บทที่ 2

ทฤษฎีฟัซซี

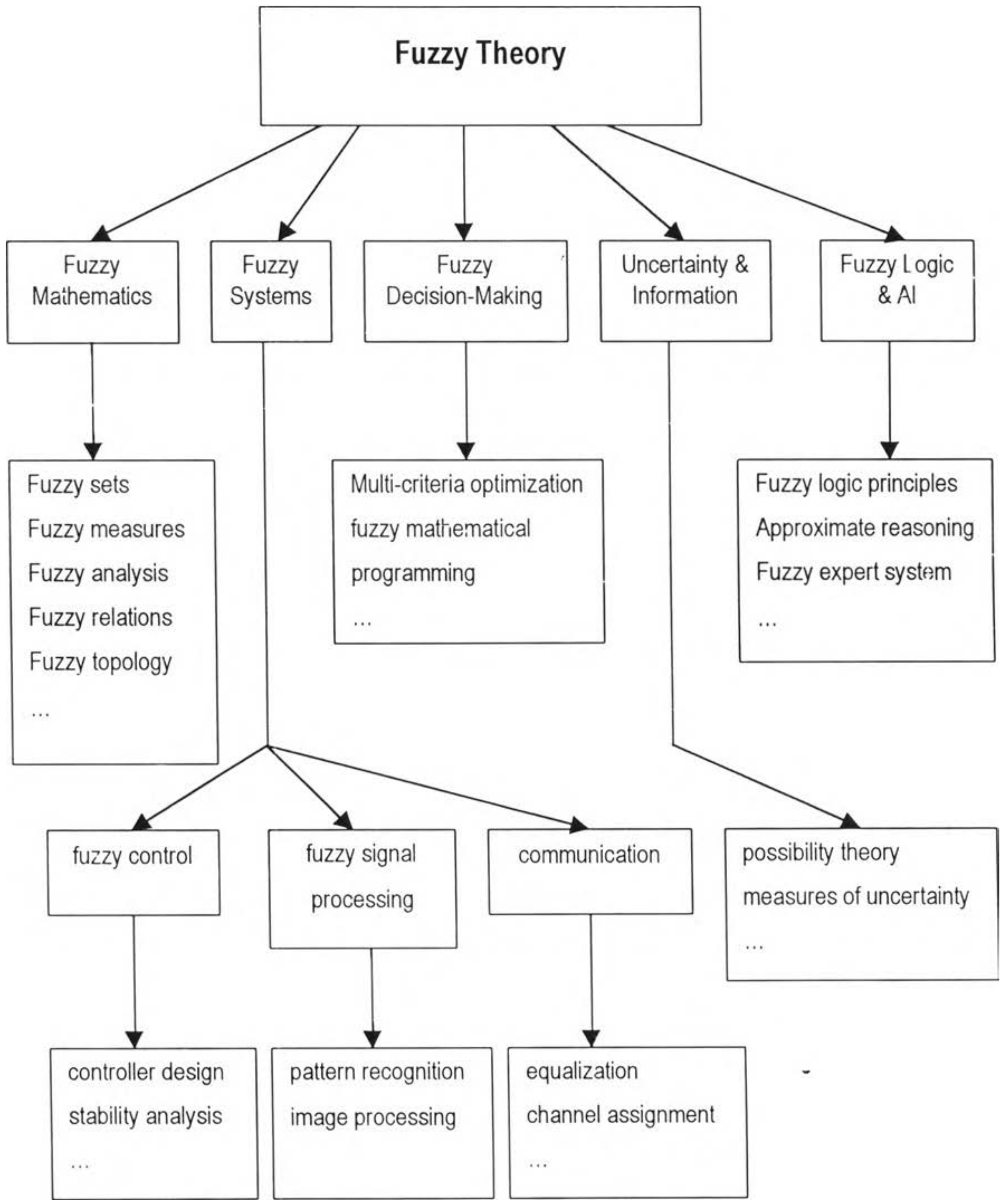
Fuzzy Theory

โดยทั่วไป เมื่อกล่าวถึงทฤษฎีฟัซซีหรือบางครั้งเรียกว่า ทฤษฎีคลุมเครือ จะหมายถึงทฤษฎีทั้งหมดที่ใช้แนวความคิดพื้นฐานมาจากฟัซซีเซ็ต หรือเซ็ตที่มีฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกเป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่อง ทฤษฎีฟัซซีสามารถแบ่งได้คร่าวๆ ได้เป็น 5 สาขาหลักๆ ด้วยกันตามรูปที่ 2.1 คือ

1. คณิตศาสตร์ฟัซซี (Fuzzy Mathematics) เป็นการขยายแนวความคิดของคณิตศาสาตร์ในเรื่องของเซ็ตแบบธรรมดา ไปสู่ฟัซซีเซ็ต
2. ตรรกศาสตร์คลุมเครือและปัญญาประดิษฐ์ (Fuzzy Logic and Artificial Intelligence) เป็นการขยายแนวความคิดเกี่ยวกับตรรกศาสตร์แบบธรรมดา ไปสู่ตรรกศาสตร์แบบคลุมเครือ และเป็นการพัฒนาระบบผู้เชี่ยวชาญ (Expert System) โดยใช้การให้ความรู้แบบฟัซซี (Fuzzy Information) และการให้เหตุผลแบบประมาณ (Approximate Reasoning)
3. ระบบฟัซซี (Fuzzy System) รวมไปถึงการควบคุมแบบฟัซซี (Fuzzy Control) กระบวนการสัญญาณ (Signal Processing) และการสื่อสาร
4. ความไม่แน่นอนและการให้ความรู้ (Uncertainty and Information) เป็นการวิเคราะห์ความไม่แน่นอนแบบต่างๆ
5. การตัดสินใจแบบฟัซซี (Fuzzy Decision Making) เป็นการพิจารณาเกี่ยวกับปัญหาเรื่องการออพติไมซ์ภายใต้มีข้อจำกัดบางประการ

จะเห็นว่าสาขาต่างๆที่แบ่งไว้นั้นไม่ได้แยกกันโดยเด็ดขาด แต่ต่างก็มีความเกี่ยวข้องซึ่งกันและกันอยู่ เช่น เมื่อเราศึกษาเรื่องของการควบคุมแบบฟัซซีก็จำเป็นต้องใช้เรื่องของคณิตศาสตร์ฟัซซี และตรรกศาสตร์คลุมเครือมาเกี่ยวข้องด้วยเช่นกัน ปัจจุบัน ในทางวิศวกรรมการควบคุมเคมี เรามักจะเห็นการประยุกต์ใช้ทฤษฎีฟัซซีในงานที่เกี่ยวกับการใช้ระบบฟัซซีในการสร้างแบบจำลอง การออกแบบตัวควบคุมระบบต่างๆ และการประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการเคมี นอกจากนี้ก็ยังมีการใช้ฟัซซีในการวินิจฉัยด้านอื่นๆ เช่นใช้เพื่อการตัดสินใจทางการแพทย์ การประเมินสถานการณ์ทางเศรษฐศาสตร์ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีฟัซซีเพิ่งคิดค้นได้ไม่นาน ยังถือว่าอยู่ในระยะเริ่มต้นอยู่ทั้งทางด้านทฤษฎีและการปฏิบัติจริง มีผู้เชี่ยวชาญและนักวิจัยใน

สาขาต่างๆ ให้ความสำคัญในลักษณะที่ต่างกันไป ตามมุมมองและจุดประสงค์ของการประยุกต์ใช้งานในสาขานั้นๆ



รูปที่ 2.1 แผนผังแสดงขอบเขตของทฤษฎีฟัซซีและการประยุกต์ใช้งานในด้านต่างๆ

เนื้อหาในบทที่นี้จะกล่าวถึงทฤษฎีฟัซซีพื้นฐานสำหรับการใช้ในสาขาระบบฟัซซีเพื่อใช้ในการควบคุมฟัซซีซึ่งได้แก่ คณิตศาสตร์ฟัซซี และ ตรรกศาสตร์คลุมเครือ รวมไปถึงลักษณะการดำเนินการและสัญลักษณ์ต่างๆ ที่มักใช้บ่อยๆ และตัวอย่างประกอบ ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย เพื่อให้ผู้อ่านที่ไม่มีพื้นฐานในเรื่องฟัซซีสามารถศึกษาและทำความเข้าใจได้ด้วยตัวเองจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยจะประกอบไปด้วยความเป็นมาของทฤษฎีฟัซซีเบื้องต้น ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก (Membership Functions) จำนวนฟัซซี (Fuzzy Numbers) ฟัซซีเซ็ต (Fuzzy Sets) การดำเนินการฟัซซี (Fuzzy Set Operations) ความสัมพันธ์ฟัซซี (Fuzzy Relations) การดำเนินการประกอบฟัซซี (Fuzzy Compositions) การฟัซซิฟิเคชั่นและการดีฟัซซิฟิเคชั่น (Fuzzification and Defuzzification) เป็นต้น

2.1 ความเป็นมาของทฤษฎีฟัซซี

อาจกล่าวได้ว่า ทฤษฎีฟัซซีเซ็ตมีพัฒนาการมาจากทฤษฎีเซ็ตปกติ หรือบางครั้งเรียกว่า คริสพ์เซ็ต (Crisp Sets) ดังนั้น การอธิบายเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเซ็ตจะเป็นการขยายความมาจากทฤษฎีเซ็ตปกติ ทฤษฎีตรรกศาสตร์คลุมเครือ (Fuzzy Logic) หรือทฤษฎีฟัซซีลอจิกก็เช่นเดียวกัน เนื่องจากว่า เซ็ตปกตินั้นเราสามารถแยกแยะค่าความเป็นจริงได้เป็นตรรกะแบบ 2 ค่า (Two-Valued Logic) เท่านั้น คือแยกแยะอย่างชัดเจนว่า ตัวแปรใดเป็นสมาชิกของเซ็ตนั้นๆ หรือไม่ ทฤษฎีดังกล่าวจะมีการระบุความเป็นสมาชิกได้เพียง 2 แบบเท่านั้นคือ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ โดยที่ความเป็นสมาชิกจะไม่มีความกำกึ่งไม่ชัดเจน แต่สำหรับเหตุการณ์อื่นๆ ที่ไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่าจะเกิดขึ้นจริงหรือไม่ก็จะไม่สามารถระบุค่าได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ตัวอย่างเช่นการทำนายเหตุการณ์ไปล่วงหน้าถึงสิ่งที่จะเกิดในอนาคต เรากล่าวว่า "วันพรุ่งนี้ ฝนจะตก" ทฤษฎีตรรกศาสตร์แบบสองค่า (Two-Valued Logic) ไม่สามารถระบุได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จเพราะว่าเหตุการณ์นั้นไม่แน่ว่าจะเกิดขึ้นในอนาคตหรือไม่ ดังนั้นจึงมีผู้ตั้งทฤษฎีตรรกศาสตร์แบบสามค่า (Three-Valued Logic) ขึ้นมาใช้ ทฤษฎีตรรกศาสตร์แบบสามค่านี้จะกำหนดให้เซ็ตของคำตอบสำหรับตรรกศาสตร์นั้น เป็นจริง (True) โดย แทนด้วย 1, เป็นเท็จ (False) แทนด้วย 0, และสำหรับค่าที่เป็นกลางหรือค่าที่ไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่าเป็นจริงหรือไม่นั้น ก็จะแทนด้วย 1/2 ดังนั้น จึงสามารถเขียนเซ็ตของความจริงได้เป็น $T_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

แต่อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่า สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนกำกวมและคลุมเครือมากขึ้นไปอีกซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่มักจะปรากฏอยู่ทั่วไปในโลกแห่งความเป็นจริง ทฤษฎีตรรกศาสตร์แบบสามค่า (Three-Valued Logic) ก็ยังไม่สามารถใช้ระบุเหตุการณ์ได้อย่างครอบคลุมความเป็นจริงทั้งหมด ยังมีอีกหลายปัญหาที่ไม่สามารถจำแนกหรือกำหนดได้อย่างชัดเจนด้วยทฤษฎีดังที่กล่าวมานี้ ปัญหาดังกล่าวนี้มักจะเป็นลักษณะที่มีความยุ่งยากซับซ้อน หรือมีโครงสร้างที่ไม่แน่นอนชัดเจนทำให้ยากในการตัดสินใจแก้ปัญหานั้นๆ จากทฤษฎีตรรกศาสตร์แบบสามค่านี้จึงถูกพัฒนามากลายเป็นทฤษฎีตรรกศาสตร์แบบหลายค่า (Many-Valued

Logic) ซึ่งแบ่งค่าความจริงได้เป็น n ค่าที่มีระยะห่างเท่าๆ กัน ได้ค่าความจริงเป็น T_n ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วงระหว่าง [0,1] ตามที่ค่า n กำหนดให้เป็น แสดงได้ดังสมการที่ (2.1-1)

$$T_n = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\} \tag{2.1-1}$$

ค่าความจริงจะเป็นกี่ค่าขึ้นอยู่กับการกำหนดของผู้กำหนดเอง แต่ถ้าหากระดับความจริง T_n นี้ ถูกนิยามให้เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่อยู่ในช่วงระหว่าง 0 ถึง 1 เซ็ตความจริงก็จะเป็น $T_\alpha = [0,1]$ ตรรกศาสตร์แบบหลายค่าในลักษณะนี้ถูกเรียกว่า "Infinite valued logic" หรือ "Standard Lukasiewicz Logic" ซึ่งทฤษฎีตรรกศาสตร์นี้สอดคล้องกับทฤษฎีฟัซซีลอจิกหรือทฤษฎีตรรกศาสตร์คลุมเครือ (Fuzzy logic theory) ที่เกิดขึ้นในเวลาต่อมา

