# บทที่ 5

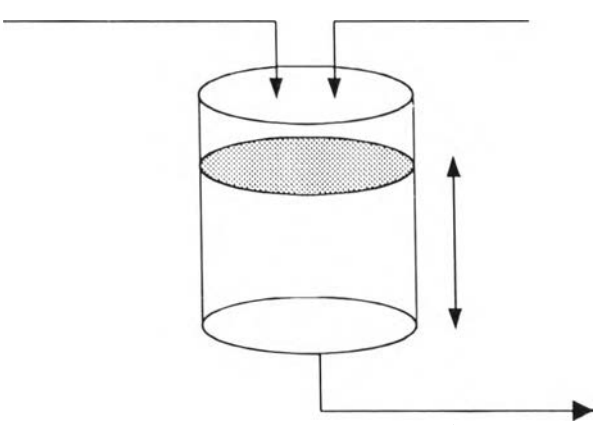
# แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการ

# Mathematics Process Models

เนื้อหาในบทนี้อธิบายถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Model) ของกระบวนการที่ใช้สร้างเป็นโปรแกรมเลียนแบบพลวัตของกระบวนการจริง เพื่อทดสอบตัวควบคุมฟัซซีแบบฐานแบบจำลอง ได้แก่ แบบจำลองการไหลของของเหลวแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งต้องการใช้ตัวควบคุมฟัซซีแบบฐานแบบจำลองในการควบคุมระดับของของเหลว และแบบจำลองของเครื่องปฏิกรณ์เคมีแบบถังกวนต่อเนื่อง (Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR)) ซึ่งใช้ตัวควบคุมฟัซซีแบบฐานแบบจำลองในการควบคุมอุณหภูมิภายในเครื่องปฏิกรณ์เพื่อให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่ต้องการในสภาวะที่เหมาะสม

## 5.1 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของกระบวนการไหลของของไหลที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น (Mathematics Model of a Nonlinear-flow Tank for Level Control)

การไหลของของไหลแบบไม่เป็นเชิงเส้นนี้ ใช้ในการศึกษาการประยุกต์ใช้ตัวควบคุมฟัซซีแบบต่างๆ ประบวนการนี้ประกอบไปด้วยถังบรรจุของเหลวที่มีความหนาแน่นคงที่ มีของไหลไหลเข้าทางด้านบนด้วยอัตราการไหล $F_i$ และมีอัตราการไหลออกของของไหลด้วยอัตราการไหล $F_o$ ซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับระดับความสูงของของไหลภายในถัง ดังนั้นกระบวนการนี้เป็นกระบวนการอันดับหนึ่งที่ไม่เป็นเชิงเส้น (First-order Non-linear Process) กระบวนการนี้เป็นกระบวนการอันดับหนึ่งที่ค่าเกน (Gain) และค่าคงที่เวลา (Time Constant) มีการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับสภาวะคงตัว ตามรูปที่ 5.1-1



**รูปที่ 5.1-1 ลักษณะของกระบวนการของถังที่มีการไหลแบบไม่เป็นเชิงเส้น**

เมื่อ $F_o$ คืออัตราการไหลขาออก ซึ่งมีเป็นการไหลเป็นแบบเทอร์บูเลนท์ (Turbulent Flow) ซึ่งมีค่าขึ้นกับขนาดของท่อและวาล์ว

A คือพื้นที่หน้าตัดของถัง

$F_i$ คืออัตราการไหลเข้าสู่ถังของเหลว

$F_{iD}$ คืออัตราการไหลของเข้าสู่ถังของเหลวที่เป็นตัวรบกวนกระบวนการ

โดยมีสมการสมดุลมวลสารของกระบวนการไหล เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Dynamic Model)

$$A\frac{dh}{dt} + \beta\sqrt{h} = F_i \qquad (5.1\text{-}1)$$

$$F_o = \beta\sqrt{h} \qquad \text{โดยที่} \quad \beta = \text{constant} \qquad (5.1\text{-}2)$$

