บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการไหลของของไหล

บทนี้เป็นการแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการไหลของของไหล รูปแบบการไหลขึ้นอยู่กับลักษณะของรูปทรงที่ของไหลไหลผ่านและเงื่อนไขขอบเขตที่เกิดขึ้นในแต่ละปัญหา กฎพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของของไหลโดยทั่วไป [1,2] คือ (1) กฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) (2) กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม (conservation of momentum) (3) กฎการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับกฎพื้นฐานดังกล่าวเหล่านี้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equations) ซึ่งประกอบไปด้วยตัวไม่ทราบค่าต่าง ๆ คือ ความเร็วของของไหลในทิศทางต่าง ๆ ความดัน และอุณหภูมิ ในกรณีที่ศึกษาอยู่นี้เป็นกรณีที่มีการกระจายอุณหภูมิที่สม่ำเสมอทั่วทั้งบริเวณของการไหลที่ถูกพิจารณา สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานจึงไม่ถูกนำมาพิจารณา ดังนั้นการวิเคราะห์ปัญหาการไหลของของไหลที่ไม่มีผลของอุณหภูมิมาเกี่ยวข้องจึงต้องแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมเท่านั้น [3]

ในการศึกษาในครั้งนี้ เป็นการศึกษาปัญหาการไหลของของไหลแบบหนืดที่ไม่มีการอัดตัวในสองมิติ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมจะถูกพิจารณาในสองมิติ ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดในวิทยานิพนธ์นี้

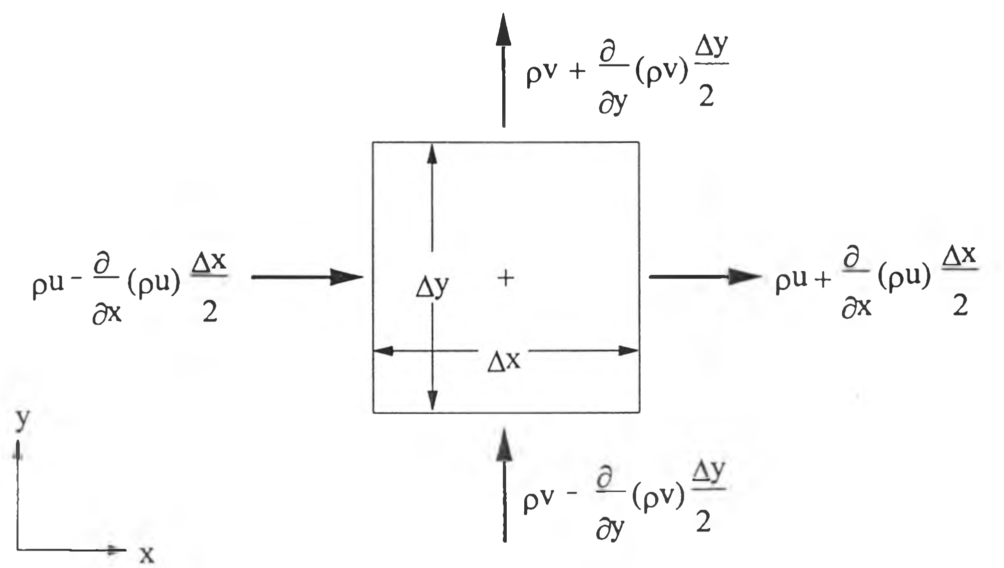
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

พิจารณาการไหลในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate) ผ่านเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่มีขนาด Δx และ Δy ดังแสดงในรูปที่ 2.1 หากกำหนดให้ u และ v แทนความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ผลลัพธ์ของมวลของของไหลที่ไหลผ่านเข้าไปภายในเอลิเมนต์ที่พิจารณาจะเท่ากับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลของเอลิเมนต์ [4] ซึ่งแสดงในรูปสมการได้ดังนี้

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{\partial}{\partial t} m_{element} \tag{2.1}$$

ซึ่งจะทำให้ได้

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y + \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right]\Delta x$$
$$- \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y - \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right]\Delta x = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta x\,\Delta y \tag{2.2}$$



