บทที่ 3

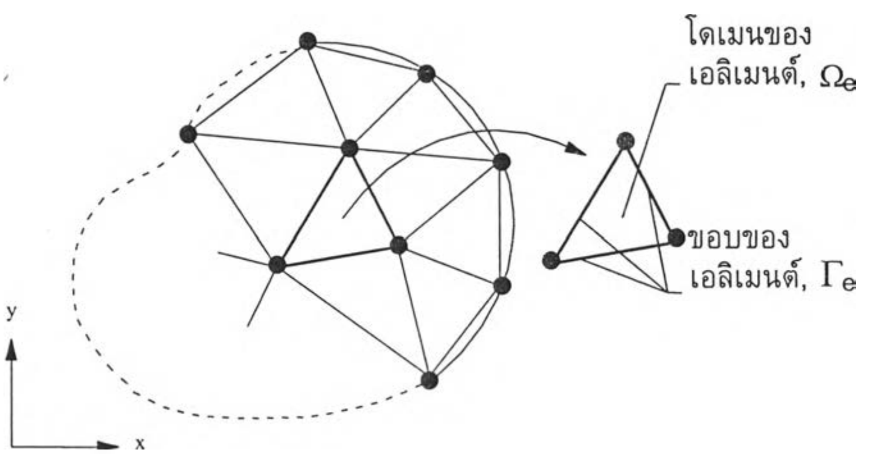
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืด

ในบทนี้จะเป็นการอธิบายถึงการนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดที่ไม่มีการอัดตัว โดยจะกล่าวตั้งแต่ขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลแบบหนืดที่ไม่มีการอัดตัวจนกระทั่งได้รูปสมการที่สามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ประกอบด้วยลำดับขั้นตอน 6 ขั้นตอน [1] ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ



รูปที่ 3.1 การแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์

จากนั้นให้ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการแก้นั้น สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$L(\bar{\phi}) = 0 \tag{3.1}$$

โดย L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ ϕ คือ ตัวแปรตามแม่นตรง

ขั้นที่ 2 สมมติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูป

$$\phi = \phi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i = \underset{(1xm)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(mx1)}{\{\phi\}} \tag{3.2}$$

โดย i คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น N_i คือฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\phi(x,y)$ คือ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ขั้นที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง หากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์สมการ (3.1) เราจะพบว่า

$$L(\phi) \text{ จะ } \neq 0 \text{ แต่จะ } = R$$

ซึ่ง R คือ เศษตกค้าง (Residual) นั่นหมายถึง

$$R = L(\phi) = L(\lfloor N \rfloor \{\phi\}) = L(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i) \tag{3.3}$$

และจากวิธีกาเลอคิน (Galerkin) ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชั่นน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์นั้น แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_A W_i R\,dA = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.4}$$

โดย dA คือ โดเมนของเอลิเมนต์ และโดยปรกติเราจะเลือก ซึ่งเรียกว่า บับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ขั้นที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) ซึ่งหากเราแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.4) แล้วอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\begin{aligned} \int_A W_i R\,dA &= \int_A W_i L(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i)\,dA \\ &= \underbrace{\int_A (W_i, N_i, \phi_i)\,dA}_{\substack{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน} \\ \text{ของเอลิเมนต์, } A^e}} + \underbrace{\int_\Gamma (W_i, N_i, \phi_i)\,d\Gamma}_{\substack{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต} \\ \text{ของเอลิเมนต์, } \Gamma^e}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ขั้นที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ ด้วยสภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

ขั้นที่ 6 จากนั้นจึงเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์นั่นคือ

$$\underset{(mxm)}{[K]} \underset{(mx1)}{\{\phi\}} = \underset{(mx1)}{\{F\}} \tag{3.6}$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์ของความแข็งแกร่ง (element stiffness matrix), $\{\phi\}$ คือ เวคเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ และ $\{F\}$ คือโหลดเวคเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังสมการ (3.6) แล้ว ลำดับขั้นตอนต่อไป ก็คือ รวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกัน ก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นก็กำหนดกฎเกณฑ์ขอบเขต แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบหนืด

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่อัดตัวไม่ได้ที่ไม่มีผลของอุณหภูมิมาเกี่ยวข้อง โดยทั่วไปจำเป็นต้องแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์มวล และกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาในครั้งนี้ [6] จะประกอบไปด้วย

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \tag{3.7a}$$

$$u\, u_{,x} + v\, u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0 \tag{3.7b}$$

$$u\, v_{,x} + v\, v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \tag{3.7c}$$

โดย ค่าความเค้นในทิศตั้งฉาก (normal stress) และค่าความเค้นเฉือน (shear stress) คือ

$$\sigma_x = -p + 2\mu\, u_{,x} \tag{3.8a}$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu\, v_{,y} \tag{3.8b}$$

$$\tau_{xy} = \mu\,(u_{,y} + v_{,x}) \tag{3.8c}$$

และค่าความหนืดพลศาสตร์ (kinematic viscosity) คือ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{3.9}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องอยู่ 2 แบบ คือ การระบุค่าของส่วนประกอบของความเร็วตามขอบ S_1

$$u = u\ (x, y) \tag{3.10a}$$

$$v = v\ (x, y) \tag{3.10b}$$

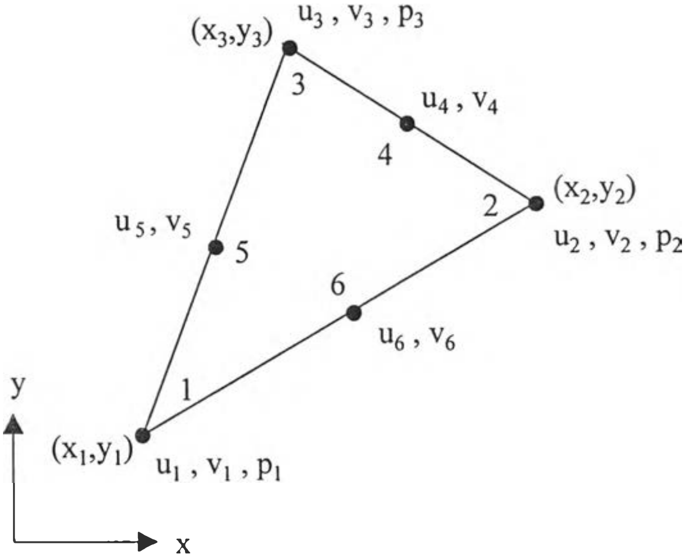
หรือแรงที่กระทำที่ผิวตลอดขอบ S_2

$$T_x = \sigma_x\, l + \tau_{xy}\, m \tag{3.11a}$$

$$T_y = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m \tag{3.11b}$$

โดย l และ m คือ ทิศทางโคซายน์ (direction cosines) ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ตั้งฉากกับขอบเขตนั้น

จากที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 3.1 ที่ว่าการนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา ขั้นแรกจะต้องทำการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้เลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งจะประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าของความเร็ว ในทิศทางของแกน x และความเร็ว ในทิศทางของแกน y ที่ทั้งหกจุดต่อ และตัวไม่ทราบค่าของความดัน ที่สามจุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น



รูปที่ 3.2 การแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ

ซึ่งจะทำให้ได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของความเร็วและความดันบนเอลิเมนต์อยู่ในรูป

$$u(x,y) = \sum N_i(x, y)\, u_i = \lfloor N \rfloor \{u\} \tag{3.12a}$$

$$v(x,y) = \sum N_i(x, y)\, v_i = \lfloor N \rfloor \{v\} \tag{3.12b}$$

$$p(x,y) = \sum H_i(x, y)\, p_i = \lfloor H \rfloor \{p\} \tag{3.12c}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$u(x,y) = N_\alpha u_\alpha \tag{3.13a}$$

$$v(x,y) = N_\alpha v_\alpha \tag{3.13b}$$

$$p(x,y) = H_\lambda p_\lambda \tag{3.13c}$$

โดยฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ของความเร็ว N_α , α =1, 2, ... , 6 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดของพื้นที่ , L_i [7] ได้ดังนี้