ทฤษฎีฟัซซีเซ็ต ถูกคิดค้นและพัฒนาขึ้นอย่างจริงจังโดยศาสตราจารย์ ดร. Lofti A. Zadeh แห่งมหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนีย ที่เบอร์คเลย์ เมื่อปี ค.ศ.1965 โดยเป็นการขยายความมาจากทฤษฎีเซ็ตปกติ และพัฒนาทฤษฎีฟัซซีเซ็ตซึ่งเป็นทฤษฎีที่นำเอามาใช้ในงานการวิเคราะห์ระบบที่ซับซ้อน ฟัซซีเซ็ตนั้นยอมให้ค่าดีกรีความเป็นสมาชิกในเซ็ตสามารถเป็นค่าจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 ได้ซึ่งก็คือหลักการนี้จะทำให้ระบบสามารถเลียนแบบกระบวนการใช้เหตุผลและการตัดสินใจแบบมนุษย์ได้ ทำให้สามารถสังเกตและสรุปเรื่องต่างๆ ได้เข้าใกล้ความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น

2.2 ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก (Membership Functions)

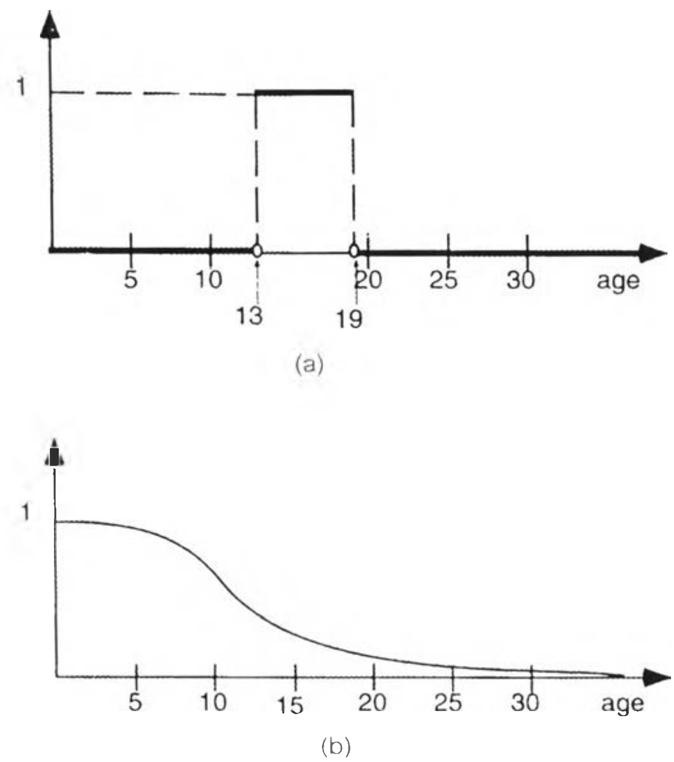
พิจารณาตัวอย่างของความกำกวมที่เกิดขึ้นในการทำการตัดสินใจ เช่น การกล่าวว่าอุณหภูมิของน้ำจะร้อนหรือเย็น ถ้าเรากำหนดแบบเซ็ตปกติมีเกณฑ์วัดที่แน่นอนเพื่อหาคำตอบของค่าตรรกศาสตร์ได้เพียง 2 กรณีว่าจริงหรือเท็จเท่านั้น เช่น อาจกำหนดว่าถ้าอุณหภูมิได้สูงเท่ากับหรือเกิน 80 องศาเซลเซียส ถือว่าน้ำนั้นเป็นนี้ร้อน แต่ในความเป็นจริงแล้ว ถ้าจะกล่าวในเชิงของภาษา การกำหนดดังกล่าวดูเหมือนจะไม่เหมาะสมนักเมื่อเราวัดอุณหภูมิของน้ำที่มีอุณหภูมิ 79 องศาเซลเซียส ก็จะถือว่าเป็นน้ำนั้นเป็นน้ำร้อนได้เช่นกันในความรู้สึกของมนุษย์

จะเห็นว่าความคลุมเครือในการตัดสินปัญหามักจะเป็นสิ่งซึ่งพบอยู่เสมอ เงื่อนไขบางอย่างอาจจะตัดสินไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จอย่างชัดเจน ทฤษฎีฟัซซีเสนอแนวทางที่จะนิยามลักษณะที่กำกวมนี้ในรูปของฟังก์ชันความเป็นสมาชิก (Membership Functions (MFs)) ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นที่ระบุว่าสมาชิกนั้นๆ มีความเป็นสมาชิกในเซ็ตนั้นๆ เป็นอย่างไรบ้าง โดยเรียกความเป็นสมาชิกนั้นว่า ค่าดีกรีความเป็นสมาชิก (Degree of

Membership) หรือบางครั้งอาจเรียกว่า ดีกรีของความเกี่ยวข้อง (Degree of Compatibility) ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าต่อเนื่องตั้งแต่ 0 ถึง 1

การเสนอฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกสามารถเสนอได้หลายลักษณะ เช่นกราฟ ตารางรายการ (Tabular and List Representations) แบบเรขาคณิต (Geometric Representation) และในลักษณะของการวิเคราะห์ (Analytic Representation) ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลที่มีอยู่และความสะดวก

การเสนอฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกในลักษณะของกราฟเป็นวิธีการที่นิยม เนื่องจากว่าสามารถมองเห็นได้ชัดเจนและทำความเข้าใจได้ง่าย ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกในรูปที่ 2.2-1 เป็นกราฟแสดงฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของคน 2 กลุ่มตามอายุ ในรูป 2.2-1a เป็นการกำหนดอายุของคนที่เป็นวัยรุ่น ซึ่งเป็นเซ็ตปกติ เพราะสามารถระบุได้ทันทีว่าอายุนั้นๆ เป็นวัยรุ่นหรือไม่ คือมีความเป็นสมาชิก 2 ค่าเท่านั้น คือ 1 และ 0 ส่วนรูปที่ 2.2.1b เป็นการกำหนดเซ็ตของคนหนุ่ม จะเห็นได้ว่าเซ็ตในลักษณะนี้สามารถระบุความเป็นหนุ่มได้หลายระดับด้วยกัน



รูปที่ 2.1-1 รูปแสดงฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของ a) เซ็ตของวัยรุ่น b) เซ็ตของคนหนุ่ม

การเสนอในลักษณะของกราฟนั้นเหมาะสำหรับฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของเซ็ตเอกภพที่มีมิติเป็น 1 หรือ 2 มิติ ในปริภูมิยูคลิดเดียนเท่านั้น สำหรับฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกในเซ็ตของเอกภพอื่นๆจำเป็นต้องมีการนำเสนอในรูปแบบอื่นๆ ที่เหมาะสมกว่า การนำเสนอด้วยตารางเป็นอีกวิธีการนำเสนอวิธีหนึ่งที่มักพบเห็นได้ โดยที่ตารางนั้นจะนำเสนอสมาชิกทุกตัวในเอกภพนั้นๆ พร้อมกับระบุค่าความเป็นสมาชิกของสมาชิกนั้นๆ ในเซ็ต โดยวิธีการทำให้สามารถอธิบายถึงรายการสมาชิกและค่าความเป็นสมาชิกร่วมกันได้

ตัวอย่างเช่น ให้ เซ็ต A เป็นเซ็ตของ นักศึกษาที่มีความขยันหมั่นเพียรในการเรียนวิชา MA201 และกำหนดให้ชั้นเรียน MA201 นี้มีรายชื่อนักศึกษาดังต่อไปนี้ ได้แก่ สมศรี สมบัติ สมรัก และสมหมาย เซ็ต A เป็นสับเซ็ตในเซ็ตของเอกภพ X ซึ่งเป็นเซ็ตของนักศึกษาทั้งหมดในมหาวิทยาลัย เนื่องจากว่านักศึกษาแต่ละคนนั้นไม่ได้มีความขยันหมั่นเพียรเหมือนกันหมดทุกคน บางคนมีค่าความเป็นสมาชิกต่ำ บ้างก็สูง ดังตารางที่ 2.2-1 ซึ่งเป็นการนำเสนอค่าความเป็นสมาชิกในลักษณะของตาราง บางครั้งก็นำเสนอเป็นลักษณะของคู่อันดับของสมาชิกและค่าความเป็นสมาชิกต่อไปนี้

A = {<สมศรี, 0.8>, <สมบัติ, 0.3>, <สมรัก, 0.5>, <สมหมาย, 0.9>} (2.2-1)

หรือ

$$A = \{\langle x_1, 0.8\rangle, \langle x_2, 0.3\rangle, \langle x_3, 0.5\rangle, \langle x_4, 0.9\rangle\} \quad (2.2\text{-}2)$$

หรือในบางงานวิจัยอาจแสดงเป็น

A = 0.8/สมศรี + 0.3/สมบัติ + 0.5/สมรัก + 0.9/สมหมาย (2.2-3)

โดยเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

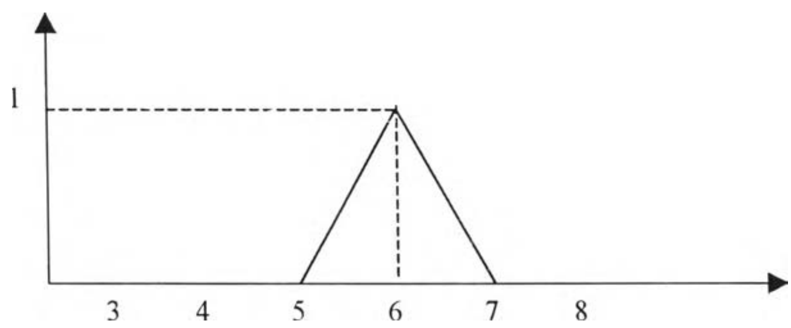
$$A = \sum A(x)/x \quad (2.2\text{-}4)$$

ตารางที่ 2.2-1 แสดงการนำเสนอค่าความเป็นสมาชิกของเซ็ต A ในรูปแบบของตาราง

รายชื่อนักศึกษา(ชื่อสมาชิกในเซ็ต A)	ค่าความเป็นสมาชิกในเซ็ต A
สมศรี	0.8
สมบัติ	0.3
สมรัก	0.5
สมหมาย	0.9

กรณีที่เซ็ตเอกภพเป็นเอกภพสมบูรณ์หรือเอกภพที่ไม่มีขอบเขต ซึ่งโดยปกติแล้วจะเป็นเซ็ตของจำนวนจริงใดๆ เป็นไปไม่ได้ที่จะระบุค่าความเป็นสมาชิกแบบเรียงเป็นรายชื่อ ตัวอย่างเช่น เอกภพของฟัซซีเซ็ตที่มีค่าประมาณ 6 เป็นเซ็ตของจำนวนจริง เซ็ตเช่นนี้เรียกว่าเป็นจำนวนฟัซซี (Fuzzy Numbers) การนำเสนอค่าความเป็นสมาชิกมักจะอยู่ในรูปของการวิเคราะห์ซึ่งจะเป็นการอธิบายในลักษณะของรูปร่างของจำนวนฟัซซีตัวอย่าง เช่น การอธิบายฟัซซีเซ็ตของตัวเลขที่มีค่าประมาณ 6 สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2-2 สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.2-5)

$$A(x)=\begin{cases} x-5 & \text{when} \quad 5\le x\le 6 \\ 7-x & \text{when} \quad 6\le x\le 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.2.5}$$



รูปที่ 2.2-2 แสดงค่าฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกจำนวนจริงที่มีค่าประมาณ 6

2.3 จำนวนฟัซซี (Fuzzy Numbers)

ในอดีตที่ผ่านมาการคำนวณหาค่าหรือการบอกค่าตัวแปรต่างๆ จะระบุเป็นตัวเลขทั้งสิ้น ซึ่งเรียกตัวแปรเหล่านั้นว่าเป็น ตัวแปรเชิงตัวเลข (Numerical Variables) ในขณะที่ความเป็นจริงแล้ว หลายๆ ครั้งเราไม่สามารถบอกค่าต่างๆ ออกมาเป็นตัวเลขที่แน่นอนได้ หรืออาจไม่ต้องการค่าที่แน่นอนชัดเจนขนาดนั้น ตัวอย่างเช่น เมื่อถูกถามเกี่ยวกับเวลา เรามักจะบอกเวลาในลักษณะของการประมาณเช่น "ประมาณบ่าย 2 โมง" หรือ "ประมาณเกือบแปดโมงครึ่ง" คงไม่มีใครตอบว่า "ขณะนี้เป็นเวลา บ่าย 2 โมง 14 นาที 25 วินาที" หรือในตลาดการชั่งน้ำหนักผลไม้ จะบอกน้ำหนักว่า "หนัก 2 กิโลกรัมกว่า" คงไม่มีใครตอบว่า "หนัก 2.058 กิโลกรัม" เป็นต้น แนวความคิดเกี่ยวกับทฤษฎีฟัซซีเสนอการระบุตัวแปรต่างๆ ในลักษณะที่คลุมเครือ จากตัวอย่างข้างต้นนั้น เรียก "เวลา" ว่าเป็นตัวแปรเชิงภาษา (Linguistic Variables) หรือตัวแปรฟัซซี (Fuzzy Variables) ส่วนคำว่า "ประมาณ" "ใกล้เคียง" "เกือบ" "น้อยมาก" "เล็กน้อย" "ปานกลาง" เป็นต้นนั้น เรียกว่า จำนวนเชิงภาษา หรือ ค่าเชิงภาษา (Linguistic Value)

