บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

งานวิจัยต่าง ๆ ส่วนมากอาศัยระเบียบวิธีการทางสถิติ โดยเฉพาะกระบวนการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาข้อสรุปที่เชื่อว่ามีความถูกต้องในระดับที่เป็นที่ยอมรับเชิงทฤษฎี ซึ่งเรียกว่าการอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference) ผู้ใช้สถิติในงานวิจัยหรือการศึกษาใด ๆ มักจะมีคำถามอยู่เสมอว่า คำตอบหรือผลสรุปที่ได้ในขั้นสุดท้ายนั้นมีความเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใด ซึ่งคำตอบในเรื่องนี้จำเป็นต้องขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายอย่างได้แก่ การวางแผนการทดลอง เทคนิคการสุ่มตัวอย่าง เทคนิคการวิเคราะห์ข้อมูล โดยเฉพาะอย่างยิ่งการตัดสินใจของผู้วิจัยในการเลือกใช้ตัวสถิติเพื่อให้ได้ผลสรุปที่สมเหตุสมผลตามสมมติฐานของงานวิจัยนั้น

ดังนั้นการใช้ตัวสถิติเพื่อนำมาทำการทดสอบจึงต้องคำนึงถึงความเหมาะสมกับลักษณะของข้อมูลที่ต้องการวิเคราะห์ ในกรณีที่ต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มเดียว เป็นการตรวจสอบว่าค่าเฉลี่ยของลักษณะที่สนใจศึกษาในประชากรนั้นๆ เป็นไปตามที่ผู้วิจัยคาดไว้หรือไม่ ผู้วิจัยมักเลือกใช้ตัวสถิติทดสอบที (Student's t test) เมื่อไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร โดยจะประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร(σ) ด้วยค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง(S) ซึ่งตัวสถิติทดสอบทีเป็นตัวสถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์ (Parametric Statistic) ภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของประชากรที่ต้องมีการแจกแจงแบบปกติ ทำให้ตัวสถิติทดสอบที $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ มีการแจกแจงที ที่ระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) เท่ากับ n-1

ซึ่งสภาพการณ์ทั่วไปในทางปฏิบัติข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้อาจไม่เป็นไปตามข้อตกลงข้างต้น เช่นประชากรมีการแจกแจงสมมาตรชนิดหางยาว หรือการแจกแจงที่มีความเบ้ด้านในด้านหนึ่ง จะส่งผลให้ตัวสถิติทดสอบทีไม่ลู่เข้าสู่การแจกแจงที นอกจากนี้ถึงแม้จะมีทฤษฎีการโน้มเข้าสู่ศูนย์กลาง (Central Limit Theorem) ซึ่งกล่าวว่า ถ้าสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 โดยที่ขนาดของของกลุ่มตัวอย่าง n ใหญ่เพียงพอแล้ว การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง ($\bar{x}$) จะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ ซึ่งจะส่งผลให้ตัวสถิติทดสอบที ลู่เข้าสู่การ

แจกแจงทีได้ ก็จะทำให้วิธีการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร กรณีไม่ทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากรมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น แต่ในความเป็นจริงถ้าขนาดตัวอย่างไม่ใหญ่มากพอ และประชากรมีการแจกแจงแบบอื่นที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ ตัวสถิติทดสอบทีอาจมีประสิทธิภาพลดน้อยลง จึงอาจต้องใช้ตัวสถิติทดสอบตัวอื่นที่เหมาะสมกว่าตัวสถิติทดสอบที

ในการศึกษาการแจกแจงแบบไม่ปกติ โดยศึกษาในช่วงความเบ้ของการแจกแจงที่น้อยกว่า 0.8 และความโด่งอยู่ในช่วง -0.6 ถึง 0.6 เพื่อหาความแกร่งของตัวสถิติทดสอบ พบว่าการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบที ในกรณีประชากรกลุ่มเดียวนั้น ค่าความเบ้ของการแจกแจงจะมีผลต่อความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 (Allen I. Fleishman อ้างถึงใน Pearson and Please, 1943)