$$N_1 = L_1^2 - L_1(L_2 + L_3) \quad (3.14a)$$

$$N_2 = L_2^2 - L_2(L_3 + L_1) \quad (3.14b)$$

$$N_3 = L_3^2 - L_3(L_1 + L_2) \quad (3.14c)$$

$$N_4 = 4 L_2 L_3 \quad (3.14d)$$

$$N_5 = 4 L_3 L_1 \quad (3.14e)$$

$$N_6 = 4 L_1 L_2 \quad (3.14f)$$

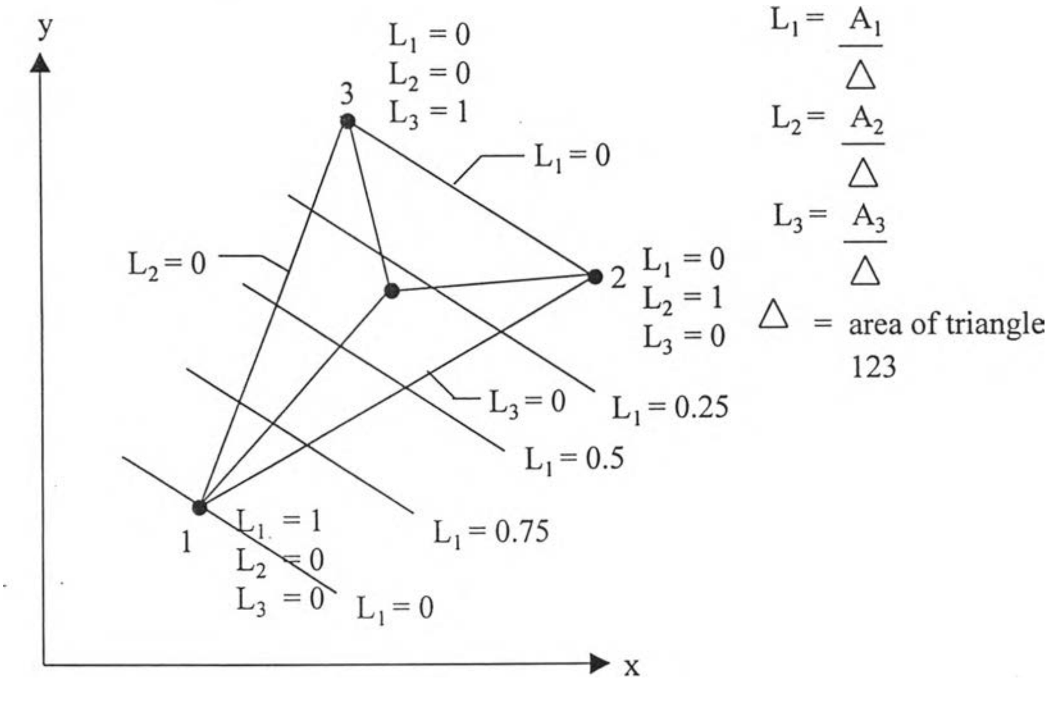
และฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ของความดัน H_λ, λ =1, 2, 3 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดของพื้นที่ , L_i ได้เช่นกัน คือ

$$H_1 = L_1 \quad (3.15a)$$

$$H_2 = L_2 \quad (3.15b)$$

$$H_3 = L_3 \quad (3.15c)$$

โดยพิกัดของพื้นที่ L_i, i =1, 2, 3 คือสัดส่วนของพื้นที่ i ต่อพื้นที่ทั้งเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 พิกัดของพื้นที่สำหรับเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

ซึ่งพิกัดของพื้นที่เหล่านี้ สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของโคออดิเนตของเอลิเมนต์ที่พิจารณาได้ ดังนี้

$$L_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.16}$$

โดย a_i, b_i, c_i ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อและพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น

$$a_1 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)/2A \tag{3.17a}$$

$$a_2 = (x_3 y_1 - x_1 y_3)/2A \tag{3.17b}$$

$$a_3 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)/2A \tag{3.17c}$$

$$b_1 = (y_2 - y_3)/2A \qquad c_1 = (x_3 - x_2)/2A \tag{3.17d}$$

$$b_2 = (y_3 - y_1)/2A \qquad c_2 = (x_1 - x_3)/2A \tag{3.17e}$$

$$b_3 = (y_1 - y_2)/2A \qquad c_3 = (x_2 - x_1)/2A \tag{3.17f}$$

และ A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{3.18}$$

ฟังก์ชั่นของการประมาณภายในเอลิเมนต์ N_i, $i = 1, 2, \dots, 6$ ดังสมการ (3.14a-f) สามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ ได้คือ

$$\underset{(1\mathrm{x}6)}{\lfloor N \rfloor} = \underset{(1\mathrm{x}6)}{\lfloor R \rfloor}\ \underset{(6\mathrm{x}6)}{[A]} \tag{3.19}$$