เมื่อกล่าวในเชิงภาษาของ "ตัวเลขที่มีค่า *ประมาณ 7* " ทราบได้ทันทีว่าเป็นการแสดงจำนวนในรูปฟัซซี ที่เรียกว่าเป็นจำนวนฟัซซีนั่นเอง "ตัวเลขที่มีค่า *ประมาณ 7* " นั้นหมายรวมไปถึงจำนวนใดๆ ที่อยู่ใกล้ๆ 7 ไม่ว่าจะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า 7 ก็ตาม ถ้านำมาเขียนไว้บนเส้นจำนวน จะได้ว่า ค่าความเป็นสมาชิกของตัวเลข จะเป็น 1 ก็ต่อเมื่อตัวเลขนั้นมีค่าเท่ากับค่ากลางคือเท่ากับ 7 พอดี และจะมีค่าลดลงไปตามระยะห่างของตัวเลขนั้นๆ กับ 7 ไปจนถึงมีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 0 ในที่สุด ดังนั้นสรุปได้ว่า จำนวนฟัซซีเป็นการระบุค่าตัวแปรหรือตัวเลขในลักษณะที่คลุมเครือ โดยที่ค่าความเป็นสมาชิกของตัวแปรหรือตัวเลขนั้นจะ เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าตั้งแต่ 1 และลดลงไปเป็น 0 จากค่ากลางไปทางด้านข้าง ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของแกนเส้นจำนวน ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกที่กำหนดขึ้น

พิจารณาฟังก์ชั่นต่อเนื่อง $\alpha = F_A(x)$ โดยที่ x มีค่าตั้งแต่ a_1 ถึง a_2; $[a_1, a_2]$ และ $F_A(a_1) = F_A(a_2) = 0$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชั่นอยู่ที่ $(a_M, 1)$ จำนวนฟัซซี A ถูกนิยามด้วยฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก (Membership Function) ดังนี้

$$A = F_A(x) \qquad (2.3\text{-}1)$$

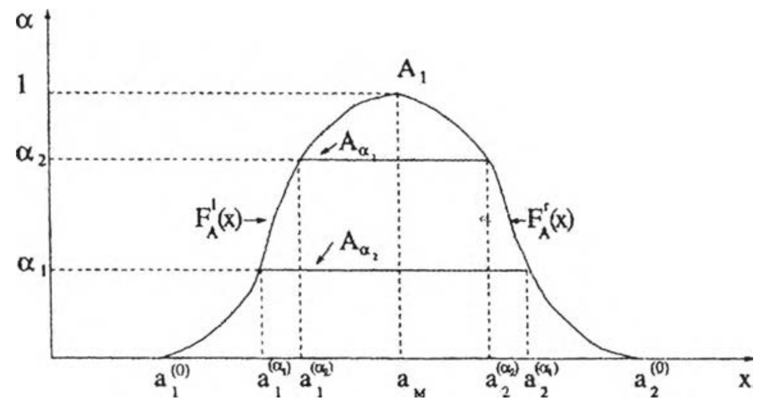
หรือ

$$A : \Re \to [0,1] \qquad (2.3\text{-}2)$$

บางครั้งอาจแสดง ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกในรูปแบบของฟังก์ชั่น ตามสมการที่ (2.3-3)

$$\alpha = F_A(x) = \begin{cases} F_A^l(x) & for \quad a_1 \le x \le a_M, \\ F_A^r(x) & for \quad a_M \le x \le a_2, \end{cases} \tag{2.3-3}$$

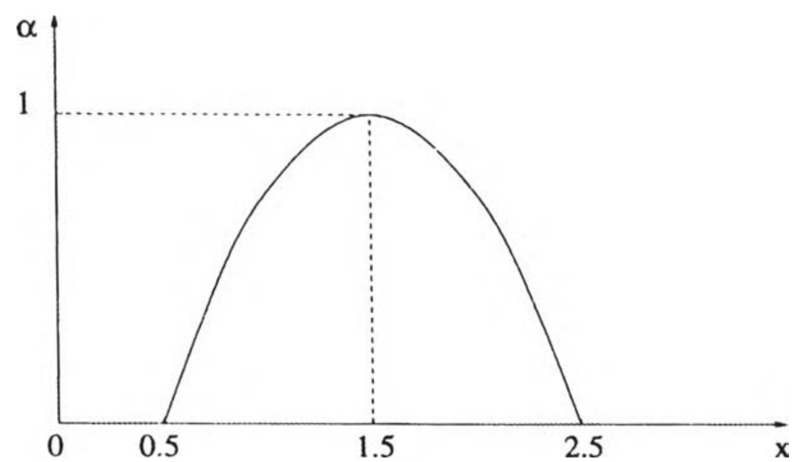
ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3-1



รูปที่ 2.3-1 รูปแสดงฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของจำนวนฟัซซี A

ตัวอย่างเช่น เมื่อให้จำนวนฟัซซี A เซ็ตของจำนวนจริงที่เข้าใกล้ 1.5 สามารถเขียนฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของจำนวนจริงที่เข้าใกล้ 1.5 สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (2.3-4) และรูปที่ 2.3-2

$$\alpha = F_A(x) = -(x-1.5)^2 + 1, \qquad \alpha \in [0,1] \tag{2.3-4}$$

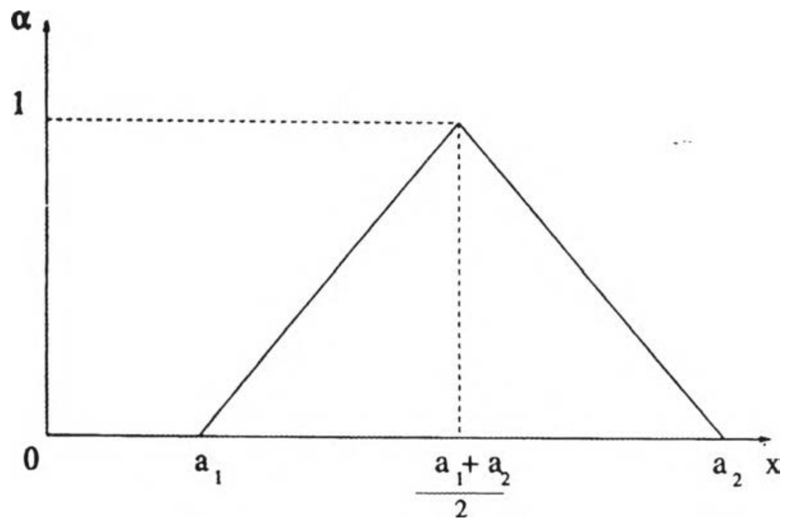


รูปที่ 2.3-2 รูปแสดงจำนวนฟัซซี ของจำนวนจริงที่มีค่าเข้าใกล้ 1.5

จำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยม (Triangular Fuzzy Numbers) เป็นจำนวนฟัซซีที่นิยามนำมาใช้ในระบบการคำนวณ เนื่องจากมีความสะดวกในการนิยามมากกว่าจำนวนฟัซซีแบบอื่น สามารถนิยามได้ด้วยฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกดังสมการที่ (2.3-5)

$$\text{triangle}(x;a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{a_M - a_1} & a_1 \le x \le a_M \\ \dfrac{x-a_2}{a_M - a_2} & a_M \le x \le a_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (2.3\text{-}5)$$

โดยมีจำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยมนี้ จะมีจุดสูงสุดของฟังก์ชั่น เท่ากับ 1 อยู่ที่ $(a_M,1)$ โดยที่ $a_M \in (a_1, a_2)$ โดยถ้า a_M อยู่ที่จุดกึ่งกลางระหว่าง a_1 และ a_2 เราจะเรียกฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกนั้นๆ ว่า จำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยมด้านเท่า "Central Triangular Fuzzy Numbers" ดังรูปที่ 2.3-3



รูปที่ 2.3-3 จำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยมด้านเท่า (Central Triangular Fuzzy Numbers)

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่าจำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยม (Triangular Fuzzy Numbers) นี้เป็นที่นิยม จึงมักพบว่า จำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยมถูกนำไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ เช่น งานด้าน "Managerial Decision Making" ด้านสังคมวิทยา และใช้ในงานด้านวิศวกรรมในการสร้างตัวควบคุมฟัซซีของงานวิจัยนี้ด้วย เนื่องจากมีโครงสร้างที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อน เพียงแต่ระบุค่า 3 ค่า ค่าแรกเป็นจุดที่ฐานด้านซ้ายมีความเป็นสมาชิกเท่า

กับ 0 ค่าที่สองเป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชั่น มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 และค่าที่ 3 เป็นค่าที่อยู่ด้านซ้ายสุดของฟังก์ชั่น มีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 0 แสดงในรูปแบบของเซ็ตเป็น $A=(a_1, a_M, a_2)$

นอกจากจำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยมแล้ว ยังมีจำนวนฟัซซีแบบอื่นๆตัวได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.3-4 แล้ว ซึ่งได้แก่จำนวนฟัซซีแบบแท็ปปีซอยดอล (Trapezoidal Fuzzy Numbers) ก็เป็นจำนวนฟัซซีอีกแบบหนึ่งที่นิยมนำมาประยุกต์ใช้งานจริงมากพอๆ กับจำนวนฟัซซีแบบสามเหลี่ยม เนื่องจากมีสูตรที่ง่ายในการคำนวณ ซึ่งใช้พารามิเตอร์ 4 ตัวในการกำหนดฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกได้แก่ $\{a, b, c, d\}$ โดยที่ $(a < b \le c < d)$ ดังสมการ

$$\text{trapezoid}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.3-5}$$

หรือ

$$\text{trapezoid}(x; a, b, c, d) = \max(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0) \tag{2.3-6}$$

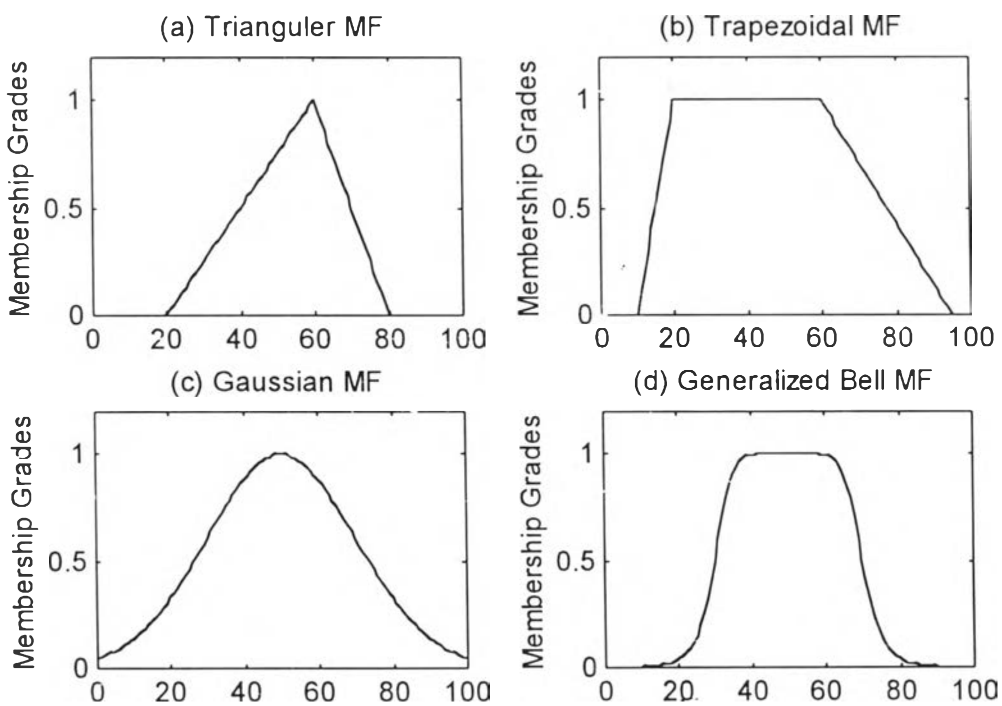
สำหรับระบบบางอย่าง บางครั้งการใช้จำนวนฟัซซีที่เป็นฟังก์ชั่นแบบสามเหลี่ยมและแบบแท็ปปีซอยดอล ทำให้ได้ค่าความเป็นสมาชิกที่ไม่ละเอียดพอเนื่องมาจากค่าที่เปลี่ยนแปลงอย่างไม่สม่ำเสมอในส่วนที่เป็นมุม จึงมีการใช้ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกที่ให้ค่าความเป็นสมาชิกที่สม่ำเสมอกว่า โดยเป็นฟังก์ชั่นแบบไม่เชิงเส้นได้แก่ จำนวนฟัซซีแบบเกาส์เซียน (Gaussian Fuzzy Number) ซึ่งใช้พารามิเตอร์ 2 ตัว $\{c, \sigma\}$ ในการกำหนดฟังก์ชั่นดังสมการ

$$\text{gaussian}(x; c, \sigma) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right) \tag{2.3-7}$$

จำนวนฟัซซีแบบรูประฆังคว่ำทั่วไป (Generalized Bell Fuzzy Numbers) ใช้พารามิเตอร์ 3 ตัว $\{a, b, c\}$ ในการกำหนดรูปร่างของความเป็นสมาชิก ดังสมการ

$$\text{bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1+\left|\dfrac{x-c}{a}\right|^{2b}} \tag{2.3-8}$$

นอกจากนี้แล้ว ยังมีฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกแบบอื่นๆ อีกซึ่งออกแบบตามความเหมาะสมและความต้องการใช้งานในระบบต่างๆ เช่น จำนวนฟัซซีแบบที่มีส่วนแบนดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.3-5 เป็นต้น