ในปี 1978 Johnson ได้เสนอตัวสถิติทดสอบทีของจอห์นสัน (Johnson's t test) เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบไม่สมมาตร เช่น การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล โดยอาศัยหลักการกระจายของ Cornish-Fisher โดยนำค่าโมเมนต์ที่ 3 รอบค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ต่อมาในปี 1995 ได้มีการดัดแปลงตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ยของ Johnson โดยใช้ Hall's t type "inversion" of the expansion สำหรับการทดสอบสมมติฐานทางด้านมากกว่า โดยทำการเปรียบเทียบกับตัวสถิติ composite t test ของ Sutton พบว่า ตัวสถิติทดสอบทีดัดแปลงของจอห์นสัน (Modified Johnson's t test) นี้ มีอำนาจการทดสอบมากกว่าตัวสถิติ composite test เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย 3วิธี คือตัวสถิติทดสอบที (Student's t test) ตัวสถิติทดสอบทีของจอห์นสัน (Johnson's t test) และตัวสถิติทดสอบทีดัดแปลงของจอห์นสัน (Modified Johnson's t test) ของประชากรกลุ่มเดียว ที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวาในระดับความเบ้ต่างๆ กัน จำแนกตามความโด่ง ขนาดตัวอย่างและระดับนัยสำคัญ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ต้องการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ (power of the test) ของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย 3 ตัว คือ

1. ตัวสถิติทดสอบที
2. ตัวสถิติทดสอบทีของจอห์นสัน
3. ตัวสถิติทดสอบทีดัดแปลงของจอห์นสัน
ภายใต้การแจกแจงแบบเบ้ขวาของประชากร

1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

ในการหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ จะคำนวณหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทุกตัวที่สามารถควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่1ได้

1.4 สมมติฐานของการวิจัย

1. เมื่อระดับความเบ้ของประชากรเพิ่มขึ้น อำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบทีจะลดน้อยลง
2. เมื่อขนาดตัวอย่างมากขึ้นตัวสถิติทดสอบทีดัดแปลงของจอห์นสัน จะมีอำนาจการทดสอบมากกว่าอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบตัวอื่นๆ เมื่อระดับความเบ้เพิ่มขึ้น

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

1.5.1 การแจกแจงแบบเบ้ขวาของประชากร จะใช้การแจกแจงแลมดาของตูกีร์(Tukey's Lamda Distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงที่กำหนดพารามิเตอร์ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ จากสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่ง โดยกำหนดค่าเฉลี่ยประชากรเท่ากับ 100 และความแปรปรวนของประชากรเท่ากับ 100

1.5.2 กำหนดสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงดังนี้

สัมประสิทธิ์ความเบ้ α_3	สัมประสิทธิ์ความโด่ง α_4
0.25	2.4, 4.0, 6.0
0.5	2.4, 4.0, 6.0
1.0	4.0, 6.0, 8.0
1.5	6.0, 8.0, 10.0
1.8	8.0, 10.0, 12.0

1.5.3 กำหนดขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 10 20 30 50 และ70

1.5.4 กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบของตัวสถิติที่ระดับ 0.01 0.05 และ 0.10

1.5.5 กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบทวินาม(Binomial test) $\alpha^{*} = 0.05$

1.5.6 สมมติฐานการทดสอบ

กรณีควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่1

ทดสอบสมมติฐานทางด้านน้อยกว่า $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

ทดสอบสมมติฐานทางด้านมากกว่า $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

ทดสอบสมมติฐานสองทาง $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

กรณีอำนาจการทดสอบของตัวสถิติ

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu = \mu_1$

เมื่อ $\mu_1 = \mu_0 + k(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

เมื่อ $\mu = \mu_0$ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากร

σ คือ ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

n คือ ขนาดตัวอย่าง

k มีค่าเท่ากับ 0.5 1.0 และ2.0

1.5.7 หาค่าประมาณระดับนัยสำคัญของเกณฑ์การทดสอบ หรือค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบ ($\hat{\alpha}$)