หรือ

$$\underset{(6\mathrm{x}1)}{\{N\}} = \underset{(6\mathrm{x}1)(6\mathrm{x}6)}{(\lfloor R \rfloor [A])^T} = \underset{(6\mathrm{x}6)(6\mathrm{x}1)}{[A]^T \{R\}} \tag{3.20}$$

โดย

$$\underset{(6\mathrm{x}6)}{[A]^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

และ

$$\{R\}_{(6\times1)} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$N_\alpha = A_{\alpha\xi} R_\xi \tag{3.23}$$

โดย α และ $\xi = 1, 2, \ldots, 6$

จากสมการ (3.12a-b) ทำให้ได้อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในทิศทางต่าง ๆ ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{u\} \tag{3.24a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{u\} \tag{3.24b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{v\} \tag{3.24c}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{v\} \tag{3.24d}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$u_{,x} = N_{\alpha,x}\, u_\alpha \tag{3.25a}$$

$$u_{,y} = N_{\alpha,y}\, u_\alpha \tag{3.25b}$$

$$v_{,x} = N_{\alpha,x}\, v_\alpha \tag{3.25c}$$

$$v_{,y} = N_{\alpha,y}\, v_\alpha \tag{3.25d}$$

โดย $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$ สมการ (3.12-3.25) จะนำไปใช้ในตอนประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปของเมตริกซ์เพื่อนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของความเร็ว คือ

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left([A]^T \{R\}\right) = [A]^T \frac{\partial}{\partial x}\{R\} \tag{3.26}$$

แต่จากสมการ (3.22) ทำให้ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\{R\} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

$$= [B]^T \{H\} \tag{3.28}$$

ดังนั้น

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} = [A]^T [B]^T \{H\} \tag{3.29}$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในแบบของเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_\eta \tag{3.30}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left([A]^T \{R\}\right) = [A]^T \frac{\partial}{\partial y}\{R\} \tag{3.31}$$

และจากสมการ (3.22) ทำให้ได้

$$\frac{\partial}{\partial y}\{R\} = \frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

$$= [C]^T \{H\} \tag{3.33}$$

ดังนั้น

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} = [A]^T [C]^T \{H\} \tag{3.34}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในแบบของเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_\eta \tag{3.35}$$

หลังจากทราบลักษณะการกระจายของผลเฉลยแล้วดังในสมการ (3.12a-c) ขั้นต่อไป คือ ต้องสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งถือเป็นขั้นตอนที่สำคัญและมีความยากมากกว่าขั้นตอนอื่น ๆ การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลในครั้งนี้จะใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง [8] ซึ่งมีขั้นตอนดังที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 3.1 คือ นำเอาฟังก์ชั่นน้ำหนัก (W) มาคูณกับเศษตกค้าง (R) จากนั้นจึงทำการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ของเอลิเมนต์นั้น แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ และ

ในครั้งนี้จะใช้ฟังก์ชั่นน้ำหนักเท่ากับฟังก์ชั่นการประมาณภายในเอลิเมนต์ ซึ่งวิธีดังกล่าว เรียกว่า บัฟโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) [1]

$$\int_A N_i\,(u\,u_{,x} + v\,u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y})\,dA = 0 \qquad (3.36a)$$

$$\int_A N_i\,(u\,v_{,x} + v\,v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y})\,dA = 0 \qquad (3.36b)$$

$$\int_A H_i\,(u_{,x} + v_{,y})\,dA = 0 \qquad (3.36c)$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ จากทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) [1] นำมาประยุกต์เข้ากับสมการ (3.36a-b) เพื่อก่อให้เกิดค่าอินทิกรัลที่สอดคล้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้

$$\int_A N_i\,(u\,u_{,x} + v\,u_{,y})\,dA + \int_A (N_{i,x}\,\sigma_x)\,dA + \int_A (N_{i,y}\,\tau_{xy})\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS \qquad (3.37a)$$

$$\int_A N_i\,(u\,v_{,x} + v\,v_{,y})\,dA + \int_A (N_{i,x}\,\tau_{xy})\,dA + \int_A (N_{i,y}\,\sigma_y)\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS \qquad (3.37b)$$

แทนค่าความเค้นให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วและความดัน ดังแสดงในสมการ (3.8a-c) สมการ (3.37a-b) จะกลายมาเป็น

$$\int_A N_i\,u\,u_{,x}\,dA + \int_A N_i\,v\,u_{,y}\,dA - \int_A N_{i,x}\,p\,dA + \int_A 2\,\nu\,N_{i,x}\,u_{,x}\,dA + \int_A \nu\,N_{i,y}\,u_{,y}\,dA + \int_A \nu\,N_{i,y}\,v_{,x}\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS \qquad (3.38a)$$

$$\int_A N_i\,u\,v_{,x}\,dA + \int_A N_i\,v\,v_{,y}\,dA - \int_A N_{i,y}\,p\,dA + \int_A \nu\,N_{i,x}\,u_{,y}\,dA + \int_A \nu\,N_{,x}\,v_{,x}\,dA + \int_A 2\,\nu\,N_{,y}\,v_{,y}\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS \qquad (3.38b)$$

และสมการอนุรักษ์มวล คือ

$$\int_A H_i\,(u_{,x} + v_{,y})\,dA = 0 \qquad (3.38c)$$

จากการกำหนดการกระจายตัวของความเร็วและความดันและค่าอนุพันธ์ของความเร็วบนเอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการ (3.13a-c) และ (3.25a-d) ตามลำดับ นำมาแทนลงในสมการ (3.38a-c) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x}\,u_\beta\,u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\,v_\beta\,u_\gamma - \frac{1}{\rho}H_{\alpha\lambda^x}\,p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}}\,u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}}\,v_\beta = Q_{\alpha^x} \qquad (3.39a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x}\,u_\beta\,v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\,v_\beta\,v_\gamma - \frac{1}{\rho}H_{\alpha\lambda^y}\,p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}}\,u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}}\,v_\beta = Q_{\alpha^y} \qquad (3.39b)$$

$$H_{\beta\mu}{}^{x}\, u_\beta + H_{\beta\mu}{}^{y}\, v_\beta = 0 \qquad (3.39c)$$

โดย

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^{x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x}\, dA \qquad (3.40a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^{y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y}\, dA \qquad (3.40b)$$

$$H_{\alpha\lambda}{}^{x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda\, dA \qquad (3.40c)$$

$$H_{\alpha\lambda}{}^{y} = \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda\, dA \qquad (3.40d)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{xx} = \int_A 2\nu N_{\alpha,x} N_{\beta,x}\, dA + \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y}\, dA \qquad (3.40e)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{xy} = \int_A \nu N_{\alpha,y} N_{\beta,x}\, dA \qquad (3.40f)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yx} = \int_A \nu N_{\alpha,x} N_{\beta,y}\, dA \qquad (3.40g)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yy} = \int_A \nu N_{\alpha,x} N_{\beta,x}\, dA + \int_A 2\nu N_{\alpha,y} N_{\beta,y}\, dA \qquad (3.40h)$$

$$Q_\alpha{}^{x} = \int_{S_2} N_i\, T_x\, dS \qquad (3.40i)$$

$$Q_\alpha{}^{y} = \int_{S_2} N_i\, T_y\, dS \qquad (3.40j)$$

3.3 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ดังสมการ (3.39a-c) และ (3.40a-j) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงเลข วิธีการดังกล่าวจะแสดงไว้ในหัวข้อนี้

เริ่มจากที่เรามีรูปแบบการกระจายของความเร็วและความดันและอนุพันธ์ของความเร็วบนเอลิเมนต์ดังสมการ (3.13a-c) และ (3.24a-d) ตามลำดับคือ

$$u = N_\alpha\, u_\alpha \qquad (3.41a)$$

$$v = N_\alpha\, v_\alpha \qquad (3.41b)$$

$$p = H_\lambda\, p_\lambda \qquad (3.41c)$$

$$u_{,x} = N_{\alpha,x} u_{\alpha} \quad (3.42a)$$

$$u_{,y} = N_{\alpha,y} u_{\alpha} \quad (3.42b)$$

$$v_{,x} = N_{\alpha,x} v_{\alpha} \quad (3.42c)$$

$$v_{,y} = N_{\alpha,y} v_{\alpha} \quad (3.42d)$$

โดย N_{α}, $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$ สามารถเขียนในรูปพิกัดของพื้นที่ L_1, L_2, L_3 ได้ดังสมการ (3.23) คือ

$$N_{\alpha} = A_{\alpha\xi} R_{\xi} \quad (3.43)$$

โดย $A_{\alpha\xi}$ และ R_{ξ} แสดงไว้ในสมการ (3.21-3.22) ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นการประมาณภายใน $N_{\alpha,x}$, $N_{\alpha,y}$ คือ

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} \quad (3.44a)$$

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_{\eta} \quad (3.44b)$$

จากสมการ (3.41-3.44) ทำให้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สมการ (3.40a-j) สามารถคำนวณหาได้โดยตรงดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^{x} = \int_A N_{\alpha} N_{\beta} N_{\gamma,x} \, dA$$

$$= \int_A A_{\alpha\xi} R_{\xi} A_{\beta\eta} R_{\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} H_{\mu} \, dA$$

$$= A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A R_{\xi} R_{\eta} H_{\mu} \, dA$$

$$= A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} F_{\xi\eta\mu} \quad (3.45a)$$

ในทำนองเดียวกัน เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.40b) จะได้เป็น

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^{y} = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} C_{\lambda\mu} F_{\xi\eta\mu} \quad (3.45b)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \eta, \gamma, \lambda = 1, 2, \ldots, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ เมตริกซ์ F ในสมการ (3.45a-b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอินทิกรัลได้ดังนี้

$$F_{\xi\eta\mu} = \int_A R_{\xi} R_{\eta} H_{\mu} \, dA \quad (3.46)$$

โดยเมตริกซ์ R และ H ได้แสดงไว้ในสมการ (3.22) และ (3.14) ตามลำดับ เอลิเมนต์เมตริกซ์ F ในสมการ (3.44) สามารถหาค่าในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ เนื่องจาก

$$R_\xi R_\eta = \begin{bmatrix} L_1^4 & L_1^2 L_2^2 & L_1^2 L_3^2 & L_1^2 L_2 L_3 & L_1^3 L_3 & L_1^3 L_2 \\ L_1^2 L_2^2 & L_2^4 & L_2^2 L_3^2 & L_2^3 L_3 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1 L_2^3 \\ L_1^2 L_3^2 & L_2^2 L_3^2 & L_3^4 & L_2 L_3^3 & L_1 L_3^3 & L_1 L_2 L_3^2 \\ L_1^2 L_2 L_3 & L_2^3 L_3 & L_2 L_3^3 & L_2^2 L_3^2 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1 L_2^2 L_3 \\ L_1^3 L_3 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1 L_3^3 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1^2 L_3^2 & L_1^2 L_2 L_3 \\ L_1^3 L_2 & L_1 L_2^3 & L_1 L_2 L_3^2 & L_1 L_2^2 L_3 & L_1^2 L_2 L_3 & L_1^2 L_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตสมการ (3.46) จะได้เมตริกซ์ F คือ

$$F_{\xi\eta 1} = \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 120 & 12 & 12 & 6 & 24 & 24 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.48a}$$

$$F_{\xi\eta 2} = \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \\ 12 & 120 & 12 & 24 & 6 & 24 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.48b}$$

$$F_{\xi\eta 3} = \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 120 & 24 & 24 & 6 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.48c}$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.40c) จะได้เป็น

$$H_{\alpha\lambda x} = \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda \, dA$$

$$= \int_A A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, H_\eta\, H_\lambda\, dA$$

$$= A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta} \int_A H_\eta\, H_\lambda\, dA$$

$$= A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, G_{\eta\lambda} \qquad (3.45c)$$

ในทำนองเดียวกันเอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.40d) จะได้เป็น

$$H_{\alpha\lambda}{}^{y} = A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, G_{\eta\lambda} \qquad (3.45d)$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, ..., 6$ และ $\eta, \lambda = 1, 2, 3$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.40e) จะได้เป็น

$$S_{\alpha\beta}{}^{xx} = \int_A 2\,\nu\, N_{\alpha,x} N_{\beta,x}\, dA + \int_A \nu\, N_{\alpha,y} N_{\beta,y}\, dA$$

$$= 2\,\nu \int_A A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, H_\eta\, A_{\beta\lambda}\, B_{\lambda\mu}\, H_\mu\, dA$$

$$+\ \nu \int_A A_{\alpha\xi}\, C_{\xi\eta}\, H_\eta\, A_{\beta\lambda}\, C_{\lambda\mu}\, H_\mu\, dA$$

$$= 2\nu M_{\alpha\beta}{}^{xx} + \nu M_{\alpha\beta}{}^{yy} \qquad (3.45e)$$

ในทำนองเดียวกันเอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.40f-h) จะได้เป็น

$$S_{\alpha\beta}{}^{xy} = \nu\, M_{\alpha\beta}{}^{xy} \qquad (3.45f)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yx} = \nu\, M_{\alpha\beta}{}^{yx} \qquad (3.45g)$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yy} = \nu M_{\alpha\beta}{}^{xx} + 2\nu M_{\alpha\beta}{}^{yy} \qquad (3.45h)$$

โดย

$$M_{\alpha\beta}{}^{xx} = A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, A_{\beta\lambda}\, B_{\lambda\mu}\, G_{\eta\mu} \qquad (3.49a)$$

$$M_{\alpha\beta}{}^{xy} = A_{\alpha\xi}\, C_{\xi\eta}\, A_{\beta\lambda}\, B_{\lambda\mu}\, G_{\eta\mu} \qquad (3.49b)$$

$$M_{\alpha\beta}{}^{yx} = A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, A_{\beta\lambda}\, C_{\lambda\mu}\, G_{\eta\mu} \qquad (3.49c)$$

$$M_{\alpha\beta}{}^{yy} = A_{\alpha\xi}\, C_{\xi\eta}\, A_{\beta\lambda}\, C_{\lambda\mu}\, G_{\eta\mu} \qquad (3.49d)$$

โดย
$$G_{\eta\mu} = \int_A H_\eta H_\mu \, dA = \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

และ $\alpha, \xi, \beta, \lambda = 1, 2, ..., 6 ; \eta, \mu = 1, 2, 3$

ส่วนเอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.40i-j) ต่างอยู่ในรูปแบบของการอินทิเกรตตลอดขอบของเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น หากแรงที่ขอบ มีค่าเท่ากับความดัน ตลอดแนวขอบที่มีความยาว ซึ่งประกอบไปด้วยจุดต่อหมายเลข 2 – 3 – 4 แล้ว จะทำให้ได้

$$Q_\alpha^{x} = \frac{pL}{6}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ ดังสมการ (3.45-3.51) สามารถนำไปใช้ประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง แต่อย่างไรก็ตามสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังสมการ (3.39a-c) อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) ดังนั้นจึงต้องนำเอาระเบียบวิธีนิวตัน–ราฟสัน (Newton–Raphson iteration method) มาใช้ในการหาผลลัพธ์ ซึ่งระเบียบวิธีการดังกล่าวจะอธิบายไว้ในหัวข้อถัดไป

3.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสัน

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังในสมการ (3.39a-c) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นสมการเหล่านี้จะถูกแก้โดยใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำ (iteration method) ในที่นี้จะใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสัน มาใช้แก้ระบบสมการในครั้งนี้ ซึ่งระบบสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นดังกล่าวจะประกอบไปด้วย n สมการ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$[K(x)]\{x\} = \{R\} \tag{3.52}$$

โดย x_i, $i = 1, 2, ...,n$ คือ ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ถ้าค่า x_i เหล่านี้ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องของระบบสมการ จะทำให้เกิดค่าที่ไม่สมดุลเกิดขึ้นในสมการนั้น ๆ (สมการที่ i) คือ

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = K_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_j - R_i(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.53}$$

แนวคิดพื้นฐานของระเบียบวิธีวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน – ราฟสัน จะถูกประยุกต์เข้ากับอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series expansion) ของ F_i ที่ประกอบด้วย n ตัวแปรดังนี้

$$F_i\,(x_1 + \Delta x_1,\, x_2 + \Delta x_2,\, \ldots\ldots,\, x_n + \Delta x_n)$$

$$= \quad F_i\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) + \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\,\Delta x_j + \ldots.. \qquad \text{โดย } i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (3.54)$$