จากสมการที่ (5.1-1) จะเห็นได้ว่า เป็นสมการอนุพันธ์ดั้งเดิมแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Ordinary Differential Equation) ซึ่งไม่สามารถอินทิเกรตสมการออกมาได้โดยตรง ดังนั้นวิธีการแก้ไขปัญหาเพื่อนำสมการนี้ไปสร้างแบบจำลองกระบวนการสำหับสมการในลักษณะนี้สามารถทำได้ 2 วิธีการคือ 1.) การใช้เทคนิคที่เรียกว่า วิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) ซึ่งยังแบ่งได้เป็นอีกหลายวิธี แต่ที่นิยมใช้สำหรับกระบวนการเคมีนั้นจะใช้วิธีการที่เรียกว่าวิธีการของ ออยเลอร์ (Euler Algorihm) ซึ่งเป็นวิธีการที่เลือกใช้ในการจำลองกระบวนการนี้ และ วิธีการของรัน-กัตต้า อันดับที่ 4 (Fourth-order Runge-Kutta) 2.) จะใช้เทคนิคที่เรียกว่า การประมาณเชิงเส้น (Linearize Approximation) โดยจะประมาณว่าสมการนั้นเป็นเชิงเส้นที่บริเวณรอบๆ สภาวะคงตัวใดๆ ดังนั้นเมื่อทำการประมาณเชิงเส้น (Linearization) สมการดังกล่าวรอบสภาวะคงตัวใดๆ $h_s$ เพื่อให้ได้สมการในรูปแบบของ ตัวแปรเบี่ยงเบน (Deviation Variables) ได้เป็นสมการเชิงเส้นที่สามารถแก้สมการดังนี้

$$\tau_p\frac{dh'}{dt} + h' = K_p \cdot F_i' \qquad (5.1\text{-}3)$$

เมื่อ $$\tau_p = 2A\sqrt{h_s}/\beta \qquad (5.1\text{-}4)$$

$$K_p = 2\sqrt{h_s}/\beta \qquad (5.1\text{-}5)$$

โดยที่ $h' = h(t) - h_s$ และ $F_i' = F_i(t) - F_s$

เมื่อ

$h'$ คือ ตัวแปรความสูงของของไหลที่เบี่ยงเบนไปจากสภาวะคงตัว

$F_i'$ คือ อัตราการขาเข้าที่เบี่ยงเบนไปจากสภาวะคงตัว

$\tau_p$ คือ ค่าคงที่เวลา (Time Constant)

$K_c$ คือ ค่าเกนของกระบวนการ (Process Gain)

ค่าของ $\tau_p$ และ $K_c$ เป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงไปตามอัตราการไหลเข้าที่สภาวะคงตัวใดๆ $F_{is}$

จากสมการที่ (5.1-5)

$$\tau_p \frac{dh'}{dt} + h' = K_p \cdot F_i'$$

$$\tau_p dh' = \left(K_p F_i' - h'\right) dt$$

$$-\tau_p dh' = \left(h' - K_p F_i'\right) dt$$

$$\frac{dh'}{\left(h' - K_p F_i'\right)} = -\frac{dt}{\tau_p}$$

อินทิเกรต จาก 0 ถึง $t$

$$\ln\left(h' - K_p F_i'\right)\Big|_{t_0}^{t} = -\frac{(t - t_0)}{\tau_p}$$

$$\ln\left(h'(t) - K_p F_i'\right) - \ln\left(h'(t_0) - F_i' K_p\right) = -\frac{(t - t_0)}{\tau_p}$$

$$\ln\left[\frac{h'(t) - K_p F_i'}{h'(t_0) - K_p F_i'}\right] = -\frac{(t - t_0)}{\tau_p}$$

$$\left[\frac{h'(t) - K_p F_i'}{h'(t_0) - K_p F_i'}\right] = \exp\left[-(t - t_0)/\tau_p\right]$$

$$h'(t) - K_p F_i' = \left(h'(t_0) - K_p F_i'\right) \exp\left[-(t - t_0)/\tau_p\right]$$

$$h'(t) = K_p F_i' + \left(h'(t_0) - K_p F_i'\right) \exp\left[-(t - t_0)/\tau_p\right]$$