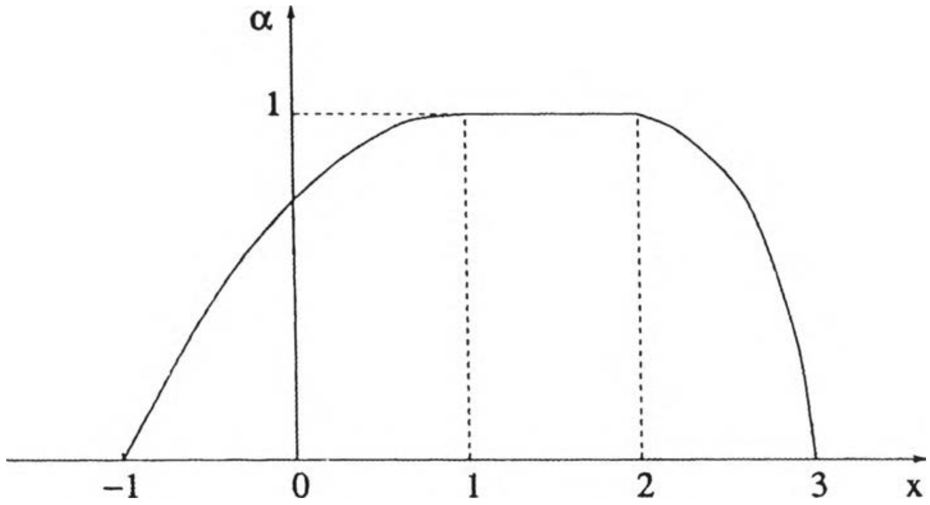
รูปที่ 2.3-4 ฟังก์ชันของจำนวนฟัซซีแบบต่างๆ

a.) แบบรูปสามเหลี่ยม triangle(x;20,60,80)

b.) แบบรูปแท็ปปิซอยดอล trapezoid(x;10,20,60,95)

c.) แบบรูปเกาส์เซียน gaussuan(x;50,20)

d.) แบบรูประฆัง bell(x;20,4,50)



รูปที่ 2.3-5 ฟังก์ชั่นจำนวนฟัซซีแบบซีที่มีส่วนแบน (Fuzzy Numbers With a Flat)

2.4 ฟัซซีเซ็ต (Fuzzy Sets)

เซ็ตปกติ (Classical Set) หรือ คริสพ์เซ็ต (Crisp Set) นั้นจำเป็นต้องมีการบ่งชี้ชัดเจนให้ได้ว่าในเซ็ตนั้นๆ มีตัวใดเป็นสมาชิกบ้าง ลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าความเป็นสมาชิก มีลักษณะที่เป็นไปอย่างฉับพลันและชัดเจน แต่สำหรับฟัซซีเซ็ตแล้ว ลักษณะการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจะมีลักษณะที่ค่อยเป็นค่อยไป ขอบเขตของฟัซซีเซ็ตมีลักษณะที่คลุมเครือไม่ชัดเจน จำนวนฟัซซีจัดเป็นฟัซซีเซ็ตอย่างหนึ่ง มีค่าความเป็นสมาชิกของสมาชิกแต่ละตัวในฟัซซีเซ็ตเป็นค่าเฉพาะตัวของสมาชิกนั้นๆ มักแทนค่าความเป็นสมาชิกของสมาชิกแต่ละตัวในฟัซซีเซ็ตนั้นๆได้ด้วยฟังก์ชันสมาชิก อาจกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่า ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกทำหน้าที่เชื่อมระหว่างสมาชิกนั้นๆในเอกภพและค่าความเป็นสมาชิกของสมาชิกนั้นๆ

นิยามที่ 2.4-1 ฟัซซีเซ็ต (Fuzzy Sets)

ฟัซซีเซ็ตหมายถึง เซ็ตของคู่ลำดับที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซ็ต x และ ดีกรีของความเป็นสมาชิก μ_{A} (Degree of Membership) ของสมาชิกแต่ละตัว ในเซ็ตนั้นๆเช่น ถ้าในขอบเขตของเอกภพ (Universe of Discourse) X มีสมาชิก x อยู่ในเอกภพ X และเป็นสมาชิกในฟัซซีเซ็ต A แล้ว มีค่าความเป็นสมาชิกของ x ในฟัซซีเซ็ต A ซึ่งเขียนแทนได้ด้วย $\mu_{\mathrm{A}}(x) \in [0,1]$ จะสามารถเขียนแสดงฟัซซีเซ็ต A ได้ในรูปของคู่ลำดับระหว่างสมาชิก กับค่าความเป็นสมาชิกของสมาชิกนั้น ได้ดังสมการที่ (2.4-1)

$$A = \{\ (x, \mu_{\mathrm{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\mathrm{A}}(x) \in [0,1]\ \} \tag{2.4-1}$$

โดยปกติแล้วเซ็ตเอกภพอาจประกอบไปด้วยสมาชิกที่มีลักษณะเป็นดีสครีต (Discrete Universe) ซึ่งแบ่งได้เป็นแบบที่เป็นลำดับ (Discrete Non-ordered Universe) หรือแบบที่ไม่เป็นลำดับ (Discrete Ordered Universe) หรือเป็นเอกภพแบบต่อเนื่อง (Continuous Universe) ก็ได้ ดังนั้นจึงการเขียนฟัซซีเซ็ตที่มีเอกภพในลักษณะต่างๆ กัน

ตัวอย่างที่ 2.4-1 พิจารณาฟัซซีเซ็ตที่มีเอกภพเป็นแบบดีสครีตไม่เรียงลำดับ (Discrete Non-ordered Universe)

กำหนดให้ X = {กรุงเทพ, เชียงใหม่, ลำพูน} เป็นเซ็ตของเมืองที่คนจะเลือกอยู่อาศัย

C = "เมืองที่คนต้องการอยู่อาศัย"

สามารถเขียนฟัซซีเซ็ต C ได้ดังนี้

$$C = \{(\text{กรุงเทพ},0.9), (\text{เชียงใหม่},0.8), (\text{ลำพูน},0.5)\} \tag{2.4-2}$$

จะเห็นได้ว่า ในที่นี้ เอกภพ X เป็นเอกภพแบบดีสครีตที่มีสมาชิกที่ไม่เป็นแบบเรียงลำดับ กล่าวคือ ไม่จำเป็นที่จะต้องเรียงชื่อเมืองใดก่อนหน้าเมืองใด สามารถเรียงได้ตามใจชอบ

ตัวอย่างที่ 2.4-2 พิจารณาฟัซซีเซ็ตที่มีเอกภพเป็นแบบดีสครีตเรียงลำดับ (Discrete Ordered Universe) ให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ เป็นแต่ละเดือนใน 6 เดือนแรกของปี และให้ฟัซซีเซ็ต A เป็น "เดือนที่แดดแรงจัด" จะสามารถเขียนอธิบายฟัซซีเซ็ต A ได้เป็น

$$A = \{(1,0.2), (2,0.2), (3,0.7), (4,1), (5,0.9), (6,0.8), (7,0.7)\} \tag{2.4-3}$$

ตัวอย่างที่ 2.4-3 พิจารณาฟัซซีเซ็ตที่มีเอกภพเป็นแบบดีสครีตเรียงลำดับ (Continuous Universe) ให้ $X = R^{+}$ เป็นอายุของมนุษย์ และให้ฟัซซีเซ็ต B หมายถึง "อายุประมาณ 50 ปี" ซึ่งสามารถอธิบายได้เป็น

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\} \tag{2.4-4}$$

เมื่อ $$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$$

จากตัวอย่างข้างต้นจะสังเกตได้ว่า การสร้างฟัซซีเซ็ตเพื่อใช้ในระบบฟัซซีจะขึ้นอยู่กับ 2 องค์ประกอบด้วยกัน คือ การเลือกเอกภพที่เหมาะสม และการเลือกฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกที่เหมาะสมซึ่งขึ้นอยู่กับวิจารณญาณและประสบการณ์ของแต่ละคนเป็นสำคัญ สำหรับวิธีการเขียนฟัซซีเซ็ต A สำหรับกรณีของเอกภพแบบดีสครีต อาจจะเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i \tag{2.4-5}$$

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \tag{2.4-6}$$

ส่วนในกรณีที่เป็นเอกภพแบบต่อเนื่องและมีการเขียนฟัซซีเซ็ต A เขียนได้ในรูปของ

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \quad \text{หรือ} \quad A = \int \frac{\mu_A(x)}{x} \tag{2.4-7}$$

โดยที่ '+', '$\sum$ ' และ '$\int$ ' จะหมายถึง การรวมกันของเซ็ตคู่ลำดับ และ '—' จะหมายถึงตัวเชื่อมของสมาชิกกับค่าความเป็นสมาชิกของมัน ไม่ได้มีความหมายทางพีชคณิตแต่อย่างใด ดังนั้นถ้านำตัวอย่างที่ผ่านมา มาเขียนแสดงในลักษณะนี้ จะแสดงได้ตามลำดับ ดังนี้

$$C = 0.9/\text{กรุงเทพ} + 0.8/\text{เชียงใหม่} + 0.5/\text{ลำพูน} \tag{2.4-8}$$

$$A = 0.2/1 + 0.2/2 + 0.7/3 + 1/4 + 0.9/5 + 0.8/6 + 0.7/7 \tag{2.4-9}$$

$$B = \int_{R+} \frac{\dfrac{1}{1+(\frac{x-50}{10})^4}}{x} \tag{2.4-10}$$

พังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ตที่อยู่ในเอกภพต่อเนื่อง มีส่วนประกอบต่างๆ ที่นิยามขึ้นเพื่อให้ในการพิจารณาฟังก์ชั่นอยู่หลายส่วน สามารถแบ่งแยกย่อยได้ดังนี้

นิยามที่ 2.4-2 ซัพพอร์ท (Support)

ซัพพอร์ท ของฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ต A ก็คือ เซ็ตของจุด x ทุกจุด ในเอกภพ X ที่มีความเป็นสมาชิก (μ_A) มากกว่า 0

$$\text{support}(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\} \tag{2.4-11}$$

นิยามที่ 2.4-3 คอร์ (Core)

คอร์ ของฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ต A ก็คือ เซ็ตของจุด x ทุกจุด ในเอกภพ X ที่มีความเป็นสมาชิกเท่ากับ 1

$$\text{core}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\} \tag{2.4-12}$$

นิยามที่ 2.4-4 ฟัซซีเซ็ตมาตรฐาน (Normal Fuzzy Sets)

ฟัซซีเซ็ต A ใดๆ จะเป็นฟัซซีเซ็ตมาตรฐานก็ต่อเมื่อ แกนของฟัซซีเซ็ตนั้นๆ จะต้องไม่เป็นเซ็ตว่าง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า สามารถหาจุด $x \in X$ ที่ $\mu_A(x) = 1$

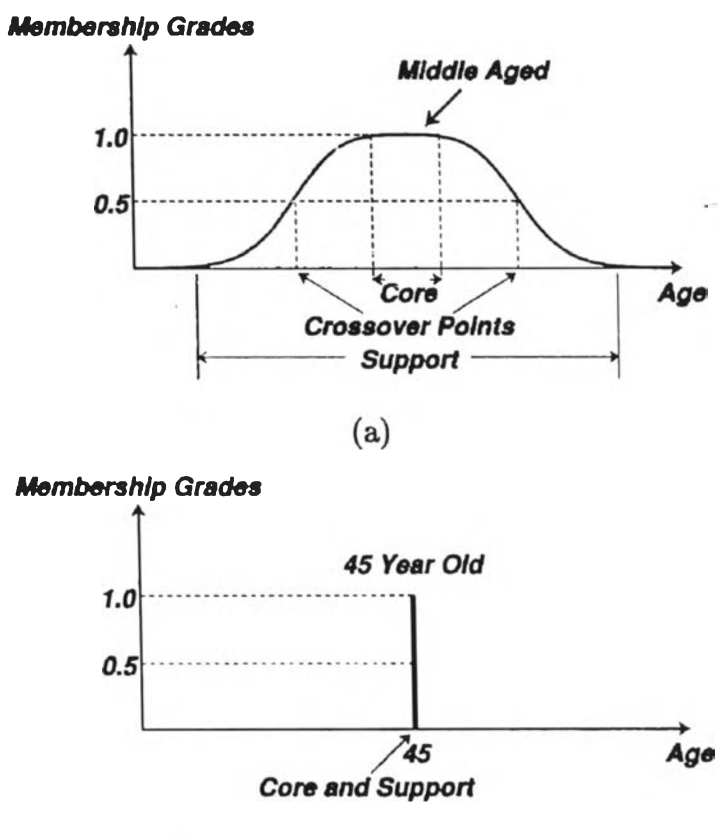
นิยามที่ 2.4-5 จุดคอร์สโอเวอร์ (Crossover points)

จุดคอร์สโอเวอร์ ของฟัซซีเซ็ต A คือจุด x $x \in X$ ที่มีค่าความเป็นสมาชิกเป็น 0.5

$$\text{crossover}(A) = \{x \mid \mu_A(x) = 0.5\} \tag{2.4-13}$$

นิยามที่ 2.4-6 ฟัซซีซิงเกลตัน (Fuzzy Singleton)

ฟัซซีซิงเกลตัน คือ ฟัซซีเซ็ตที่มีซัพพอร์ท เป็นจุดๆ เดียวในเอกภพ X และมี $\mu_A(x) = 1$



รูปที่ 2.4-1 รูปแสดงถึง คอร์, ซัพพอร์ท, จุดคอร์สโอเวอร์ ของฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของ ฟัซซีเซ็ต A ที่อธิบาย "วัยกลางคน" และแสดง ฟัซซีซิงเกิลตัน ของ "อายุ 45 ปี"

นิยามที่ 2.4-7 อัลฟา-คัท ($\alpha - \mathrm{cut}$)