และโดยการไม่คิดผลของเทอมที่มีอันดับสูง ๆ และต้องการให้ทางด้านซ้ายของสมการ (3.54) หายไปหรือมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ x_i, i = 1, 2, ...n เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง จะทำให้สมการ (3.54) กลายมาเป็น

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\,\Delta x_j \;=\; -\,F_i\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad (3.55)$$

ขบวนการทำซ้ำของนิวตัน – ราฟสัน ดังกล่าว จะถูกนำเอาไปประยุกต์เข้ากับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่หามาได้ซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นดังสมการ (3.39a-c) โดยจะเริ่มจากการเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปของค่าที่ไม่สมดุล F_i ตามลำดับดังนี้

$$F_{\alpha^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x}\,u_\beta\,u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\,v_\beta\,u_\gamma - \frac{1}{\rho}\,H_{\alpha\lambda^x}\,p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}}\,u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}}\,v_\beta - Q_{\alpha^x} \qquad (3.56a)$$

$$F_{\alpha^y} = K_{\alpha\beta\gamma^x}\,u_\beta\,v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\,v_\beta\,v_\gamma - \frac{1}{\rho}\,H_{\alpha\lambda^y}\,p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}}\,u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}}\,v_\beta - Q_{\alpha^y} \qquad (3.56b)$$

$$F_\mu = H_{\beta\mu^x}\,u_\beta + H_{\beta\mu^y}\,v_\beta \qquad (3.56c)$$

และโดยการใช้สมการ (3.55) ของระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน – ราฟสัน กับสมการ (3.53a-c) จะทำให้เกิดชุดสมการที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ โดยมีตัวไม่ทราบค่าเป็นค่าการเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่เราต้องการ ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-\frac{1}{\rho}H_{\alpha\lambda^x}} \\ \hdashline \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-\frac{1}{\rho}H_{\alpha\lambda^y}} \\ \hdashline \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^x}} & \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^y}} & \underset{(3x3)}{0} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underset{(6x1)}{\Delta u_\beta} \\ \hdashline \underset{(6x1)}{\Delta v_\beta} \\ \hdashline \underset{(3x1)}{\Delta p_\lambda} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \underset{(6x1)}{-F_{\alpha^x}} \\ \hdashline \underset{(6x1)}{-F_{\alpha^y}} \\ \hdashline \underset{(3x1)}{-F_\mu} \end{array}\right\} \tag{3.57}$$

โดย

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \tag{3.58a}$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \tag{3.58b}$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \tag{3.58c}$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \tag{3.58d}$$

ค่าความเร็ว u_γ, v_γ ในสมการ (3.58a-d) คือค่าของความเร็วในแนวแกนต่าง ๆ ของการทำซ้ำครั้งที่ i โดยเมตริกซ์อื่น ๆ ทางด้านขวาของสมการนั้นได้แสดงไว้ในสมการ (3.45 – 3.51) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปสุดท้ายดังสมการ (3.57) นี้สามารถนำไปใช้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ โดยรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะนำไปกล่าวไว้ในบทที่ 5

ในการคำนวณดังกล่าวโดยวิธีการทำซ้ำ จะเป็นการหาค่าการเปลี่ยนแปลงของส่วนประกอบของความเร็วและความดัน ขบวนการทำซ้ำดังกล่าวจะเสร็จสิ้นก็ต่อเมื่อเปอร์เซนต์ของค่าความผิดพลาดทั้งหมดมีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ โดยเปอร์เซนต์ค่าความผิดพลาดทั้งหมด หาได้จาก

$$\text{Overall error} = \frac{\text{Error}}{\text{Sum}} \times 100\% \tag{3.59}$$

โดย

$$\text{Error} = \sum_{i=1}^{NPOIV} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{NPOIP} (\Delta p_j) \tag{3.60a}$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{NPOIV} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{NPOIP} (p_j) \tag{3.60b}$$

ซึ่ง NPOIV และ NPOIP คือ จำนวนตัวไม่ทราบค่าของความเร็ว และ ความดัน ตามลำดับ