สามารถใช้สูตรการคิดฟังก์ชันศักย์อื่นใดก็ได้ ที่เมื่อนำมาพล็อตกราฟความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ แล้วต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน จะเป็นขอบเขตบนของต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงาน โดยไม่ถือว่าผิดเพียงแต่จะเหมาะสมหรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับว่าต้นทุนถัวเฉลี่ยรวมของลำดับการดำเนินงาน มีค่าใกล้เคียงกับต้นทุนจริงรวมของลำดับการดำเนินงานแค่ไหน ซึ่งถ้ายิ่งใกล้เคียงกัน

มาก จะถือว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ดี ในทางตรงกันข้ามถ้ายิ่งห่างกันมาก จะถือว่าเป็นการคิดฟังก์ชันศักย์ที่ไม่เหมาะสม ที่ซึ่งฟังก์ชันชันศักย์ที่ใช้เริ่มต้นควรเป็นศูนย์ และไม่ควรติดลบ



(ก)



(ข)

```
<applet code=Fibo.class width=740 height=450>
<param name="formula" value="t,2,m,*,-">
<!-- t:number of trees, m:number of mark nodes, n:number of nodes -->
</applet>
```

(ค)

รูปที่ 4.24 ฟิโบนักชี่ฮีพ (ก) แสดงการดำเนินงานการแทรกโหนด 708 โหนด 556 โหนด 505 โหนด 187 โหนด 306 โหนด 267 โหนด 720 โหนด 754 โหนด 688 โหนด 380 โหนด 938 การลบโหนดที่มีค่าน้อยที่สุด การลดค่าคีย์ 556 เป็น 100 และการลดค่าคีย์ 505 เป็น 200 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุนถัวเฉลี่ยรวม ต้นทุนจริงรวม และฟังก์ชันศักย์ (ค) ราโลเฮชทีเอ็มแอล ของการคิดฟังก์ชันศักย์จากสูตร $\Phi = t - 2m$