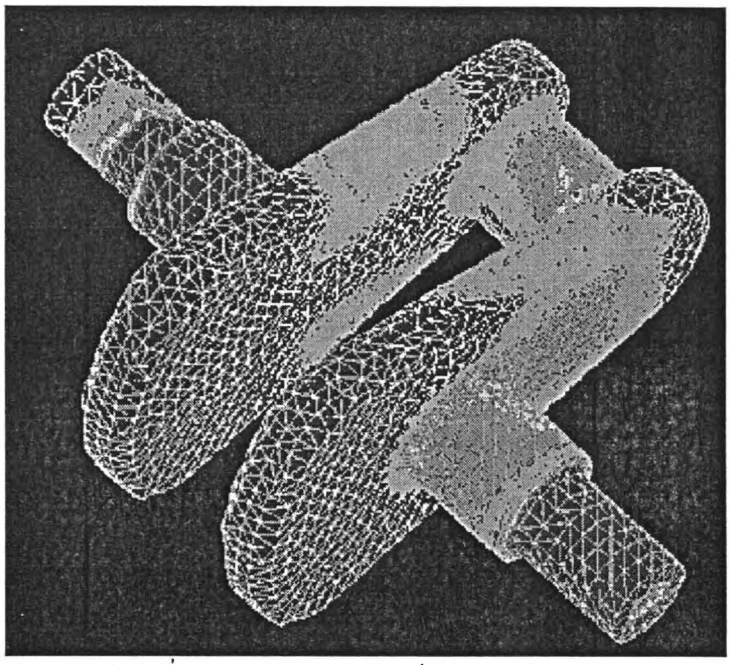
บทที่ 6
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
Finite Element Method, FEM

ระเบียบวิธีไพไนต์เอลิเมนต์มีพื้นฐานอยู่บนระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (partial differential equation) ถือเป็นส่วนหนึ่งของ computer aided engineering (CAE) มีจุดประสงค์เพื่อช่วยให้วิศวกรสามารถวิเคราะห์แบบจำลองที่ออกแบบขึ้นได้อย่างรวดเร็ว โดยไม่จำเป็นที่จะต้องสร้างแบบจำลองที่เป็นชิ้นงานจริง เพียงแต่สร้างแบบจำลอง (CAD model) ขึ้นบนคอมพิวเตอร์เท่านั้น เมื่อเป็นเช่นนี้จึงทำให้สามารถที่จะย่นระยะเวลาที่ใช้ในการพัฒนาผลิตภัณฑ์ลงได้อย่างมาก เพราะจำนวนครั้งในการทำการทดลองกับชิ้นงานจริงลดลง ดังที่ปรากฏในอุตสาหกรรมต่างๆเช่น อุตสาหกรรมรถยนต์ เริ่มนำมาใช้งานจริงครั้งแรกในวงการอุตสาหกรรมยานอวกาศ (aerospace industry) จากนั้นก็ได้ความนิยมมากขึ้นเรื่อยๆ พร้อมๆกับการที่คอมพิวเตอร์มีการพัฒนาเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ

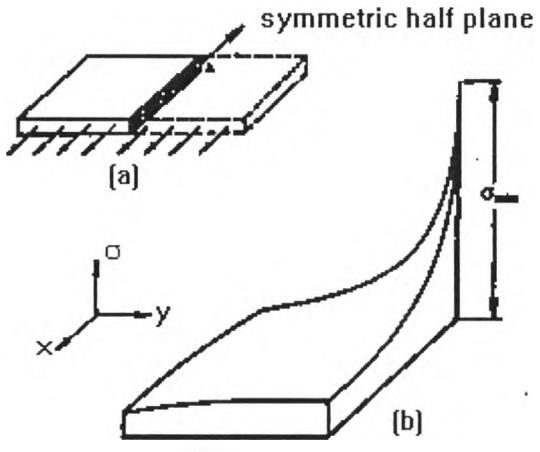
<u>ทฤษฎีของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์</u>