1.5.8 เปรียบเทียบค่าระดับนัยสำคัญของเกณฑ์การทดสอบที่แท้จริง (α) กับค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 จากการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบ ($\hat{\alpha}$)ที่ได้ในข้อ 1.5.7 ว่าค่าประมาณ ($\hat{\alpha}$) มีค่าไม่เกิน α อย่างไม่มีนัยสำคัญหรือไม่ โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test) ณ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบทวินามที่ 0.05

1.5.9 ทำการหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนประเภทที่1ได้

1.5.10 ในการศึกษาครั้งนี้ ได้จำลองการทดลองขึ้นโดยเทคนิคมอนติคาร์โลซิมูเลชัน โดยโปรแกรมภาษาฟอร์แทรน77(Fortran77) ซึ่งทำการทดลองซ้ำ 1000 ครั้ง ($n^* = 1000$) ในแต่ละสถานการณ์

1.6 คำจำกัดความ

อำนาจของการทดสอบ(power of the test) คือ ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (Null Hypothesis) เมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นเท็จ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ 1-β เมื่อ β คือความน่าจะเป็นที่เกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2

ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1(Type I error) คือ ความผิดพลาดที่เกิดจากการปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นจริง

ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 (Type II error) คือ ความผิดพลาดที่เกิดจากการยอมรับสมมติฐานว่างเมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นเท็จ

1.7 เกณฑ์การตัดสินใจ

1.7.1 พิจารณาความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 ซึ่งจะวัดจากสัดส่วนของจำนวนครั้งในการปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นจริง โดยการพิจารณาค่าประมาณระดับนัยสำคัญของเกณฑ์การทดสอบหรือความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 จากการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบ ($\hat{\alpha}$) ซึ่งควรมีค่าไม่เกินระดับนัยสำคัญที่กำหนด (α)โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) ที่ระดับนัยสำคัญของการทดสอบทวินาม $\alpha^* = 0.05$ โดยมีรูปแบบการทดสอบดังนี้

$$H_0 : \alpha \leq \alpha_0$$

$$H_1 : \alpha > \alpha_0$$

ดังนั้น

$$P\left[0 < \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{n^*}}} < Z_{\alpha^*}\right] = 1 - \alpha^*$$

หรือ $$P\left[0 < \hat{\alpha} < \alpha_0 + Z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{n^*}}\right] = 1-\alpha^*$$

ดังนั้นช่วงของการยอมรับความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 คือ

$$\left(0, \alpha_0 + Z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{n^*}}\right)$$

เมื่อ α^* แทนระดับนัยสำคัญของการทดสอบทวินาม

α แทนค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 จากการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบ

$\hat{\alpha}$ แทนค่าประมาณความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1จากการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบ

α_0 แทนระดับนัยสำคัญของเกณฑ์การทดสอบ

n^* แทนจำนวนรอบของการทดลอง

ถ้า ค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ เปรียบเทียบกับ $\alpha_0 = 0.01$ บริเวณของการยอมรับเป็น (0, .0152)

ถ้า ค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ เปรียบเทียบกับ $\alpha_0 = 0.05$ บริเวณของการยอมรับเป็น (0, .0613)

ถ้า ค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ เปรียบเทียบกับ $\alpha_0 = 0.10$ บริเวณของการยอมรับเป็น (0, .1166)

ถ้าค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ หรือค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่1 จากการทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบอยู่ในช่วงของการยอมรับ กล่าวได้ว่า ค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ มีค่าไม่เกิน α_0

1.7.2 อำนาจการทดสอบ จะวัดจากสัดส่วนของจำนวนครั้งในการปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นเท็จ

1.8 ประโยชน์ของการวิจัย

เพื่อช่วยในการตัดสินใจในการเลือกใช้ตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย เมื่อลักษณะข้อมูลที่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวาในระดับต่างๆ