อัลฟา-คัท ($\alpha - \mathrm{cut}$ หรือ $\alpha - \mathrm{level\ set}$) ของฟัซซีเซ็ตใดๆ คือ เซ็ตปกติของ x ที่มีความความเป็นสมาชิกมากกว่าหรือเท่ากับ α (alpha)

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad (2.4\text{-}14)$$

นิยามที่ 2.4-8 สตรอง อัลฟา-คัท (Strong α - cut **หรือ** Strong α – level set)

สตรอง อัลฟา-คัท ของฟัซซีเซ็ตใดๆ คือ เซ็ตปกติของ x ที่มีความความเป็นสมาชิกมากกว่า α (alpha)

$$A'_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\} \qquad (2.4\text{-}15)$$

นิยามที่ 2.4-9 ความโค้งนูน (Convexity)

ฟัซซีเซ็ต A จะเรียกว่ามีความโค้งนูน (Convex) ก็ต่อเมื่อ $x_1, x_2 \in X$ และโดยที่ $\lambda \in [0,1]$ หรือเมื่อ ทุกๆ อัลฟา-คัท มีความโค้งนูน

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \qquad (2.4\text{-}16)$$

นิยามที่ 2.4-10 ความกว้างของแบบของฟัซซีเซ็ตมาตรฐานและโค้งนูน (Bandwidths of Normal and Convex Fuzzy Sets)

ฟัซซีเซ็ตมาตรฐาน และ โค้งนูน จะมี ความกว้าง (Width) หรือความกว้างของแบนเสมอ ซึ่งหมายถึง ช่วงความกว้างระหว่างจุดคอร์โอเวอร์หนึ่งไปยังจุดคอร์สโอเวอร์ที่อยู่อีกด้านหนึ่ง

$$\mathrm{width}(A) = |x_2 - x_1| \qquad (2.4\text{-}17)$$

เมื่อ $\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2) = 0.5$

นิยามที่ 2.4-11 ความสมมาตร (Symmetry)

ฟัซซีเซ็ตใดๆ จะสมมาตรที่เส้น $x = c$ ที่ค่าความเป็นสมาชิกที่เท่ากันทั้ง 2 ด้านของฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก

$$\mu_A(c+x) = \mu_A(c-x) \quad \text{สำหรับทุกๆ } x \in X \tag{2.4-18}$$

นิยามที่ 2.4-12 การเปิดซ้าย การเปิดขวา และการปิด (Open left, Open right, Closed)

ฟัซซีเซ็ต A จะเป็น ฟัซซีเซ็ตที่เปิดซ้าย เมื่อ $\lim_{x\to-\infty} \mu_A(x) = 1$ และ $\lim_{x\to+\infty} \mu_A(x) = 0$

ฟัซซีเซ็ต A จะเป็น ฟัซซีเซ็ตที่เปิดขวา เมื่อ $\lim_{x\to-\infty} \mu_A(x) = 0$ และ $\lim_{x\to+\infty} \mu_A(x) = 1$

ฟัซซีเซ็ต A จะเป็น ฟัซซีเซ็ตที่ปิด เมื่อ $\lim_{x\to-\infty} \mu_A(x) = \lim_{x\to+\infty} \mu_A(x) = 0$

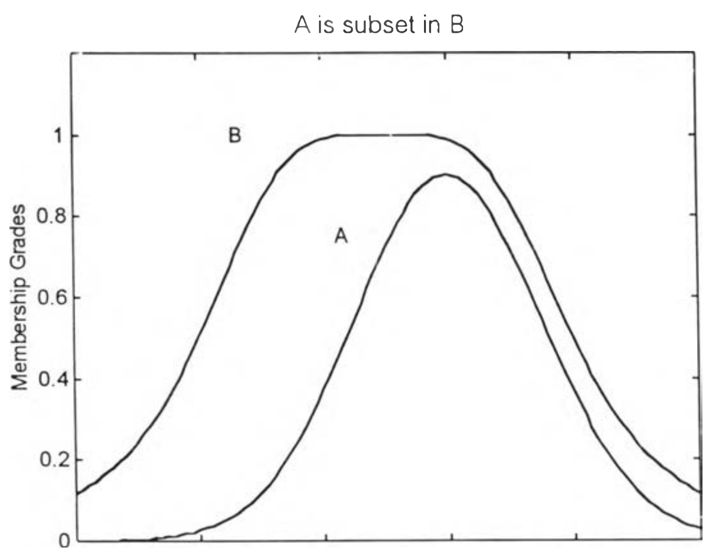
2.5 การดำเนินการของฟัซซีเซ็ต (Fuzzy Set Operations)

การดำเนินการของฟัซซีเซ็ต มีหลักการมาจากการดำเนินการของเซ็ตปกติ ได้แก่ การดำเนินการยูเนียน (Union) การดำเนินการอินเตอร์เซคชั่น (Intersection) และการดำเนินการคอมพลีเมนท์ (Complement) สมมติให้ ฟัซซีเซ็ต A และ B เป็นฟัซซีเซ็ตของเอกภพ X โดยมี x เป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ตในเอกภพ X การดำเนินการของฟัซซีเซ็ตจะสามารถนิยามได้โดย A, B และ C บน X ดังนี้

นิยามที่ 2.5-1 สับเซต (Subset)
ฟัซซีเซ็ต A จะเป็นสับเซ็ตของฟัซซีเซ็ต B ก็ต่อเมื่อ ค่าความสมาชิกของฟัซซีเซ็ต A ทุกตัวมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ ค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ต B

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad (2.5\text{-}1)$$

ดังแสดงในรูปที่ 2.5-2



รูปที่ 2.5-1 ฟัซซีเซ็ต A เป็นสับเซ็ตของฟัซซีเซ็ต B ($A \subseteq B$)

นิยามที่ 2.5-2 การยูเนียน (Union (Disjunction))
ฟัซซีเซ็ต A ยูเนียน ฟัซซีเซ็ต B ได้ผลลัพธ์เป็นฟัซซีเซ็ต C ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น $C = A \cup B$ หรือ $C = A$ OR B โดยที่

$$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad (2.5\text{-}2)$$

นิยามที่ 2.5-3 อินเตอร์เช็คชั่น (Intersection (Conjuction))
ฟัซซีเซ็ต A อินเตอร์เซ็ค ฟัซซีเซ็ต B ได้ผลลัพธ์เป็นฟัซซีเซ็ต C ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น $C = A \cap B$ หรือ $C = A$ AND B โดยที่

$$\mu_{\mathrm{C}}(x) = \min(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(x)) = \mu_{\mathrm{A}}(x) \wedge \mu_{\mathrm{B}}(x) \qquad (2.5\text{-}3)$$

นิยามที่ 2.5-4 คอมพลีเมนท์ (Complement (Negation))
คอมพลีเมนท์ของฟัซซีเซ็ต A เขียนได้เป็น $\overline{A}$ $(\neg A, \mathrm{NOT}\ A)$ คือ

$$\overline{\mu}_{\mathrm{A}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x) \qquad (2.5\text{-}4)$$

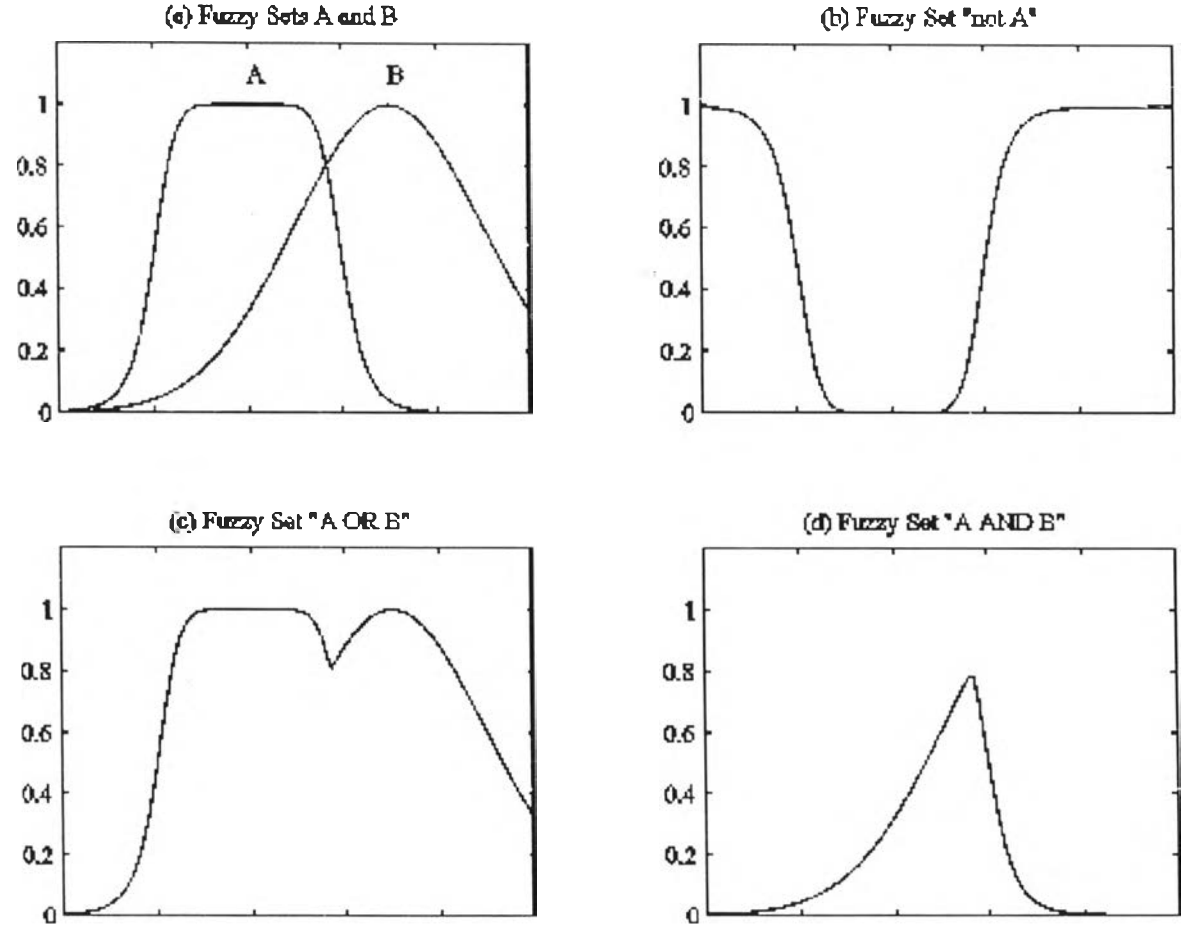
นิยามที่ 2.5-5 ผลคูณคาร์ทีเชียน และ โค-โปรดักส์ (Cartesian product and co-product)
สมมติให้ A และ B เป็นฟัซซีเซ็ต ในเอกภพ X และ Y ตามลำดับ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B เป็น $A \times B$ ก็คือฟัซซีเซ็ตในปริภูมิโปรดักส์ (Product space) $X \times Y$ ที่มีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ

$$\mu_{\mathrm{A\times B}}(x, y) = \min(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(y)) \qquad (2.5\text{-}5)$$

เช่นเดียวกัน โค-โปรดักส์ $A + B$ ก็คือฟัซซีเซ็ต ที่มีความเป็นสมาชิกเท่ากับ

$$\mu_{\mathrm{A+B}}(x, y) = \max(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(y)) \qquad (2.5\text{-}6)$$

ทั้งผลคูณคาร์ทีเซียน ($A \times B$) และ โค-โปรดักส์ ($A + B$) ต่างก็สร้างมาจากฟัซซีเซ็ต 2 เซ็ตซึ่งต่างก็มีลักษณะเป็นฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก 2 มิติ



รูปที่ 2.5-2 แสดงการดำเนินการฟัซซีเซ็ตแบบต่างๆ

a) แสดงฟัซซีเซ็ต A และ ฟัซซีเซ็ต B b) ฟัซซีเซ็ต A คอมพลีเมนท์

c) ฟัซซีเซ็ต A ยูเนียน B d) ฟัซซีเซ็ต A อินเตอร์เซ็ท B

2.6 ความสัมพันธ์ฟัซซี (Fuzzy Relations)

เมื่อกล่าวถึงความสัมพันธ์ฟัซซีก็จะเปรียบเทียบไปในทำนองเดียวกับเรื่องของฟัซซีเซ็ตที่มีพื้นฐานมาจากเซ็ตธรรมดา ความสัมพันธ์คณิตศาสตร์แบบธรรมดา (Classical Relations) ของเซ็ตใดๆ ตั้งแต่ 2 เซ็ตขึ้นไป จะระบุว่ามีความสัมพันธ์กันก็ต่อเมื่อในแต่ละเซ็ตมีสมาชิกที่เป็นสมาชิกร่วมกันอยู่ แต่ถ้าเป็นความสัมพันธ์แบบฟัซซีจะเป็นการกล่าวถึงระดับของความสัมพันธ์ที่มีอยู่ระหว่างเซ็ตนั้นๆ ว่ามีความสัมพันธ์กันมากน้อยหรือไม่มีความสัมพันธ์กันเลย ความสัมพันธ์ฟัซซีก็คือฟัซซีเซ็ตที่นิยามบนเซ็ตเอกภพที่เป็นผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ให้ A และ B แทนเซ็ตใดๆ ที่ไม่ใช่เซ็ตว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product) ของ A และ B เขียนแทนได้ด้วย $A \times B$ หมายถึงเซ็ตของคู่ลำดับ (x, y) ใดๆ โดยที่ x เป็นสมาชิกในเซ็ต A และ y เป็นสมาชิกในเซ็ต B สามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \qquad (2.6\text{-}1)$$