แนวคิดพื้นฐานคือการที่เรามองระบบเป็นเหมือนกับแบบทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเราจึงพยายามที่จะจำลองแบบทางคณิตศาสตร์นั้น โดยการแบ่งระบบหรือชิ้นงานออกเป็นส่วนย่อยเรียกว่า " เอลิเมนต์ (element) " ดังรูปที่ 6.1 ในแต่ละเอลิเมนต์มีสมการการประมาณภายใน (interpolation function) ที่แสดงถึงปริมานต่อเนื่อง (continuos quantity) ที่มีอยู่ภายในเอลิเมนต์นั้นๆ เอลิเมนต์ทั้งหมดจะเชื่อมโยงกันที่จุดต่อ (node) เราจะประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ (partial differential equation) ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่เราสนใจเข้ากับแต่ละเอลิเมนต์ โดยสมมติว่าคำตอบของปัญหาภายในเอลิเมนต์นั้นหาได้จากสมการการประมาณภายในและค่าที่จุดต่อ เราก็จะได้สมการเมทริกซ์ (element matrix) สำหรับเอลิเมนต์นั้นๆออกมา สมการที่ได้ออกมานี้ยังไม่สามารถที่จะแก้สมการหาคำตอบออกมาได้ เพราะนี่เป็นเพียงแค่ส่วนหนึ่งของแบบจำลองเท่านั้น เราจะทำการประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ (partial differential equation) เข้ากับทุกๆเอลิเมนต์ จากนั้นก็รวมทุกๆเอลิเมนต์เข้าด้วยกันเป็นสมการเมทริกซ์รวม (global matrix) โดยเป็นการรวมกันที่จุดต่อ ต่อไปเราก็ใส่เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเข้าไป เมื่อมาถึงขั้นนี้เราก็สามารถที่จะแก้สมการเมทริกซ์รวมหาคำตอบซึ่งก็คือค่าปริมาณต่อเนื่องที่จุดต่อทั้งหมดออกมาได้ หลังจากนั้นถ้าเราต้องการทราบค่าที่ตำแหน่งอื่นที่ไม่ตรงกับตำแหน่งของจุดต่อ เราก็สามารถหาได้โดยอาศัยค่าที่จุดต่อและสมการการประมาณภายใน ยิ่งเอลิเมนต์มีขนาดเล็กเพียงไร คำตอบที่เราได้ก็จะยิ่งถูกต้องแม่นยำมากขึ้นเพียงนั้น แต่ในขณะเดียวกันก็ทำให้มีจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น ดังนั้นหน่วยความจำที่ใช้จะมากขึ้นและเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ก็จะต้องนาน

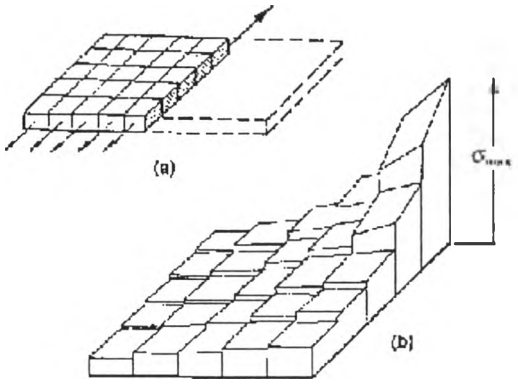
ขึ้นด้วย ดังรูปที่ 6.2a ซึ่งเป็นแผ่นเรียบที่อยู่ภายใต้แรงดึง เราจะเห็นได้ว่าโดยการวิเคราะห์ตามปกติแล้ว เราจะได้ผลลัพธ์ดังรูป 6.2b แต่ถ้าเราใช้วิธี finite element method แล้ว ขั้นแรกเราจะแบ่งแผ่นออกเป็นเอลิเมนต์ดังรูป 6.3a จากนั้นเมื่อผ่านการคำนวณด้วยวิธีการ finite element method เราก็จะได้คำตอบดังรูปที่ 6.3b



รูปที่ 6.1 แสดงภาพของวัตถุที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆและแสดงผลของการวิเคราะห์ความเค้นในลักษณะของสีที่แตกต่างกัน



รูปที่ 6.2 แผ่นเรียบที่อยู่ภายใต้แรงดึง
(a) ภาพโดยทั่วไป (b) การกระจายความเค้น



รูปที่ 6.3 แผ่นเรียบที่ถูกแบ่งเป็นเอลิเมนต์ๆ
(a)ภาพโดยทั่วไป (b) ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์การกระจายความเค้น