รูปที่ 2.1 ความสมดุลของมวลที่ไหลผ่านเอลิเมนต์สองมิติในระบบพิกัดฉาก

เมื่อทำการจัดรูปสมการ (2.2) ใหม่ และพิจารณาให้ค่า Δx และ Δy ลู่เข้าสู่ศูนย์ จะได้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \tag{2.3}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.4}$$

หรือ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.5}$$

เราสามารถนำสมการดังกล่าวมาเขียนให้อยู่ในรูปของเวคเตอร์ ดังนี้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \tag{2.6}$$

โดย

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}$$

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

ในกรณีที่เราศึกษาอยู่นี้เป็นการไหลของของไหลแบบหนืดที่ไม่มีการอัดตัว (viscous incompressible flow) ซึ่งค่าความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่าง ๆ ที่เคลื่อนที่ไป และเวลา [5] ดังนั้น

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0 \tag{2.7}$$

ซึ่งจะทำให้ได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \tag{2.9}$$

2.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการของการอนุรักษ์โมเมนตัม สามารถประดิษฐ์ขึ้นมาจากกฎข้อที่สองของนิวตันที่ว่า แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้น

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \tag{2.10}$$

โดย

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \tag{2.11}$$

และ $\frac{dx}{dt} = u \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์ของความเร็วของอนุภาคของของไหลที่เทียบกับเวลา คือ

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} \tag{2.12}$$

หรือ

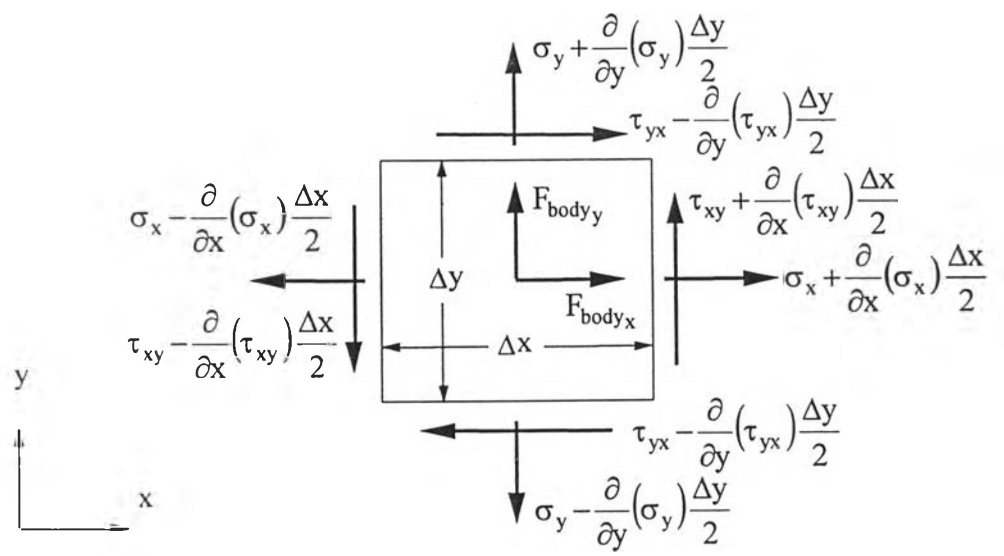
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \tag{2.13}$$

และสำหรับการไหลในสภาวะอยู่ตัว (steady state flow)

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0 \qquad (2.14)$$

พิจารณาแรงที่กระทำต่อเอลิเมนต์เล็กใด ๆ ดังรูปที่ 2.2 ซึ่งประกอบไปด้วย body force และ surface force [2] โดย body force นั้นจะหมายถึงแรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคของของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาพ (physical contact) ซึ่งได้แก่แรงจากความโน้มถ่วงของโลก และแรงเนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในที่นี้จะพิจารณา body force ที่เป็นผลมาจากแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว ส่วน surface force นั้นจะหมายถึง แรงภายนอกที่กระทำต่อผิวด้านนอกของเอลิเมนต์ของของไหลที่ถูกพิจารณา ซึ่งประกอบไปด้วย แรงเนื่องจากความดันในแนวตั้งฉาก (normal force) และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือนในแนวสัมผัส (tangential shear force)

$$\bar{F} = \bar{F}_{body} + \bar{F}_{surface} = m\frac{D\bar{V}}{Dt} \qquad (2.15)$$