ผลคูณคาร์ทีเซียนแล้ว ลำดับในการเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนที่ต่างๆ กัน จะให้ความหมายที่แตกต่างกัน กล่าวคือ ถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$ แต่ถ้า $A = B$ แล้ว $A \times B = B \times A$ หรือจะเขียนเป็น A^2 หรือ B^2 ก็ได้

จากกรณีข้างต้นเป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ต 2 เซ็ต แต่ถ้าเป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซ็ต n เซ็ต $U_1, U_2, \ldots, U_n$ เขียนแทนได้ด้วย $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ จะเป็นคู่ลำดับ $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ โดยที่ $u_i \in U_i$ เมื่อ $i = \{1, 2, \ldots n\}$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ (2.6-2) ดังนี้

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \ldots, u_n \in U_n\} \qquad (2.6\text{-}2)$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ฟัซซีบน ปริภูมิคาร์ทีเซียน $A \times B$ เขียนแทนด้วย R หรือ $R(x, y)$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างเซ็ต 2 เซ็ต เรียกว่าเป็นความสัมพันธ์ฟัซซีแบบไบนารี (Binary Fuzzy Relation) จะสามารถนิยามได้เป็นเซ็ตของคู่ลำดับบนผลคูณคาร์ทีเซียนกับค่าความเป็นฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของคู่ลำดับที่สัมพันธ์กันนั้น ดังสมการที่ (2.6-3)

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in A \times B, \mu_R(x, y) \in [0, 1] \qquad (2.6\text{-}3)$$

เมื่อ $\mu_R(x,y)$ เป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร 2 ตัวแปร คือ x และ y เรียกว่า ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก ซึ่งเป็นตัวบอกระดับความสัมพันธ์ของสมาชิกของคู่ลำดับ (x,y) ในปริภูมิคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์ฟัซซี R มีค่านี้ก็เช่นเดียวกับค่าความเป็นสมาชิกของฟัซซีเซ็ต คือมีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ฟัซซีนี้ เป็นตัวบ่งบอกถึง ความเป็นสมาชิกในเซ็ตความสัมพันธ์ $A \times B$

สำหรับความสัมพันธ์ฟัซซีระหว่างเซ็ตจำนวน n เซ็ต Q เป็นฟัซซีเซ็ตบนปริภูมิคาร์ทีเซียนของ เซ็ตปกติ $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ก็คือคู่ลำดับระหว่างผลคูณคาร์ทีเซียนนั้นๆ กับค่าความเป็นสมาชิกในความสัมพันธ์นั้นสามารถเขียนแสดงได้ด้วยสมการดังนี้

$$Q = \{((u_1, u_2, \ldots, u_n), \mu_Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)) \mid (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n\} \qquad (2.6\text{-}4)$$

ตัวอย่างที่ 2.6-1 เมื่อให้ $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ เป็นเซ็ตของเป้าหมายที่จะเดินทางจากจุฬาไปยัง {สยามสแควร์, อนุสาวรีย์ชัยฯ, สวนจตุจักร, สนามบินดอนเมือง} และให้ $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ เป็นเซ็ตของวิธีการเดินทางไปยังจุดหมายนั้นๆ {เดิน, จักรยาน, รถเมล์, รถส่วนบุคคล} ส่วน $\mu_R(x,y)$ มีความสัมพันธ์ฟัซซีของความสามารถที่จะเดินทางจากจุฬาฯไปถึงจุดหมายนั้นๆด้วยวิธีการนั้นๆอย่างรวดเร็ว จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ฟัซซีสามารถแสดงได้เป็น

$$R = \begin{matrix} \{\ ((x_1, y_1), 0.5), & ((x_1, y_2), 0.6), & ((x_1, y_3), 0.8), & ((x_1, y_2), 1), \\ ((x_2, y_1), 0.4), & ((x_2, y_2), 0.5), & ((x_2, y_3), 0.6), & ((x_2, y_4), 0.7), \\ ((x_3, y_1), 0.2), & ((x_3, y_2), 0.3), & ((x_3, y_3), 0.5), & ((x_3, y_4), 0.6), \\ ((x_4, y_1), 0), & ((x_4, y_2), 0.2), & ((x_4, y_3), 0.4), & ((x_4, y_4), 0.5)\ \} \end{matrix} \qquad (2.6\text{-}5)$$

จากความสัมพันธ์ฟัซซีที่ได้ หมายความว่า

"ความสามารถที่จะเดินทางอย่างรวดเร็วจากจุฬาฯไปถึงสนามบินดอนเมือง (x_4) ด้วยวิธีการเดิน (y_1)" มีค่าความเป็นสมาชิก $\mu_R(x_4, y_1)$ เป็น 0 หรือ

"ความสามารถที่จะเดินทางอย่างรวดเร็วจากจุฬาฯไปถึงสยามสแควร์ (x_1) ด้วยรถเมล์ (y_3)" มีค่าความเป็นสมาชิก $\mu_R(x_1, y_3)$ เป็น 0.8 เป็นต้น

นอกจากนี้ยังมีการเขียนแสดงเป็นตารางในรูปของเมตริกได้ ดังนี้

$$
R \triangleq \begin{array}{c|cccc}
{}_{x}\backslash^{y} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
\hline
x_1 & 0.5 & 0.6 & 0.8 & 1 \\
x_2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\
x_3 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.6 \\
x_4 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.5
\end{array} \qquad (2.6\text{-}6)
$$

ตัวอย่างที่ 2.6-2 ให้ $X = Y = R^{+}$ (เป็นจำนวนจริงบวกบนเส้นจำนวน) และให้ความสัมพันธ์ $R =$ "y มีค่ามากกกว่า x มาก" ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ R นิยามไว้ดังนี้

$$
\mu_R(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y - x}{x + y + 2}, & \text{if} \quad y > x \\ 0 \quad , & \text{if} \quad y \le x \end{cases} \qquad (2.6\text{-}7)
$$

ถ้า $X = \{3,4,5\}$ และ $Y = \{3,4,5,6,7\}$ แล้ว สามารถแสดงความสัมพันธ์ฟัซซี R ได้ในรูปแบบของเมตริกความสัมพันธ์ ดังนี้

$$
R = \begin{bmatrix} 0 & 0.111 & 0.200 & 0.273 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.091 & 0.167 & 0.231 \\ 0 & 0 & 0 & 0.077 & 0.143 \end{bmatrix} \qquad (2.6\text{-}8)
$$

ตัวอย่างที่ 2.6-3 พิจารณาความสัมพันธ์ฟัซซีแบบไบนารีที่อยู่ในเอกภพ $U=\{1,2,3\}$

ความเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ฟัซซี $R(u,v)$ ที่ "ค่า u มีค่าใกล้เคียงกับ v" ("u is approximately equal to v" หรือ "u is close to v") ในรูปของคู่อันดับของผลคูณคาร์ทีเซียน (Order pairs of the relevant Cartesian products)

$$
\begin{array}{llll}
R(1,1) & R(2,2) & R(3,3) = 1 & \\
R(1,2) & R(2,1) & R(2,3) = R(3,2) & 0.8 \\
R(1,3) & R(3,1) & 0.6 &
\end{array}
$$

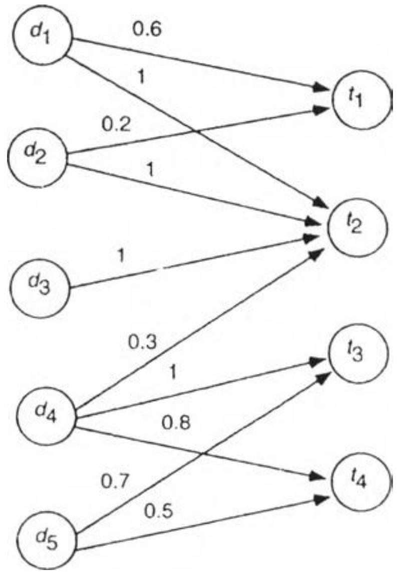
ความเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ฟัซซี R สามารถเขียนเป็น "ฟังก์ชั่นความสัมพันธ์"

$$R(u,v)=\begin{cases}1 & if \quad u=v\\ 0.8 & if \quad |u-v|=1\\ 0.6 & if \quad |u-v|=2\end{cases} \tag{2.6-9}$$

และสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ในรูปของ "เมตริก" ดังนี้

$$R(u,v)=\begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0.8 & 0.6\\ 2 & 0.8 & 1 & 0.8\\ 3 & 0.6 & 0.8 & 1\end{pmatrix} \tag{2.6-10}$$

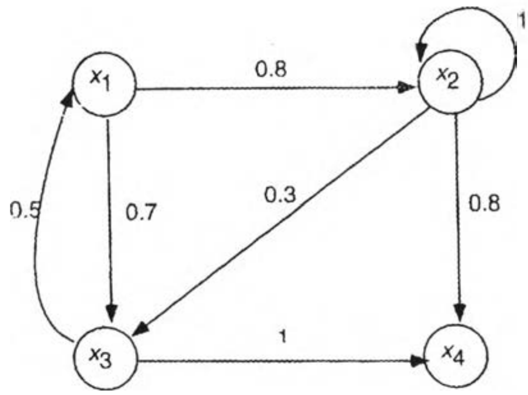
จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการเขียนความสัมพันธ์ฟัซซี "u มีค่าใกล้เคียงกับ v" ในปริภูมิยูคลิด-เดียน (Euclidean Space) แบบ 2 มิติ นอกจากจะแสดงความสัมพันธ์ได้ในรูปแบบของคู่อันดับ ฟังก์ชั่นความสัมพันธ์ และเมตริกแล้ว ในกรณีที่ความสัมพันธ์ฟัซซีที่เป็น n มิติ ในปริภูมิยูคลิดเดียน ที่มากกว่า 2 มิติ คือ $n \geq 2$ ยังมีการเขียนความสัมพันธ์ในรูปแบบอื่นๆตามความเหมาะสมอีก เช่น สามารถเขียนในลักษณะของการแมพปิ้งส์ (Mappings) ซึ่งเป็นการแสดงความสัมพันธ์ที่ชัดเจนโดยการขีดเส้นเชื่อมระหว่างสมาชิกแต่ละคู่อันดับในแผนผังดังแสดงในรูปที่ 2.6.1



รูปที่ 2.6-1 ภาพแสดงความสัมพันธ์ฟัซซีในลักษณะของการใช้แผนผังแมพปิ้งส์ (Mapping Diagram)

จากรูปที่ 2.6.1 เป็นการแสดงความสัมพันธ์ฟัซซี ระหว่างเซ็ต D = {d1, d2, d3, d4, d5} และเซ็ต T = {t1, t2, t3, t4} อธิบายได้ว่า ความสัมพันธ์ฟัซซีที่เซ็ต D มีความเกี่ยวข้องกับเซ็ต T เช่น d1 มีความเกี่ยวข้องกับ t1 เป็น 0.6 ในขณะที่ d1 มีความเกี่ยวข้องกับ t2 เป็น 1 เป็นต้น

การแสดงความสัมพันธ์ฟัซซีในลักษณะของไดเร็กเท็ดกราฟ (Directed Graph) เป็นการแสดงความสัมพันธ์โดยการเชื่อมต่อกันระหว่างโนด (Node) ต่างๆในกราฟ และสามารถเขียนค่าความเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ได้โดยตรงจากการลากเส้นเชื่อมโยงในคู่อันดับที่ต้องการระบุ ดังรูปที่ 2.5.2 เป็นการแสดงความสัมพันธ์ฟัซซีบนปริภูมิ X เมื่อ X = {x1, x2, x3, x4}



รูปที่ 2.6-2 รูปแสดงความสัมพันธ์ฟัซซีในลักษณะของ ไดเร็กเท็ดกราฟ (Directed Graph)

ตัวอย่างเหตุการณ์ของการใช้ความสัมพันธ์ฟัซซีในลักษณะต่างๆ ได้แก่

- x อยู่ใกล้กับ y (กรณีที่ x และ y เป็นตัวเลข)
- x ขึ้นกับ y (กรณีที่ x และ y เป็นเหตุการณ์)
- x มีลักษณะคล้ายกันกับ y (กรณีที่ x และ y เป็นบุคคล หรือ สิ่งของ)
- x ถ้า มีค่ามาก แล้ว ให้ y มีค่าน้อย (กรณีที่ x เป็นการสังเกตการณ์ใดๆ และ y เป็นการตอบสนองต่อเหตุการณ์นั้นๆ)

2.6.1 การดำเนินการของความสัมพันธ์ฟัซซี (Basic Operations on Fuzzy Relations)

ความสัมพันธ์ฟัซซีมีบทบาทสำคัญต่อการประยุกต์ใช้งานในระบบฟัซซี เพราะเป็นตัวอธิบายความสัมพันธ์ที่มีต่อกันระหว่างตัวแปรภายในระบบฟัซซีโดยใช้การดำเนินการฟัซซี จะสังเกตได้ว่าความสัมฟันธ์ฟัซซีจัดเป็นฟัซซีเซ็ตอย่างหนึ่งเพียงแต่เป็นฟัซซีเซ็ตที่มีฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก 2 มิติ ดังนั้นการดำเนินการทั่วไปจึงใช้หลักการเดียวกับฟัซซีเซ็ต

ให้ R_1 และ R_2 เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบนปริภูมิ $A \times B$

$$R_1 = \{((x,y), \mu_{R_1}(x,y))\}, \quad (x,y) \in A \times B \tag{2.6-11}$$

$$R_2 = \{((x,y), \mu_{R_1}(x,y))\}, \quad (x,y) \in A \times B \tag{2.6-12}$$

นิยามที่ 2.6-1 ความเท่ากัน (Equality)