การประยุกต์ใช้งาน Finite Element Method

การจะทำการวิเคราะห์ชิ้นงานจริงด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราก็จะต้องมีแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ (FE model) ซึ่งจะเป็นส่วนที่แสดงแทนชิ้นงานที่เราวิเคราะห์ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่เราจะต้องแทนชิ้นงานจริงด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกต้อง ถ้าเราใช้แบบจำลองที่ไม่ถูกต้อง ก็จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ผิดพลาด

ลักษณะของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นโครงสร้างที่คล้ายกับก้อนอิฐมาเรียงประกอบเข้าด้วยกัน โดยที่มีการเชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (node) เท่านั้น แรงกิริยาและแรงปฏิกิริยาจะเกิดขึ้นที่จุดต่อเท่านั้นเช่นเดียวกัน

สิ่งสำคัญที่จะต้องพิจารณาในการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็คือ

1. ชนิดของเอลิเมนต์ ,ขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหา เอลิเมนต์แบบ quadrilateral จะให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากกว่าแบบสามเหลี่ยม

2. การกำหนดเงื่อนไขที่ถูกต้อง เงื่อนไขแบ่งเป็น

2.1 เงื่อนไขของแรงที่มากระทำ (load condition) เช่น มีแรงกระทำที่ตำแหน่งใดบ้าง

2.2 เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) เช่น ตำแหน่งไหนที่มีการเคลื่อนที่ได้อิสระ ตำแหน่งไหนที่มีการยึดติดแน่น

ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขต่างๆเหล่านี้ผิดพลาดไปไม่ตรงกับความเป็นจริง ผลลัพธ์ที่ออกมาก็จะไม่สามารถนำมาใช้ประโยชน์อะไรได้

เอลิเมนต์มีอยู่หลายชนิด แต่ละโปรแกรมอาจจะมีเหมือนกันบ้าง ไม่เหมือนกันบ้าง ถ้าเป็นเอลิเมนต์พื้นฐานเช่น เอลิเมนต์แบบ 4 เหลี่ยม (quadrilateral) เอลิเมนต์แบบ 3 เหลี่ยม (triangle) เอลิเมนต์ 3 มิติ 6 หน้า (hexahedron) เอลิเมนต์ 3 มิติ 4 หน้า (tetrahedron) ก็จะมีอยู่ในทุกๆโปรแกรม แต่ถ้าเป็นเอลิเมนต์ที่มีลักษณะเฉพาะเช่น quasi 3D element, membrane

element, shear panel element, kinematic element ก็อาจจะมีเพียงในบางโปรแกรม ถ้าเราแบ่ง element ตามขนาดของมิติก็สามารถแบ่งได้เป็น 3 ประเภท

1. แบบ 1 มิติ หรือ line element

ใน element แบบ 1 มิตินี้ โดยทางโครงสร้างแล้วก็คือ การเชื่อมต่อจุดต่อ 2 จุดเข้าด้วยกัน element แบบ 1 มิติยังแบ่งได้อีก 2 แบบ คือ

1.1 ตามลักษณะเรขาคณิต ได้แก่ เส้นตรง และ เส้นโค้ง

เส้นตรงแบบ 2 จุดต่อ

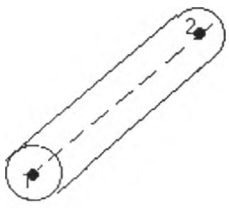
เส้นตรงแบบ 3 จุดต่อ

เส้นโค้งแบบ 2 จุดต่อ

เส้นโค้งแบบ 3 จุดต่อ

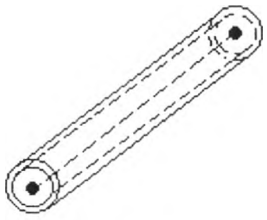
1.2 ตามลักษณะการใช้งานได้แก่

- rod เป็นเอลิเมนต์ที่มีเพียงแกนเดียวสามารถรับแรงดึง, แรงกดและแรงบิดได้ แต่ไม่สามารถที่จะรับการโค้งงอและแรงเฉือนได้ โดยปกติจะใช้จำลอง truss หรือวัตถุส่วนที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบ pin-ended



rod

- tube จะมีลักษณะเหมือนกับแบบ rod แตกต่างกันที่ tube นั้นจะมีแกนกลางเป็นช่องว่างทรงกระบอก ในบางโปรแกรมถ้าใช้เอลิเมนต์ชนิดนี้แทน pipe ก็จะรวมคุณสมบัติของการโค้งงอและการรับแรงเฉือนเข้าไปด้วย

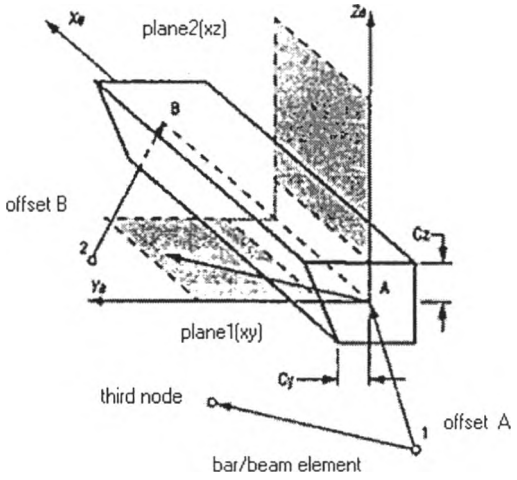


tube

- curved tube ก็เป็นเอลิเมนต์แบบ tube ชนิดหนึ่งเพียงแต่ว่ามีลักษณะโค้งงอเท่านั้น เราสามารถที่จะใช้เอลิเมนต์แบบ tube หลายๆอันมาต่อเข้าด้วยกันเป็นเส้นโค้งแทน

ที่จะใช้เอลิเมนต์แบบ curved tube ก็ได้ เอลิเมนต์ชนิดนี้จะใช้จำลอง ส่วนที่มีลักษณะโค้งงอเช่น bend และ elbow ในระบบท่อได้

- bar element เอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถรับแรงดึง, แรงกด, แรงบิดและการโค้งงอได้ หน้าตัดหัวท้ายของเอลิเมนต์ชนิดนี้จะต้องเหมือนกัน มักจะใช้จำลองโครงสร้างแบบ beam และ frame โดยทั่วๆไป



bar/beam element

- beam element มีคุณสมบัติและรูปร่างเช่นเดียวกับ bar element แตกต่างกันที่ beam element สามารถที่จะมีหน้าตัดหัวท้ายขนาดใหญ่แตกต่างกันได้คือมีลักษณะเรียวได้นั่นเอง จะใช้จำลองโครงสร้างแบบ beam และ frame โดยทั่วๆไป เช่นเดียวเอลิเมนต์แบบ bar

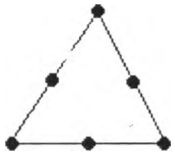
2. แบบ 2 มิติ หรือ plane element

element แบบ 2 มิติจะถูกใช้เพื่อแสดงถึงโครงสร้างที่มีลักษณะเป็น ผนัง, แผ่นและ membrane element แบบ 2 มิติยังแบ่งได้อีก 2 แบบ คือ

2.1 ตามลักษณะเรขาคณิต ได้แก่

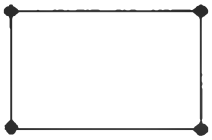
- แบบสามเหลี่ยม

linear triangle

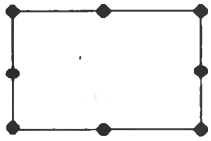


quadratic triangle

- แบบสี่เหลี่ยม



linear quadrilateral



quadratic quadrilateral

2.2 ตามลักษณะการใช้งานได้แก่

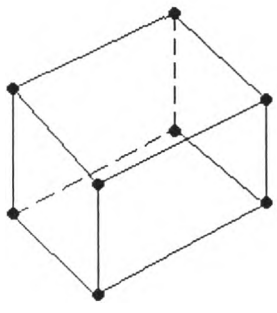
- shear panel ปกติเป็นเอลิเมนต์ที่สามารถรับได้แต่แรงเฉือนเท่านั้น โดยแรงที่มากระทำจะเป็นแรงในแนวสัมผัสกับเอลิเมนต์และกระทำที่ขอบของเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ชนิดนี้จะใช้จำลองโครงสร้างที่ประกอบด้วยแผ่นยืดหยุ่น (elastic sheet) บางๆ
- membrane เป็นเอลิเมนต์ที่รับได้แต่ in-plane normal force เท่านั้น จะใช้จำลองแผ่นยืดหยุ่น (elastic sheet) บางๆ
- bending element เป็นเอลิเมนต์ที่รับได้แต่แรงดัด(การโค้งงอ)เท่านั้น
- plane strain element เป็นเอลิเมนต์แบบ biaxial จะใช้สร้างแบบจำลอง 2 มิติ ของรูปทรงตันซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามความลึก (plane strain condition $\varepsilon_z = 0\ \gamma_{yz} = 0\ \ \gamma_{zx} = 0$)

<u>3.แบบ 3 มิติ หรือ volume element</u>

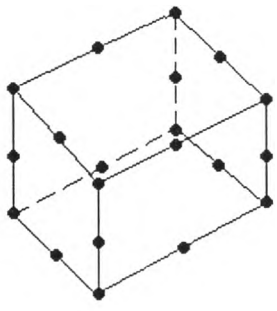
element แบบ 3 มิติจะถูกใช้เพื่อแสดงถึงโครงสร้างตัน 3 มิติ เมื่อใช้ element แบบนี้เราสามารถที่จะได้ผลการวิเคราะห์ที่มีรายละเอียดมาก แต่ข้อเสียของ element แบบนี้ก็คือ ต้องใช้เวลาและความพยายามมากกว่าแบบอื่นในการสร้างแบบจำลองและในการวิเคราะห์ element แบบ 3 มิติยังแบ่งได้อีก 2 แบบ คือ

3.1 ตามลักษณะเรขาคณิตได้แก่

- ทรงฐานสี่เหลี่ยม

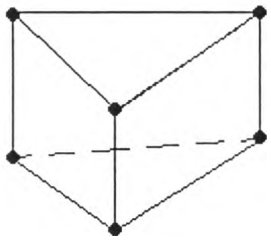


linear hexahedra

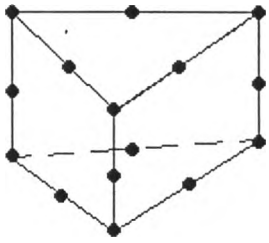


quadratic hexahedra

- ทรงฐานสามเหลี่ยม

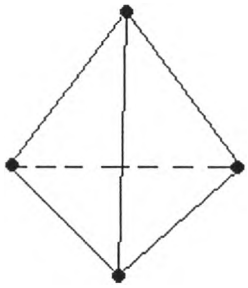


linear wedge

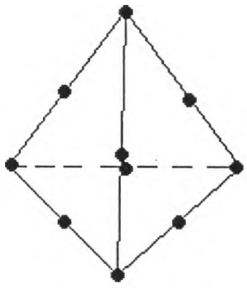


quadratic wedge

- รูปปิรามิดฐานสามเหลี่ยม



linear tetrahedra



quadratic tetrahedra

3.2 ตามลักษณะการใช้งานได้แก่

- axissymmetric element เป็นเอลิเมนต์แบบ 2 มิติที่ใช้แทนรูปทรงที่เกิดจากการหมุน เอลิเมนต์ชนิดนี้จะใช้จำลองรูปทรงที่มีความสมมาตรรอบแกน รวมทั้งแรงที่มากระทำ (load) และข้อจำกัด (constraint) ต้องมีความสมมาตรรอบแกนด้วย
- solid element เป็นเอลิเมนต์ทรงตัน 3 มิติ จะใช้จำลองโครงสร้าง 3 มิติ

จากเอลิเมนต์ประเภทต่างๆที่ได้เห็นข้างต้น ถ้าเป็นเอลิเมนต์ชนิดเดียวกัน เอลิเมนต์ที่เป็นแบบ quadratic จะให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำมากกว่าแบบ linear เอลิเมนต์แต่ละประเภทจะมีสมการการประมาณภายในของเอลิเมนต์นั้นแตกต่างกันไป แต่เราสามารถที่จะสรุปสมการโดยรวมได้ดังนี้คือ

- การเคลื่อนที่ของแต่ละตำแหน่งภายในแต่ละเอลิเมนต์หนึ่งๆมีสมการคือ

$$u(x,y,z) = [H(x,y,z)]\{a\}^e \qquad 6.1$$

โดยที่ $u(x,y,z)$ คือ ระยะทางที่เคลื่อนที่ไป ณ. ตำแหน่งใดๆในเอลิเมนต์

$[H(x,y,z)]$ คือ displacement interpolation matrix ซึ่งแตกต่างกันไปสำหรับแต่ละประเภทของเอลิเมนต์

$\{a\}^e$ คือเวคเตอร์ของระยะที่เคลื่อนที่ไปของจุดต่อ (node) ทุกๆจุดภายในเอลิเมนต์ e หมายถึง element

- ความเครียดหาได้จากสมการ

$$\{\varepsilon(x,y,z)\} = [B(x,y,z)]\{a\}^e \qquad 6.2$$

โดยที่ $\{\varepsilon(x,y,z)\}$ คือ ความเครียด ณ. ตำแหน่งใดๆในเอลิเมนต์

$[B(x,y,z)]$ หาได้จากการ differentiate $[H(x,y,z)]$

- ความเค้นหาได้จากสมการ

$$\{\sigma(x,y,z)\} = [D]\{\varepsilon(x,y,z)\} \qquad 6.3$$

โดยที่ $\{\sigma(x,y,z)\}$ คือ ความเค้น ณ. ตำแหน่งใดๆในเอลิเมนต์

[D] คือ elastic matrix ซึ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของวัสดุ

เราสามารถที่จะสร้างสมการความสมดุลสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ได้จากหลักการของการเคลื่อนที่เสมือน (งานเสมือน) ก็จะได้สมการดังนี้คือ

$$\left\{\{\delta a\}^e\right\}^T\{F\}^e = \int_{(e)}\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}d(vol) \qquad 6.4$$

โดยที่ $\{F\}^e$ คือแรงกระทำที่จุดต่อแต่ละจุดภายในเอลิเมนต์

จากสมการที่ 6.2, 6.3 และ 6.4 เราก็จะได้สมการที่แสดงถึง stiffness matrix ของแต่ละเอลิเมนต์คือ

$$\{F\}^e = [K]^e\{a\}^e \qquad 6.5$$

เมื่อได้อย่างนี้แล้ว เราก็ทำการรวมเอลิเมนต์ทั้งหมดเข้าด้วยกัน ก็จะได้สมการของ structural stiffness matrix และ force vector ของระบบโดยรวมคือ

$$\{F\}^g = [K]^g\{a\}^g \qquad 6.6$$

โดยที่ g หมายถึง global คือทุกๆจุดต่อของวัตถุ

ความถูกต้องแม่นยำของคำตอบที่ได้นั้นขึ้นอยู่กับ

1. การจำลองรูปร่างขนาดของชิ้นงานจริงว่ามีความเหมือนจริงมากแค่ไหน ถ้าจำลองได้ไม่เหมือน ค่าที่ได้ย่อมจะผิดไปจากความเป็นจริงมากน้อยตามความผิดพลาดในการจำลองแบบ ค่าความผิดพลาดส่วนนี้เรียกว่า domain approximation error
2. ความละเอียดในการคำนวณ เช่น การหาค่าอินทิเกรทด้วยวิธีการเชิงตัวเลข การคำนวณของคอมพิวเตอร์ ความผิดพลาดส่วนนี้เรียกว่า quadrature and finite arithmetic error
3. การเลือกใช้สมการการประมาณภายในว่ามีความเหมาะสมกับปัญหาที่เรากำลังพิจารณาหรือไม่ ความผิดพลาดส่วนนี้เรียกว่า approximate error
4. การเลือกใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (partial differential equation) ที่เหมาะสมกับปัญหา เช่น ถ้าปัญหาเป็นคานที่หนา (thick beam) เราควรเลือกใช้สมการที่เรียกว่า Timoshenko beam แทนที่จะใช้ Euler-Bernoulli beam
5. จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ ถ้าเราใช้เอลิเมนต์จำนวนมากๆ ก็จะได้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าการใช้เอลิเมนต์จำนวนน้อยๆ แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็จะมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นเราควรจะพิจารณาว่ามีบริเวณไหนบ้างที่ควรจะให้มีจำนวนเอลิเมนต์มากๆเพื่อที่จะได้ค่าที่ถูกต้อง ในบริเวณที่เราต้องการคำตอบ
6. คุณสมบัติของเอลิเมนต์ดีหรือไม่ ได้แก่ มี length ratio , wrap angle ดีหรือไม่
7. ความแตกต่างระหว่างระบบจริงกับแบบจำลองที่สร้างขึ้นได้แก่
   - คุณสมบัติของวัสดุ มีลักษณะเป็น isentropy หรือเป็น orthotropy
   - มี residual stress หรือไม่
   - มีแรงเสียดทานเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยหรือไม่
   - เงื่อนไขขอบเขตของระบบจริงมีความซับซ้อนยุ่งยากมากแค่ไหน เราสามารถจำลองได้เหมือนเพียงไร

<u>การวิเคราะห์หาค่าความเค้นความเครียด</u>

เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว เราจะได้ค่าระยะขจัด (displacement) ที่จุดต่อทั้งหมดออกมา จากนั้นเมื่อเราต้องการที่จะหาค่าความเค้นความเครียด เราก็สามารถหาได้จากการประยุกต์สมการที่เกี่ยวกับทฤษฎีทางกลศาสตร์ในเรื่องของความเค้นความเครียดกับค่าระยะขจัดที่เราหาได้

ค่าความเค้นก็ได้แก่

- normal stress
- tangential stress
- principle stress

- maximum shear stress
- von Mises stress ในระบบ 2 หรือ 3 มิติแล้ว เมื่อระบบหรือชิ้นงานได้รับแรงและโมเมนต์ในทิศทางต่างๆมากระทำ เราไม่สามารถที่จะทำนายการเสียหายของวัสดุด้วยการหาค่า normal stress แล้วนำมาเทียบกับค่าความเค้นล้า (yield stress) ตามอย่างปกติที่ทำกันได้ ดังนั้นจึงเกิดทฤษฎีความเสียหาย (failure theory) ขึ้นเพื่อที่จะทำนายความเสียหายของวัสดุ มีทฤษฎีดังกล่าวนี้เกิดขึ้นหลายทฤษฎี แต่ที่ได้รับความนิยมและมีความแม่นยำก็คือ maximum von Mises stress theory ซึ่งมีชื่อเรียกอย่างอื่นอีกเช่น maximum octahedral stress theory, maximum distortion strain energy theory และ Huber หรือ Hencky-von Mised theory ความเสียหายของวัสดุจะเกิดขึ้นเมื่อค่า von Mises stress มีค่ามากกว่าค่าความเค้นล้า

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot \tau_{xy}^{\ 2} + 6 \cdot \tau_{yz}^{\ 2} + 6 \cdot \tau_{zx}^{\ 2}}{2}}$$

<u>เทคนิคที่ใช้เพื่อลดค่าใช้จ่ายในการวิเคราะห์</u>

โดยแท้จริงแล้ว เราสามารถที่จะจำลองระบบหรือชิ้นงานใดๆด้วยเอลิเมนต์แบบ 3 มิติได้ทั้งหมด สามารถที่แบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆจำนวนมากๆเพื่อที่จะได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำมากๆได้ แต่การทำเช่นนั้นจะทำให้ต้องใช้เวลาและหน่วยความจำมากซึ่งในบางกรณีก็ไม่สามารถทำได้หรือถ้าทำได้ก็ไม่คุ้มค่า ดังนั้นจึงมีการหาวิธีและเทคนิคต่างๆมาช่วยให้สามารถวิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น ได้แก่

1. การตัดรายละเอียดบางอย่างออกไป เราสามารถที่จะตัดรายละเอียดเล็กๆน้อยๆบางอย่าง เช่น fillet รู ออกไปได้ ถ้ามันไม่ได้มีผลต่อผลการวิเคราะห์ที่เราต้องการ อย่างเช่น การตัด fillet ทิ้งไป เมื่อบริเวณที่เราสนใจในการหาคำตอบนั้นอยู่ห่างจาก fillet ที่เราตัดทิ้งไป
2. การลดขนาดของแบบจำลอง โดยอาศัยคุณสมบัติในเรื่องของสมมาตร
3. การแปลงปัญหาจาก 3 มิติ ให้เป็น 2 มิติ อย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับเขื่อนที่รับ hydrostatic pressure เราสามารถแปลงให้เป็นปัญหา 2 มิติได้ โดยวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะเป็น plane strain problem