รูปที่ 2.2 ความสมดุลของแรงบนเอลิเมนต์ของการไหลในสองมิติในระบบพิกัดฉาก

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน พิจารณาในทิศทางแกน x : $\sum F_x = ma_x$ โดยพิจารณาความลึกหนึ่งหน่วยในแนวแกน z จะได้

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x - \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y$$
$$- \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x + \rho g_x \Delta x \Delta y = \rho \Delta x \Delta y \frac{Du}{Dt} \qquad (2.16)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} \quad (2.17a)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับในทิศทางแกน y เราจะได้

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_y \quad (2.17b)$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (newtonian fluid)* ความเค้นต่าง ๆ สามารถเขียนอยู่ในเทอมของความเร็วและความดันได้โดยใช้สมมติฐานของ (stokes' hypothesis) ได้ดังนี้

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.18a)$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.18b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (2.18c)$$

โดย μ แทนค่าความหนืด (viscosity) ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนรูปของของไหล เมื่อแทนสมการ (2.18) ลงในสมการ (2.17) จะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\vec{V} \cdot \nabla)u = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

(2.19a)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\vec{V} \cdot \nabla)v = \rho g_y + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V}\right)$$

(2.19b)

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว และหากละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหล สมการนาเวียร์-สโตกส์จะลดรูปลงมาเป็น

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2.20a)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2.20b)$$

---

* ของไหลที่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างความเค้น (stress) กับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (velocity gradient)

เพื่อให้ง่ายในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อ ๆ ไป ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ จะเขียนอยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ (tensor notation) ดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล : $u_{,x} + v_{,y} = 0$ (2.21a)

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม : $u\,u_{,x} + v\,u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0$ (2.21b)

$$u\,v_{,x} + v\,v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \quad (2.21c)$$

โดยส่วนประกอบของความเค้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\sigma_x = -p + 2\nu u_{,x} \quad (2.22a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\nu v_{,y} \quad (2.22b)$$

$$\tau_{xy} = \nu(u_{,y} + v_{,x}) \quad (2.22c)$$

และค่าความหนืดพลศาสตร์ (kinematic viscosity)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.23)$$

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้จะถูกนำมาแก้ร่วมกับเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมสำหรับปัญหานั้น ๆ ซึ่งอาจจะเป็นการระบุค่าของส่วนประกอบของความเร็วตามขอบ S_1

$$u = u\ (x, y) \quad (2.24a)$$

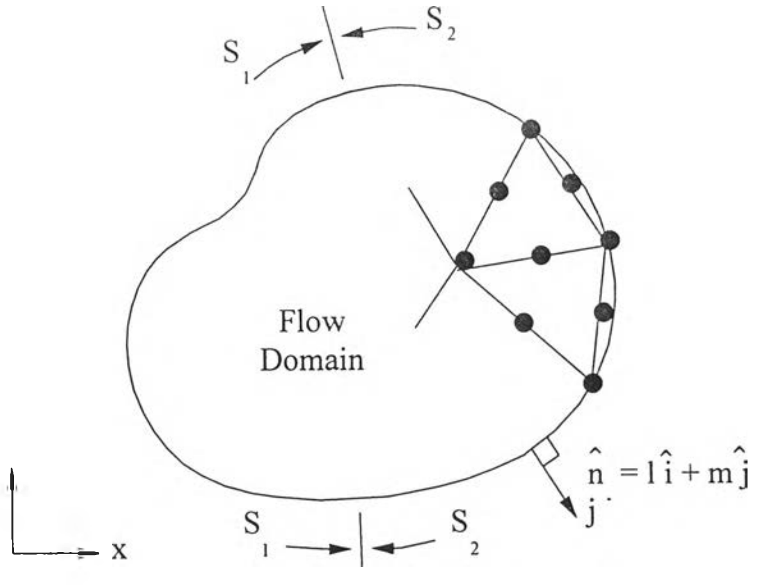
$$v = v\ (x, y) \quad (2.24b)$$

หรือแรงที่กระทำที่ผิวตลอดขอบ S_2

$$T_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad (2.25a)$$

$$T_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (2.25b)$$

โดย l และ m คือ ทิศทางโคซายน์ (direction cosines) ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขต (boundary) นั้น ๆ



รูปที่ 2.3 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาการไหลในสองมิติ