

การแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟังก์ชันของโรว์
บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและการปรับตัวได้ของเอลิเมนต์



นายสุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

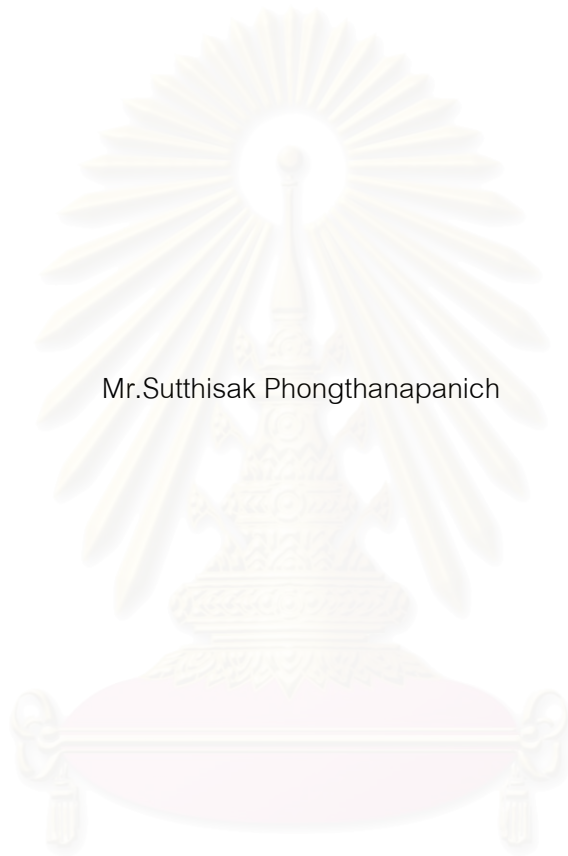
ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-53-2429-9

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CURING OF NUMERICAL INSTABILITY FOR ROE'S FLUX-DIFFERENCE SPLITTING SCHEME
ON TRIANGULAR MESHES AND MESH ADAPTATION

Mr.Sutthisak Phongthanapanich



สถาบันวิทยบริการ

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering


Chulalongkorn University

Academic year 2005

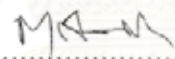
ISBN 974-53-2429-9

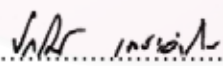
หัวข้อวิทยานิพนธ์ การแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยก
ผลต่างพลักร์ของโรบบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและการปรับตัวได้
ของเอลิเมนต์
โดย นายสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาตรีบัณฑิต



..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัญย์ศิริ)

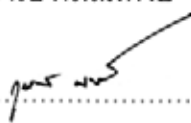
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา)


..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาขาโร)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุนจินี มณีรัตน์)

สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช : การแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรวบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและการปรับตัวได้ของเอลิเมนต์. (CURING OF NUMERICAL INSTABILITY FOR ROE'S FLUX-DIFFERENCE SPLITTING SCHEME ON TRIANGULAR MESHES AND MESH ADAPTATION) อ. ที่ปรึกษา : ศ. ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 174 หน้า. ISBN 974-53-2429-9.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ แสดงวิธีการเพิ่มความถูกต้องให้กับผลลัพธ์ของการคำนวณปัญหาการไหลคงตัวและไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติ ด้วยการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ที่มีการนำเอาความสามารถของฟังก์ชันการปรับขนาดมาใช้ร่วมกับตัวชี้วัดขนาดของความผิดพลาด เพื่อให้สามารถกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับพฤติกรรมของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ

ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของการประมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข ได้ถูกศึกษาด้วยวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว ปัญหาการทดสอบของเควิร์กได้นำมาใช้วิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับปรากฏการณ์โป่งนูน จากนั้นจึงนำเสนอวิธีการแก้ไขปัญหาเหล่านี้ด้วยวิธีที่เรียกว่า การแก้ไขค่าเอนโทรปีในหลายมิติแบบผสมผสาน

การตรวจสอบความแม่นยำของระเบียบวิธีที่ได้นำเสนอนี้ กระทำโดยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาจำนวนหลายปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงและสอดคล้องกันแล้วจึงได้ขยายระเบียบวิธีนี้โดยการเพิ่มความแม่นยำสู่อันดับสองทั้งในด้านของระยะทางและเวลา จากนั้นได้ทำการทดสอบเพื่อประเมินสมรรถนะของการผนวกเทคนิคต่าง ๆ ที่นำเสนอเข้าด้วยกัน โดยการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบสำหรับปัญหาการไหลคงตัวและไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

ภาควิชา...วิศวกรรมเครื่องกล..... ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชา...วิศวกรรมเครื่องกล..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา2548.....

4571826321 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEY WORD: ADAPTIVE MESH / CARBUNCLE PHENOMENON / ENTROPY FIX / H-CORRECTION / ROE'S FLUX-DIFFERENCE SPLITTING SCHEME / SHOCK INSTABILITY


SUTTHISAK PHONGTHANAPANICH : CURING OF NUMERICAL INSTABILITY FOR ROE'S FLUX-DIFFERENCE SPLITTING SCHEME ON TRIANGULAR MESHES AND MESH ADAPTATION.

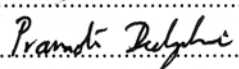
THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, PhD., 174 pp. ISBN 974-53-2429-9.

This thesis presents a method for improving solution accuracy obtained from solving two-dimensional steady and unsteady high-speed inviscid compressible flows using an automatic mesh adaptation. An adaptive remeshing technique is combined with a scaling function method and an appropriated error estimator to provide a closed correlation of optimal element sizes and the flow solution behavior.

The numerical instability for Roe's flux-difference splitting scheme on triangular meshes is studied. The Quirk's test problem is used to analyze the carbuncle phenomenon numerically. Then the mixed multidimensional entropy fix method is proposed for curing such numerical instability.

The proposed method was evaluated by several problems that have exact solutions. Accurate computational solutions were obtained and compared to the exact solutions. The proposed scheme is further extended to achieve second-order spatial and temporal solution accuracy. The performance of the combined procedure is evaluated on unstructured triangular meshes by solving both the steady and unsteady high-speed compressible flow problems.

Department... Mechanical Engineering.....Student's signature.....

Field of study.. Mechanical Engineering....Advisor's signature.....

Academic year ...2005.....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้ทั้งโอกาส ความรู้ คำแนะนำ ประสบการณ์ ตลอดจนข้อคิดต่าง ๆ ที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง อันเป็นแรงบันดาลใจและกำลังใจให้ผู้วิจัยสามารถทำงานได้สำเร็จลุล่วง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ตุลย์ มณีวัฒนา ประธานกรรมการและรองศาสตราจารย์ ดร. วรารัตน์ จันทสาโร ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กุณขิณี มณีรัตน์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ โครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก (คปก) สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (The Thailand Research Fund) ที่ให้การสนับสนุนทางการเงินตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยฉบับนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. อธิ บุญจิตราคุลย์ ที่กรุณาเอื้อเฟื้อบทความจากวารสาร AIAA ด้วยดีตลอดมา ตลอดจนข้อแนะนำในการผสมผสานการตีความด้านคณิตศาสตร์เข้ากับปัญหาด้านวิศวกรรมศาสตร์

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. คาซุโยชิ ทากายามา (Professor Dr. Kazuyoshi Takayama) และรองศาสตราจารย์ ดร. หมิงหยู ซุน (Associate Professor Dr. Mingyu Sun) ห้องปฏิบัติการวิจัยสหวิทยาการคลื่นช็อก (Interdisciplinary Shock Wave Research Center) สถาบันวิทยาศาสตร์ของไหล (Institute of Fluid Science) มหาวิทยาลัยโตโฮกุ (Tohoku university) ที่ให้ความกรุณาผู้วิจัยได้มีโอกาสร่วมงานวิจัยที่ประเทศญี่ปุ่นเป็นเวลา 3 เดือน อันก่อให้เกิดความก้าวหน้าทั้งด้านทฤษฎีและการประยุกต์ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นอย่างมาก

ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ (CMRL) ทุกคน สำหรับคำแนะนำและกำลังใจในระหว่างการทำงานวิจัยนี้ ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ประภาศรี พงษ์นาพาณิช ที่คอยให้กำลังใจและอำนวยความสะดวกในเรื่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์นี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาอันเป็นที่รักยิ่ง ที่คอยให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญูตามบูชาแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
สารบัญภาพ	ฎ
สารบัญตาราง	ณ
คำอธิบายสัญลักษณ์	ด
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
1.5 วิธีดำเนินการวิจัย	5
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
2.1 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบ ปรับตัวได้	6
2.2 ปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ ของโรว์	9
บทที่ 3 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และการปรับตัวได้	12
3.1 แผนผังไวโรนอยและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่	12
3.1.1 แผนผังไวโรนอย	12
3.1.2 สามเหลี่ยมเดอลอนเน่	14
3.2 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และการสร้างจุดต่อภายในโดเมน.....	17
3.2.1 อัลกอริทึมของโบว์เยอร์และวัตสัน	18
3.2.2 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่.....	19
3.2.3 การสร้างจุดต่อภายในโดเมน.....	20

	หน้า	
3.3	ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดและวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้....	23
3.3.1	ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด	24
3.3.2	วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้	26
3.4	ตัวอย่างการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้.....	33
บทที่ 4	กฎการอนุรักษ์และปัญหาของรีมันน์	41
4.1	ระบบสมการควบคุมของการไหล	41
4.2	กฎการอนุรักษ์สเกลาร์และปัญหารีมันน์	45
4.3	ระบบสมการออยเลอร์และปัญหารีมันน์	50
บทที่ 5	ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักร์ของโรว์	53
5.1	ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม	53
5.2	วิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักร์ของโรว์.....	56
5.3	การกำหนดช่วงเวลา	59
บทที่ 6	ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักร์ของโรว์.....	63
6.1	ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักร์ ของโรว์.....	63
6.1.1	ปัญหาการไหลความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลด ขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน	64
6.1.2	ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°.....	65
6.1.3	ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้น ยกระดับมุม 46°	66
6.1.4	ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านทรงกระบอก	68
6.1.5	ปัญหาทดสอบของเคเวิร์ก.....	70
6.2	การแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยก ผลต่างพลักร์ของโรว์.....	71
6.2.1	ปัญหาการไหลความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลด ขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน	74

6.2.2	ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°	75
6.2.3	ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้น ยกกระดานมุม 46°	76
6.2.4	ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านทรงกระบอก	77
6.2.5	ปัญหาทดสอบของเควิร์ก	79
6.3	การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของปัญหาความเร็วเสียงที่ราบผิวเรียบ	80
บทที่ 7	ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดที่มีการอัดตัวที่ ความเร็วสูง	86
7.1	กระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้	86
7.2	การขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับสอง	89
7.3	การตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่มีผลเฉลยแน่นอนตรง	92
7.3.1	ปัญหาคลิ้นช็อกในท่อของ Sod	92
7.3.2	ปัญหาคลิ้นกระจายแบบสมมาตร	95
7.3.3	ปัญหาคลิ้นช็อกตั้งฉากหยุดนิ่ง	98
7.3.4	ปัญหาคลิ้นช็อกเฉียงสะท้อนกับผนัง	100
7.4	การประยุกต์กับปัญหาที่มีความซับซ้อน	102
7.4.1	ปัญหาการไหลหมายเลขมัด 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15°	103
7.4.2	ปัญหาการไหลหมายเลขมัด 3 ผ่านช่องลู่เข้าและลู่ออก	108
7.4.3	ปัญหาการไหลหมายเลขมัด 1.4 ผ่านผนังนูน 4%	111
7.4.4	ปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°	114
7.4.5	ปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 5.09 ผ่านมุม 90°	114
7.4.6	ปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 2 สะท้อนบนผนังยกกระดาน	117
บทที่ 8	บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ	120
8.1	บทสรุป	120
8.2	ปัญหาที่พบ	122
8.3	ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	123

สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 2.1 ตัวอย่างแผนผังโหนดและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่.....	6
รูปที่ 3.1 แผนผังโหนดของจุดต่อภายในโดเมน	13
รูปที่ 3.2 ระยะห่างที่เท่ากันของระยะทางจากจุดต่อมายังเส้นขอบเขตร่วม.....	13
รูปที่ 3.3 ตัวอย่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และคุณสมบัติวงกลมว่างเปล่า.....	14
รูปที่ 3.4 แผนผังโหนดและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่.....	15
รูปที่ 3.5 เส้นขอบเขต ab มีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่	15
รูปที่ 3.6 ซ้ายมือสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และขวามือไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่	16
รูปที่ 3.7 มุมภายในสามเหลี่ยม	16
รูปที่ 3.8 สามเหลี่ยมที่ไม่ผ่านคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่าภายหลัง การแทรกจุดต่อ p	18
รูปที่ 3.9 ลบทั้งสามเหลี่ยมดังกล่าวทั้งหมดและทำให้เกิดพื้นที่ว่าง	18
รูปที่ 3.10 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ขึ้นมาใหม่	18
รูปที่ 3.11 แนวคิดโดยพื้นฐานของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้.....	27
รูปที่ 3.12 สามเหลี่ยมภายหลังการปรับตัวและเส้นชั้นของความหนาแน่น สำหรับ ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่าในสภาวะคงตัว.....	29
รูปที่ 3.13 แนวคิดพื้นฐานของการผสมผสานระหว่างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดและ ฟังก์ชันการปรับขนาดสำหรับการสร้างสามเหลี่ยมปรับตัวได้.....	30
รูปที่ 3.14 การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวกึ่งกลางของโดเมน รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	34
รูปที่ 3.15 ขนาดสามเหลี่ยมตลอดแนวแกน y	35
รูปที่ 3.16 การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวขวางของโดเมน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	36
รูปที่ 3.17 การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้รูปร่างอัลฟาในสี่เหลี่ยมจัตุรัส	38
รูปที่ 3.18 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัค 6 ผ่านทรงกระบอก.....	39
รูปที่ 3.19 สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และเส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลที่ หมายเลขมัค 6 ผ่านทรงกระบอก (อัลกอริทึม 3)	40

รูปที่ 3.20	สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และเส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลที่ หมายเลขมัด 6 ผ่านทรงกระบอก (อัลกอริทึม 4)	40
รูปที่ 4.1	โดเมนทั่วไปสำหรับปัญหาการไหล.....	42
รูปที่ 4.2	รูปทรงกระบอกและมีผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่องภายใน	44
รูปที่ 4.3	เงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับปัญหาของริมันน์	47
รูปที่ 4.4	ผลลัพธ์ของสมการ (4.27) ในกรณี $u_L > u_R$	48
รูปที่ 4.5	ผลลัพธ์ของสมการ (4.27) ในกรณี $u_L < u_R$ (คลื่นช็อกขยาย)	48
รูปที่ 4.6	ผลลัพธ์ของสมการ (4.27) ในกรณี $u_L < u_R$ (คลื่นขยาย).....	49
รูปที่ 4.7	ผลลัพธ์โดยทั่วไปปัญหาของริมันน์สำหรับระบบสมการออยเลอร์ในหนึ่งมิติ.....	52
รูปที่ 5.1	ปริมาตรควบคุมสำหรับวิธีเซลดส์เซนเตอร์.....	54
รูปที่ 5.2	เส้นคุณลักษณะผ่านจุด $(x_0, 0)$	61
รูปที่ 6.1	ปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาด พื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน	64
รูปที่ 6.2	ตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบของปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน	64
รูปที่ 6.3	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่า ผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน	65
รูปที่ 6.4	ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°	65
รูปที่ 6.5	ตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบของปัญหาการกระจายของคลื่นช็อก หมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°	66
รูปที่ 6.6	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°	66
รูปที่ 6.7	ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้นยกระดับมุม 46°	67
รูปที่ 6.8	ตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบของปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อก หมายเลขมัด 5 ผ่านพื้นยกระดับมุม 46°	67
รูปที่ 6.9	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้นยกระดับมุม 46°	68
รูปที่ 6.10	ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านทรงกระบอก.....	69
รูปที่ 6.11	ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านท่อทรงกระบอก: 15×15 จุดต่อ.....	69

รูปที่ 6.12	ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านท่อทรงกระบอก: 15×90 จุดต่อ.....	69
รูปที่ 6.13	ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านท่อทรงกระบอก: 15×280 จุดต่อ.....	70
รูปที่ 6.14	ตัวอย่างการปรับตำแหน่งจุดต่อตามแนวกึ่งกลางโดเมน สำหรับปัญหาทดสอบของเควิร์ก	71
รูปที่ 6.15	เส้นชั้นความหนาแน่นสำหรับปัญหาทดสอบของเควิร์ก.....	71
รูปที่ 6.16	การประยุกต์ปริมาตรควบคุมรูปทรงสี่เหลี่ยมแบบมีระเบียบมาใช้กับ ปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ	72
รูปที่ 6.17	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่า ผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน	75
รูปที่ 6.18	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90°	76
รูปที่ 6.19	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้นยกระดับมุม 46°	77
รูปที่ 6.20	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก: 15×15 จุดต่อ	78
รูปที่ 6.21	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก: 15×90 จุดต่อ	78
รูปที่ 6.22	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก: 15×280 จุดต่อ.....	79
รูปที่ 6.23	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาทดสอบของเควิร์ก	79
รูปที่ 6.24	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาทดสอบของเควิร์กจากวิธี HLLC	84
รูปที่ 6.25	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาทดสอบของเควิร์กจากวิธีการแบ่งแยก เวกเตอร์ฟลักซ์ของแวนเรียร์.....	85
รูปที่ 7.1	แผนผังแสดงการไหลของชั้นตอน สำหรับกระบวนการสร้างตาข่ายเริ่มต้นหรือ การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้.....	88
รูปที่ 7.2	การขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่อันดับสองสำหรับปริมาตรควบคุม รูปทรงสามเหลี่ยม	89
รูปที่ 7.3	ปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod	92

รูปที่ 7.4	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVPLA ระดับ ความแม่นยำอันดับหนึ่งของปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod.....	93
รูปที่ 7.5	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVPLA ระดับ ความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod.....	94
รูปที่ 7.6	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVPLA ระดับ ความแม่นยำอันดับหนึ่งของปัญหาคลื่นกระจายแบบสมมาตร.....	96
รูปที่ 7.7	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVPLA ระดับ ความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นกระจายแบบสมมาตร.....	97
รูปที่ 7.8	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVPLA ระดับ ความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นช็อกตั้งฉากหยุดนิ่ง	99
รูปที่ 7.9	ปัญหาคลื่นช็อกเฉียงสะท้อนกับผนัง	100
รูปที่ 7.10	ตาข่ายแบบปรับตัวได้และเส้นชั้นความหนาแน่นคำนวณด้วย ระดับความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นช็อกเฉียงสะท้อนกับผนัง.....	101
รูปที่ 7.11	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVPLA ระดับ ความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นช็อกเฉียงสะท้อนกับผนัง	102
รูปที่ 7.12	ปัญหาการไหลหมายเลขมัค 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15°	103
รูปที่ 7.13	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15° บนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง	104
รูปที่ 7.14	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15° บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง	105
รูปที่ 7.15	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15° บนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	106
รูปที่ 7.16	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15° บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	107
รูปที่ 7.17	ปัญหาการไหลหมายเลขมัค 3 ผ่านช่องลู่เข้าและลู่ออก.....	108
รูปที่ 7.18	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 3 ผ่านช่องลู่เข้าและลู่ออก บนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง	109
รูปที่ 7.19	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 3 ผ่านช่องลู่เข้าและลู่ออก บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง.....	110