ความสัมพันธ์ฟัซซี R_1 จะเท่ากันกับ ความสัมพันธ์ฟัซซี R_2 ($R_1 = R_2$) ก็ต่อเมื่อ คู่ลำดับทุกตัวในผลคูณคาร์ทีเชียนมีค่าความเป็นสมาชิกเท่ากัน

$$\mu_{R_1}(x,y) = \mu_{R_2}(x,y) \qquad \text{เมื่อ } (x,y) \in A \times B \tag{2.6-13}$$

นิยามที่ 2.6-2 การอินเตอร์เซ็คชัน (Interscction)

เมื่อสัมพันธ์ฟัซซี R_1 อินเตอร์เซ็ทกับความสัมพันธ์ฟัซซี R_2 จะได้

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \min\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y) \tag{2.6-14}$$

นิยามที่ 2.6.3 การยูเนียน (Union)

เมื่อสัมพันธ์ฟัซซี R_1 ยูเนียนกับความสัมพันธ์ฟัซซี R_2 จะได้

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) = \max\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y) \tag{2.6-15}$$

นิยามที่ 2.6.4 การคอมพลีเมนต์ (Complementation)

คอมพลีเมนท์ของความสัมพันธ์ฟัซซี R เขียนได้เป็น $\overline{R}$ คือ

$$\mu_{R}(x,y) = 1 - \mu_{R}(x,y) \tag{2.6-16}$$

2.6.2. การขยายและการโปรเจคชั่นของความสัมพันธ์ฟัซซี (Projections and Cylindric Extension)

ในบางกรณีที่ต้องการใช้ฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกของอินพุท 2 ตัวใดๆ โดยที่อินพุท 2 ตัวนั้นอยู่ต่างเอกภพกัน มีวิธีการง่ายๆที่ใช้ในการเปลี่ยนจากฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกที่เป็นมิติเดียว จากเอกภพหนึ่งไปสู่อีกเอกภพหนึ่ง ได้เป็นฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกที่มีลักษณะเป็น 2 มิติ การดำเนินการนี้เรียกว่า การขยายแบบทรงกระบอก (Cylindric Extension)

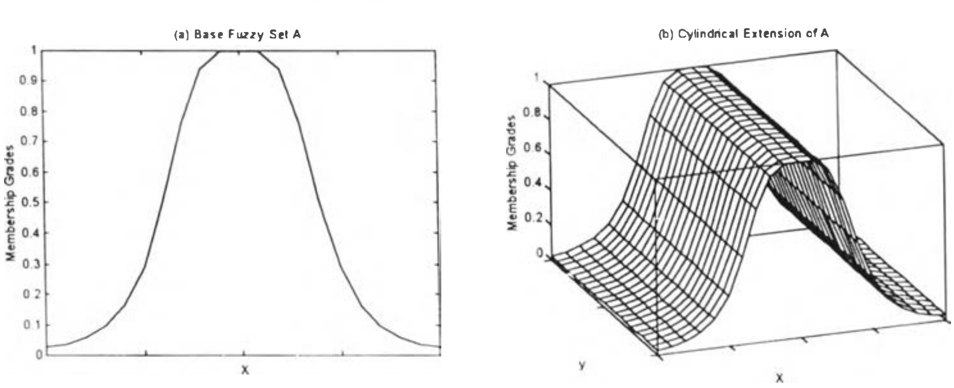
นิยามที่ 2.6.2-1 การขยายแบบทรงกระบอก (Cylindric Extension)

ถ้าให้ A เป็น ฟัซซีเซ็ตในเอกภพ X แล้ว การขยายแบบทรงกระบอกไปสู่ เอกภพ $X \times Y$ ของฟัซซีเซ็ต A จะได้เป็นฟัซซีเซ็ตใน $X \times Y$

$$c(A) = \int_{X \times Y} \mu_A(x)/(x,y) \qquad (2.6\text{-}17)$$

ในกรณีที่เป็นการขยายแบบทรงกระบอกของความสัมพันธ์ฟัซซีหลายมิติ ถ้าให้ Q เป็น ความสัมพันธ์ฟัซซีบนผลคูณคาร์ทีเซียน $U_{i1} \times \cdots \times U_{ik}$ โดยที่ $\{i_1, \ldots, i_k\}$ หมายถึงจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n แล้ว การขยายแบบทรงกระบอกของ Q ไปยัง $U_1 \times \cdots \times U_n$ จะได้เป็นความสัมพันธ์ฟัซซี Q_C

$$c(Q) = \int_{U_1 \times \cdots \times U_n} \mu_Q(u_{i1}, \ldots, u_{ik})/(u_1, \ldots, u_n) \qquad (2.6\text{-}18)$$



รูปที่ 2.6-3 แสดงฟัซซีเซ็ต A การขยายแบบทรงกระบอกของฟัซซีเซ็ต A ไปบน $X \times Y$

จากรูปที่ 2.6-3 เป็นภาพแสดงการขยายแบบทรงกระบอกของฟัซซีเซ็ต A ซึ่งเป็นฟัซซีเซ็ตมิติเดียวจาก ปริภูมิ X ไปสู่ปริภูมิ $X \times Y$ ในทางกลับกัน เมื่อมีการขยายแบบทรงกระบอก ก็มีการโปรเจคชั่น ซึ่งการโปรเจ็คชั่นนั้นเป็นการโปรเจคฟัซซีเซ็ตหรือความสัมพันธ์นั้นๆไปบนปริภูมิใดๆ โดยทั่วไปที่เห็น จะเป็นการหาโปรเจคชั่นจากฟัซซีเซ็ตในปริภูมิ $X \times Y$ ไปบนปริภูมิแกน X หรือ Y สำหรับกรณีของฟัซซีเซ็ต 2 มิติ ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยภาพ 3 มิติ ในรูปที่ 2.6-4

นิยามที่ 2.6.2-2 โปรเจคชั่น (Projection of Fuzzy Sets)

พิจารณาความสัมพันธ์ฟัซซี $R = \{ ((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y \}$ แล้ว

โปรเจคชั่นอันดับที่ 1 (First Projection) หรือโปรเจคชั่นในปริภูมิ X ของ R จะได้เป็น

$$R^{(1)} = \left\{ \left(x, \mu_{R_1}(x,y) \right) \right\} = \left\{ x, \max_y \mu_R(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y \right\} \quad (2.6\text{-}19)$$

โปรเจคชั่นอันดับที่ 2 (Second Projection) หรือโปรเจคชั่นในปริภูมิ Y ของ R จะได้เป็น

$$R^{(2)} = \left\{ \left(y, \mu_{R_1}(x,y) \right) \right\} = \{ y, \max_x \mu_R(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y \} \quad (2.6\text{-}20)$$

โปรเจคชั่นทั้งหมด (Total projection) ของ R จะได้เป็น

$$R^{(T)} = \max_x \max_y \{ \mu_R(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y \} \quad (2.6\text{-}21)$$

โดยที่ $\max_y$ หมายถึงค่าสูงสุดของ y เมื่อให้ค่า x คงที่

และ $\max_x$ หมายถึงค่าสูงสุดของ x เมื่อให้ค่า y คงที่

ตัวอย่างที่ 2.6-4 การหา โปรเจคชั่นอันดับที่ 1 อันดับที่ 2 และโปรเจคชั่นทั้งหมดของ $X \times Y$ ความสัมพันธ์ฟัซซีในตัวอย่างที่ 2.6-1

$$R \triangleq \begin{array}{c|cccc} {}_{x}\backslash^{y} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.5 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ x_2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ x_3 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.6 \\ x_4 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.5 \end{array}$$

ดังนั้น โปรเจคชั่น อันดับที่ 1 ก็คือ $R^{(1)} = \{1, 0.7, 0.6, 0.5\}$

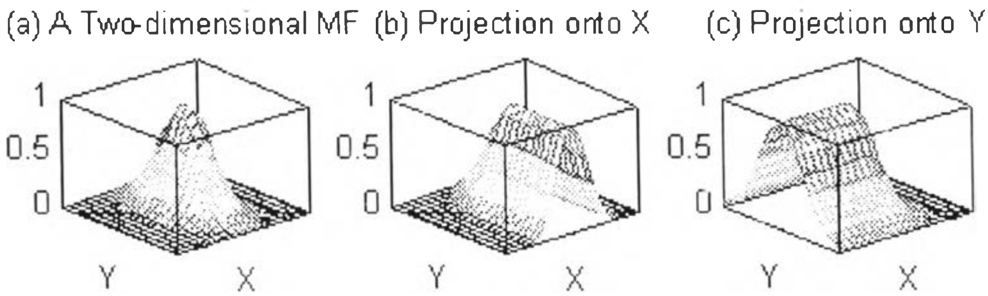
โปรเจคชั่น อันดับที่ 2 ก็คือ $R^{(2)} = \{0.5, 0.6, 0.8, 1\}$

โปรเจคชั่น ทั้งหมด ของความสัมพันธ์ ก็คือ $R^{(T)} = \{1\}$

ในกรณีที่เป็นโปรเจคชั่นของความสัมพันธ์ฟัซซี n มิติ สมมติให้ Q เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีใน $U_{i1} \times \cdots \times U_{ik}$ โดยที่ $\{i_1,\ldots,i_k\}$ หมายถึงจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง n แล้ว โปรเจคชั่นของ Q บน $U_1 \times \cdots \times U_n$ จะได้เป็นความสัมพันธ์ฟัซซี Q_P ที่มีฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิก $\mu_{Q_P}(u_{i1},\ldots,u_{ik})$

$$\mu_{Q_P}(u_{i1},\ldots,u_{ik}) = \max_{u_{j1}\in U_{j1},\ldots,u_{j(n-k)}\in U_{j(n-k)}} \mu_Q(u_1,\ldots,u_n) \qquad (2.6\text{-}22)$$

เมื่อ $\{u_{j1},\ldots,u_{j(n-k)}\}$ เป็นคอนพลีเมนท์ของ $\{u_{i1},\ldots,u_{ik}\}$ ใน $\{u_1,\ldots,u_n\}$



รูปที่ 2.6-4 แสดงการโปรเจคของความสัมพันธ์ฟัซซี Q บน ปริภูมิ X และ Y ตามลำดับ

2.6.3. การดำเนินการประกอบของความสัมพันธ์ฟัซซี (Fuzzy Relation Composition)

การดำเนินการประกอบของควความสัมพันธ์ฟัซซีเป็นกระบวนการรวมความสัมพันธ์ฟัซซีเข้าด้วยกันเพื่อสรุปผลการประมวล มีวิธีการดำเนินการประกอบอยู่หลายวิธี แต่วิธีที่นิยมนำมาใช้และเป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย ได้แก่ การประกอบ Max-Min (Max-Min Composition) และ การประกอบ Min-Max (Max Composition) การประกอบ Max-Product (Max-Product Composition)

การดำเนินการประกอบ เป็นการรวมความสัมพันธ์ฟัซซีที่มีตัวแปรที่แตกต่างกัน เช่น ให้ $R_1(x,y)$ เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีที่อยู่ในปริภูมิ $X \times Y$ และ ให้ $R_2(y,z)$ เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีที่อยู่ในปริภูมิ $Y \times Z$ โดยที่ $x \in X, y \in Y$ และ $z \in Z$ พิจารณาความสัมพันธ์ ในสมการที่ (2.6-22) และ (2.6-23)

$$R_1(x,y) = \{((x,y),\mu_{R1}(x,y))\},\quad (x,y) \in X \times Y \qquad (2.6\text{-}22)$$

$$R_2(y,z) = \{((y,z),\mu_{R2}(y,z))\},\quad (y,z) \in Y \times Z \qquad (2.6\text{-}23)$$

นิยามที่ 2.6-3 การดำเนินการประกอบ Max-Min (Max-Min Composition)

การดำเนินการประกอบ Max-Min ของความสัมพันธ์ฟัซซี R_1 และ R_2 จะได้เป็น $R_1 \circ R_2$ ความสัมพันธ์ฟัซซีในปริภูมิ $X \times Z$ แสดงดังสมการที่ (2.6-24)

$$R_1 \circ R_2 = \left\{ \left((x,z), \max_y \left(\min \left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z) \right) \right) \right) \right\}, \quad (x,z) \in X \times Z, y \in Y \qquad (2.6\text{-}24)$$

ตัวอย่างที่ 2.6-5 การดำเนินการประกอบของความสัมพันธ์ฟัซซี R_1 และ R_2 เมื่อให้

$R_1 \triangleq$

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.3	0
x_2	0.8	0.1	0.4

$R_2 \triangleq$

	z_1	z_2	z_3
y_1	0.8	0.2	0
y_2	0.2	1	0.6
y_3	0.5	0	0.4

$\min(\mu_{R_1}(x_1, y_1), \mu_{R_2}(y_1, z_1)) = \min(0.1, 0.8) = 0.1,$

$\min(\mu_{R_1}(x_1, y_2), \mu_{R_2}(y_2, z_1)) = \min(0.3, 0.2) = 0.2,$

$\min(\mu_{R_1}(x_1, y_3), \mu_{R_2}(y_3, z_1)) = \min(0, 0.5) = 0,$

และ $\max(0.1, 0.2, 0) = 0.2$

ดังนั้น

$R_1 \circ R_2 =$

	z_1	z_2	z_3
x_1	0.2	0.3	0.3
x_2	0.8	1	0.6

นิยามที่ 2.6-4 การดำเนินการประกอบ Min-Max (Min-Max Composition)

การดำเนินการประกอบ Min-Max (Min-Max Composition) ของความสัมพันธ์ฟัซซี R_1 และ R_2 จะได้ $R_1 \otimes R_2$ เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีในปริภูมิ $X \times Z$ ดังสมการที่ (2.6-25)

$$R_1 \otimes R_2 = \left\{ \left((x,z), \min_y \left(\max \left(\mu_{R1}(x,y), \mu_{R2}(y,z) \right) \right) \right) \right\}, \quad (x,z) \in X \times Z, y \in Y \qquad (2.5\text{-}25)$$

นอกจากนี้แล้วก็ยังมีการดำเนินประกอบความสัมพันธ์ฟัซซีแบบอื่นๆ อีกได้แก่ การดำเนินการประกอบ Max-Max, การดำเนินการประกอบ Max-Product, การดำเนินการประกอบ Sum-Prod และ การดำเนินการประกอบ Max-Ave เป็นต้น

2.7 การทำฟัซซิฟิเคชั่นและการทำดีฟัซซิฟิเคชั่น (Fuzzification and Defuzzification)

การทำฟัซซิฟิเคชั่น หรือการทำฟัซซิฟายด์ (Fuzzified) เป็นการแปลงค่าที่เป็นตัวเลขให้กลายเป็นค่าฟัซซี เพื่อใช้ในการคำนวณประเมินผลในระบบฟัซซี จากนั้นก็ทำการดีฟัซซิฟิเคชั่น หรือบางครั้งเรียกว่า ดีฟัซซิฟายด์ (Defuzzified) เพื่อแปลงค่ากลับจากค่าฟัซซีที่ได้จากการประเมินผลให้กลายเป็นค่าที่เป็นตัวเลขเพื่อนำค่าที่ได้ไปใช้ในการควบคุมกระบวนการหรือการคำนวณต่อไป

2.7.1 การทำฟัซซิฟิเคชั่น (Fuzzification)

การทำฟัซซิฟิเคชั่น หรือการฟัซซิฟายด์ (Fuzzified) เป็นการแม็พจากค่าจริง $x^* \in U \subset R^n$ ให้กลายเป็นฟัซซิเซ็ต A' ใน U การทำฟัซซิฟิเคชั่นมีหลายวิธีซึ่งแต่ละวิธีการมีลักษณะนั้นเฉพาะที่ให้ผลต่างๆ กันไป การนำการทำฟัซซิฟิเคชั่นมาใช้นั้นมีข้อควรคำนึงเบื้องต้นว่า การทำฟัซซิฟิเคชั่นนั้นควรให้ความเป็นสมาชิกของฟัซซิเซ็ตได้ค่ามากพอสมควร เพื่อให้สามารถนำไปคำนวณได้เหมาะสม ในกรณีที่ค่าอินพุทที่จะนำมาเข้าระบบฟัซซิมีสัญญาณรบกวน การทำฟัซซิฟิเคชั่นควรจะมีส่วนช่วยในการหยุดยั้งสัญญาณรบกวนนั้นไม่ให้เข้ามาให้ระบบได้ในระดับหนึ่ง และการเลือกวิธีการฟัซซิฟิเคชั่นควรเลือกวิธีที่มีการคำนวณที่ไม่ยุ่งยากนักเพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ในระบบฟัซซี

ในที่นี้จะนำเสนอการทำฟัซซิฟิเคชั่น 3 แบบด้วยกันได้แก่

ก.) การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบซิงเกิลตัน (Singleton Fuzzifier)

การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบซิงเกิลตัน เป็นการแม็พค่าจริง $x^* \in U$ ให้กลายเป็นฟัซซีซิงเกิลตัน A' ใน U ซึ่งให้ค่าความเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 เมื่อค่าอินพุทมีค่าเท่ากับค่าจริงที่ x^* และให้ค่าเป็น 0 ที่ค่าอื่นๆ ใน U ดังสมการที่ (2.7-1)

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (2.7\text{-}1)$$

ข.) การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบเกาส์เซียน (Gaussian Fuzzifier)

การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบเกาส์เซียน เป็นการแม็พค่าจริง $x^* \in U$ ให้กลายเป็นฟัซซีเซ็ต A' ที่อยู่ใน U ซึ่งให้ค่าความเป็นสมาชิกเป็นไปตามฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกแบบเกาส์เซียน ดังสมการที่ (2.7-2)

$$\mu_{A'}(x) = e^{-(\frac{x_1 - x_1^*}{\sigma_1})^2} * \cdots * e^{-(\frac{x_n - x_n^*}{\sigma_n})^2} \qquad (2.7\text{-}2)$$

โดยที่ ค่าพารามิเตอร์ σ_i มีค่าเป็น บวกเสมอ

ค.) การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบสามเหลี่ยม (Triangle Fuzzifier)

การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบสามเหลี่ยม เป็นการแม็พค่าจริง $x^* \in U$ ให้กลายเป็นฟัซซีเซ็ต A' ที่อยู่ใน U ซึ่งให้ค่าความเป็นสมาชิกเป็นไปตามฟังก์ชั่นความเป็นสมาชิกแบบสามเหลี่ยม ดังสมการที่ (2.7-3)

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} (1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}) * \cdots * (1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}) & \text{if } |x_i - x_i^*| \le b_i, i = 1,2,\ldots n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2.7-3)

โดยที่ ค่าพารามิเตอร์ b_i มีค่าเป็น บวกเสมอ

การทำฟัซซิฟิเคชั่นทั้ง 3 แบบเป็นวิธีการที่ง่ายและเป็นที่นิยมในการนำไปใช้ในระบบฟัซซีแต่มีข้อดีและลักษณะเด่นที่แตกต่างกัน โดยที่การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบซิงเกิลตันเป็นวิธีการทำง่ายที่สุดในการนำไปใช้ในการคำนวณในระบบฟัซซี สำหรับวิธีการทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบเกาส์เซียนและแบบสามเหลี่ยมนั้นเป็นวิธีการที่ง่ายเช่นกันและมีคุณสมบัติในการจัดการกับสัญญาณรบกวนที่เข้ามากับอินพุทของระบบได้ ในขณะที่การทำฟัซซิฟิเคชั่นแบบซิงเกิลตันนั้นไม่มีความสามารถในการจัดการกับสัญญาณรบกวนนั้น

2.7.2 การทำดีฟัซซิฟิเคชั่น (Defuzzification)

การทำฟัซซิฟิเคชั่น หรือเรียกอีกอย่างว่าการดีฟัซซิฟายด์ (Fuzzified) เป็นการแม็พจากฟัซซีเซ็ต B' ใน V ซึ่งเป็นค่าเอาท์พุททีได้จากระบบฟัซซี ให้กลายเป็นค่าจริง $y^* \in V$ เป็นการหาค่าจริงที่เหมาะสมของฟัซซีเซ็ต B' ที่เป็นคำตอบสำหรับเอาท์พุทของระบบฟัซซี เช่นเดียวกับการทำฟัซซิฟิเคชั่น การทำดีฟัซซิฟิเคชั่นก็มีอยู่หลายแบบด้วยกัน โดยในการเลือกใช้วิธีการดีฟัซซิฟายก็ควรเลือกวิธีการที่ให้ค่าคำตอบอยู่บริเวณกึ่งกลางของซัพพอร์ตของฟัซซีเซ็ต B' หรือให้มีค่าความเป็นสมาชิกที่สูงเพียงพอ ควรเป็นวิธีการที่สามารถคำนวณค่าออกมาได้ง่ายโดยเฉพาะสำหรับระบบฟัซซีที่ต้องการนำไปใช้ในงานด้านการควบคุมเพราะเป็นระบบ

การปฏิบัติการแบบ real-time ที่ต้องการความรวดเร็วในการคำนวณเพื่อใช้งานทันที และควรเป็นวิธีการที่ทำให้ได้ค่าจริงออกมาเป็นเอาท์พุทที่มีความต่อเนื่อง กล่าวคือ เมื่อฟัซซีเซ็ต B' ที่เป็นเอาท์พุทมีการเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อย ค่าจริงที่ได้จากการดีฟัซซิฟายด์ก็ไม่ควรมีค่าเปลี่ยนแปลงไปมากเช่นกัน

ซึ่งในที่นี้จะขอเสนอการทำดีฟัซซิฟิเคชั่น 5 แบบด้วยกัน ดังต่อไปนี้

ก.) การทำดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบจุดศูนย์ถ่วง (Centroid of Area Defuzzifier (COA))

บางครั้งเรียกว่า Center of Gravity Defuzzifier

$$y^{\mathrm{COA}} = \frac{\int_{V} \mu_{\mathrm{A}}(y)\, y \,\mathrm{d}\, y}{\int_{V} \mu_{\mathrm{A}}(y) \,\mathrm{d}\, y} \qquad (2.7\text{-}4)$$

ข.) การทำดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบไบเซ็คเตอร์ (Bisector of Area Defuzzifier (BOA))

เป็นค่าจริงที่แบ่งพื้นที่ภายใต้ฟัซซีเซ็ต B' ออกเป็นครึ่งหนึ่งพอดีคือ

$$\int_{\alpha}^{y^{\mathrm{BOA}}} \mu_{\mathrm{A}}(y) \,\mathrm{d}\, y = \int_{y^{\mathrm{BOA}}}^{\beta} \mu_{\mathrm{A}}(y) \,\mathrm{d}\, y \qquad (2.7\text{-}5)$$

เมื่อ $\alpha = \min\{y \mid y \in V\}$ และ $\beta = \max\{y \mid y \in V\}$ กล่าวคือ ค่า y^* หมายถึงเส้นแนวตั้งที่แบ่งพื้นที่ $y = \alpha$, $y = \beta$, $y = 0$ และ $y = \mu^*_{I}(y)$ ออกเป็น 2 ส่วน เท่าๆ กัน

ค.) การทำดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบค่าเฉลี่ยความสูง (Mean of Maxima (MOM))

บางครั้งเรียกวิธีนี้ว่า Center Average Defuzzifier วิธีนี้เป็นวิธีดีฟัซซิฟายด์ที่ใช้กับการควบคุมฟัซซีลอจิกของแมมดานี (Mamdani's Fuzzy Logic Controller) หมายถึงค่าเฉลี่ยที่ได้จากพื้นที่ภายใต้ของบริเวณที่ ฟัซซีเซ็ต B' มีค่าความเป็นสมาชิกสูงสุด

$$y^{\mathrm{MOM}} = \frac{\int_{V'} y \,\mathrm{d}y}{\int_{V'} \mathrm{d}y} \qquad (2.7\text{-}6)$$

เมื่อ $V' = \{y \mid \mu_A(y) = \mu^*\}$ ในกรณีที่มีความเป็นสมาชิกเป็นจุดสูงสุดจุดเดียว ค่าจริงที่เป็นคำตอบสำหรับการดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบนี้ก็คือค่าที่ความเป็นสมาชิกเป็นจุดนั้นเลย หรือในกรณีที่ฟัซซีเซ็ตคำตอบเป็นฟัซซีเซ็ตแบบสมมาตรจะได้เป็น

$$y^{\mathrm{MOM}} = (y_{\mathrm{left}} + y_{\mathrm{right}})/2 \qquad (2.7\text{-}7)$$

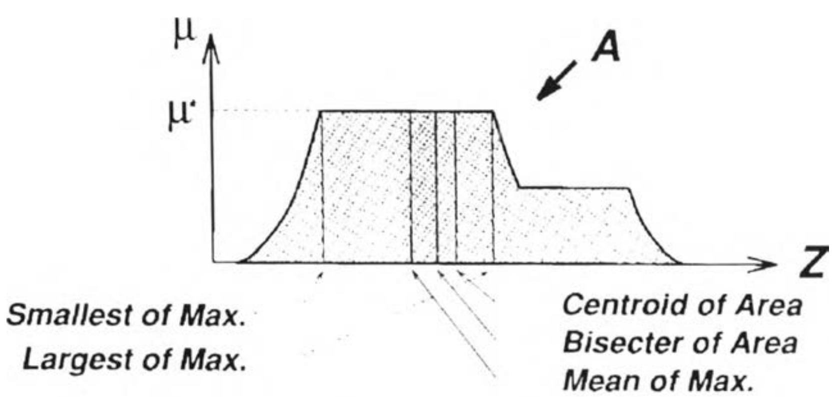
ง.) การทำดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบค่าที่น้อยที่สุดของความเป็นสมาชิกสูงสุด (Smallest of Maximum (SOM))

หมายถึงค่า y^{SOM} เป็นค่าที่น้อยที่สุดที่ยังคงมีค่าความเป็นสมาชิกสูงสุด

จ.) การทำดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบค่าที่มากที่สุดของความเป็นสมาชิกสูงสุด (Largest of Maximum (LOM))

หมายถึงค่า y^{LOM} เป็นค่าที่ มากที่สุดที่ยังคงมีค่าความเป็นสมาชิกสูงสุด

การทำดีฟัซซิฟายด์ 2 แบบหลังจะพบน้อยกว่า ในขณะที่ 3 แบบแรกจะเป็นที่นิยมในการนำไปประยุกต์ใช้ในระบบฟัซซีแบบต่างๆ ข้อดีของการทำดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบจุดศูนย์ถ่วงคือจะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่า แต่มีการคำนวณจะยุ่งยากกว่าแบบอื่น ส่วนการทำดีฟัซซิฟายด์แบบค่าเฉลี่ยความสูงนั้นก็ให้ค่าที่ ใกล้เคียงกับความเป็นจริงเช่นกันแต่มีการคำนวณที่ง่ายกว่า รูปที่ 2.7-1 เป็นรูปแสดงให้เห็นถึงการทำดีฟัซซิฟายด์แบบต่างๆ ที่กล่าวมาทั้งหมด



รูปที่ 2.7-1 แสดงการดีฟัซซิฟิเคชั่นแบบต่างๆ