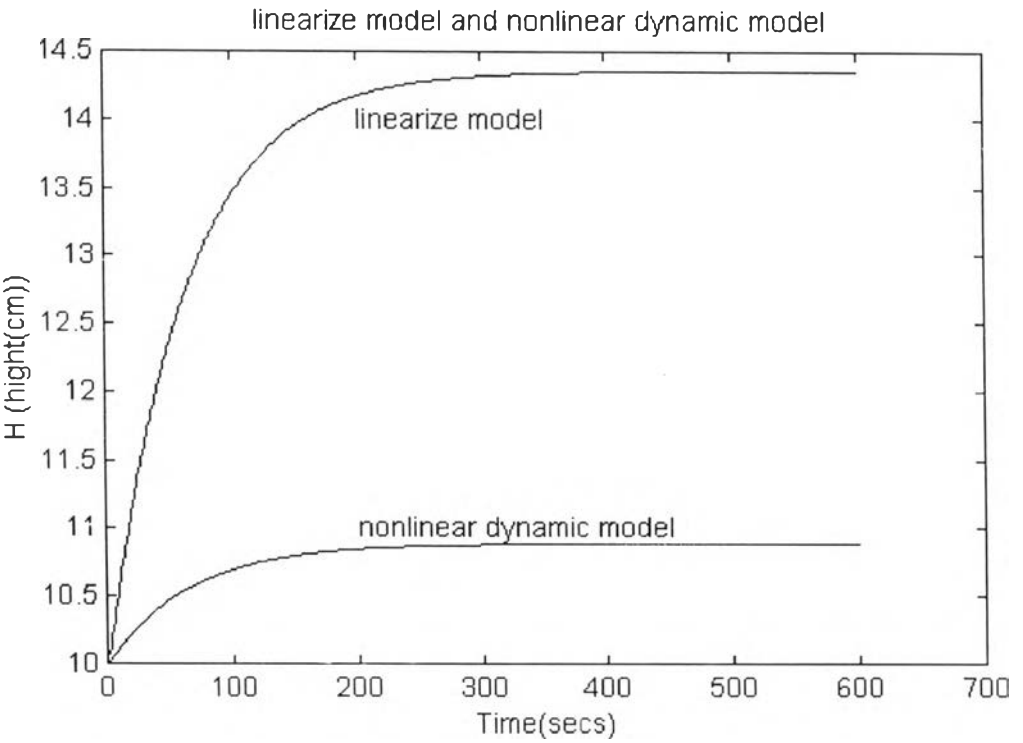
เมื่อ $h'(t_0)=0$ และ $t_0=0$ $\quad h'(t) = K_p F_i' + \left(0 - K_p F_i'\right)\exp\left[-(t-0)/\tau_p\right]$

$$h'(t) = K_p F_i'(1-\exp(-t/\tau_p))$$

เมื่อ $h'(t)=h(t)-hs$ จะได้ $\quad h(t) = K_p F_i'(1-\exp(-t/\tau_p)) + h_s$ (5.1-6)

เมื่อทำการเลียนแบบการไหลของถังแรงโน้มถ่วงโดยใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) ของออยเลอร์ (Euler Algorithm) ตามสมการที่ (5.1-1) เปรียบเทียบกับวิธีการประมาณเชิงเส้นสมการที่ (5.1-6) ให้พื้นที่หน้าตัดของถัง A มีค่าเป็น $A=10$ และ ค่าคงที่ $\beta=1$ จะเห็นได้ว่า เมื่อเริ่มต้นโดยปล่อยให้ถังอยู่ในสภาวะคงตัวที่ระดับความสูงของของเหลว $h_o$ และอัตราการไหลของของเหลวขาเข้าเป็น 3.1623 หน่วย ที่เวลา $t=0$ จากนั้นเปลี่ยนอัตราการไหลของของเหลวขาเข้าจาก 3.1623 หน่วย เป็น 3.3 หน่วย เพื่อให้กระบวนการเคลื่อนจากสภาวะคงตัวหนึ่งไปยังสภาวะคงตัวหนึ่ง พบว่าค่าความสูงของระดับของเหลาในถังในช่วงเริ่มต้นของสมการทั้ง 2 นั้นใกล้เคียงกันซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการของแบบจำลองที่ประมาณเชิงเส้น (Linearized Approximate Model) (5.1-6) แสดงว่าสามารถใช้สมการของแบบจำลองที่ไม่เชิงเส้นนี้แทนสมการของแบบจำลองที่ไม่เชิงเส้นได้ในช่วงเริ่มต้นเท่านั้น แต่เมื่อเวลาผ่านไประดับความสูงที่ได้จากแบบจำลองประมาณเชิงเส้น ที่ประมาณไว้รอบๆ $h_o$ นั้นเริ่มเบี่ยงเบนไปจากสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Dynamic Model) ชี้ให้เห็นว่า เมื่อความสูงที่เปลี่ยนแปลงไปจากค่าความสูงที่ใช้ในการประมาณสมการไม่เชิงเป็นมากขึ้น ความแม่นยำในการใช้สมการประมาณนี้แทนแบบจำลองของกระบวนการที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นลดลงจนไม่สามารถใช้แทนได้ดังรูปที่ 5.1-2 ดังนั้นจึงใช้สมการที่ (5.1-1) เป็นสมการแสดงการตอบสนองของความสูงของถังที่มีต่อการไหลขาเข้าของถังแรงโน้มถ่วงนี้

เป้าหมายของการควบคุมกระบวนการนี้อยู่ที่การพยามยามรักษาจะดับของของไหลในอยู่ในค่าเป้าหมายที่ต้องการ หรือปรับระดับของของเหลวให้เข้าสู่เป้าหมายใหม่ที่ตั้งไว้ และการพยายามรักษาระดับของของเหลวให้อยู่ที่ค่าเป้าหมายเมื่อมีตัวรบกวนเข้ามาในกระบวนการ ซึ่งตัวรบกวนในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็น นี้โดยการปรับอัตราการไหลขาเข้าของของไหล $F_i$




**รูปที่ 5.1-2 แสดงความแตกต่างของการใช้แบบจำลองที่ไม่เชิงเส้น และแบบจำลองประมาณเชิงเส้น**

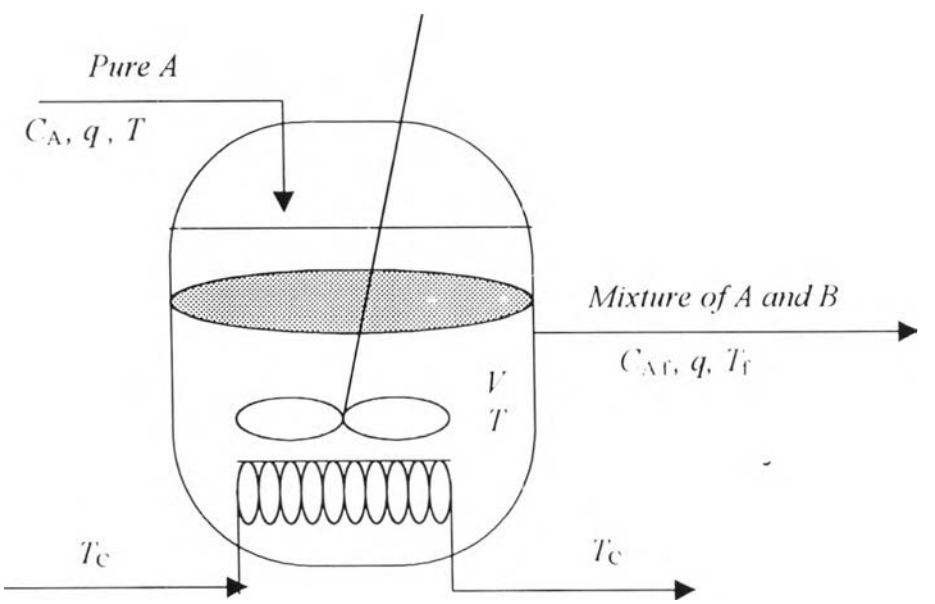
## 5.2 เครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง

**(Mathematics Model of a Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR))**

เครื่องปฏิกรณ์แบบถังกวนแบบต่อเนื่องเป็นอุปกรณ์พื้นฐานชนิดหนึ่ง ที่พบบ่อยในอุตสาหกรรมเคมี ซึ่งรูปแบบที่จะนำมาพิจารณาในการสร้างแบบจำลอง เป็นเครื่องปฏิกรณ์แบบถังกวนแบบตัวเนื่องที่อุณหภูมิไม่คงที่ (Non-isothermal CSTR) (Seborg, 1997) ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้น เป็นปฏิกิริยาคายความร้อนแบบผันกลับไม่ได้ (Irreversible Exothermic Reactor) ซึ่งเป็นกระบวนการที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง (Highly Nonlinear) ซึ่งเป็นกระบวนการที่เหมาะสำหรับการนำไปใช้ในการทดสอบตัวควบคุมที่สร้างขึ้น

ปฏิกิริยาเคมีที่เกิดขึ้นในระบบ เกิดจากสารตั้งต้น A เปลี่ยนไปเป็นสาร B และคายความร้อน มีค่าความร้อนของปฏิกิริยา (Heat of Reaction, $\Delta H$ ) โดยสมมติว่าระบบความหนาแน่นคงที่ และไม่คิดการสูญเสียความร้อนออกจากระบบ ระบายความร้อนที่เกิดจากปฏิกิริยาเคมีด้วยการผ่านน้ำหล่อเย็นไหลเข้าทางขดลวด (Cooling Coil) ที่อยู่ในเครื่องปฏิกรณ์ ให้อุณหภูมิขาเข้าเป็น $T_C$ ปริมาตรของสารหล่อเย็นที่ไหลวนในขดลวดนั้นคงที่ที่ $V$ และยังสมมติให้ภายในถังกวนนั้นเกิดการผสมกันของถังกวนอย่างสมบูรณ์แบบ (Perfect Mix) อุณหภูมิภายในถังกวนเป็น $T$

หน่วยปฏิบัติการของเครื่องปฏิกรณ์มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.2-1




**รูปที่ 5.2-1 เครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง (Continuous Stirred Tank Reactor (CSTR))**

โดยที่ สภาวะในการปฏิบัติการของระบบ ที่สภาวะคงตัวเป็นดังนี้ตารางที่ 5.2-1

**ตารางที่ 5.2-1 สภาวะในการปฏิบัติการของระบบ เครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง ที่สภาวะคงตัว**

| ลำดับที่ | ตัวแปร | คำอธิบาย | สภาวะ | หน่วย |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $q$ | อัตราการไหลของสายป้อน | 100 | L/min |
| 2. | $C_{Af}$ | ความเข้มข้นของสาร A ขาเข้า | 1 | mol/L |
| 3. | $T_f$ | อุณหภูมิของสาร A ขาเข้า | 350 | K |
| 4. | $V$ | ปริมาตรของของในเครื่องปฏิกรณ์ | 100 | L |
| 5. | $\rho$ | ค่าความหนาแน่นของสารหล่อเย็น | 1000 | g/L |
| 6. | $C_p$ | ค่าความจุความร้อนของสารหล่อเย็น | 0.239 | J/g-K |
| 7. | $(-\Delta H)$ | ค่าความร้อนของการเกิดปฏิกิริยา | $5 \times 10^4$ | J/mol |
| 8. | $\frac{E}{R}$ | ค่าพลังงานกระตุ้นต่อค่าคงที่ก๊าซ | 8750 | K |
| 9. | $k_0$ | สัมประสิทธิ์อัตราการเกิดปฏิกิริยา | $7.2 \times 10^{10}$ | $min^{-1}$ |
| 10. | $UA$ | ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนรวม | $5 \times 10^4$ | J/min-K |
| 11. | $T_C$ | อุณหภูมิของน้ำหล่อเย็น | 300 | K |
| 12. | $C_A$ | ความเข้มข้นของสาร A ขาออก | 0.5 | mol/L |
| 13. | $T$ | อุณหภูมิของสารขาออก | 350 | K |

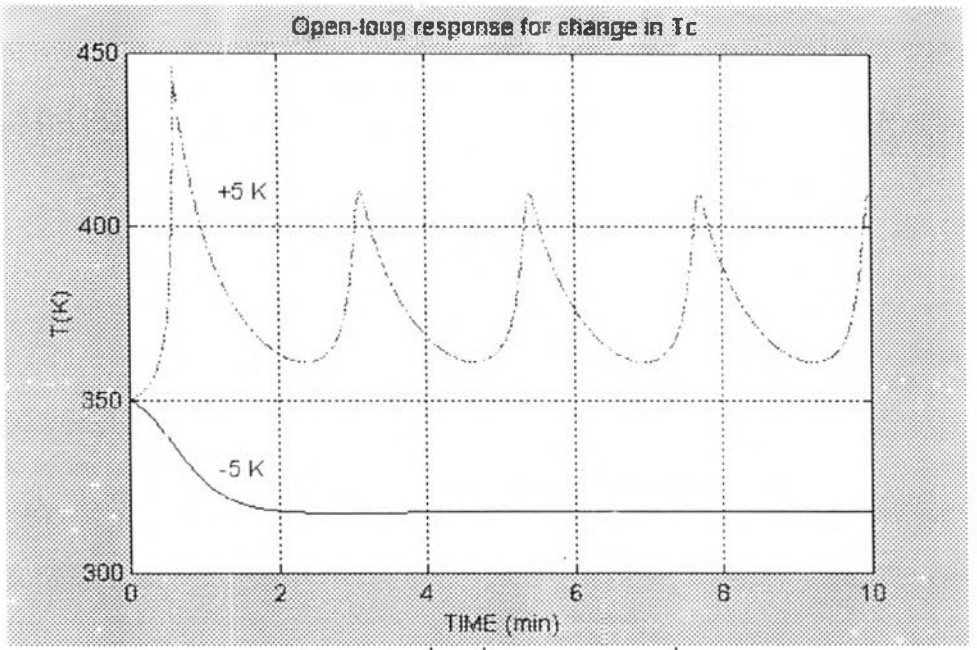
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการอธิบายระบบประกอบไปด้วย สมการสมดุลมวลสาร เป็น

$$\dot{C}_A = \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)C_A \qquad (5.2\text{-}1)$$

และสมการสมดุลพลังงานสามารถเขียนได้ดังนี้

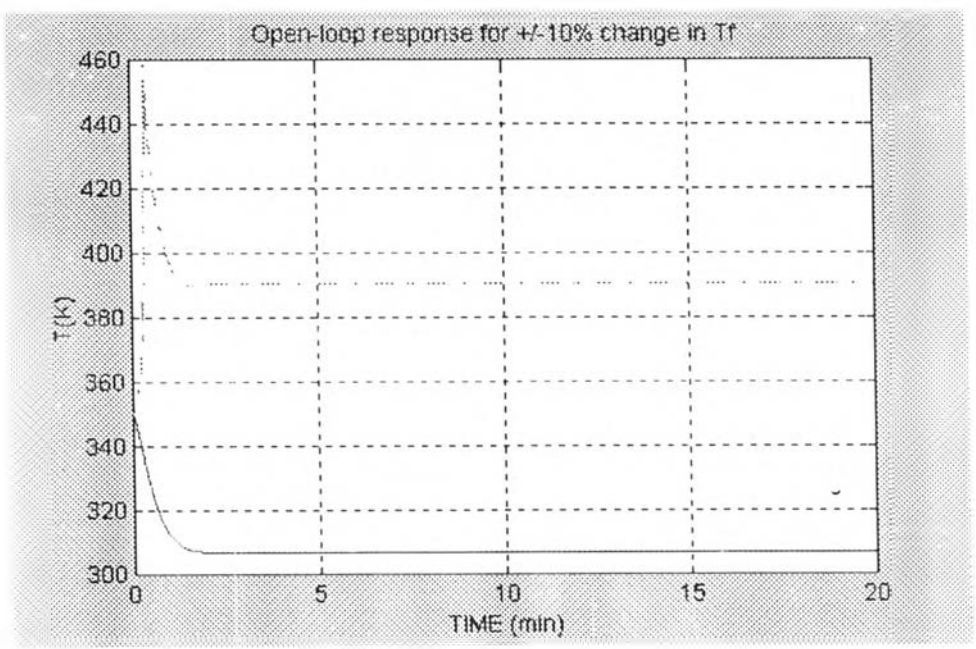
$$\dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_C - T) \qquad (5.2\text{-}2)$$

เป้าหมายของการควบคุมคือ ต้องการควบคุมอุณหภูมิของของเหลวภายในเครื่องปฏิกรณ์ $T$ โดยใช้การปรับอุณหภูมิของสารหล่อเย็น $T_C$ จากสภาวะคงตัว ตามตารางที่ 5.2-1 เมื่อ ทำการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของสารหล่อเย็น $T_C$ แบบสเต็พ (Step Change) จากสภาวะคงตัวนี้ไป อีก+/- 5 K เพื่อดูการตอบสนองแบบไม่มีตัวควบคุม (Open-Loop Respond) ได้ผลดังแสดงในรูปที่ 5.2-2




**รูปที่ 5.2-2 การตอบสนองของระบบถังกวนต่อเนื่องเมื่ออุณหภูมิ $T_C$ เปลี่ยนแปลง +/- 5 K (Open-Loop)**

เมื่อต้องการทดสอบกรณีที่ระบบมีตัวรบกวนนั้น กำหนดให้อุณหภูมิขาเข้า $T_f$ มีการเปลี่ยนแปลงแบบสเต็พ (Step Change) จากสภาวะคงตัวนี้ไป +/- 10% เพื่อดูการตอบสนองของกระบวนการที่ไม่มีตัวควบคุม (Open-Loop Respond) ได้ผลดังแสดงในรูปที่ 5.2-3




**รูปที่ 5.2-3 การตอบสนองของระบบถังกวนต่อเนื่องเมื่ออุณหภูมิ $T_f$ เปลี่ยนแปลง +/- 10% (Open-Loop)**

จากรูปที่ 5.2-2 และ รูปที่ 5.2-3 จะเห็นได้ว่ากระบวนการของเครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่องนั้น มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเมื่อค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย และในกรณีที่อุณหภูมิของสารหล่อเย็นมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น 5 K จะเห็นว่ามีผลทำให้อุณหภูมิภายในเครื่องปฏิกรณ์มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วง 365-495 K โดยประมาณ ซึ่งนับเป็นการเปลี่ยนแปลงที่มากเมื่อเทียบกับสภาวะที่ต้องการปฏิบัติการ (Operating Condition) แสดงให้เห็นถึงความไม่เสถียรและการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วของกระบวนการอยู่ตลอดเวลา ในขณะที่การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของสารหล่อเย็นลดลงไป 5 K นั้นมีผลทำให้อุณหภูมิภายในของเครื่องปฏิกรณ์เปลี่ยนแปลงไป 30 K โดยประมาณซึ่งนับเป็นการเปลี่ยนแปลงที่มากเช่นเดียวกัน การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในกเครื่องปฏิกรณ์นี้ส่งผลต่อความเข้มข้นของสาร A ที่อยู่ภายในเครื่องปฏิกรณ์และความเข้มข้นของผลิตภัณฑ์ที่ได้ด้วย

สำหรับรูปที่ 5.2-3 นั้นเมื่ออุณหภูมิขาเข้าสาร A มีการเปลี่ยนแปลงไป +/-10% จะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงในลักษณะนี้ส่งผลให้อุณหภูมิภายในกเครื่องปฏิกรณ์มีการเปลี่ยนแปลงมากเช่นเดียวกัน กล่าวคือเมื่ออุณหภูมิขาเข้าของสาร A ($T_i$) มีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้น 10 K ส่งผลให้อุณหภูมิในเครื่องปฏิกรณ์เปลี่ยนแปลงไปจาก 350 K เป็น 460 K ภายในเวลา 1 นาที อันเนื่องมาจากปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นนั้นเป็นปฏิกิริยาคายความร้อนอย่างสูง และเมื่ออุณหภูมิขาเข้าของสาร A ($T_f$) มีการเปลี่ยนแปลงลดลง 10 K ส่งผลให้อุณหภูมิในเครื่องปฏิกรณ์เปลี่ยนแปลงไปจาก 350 K เป็น 310 K โดยประมาณ ภายในเวลา 1 นาทีเช่นเดียวกัน

จะสังเกตได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในทิศทางที่เพิ่มขึ้นนั้นส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของการะบวนการที่รุนแรงมากกว่าการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในในทิศทางที่ลดลง

## 5.3 บทสรุป

ในบทนี้เป็นการอธิบายแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการตอบสนองของกระบวนการที่ใช้ในงานวิจัย ซึ่งได้แก่กระบวนการไหลของของเหลวแบบไม่เชิงเส้น และ กระบวนการของเครื่องปฏิกรณ์ถังกวนแบบต่อเนื่อง จะเห็นได้ว่ากระบวนการของเครื่องปกิกรณ์แบบถังกวนต่อเนื่องนั้นมีความไม่เป็นเชิงเส้น และมีการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการที่มากกว่า กระบวนการไหลแบบไม่เป็นเชิงเส้น ในงานวิจัยนี้จึงเริ่มต้นโดยการทดสอบการจำลองและการควบคุมจากกระบวนการไหลแบบไม่เป็นเชิงเส้นก่อน แล้วจึงพัฒนาไปสู่การจำลองแบะการควบคุมของกระบวนการของเครื่องปฏิกรณ์แบบถังกวนต่อเนื่อง โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้ง 2 นี้ไปใช้สร้างโปรแกรมเลียนแบบ เพื่อใช้เป็นค่าอินพุท และเอาท์พุทของกระบวนการ และนำค่าอินพุทและเอาท์พุทนี้ไปใช้ในการสร้างแบบจำลองฟัซซี เพื่อใช้ควบคุมกระบวนการนี้ด้วย