รูปที่ 7.20	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัด 3 ผ่านช่องลู่เข้าและลู่ออก บนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	110
รูปที่ 7.21	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัด 3 ผ่านช่องลู่เข้าและลู่ออก บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	111
รูปที่ 7.22	ปัญหาการไหลหมายเลขมัด 1.4 ผ่านผนังหนูน 4%.....	111
รูปที่ 7.23	ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัด 1.4 ผ่านผนังหนูน 4% บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	112
รูปที่ 7.24	การเปรียบเทียบค่าความหนาแน่นตลอดผนังบนของปัญหาการไหล หมายเลขมัด 1.4 ผ่านผนังหนูน 4% กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	113
รูปที่ 7.25	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 2 ผ่านมุม 90° บนตาข่ายแบบมีระเบียบด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	115
รูปที่ 7.26	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 5.09 ผ่านมุม 90° บนตาข่ายแบบมีระเบียบด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	116
รูปที่ 7.27	ปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ.....	117
รูปที่ 7.28	เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาคลิ้นช็อกหมายเลขมัด 2 สะท้อนบน ผนังยกระดับบนตาข่ายแบบปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง.....	118
รูปที่ 7.29	การเปรียบเทียบรูป shadowgraph จากการทดลองและการคำนวณของปัญหา คลิ้นช็อกหมายเลขมัด 2 สะท้อนบนผนังยกระดับที่เวลา $t = 0.017$	119

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 3.1 ข้อมูลของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวกึ่งกลางของ โดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า.....	35
ตารางที่ 3.2 ข้อมูลของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวขวางของ โดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	37
ตารางที่ 3.3 ข้อมูลของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้รูปร่างอัลฟาใน สี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	38



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำอธิบายสัญลักษณ์

$A(U)$	เมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix)
$\tilde{A}(U_L, U_R)$	เมตริกซ์ยาโคบีของโรวี
a	ความเร็วของเสียง (speed of sound)
B_p	เซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ด้วยการลากเส้นต่อจากจุดต่อทั้งหมดของพื้นที่ว่างมายังจุดต่อ p
C_p	เซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกลบทิ้งซึ่งทำให้เกิดพื้นที่ว่าง
d_m	ระยะห่างจากจุดต่อ Q ไปยังจุดปลายที่ m ของสามเหลี่ยม t_i
E	ปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพในแนวแกน x
e	พลังงานภายใน
$F(U)$	ปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพ
$F^{(c)}$	ปริมาณฟลักซ์การพาเชิงกายภาพ
$F^{(p)}$	ปริมาณฟลักซ์ความดันเชิงกายภาพ
F_n	ปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพตั้งฉาก $(F(U) \cdot \vec{n})$
F_n	ปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขตั้งฉาก
G	ปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพในแนวแกน y
H	ค่าเอนทัลปีรวม (total enthalpy)
h_i	ขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ i
h_{\min}	ขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเล็กที่สุด
h_{\max}	ขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมโตที่สุด
M	หมายเลขมัค (Mach number)
$\dot{m}_{1/2}$	ฟลักซ์ของมวล (mass flux)
$\dot{m}_{1/2}^+, \dot{m}_{1/2}^-$	องค์ประกอบของฟลักซ์ของมวลที่ตั้งฉากกับด้านร่วม
\vec{n}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตั้งฉากกับด้านของเอลิเมนต์

n_x, n_y	ทิศทางโคไซน์ (direction cosine) ของเวกเตอร์ \vec{n} ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ
p	ความดัน
P_k	จุดต่อลำดับที่ k
q_C	เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้น (primitive variables) ที่จุดศูนย์กลางของ ปริมาตรควบคุม
$q_{f_{1-2}}$	เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้น (primitive variables) ที่ถูกฉายไปยังด้าน 1-2
\tilde{R}	เมตริกซ์เวกเตอร์เจาะจงด้านขวาของโรว์ (right eigenvector matrix)
$\mathcal{R} \times \mathcal{R}$	โดเมนจำนวนจริงในสองมิติ
r_i	เวกเตอร์เจาะจงที่สัมพันธ์กับค่าเจาะจงที่ i
s	ความเร็วของผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่องในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิว
s_j	ระยะห่างจากจุดต่อ Q ไปยังจุดต่อ j ที่ถูกแทรกก่อนหน้านี้
T_i	สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทั้งหมดก่อนการแทรกจุดต่อ p
T_{i+1}	สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทั้งหมดภายหลังการแทรกจุดต่อ p
t	เวลา
U	เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables)
u	ความเร็วในแนวแกน x
V_k	พื้นที่โวลุ่มของจุดต่อ P_k
v	ความเร็วในแนวแกน y
(\bullet)	ปริมาณที่ถูกประมาณด้วยวิธีของโรว์
α	สัมประสิทธิ์อัลฟา หรือค่าความแข็งแรงของคลื่น (wave strength)
β	สัมประสิทธิ์เบต้า
χ_{\min}	ค่าพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันการปรับขนาดน้อยที่สุด
χ_{\max}	ค่าพารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันการปรับขนาดมากที่สุด

ΔS_j^x	ขนาดความยาวพื้นผิวควบคุมทั้งสามด้านของปริมาตรควบคุม รูปทรงสามเหลี่ยม เมื่อทำการขยายไปยังระนาบตั้งฉากกับแกน x
ΔS_j^y	ขนาดความยาวพื้นผิวควบคุมทั้งสามด้านของปริมาตรควบคุม รูปทรงสามเหลี่ยม เมื่อทำการขยายไปยังระนาบตั้งฉากกับแกน y
Δt_j	ค่าช่วงเวลาที่เหมาะสมสำหรับปริมาตรควบคุมที่ j
$\partial\Omega_j$	พื้นผิวควบคุม (control surface) ของปริมาตรควบคุมที่ j
$\bar{\Sigma}$	ความเร็วของผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่อง
ε	พลังงานรวม (total energy)
$\tilde{\Lambda}$	เมตริกซ์ค่าเจาะจงของโรว์ (Roe's eigenvalue matrix)
λ_i	ค่าปริมาณหลักของจุดต่อที่ i ของตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด หรือค่าเจาะจงที่ i ของเมตริกซ์ยาโคบี
ρ	ความหนาแน่น
Ω_j	ปริมาตรควบคุมที่ j
σ	ตัวเลขคอแรนท์ (Courant number)
γ	อัตราส่วนของค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่ต่อปริมาตรคงที่
Ψ_c	ตัวจำกัดขอบเขต (limiter)
$(\bullet)_L, (\bullet)_R$	ปริมาณสำหรับด้านซ้ายและขวาตามลำดับ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาปัญหาทางพลศาสตร์ของของไหล (fluid dynamics) เป็นงานวิจัยที่ยังคงได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน ถึงแม้ว่าวิทยาการในหลาย ๆ ด้านได้เจริญรุดหน้าไปอย่างมากมาย แต่องค์ความรู้ที่สามารถนำมาสู่การแก้ปัญหาของการไหลอย่างถูกต้องและแม่นยำยังคงประสบกับปัญหาในหลากหลายประเด็น เช่น ปัญหาด้านฟิสิกส์ของการไหลหรือการเกิดปรากฏการณ์ของคลื่นช็อกแบบซับซ้อนที่ระดับความเร็วสูง (complex shock wave phenomena) ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ของสมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equations) หรือปัญหาด้านการแก้ระบบสมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เป็นต้น

สำหรับปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูง (high-speed compressible flow) โดยเฉพาะเมื่อของไหลเคลื่อนที่ผ่านวัตถุด้วยความเร็วสูงกว่าความเร็วเสียง (supersonic flow) มักจะก่อให้เกิดปรากฏการณ์ของคลื่นช็อก และเมื่อคลื่นช็อกเกิดการตกกระทบซึ่งกันและกัน ก็ยิ่งส่งผลให้เกิดปรากฏการณ์ของคลื่นช็อกที่มีความซับซ้อนและมีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง และในหลาย ๆ กรณีส่งผลให้ไม่สามารถที่จะแก้ปัญหาเหล่านี้โดยอาศัยวิธีการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยแบบแม่นยำ (exact solution) ดังนั้นจึงมีนักวิจัยหลายท่านพยายามที่จะแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนดังกล่าวโดยอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) โดยงานวิจัยของ von Neumann และ Richtmeyer [1] ในปี พ.ศ.2493 เป็นหนึ่งในงานวิจัยแรก ๆ ที่ประสบความสำเร็จในการวิเคราะห์ปัญหาการเกิดคลื่นช็อกในของไหล (hydrodynamics shock) โดยอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข หลังจากนั้นได้มีนักวิจัยท่านอื่น ๆ พยายามที่จะนำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใหม่ ๆ เพื่อแก้ปัญหการไหลแบบความเร็วสูงเพื่อศึกษาปรากฏการณ์ของคลื่นช็อก โดยวิธีที่ถูกนำเสนอก็เป็นการอธิบายเทคนิคการคำนวณปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข (numerical flux) ของระบบสมการออยเลอร์ (Euler equations) ซึ่งเป็นระบบสมการควบคุม (governing equations) การไหลแบบไร้ความหนืด (inviscid flow) [2] ในปัจจุบันได้มีการจัดแบ่งเทคนิคการคำนวณปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขออกเป็น 3 กลุ่มหลัก ๆ คือ วิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ (flux-vector splitting scheme, FVS) วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ (flux-difference splitting scheme, FDS) และวิธีอื่น ๆ ที่แตกต่างจากวิธีทั้งสองข้างต้นหรือเป็นวิธีที่เกิดจากการผสมผสานทั้งสองวิธีข้างต้น เช่น วิธี Advection Upstream Splitting Method (AUSM) ของ Liou และ Steffen [3] เป็นต้น

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข นักวิจัยส่วนใหญ่ให้ความสำคัญกับเทคนิคการคำนวณปริมาณพลักซ์เชิงตัวเลข ซึ่งเป็นปริมาณของพจน์การพา (convection term) ของระบบสมการออยเลอร์ เพราะพฤติกรรมของการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงโดยส่วนใหญ่จะได้รับผลจากพจน์ของการพามากกว่าพจน์ของการแพร่กระจาย (diffusion term) ยกเว้นเฉพาะบริเวณพื้นที่แคบ ๆ ติดกับพื้นผิววัตถุที่เรียกว่า ขอบชั้นของการไหล (boundary layer) เท่านั้น ที่พจน์ของการแพร่กระจายมีผลต่อพฤติกรรมของการไหลมากกว่า เนื่องจากงานวิจัยชิ้นนี้ทำการศึกษาเฉพาะการไหลแบบไม่หนืด ดังนั้นจึงให้ความสนใจเฉพาะการประมาณพจน์การพาดด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเท่านั้น สำหรับเทคนิคการคำนวณปริมาณพลักซ์เชิงตัวเลขที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน ก็คือ วิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ (Roe's flux-difference splitting scheme) [4] เพราะคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการอธิบายวิธีการคำนวณมีความชัดเจนและให้ผลลัพธ์โดยประมาณที่มีความแม่นยำสูง แต่วิธีนี้มีข้อเสียบางประการ เช่น ใช้เวลาในการคำนวณสูงกว่าวิธีอื่น ๆ เช่น วิธี AUSM หรือวิธี FVS ของ van Leer [5] เป็นต้น และในบางกรณีอาจจะให้ผลลัพธ์ที่ไม่ถูกต้อง [6]

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะทำการศึกษาถึงการประยุกต์วิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์เข้ากับระบบสมการออยเลอร์ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ (cell-centered finite volume method) สำหรับการแบ่งโดเมนด้วยปริมาตรควบคุมแบบเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (triangular element control volume) และแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสถานะคงตัวและสถานะไม่คงตัวในสองมิติ (two dimensional steady state and unsteady state high-speed inviscid compressible flows) โดยจะทำการศึกษาถึงความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข (numerical instability) ของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ ที่เกิดขึ้นกับปัญหาต่าง ๆ ที่พบโดยนักวิจัยหลาย ๆ ท่าน [6-12] จากนั้นจะนำเสนอวิธีการแก้ไขปัญหาค่าความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์สำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม และเพื่อให้ได้ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ที่มีความแม่นยำสูงยิ่งขึ้น ก็จะทำการศึกษาวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ (mesh adaptation) เข้ากับกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาของการไหลข้างต้น โดยจะนำเสนอแนวความคิดใหม่สำหรับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ซึ่งเป็นเทคนิคที่ให้ความสำคัญต่อทั้งกายภาพของการไหลและรูปร่างของปัญหา ทั้งนี้เพื่อให้การวางตำแหน่งของเอลิเมนต์ขนาดเล็กภายใน โดเมนของปัญหาที่ทำการศึกษาวิเคราะห์มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น และสามารถที่จะควบคุมขนาดของเอลิเมนต์ขนาดเล็กให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้น

ลำดับสุดท้ายก็จะทำการขยายผลการศึกษาเข้าสู่การวิเคราะห์แบบให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำในอันดับสูง (higher-order resolution method) โดยจะทำการศึกษาการคำนวณแบบ

ความแม่นยำในลำดับสูงทั้งสำหรับการแบ่งเวลา (temporal discretization) และการแบ่งพื้นที่ (spatial discretization) เข้ากับวิธีข้างต้นทั้งหมด แล้วทำการทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ ทั้งปัญหาแบบอย่างที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง และปัญหาที่มีความซับซ้อนทั้งในด้านของปรากฏการณ์ของการไหลและรูปร่างของปัญหา (geometry) เพื่อให้มั่นใจว่าเทคนิคที่แนะนำให้เสนอนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาในทางปฏิบัติที่มีความซับซ้อนและหลากหลายต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1.2.1 พัฒนาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ (mesh adaptation) ในระนาบสองมิติ ภายใต้แนวคิดของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่สำหรับโดเมนทั่วไป สำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัว
- 1.2.2 ศึกษาการประยุกต์วิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์เข้ากับระบบสมการออยเลอร์ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ สำหรับการแบ่งโดเมนด้วยปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม เพื่อใช้แก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัวในสองมิติ
- 1.2.3 ศึกษาถึงความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์ กับปัญหาที่ถูกรายงานในบทความต่าง ๆ
- 1.2.4 นำเสนอเทคนิคการปรับปรุงความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข สำหรับวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์
- 1.2.5 ปรับปรุงผลลัพธ์ให้มีความแม่นยำในอันดับสูง (higher-order resolution) โดยจะทำการประยุกต์การคำนวณแบบความแม่นยำในอันดับสูงทั้งสำหรับการแบ่งเวลา (temporal discretization) และการแบ่งพื้นที่ (spatial discretization) พร้อมกับการประยุกต์ใช้งานร่วมกับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้
- 1.2.6 ทดสอบความถูกต้องของวิธีที่แนะนำให้เสนอนี้กับปัญหาต่าง ๆ ทั้งปัญหาแบบอย่างที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง และปัญหาที่มีความซับซ้อนทั้งในด้านของปรากฏการณ์ของการไหลและรูปร่างของปัญหา

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการศึกษาที่สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ข้างต้น มีดังต่อไปนี้

- 1.3.1 พัฒนาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ในระนาบสองมิติ ภายใต้แนวคิดของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ สำหรับประยุกต์ร่วมกับการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัว และนำเสนอด้วยแนวคิดเชิงวัตถุ (object-oriented approach)
- 1.3.2 ศึกษาถึงความรู้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์ในหนึ่งและสองมิติ สำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม
- 1.3.3 นำเสนอเทคนิคการแก้ไขปัญหาค่าความรู้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์
- 1.3.4 ประยุกต์การคำนวณแบบความแม่นยำในลำดับสูงทั้งสำหรับการแบ่งเวลา (temporal discretization) และการแบ่งพื้นที่ (spatial discretization) พร้อมกับการนำมาใช้งานร่วมกับวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ และทำการทดสอบกับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัวในสองมิติ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 สามารถปรับปรุงความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ โดยการประยุกต์การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ในระนาบสองมิติ เข้ากับระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข
- 1.4.2 มีความเข้าใจถึงที่มาของปัญหาค่าความรู้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์ ตลอดจนแนวทางการแก้ไข
- 1.4.3 สามารถพัฒนาอัลกอริทึมการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ที่มีความแม่นยำของผลลัพธ์ในอันดับสูง (higher-order accuracy)
- 1.4.4 สามารถประยุกต์วิธีที่ถูกนำเสนอในงานวิจัยนี้ เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัว ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง
- 1.4.5 สามารถนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถนำไปใช้แก้ไขปัญหามีรูปร่างหรือเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันได้
- 1.4.6 สามารถนำไปขยายผลเพื่อศึกษาปัญหาการไหลชนิดอื่น ๆ เช่น การไหลแบบหนืดและราบเรียบ (viscous laminar flows) การไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flows) หรือการไหลแบบหลายสถานะ (multiphase flow) เป็นต้น

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

- 1.5.1 ศึกษาข้อดีของวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ในระนาบสองมิติ เมื่อนำมาประยุกต์กับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัว ซึ่งเป็นงานวิจัยในระดับปริญญาโทของผู้วิจัย
- 1.5.2 เสนอแนะวิธีการพัฒนาและปรับปรุงวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ในระนาบสองมิติ เพื่อให้สามารถกำหนดขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมากยิ่งขึ้น
- 1.5.3 ศึกษาหลักการและทฤษฎีด้านพลศาสตร์ของไหล และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้
- 1.5.4 ศึกษาและวิเคราะห์ปรากฏการณ์ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และวิธีแก้ไขปัญหาคความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ที่นำเสนอโดยนักวิจัยท่านอื่น ๆ
- 1.5.5 นำเสนอวิธีแก้ไขปัญหาคความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และทดสอบกับปัญหาที่ค้นพบโดยนักวิจัยท่านอื่น ๆ
- 1.5.6 ทดสอบความถูกต้องของวิธีที่นำเสนอทั้งหมดข้างต้น ด้วยการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงและประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาคที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น
- 1.5.7 จัดทำรายงานเพื่อนำเสนอ และสรุปผล

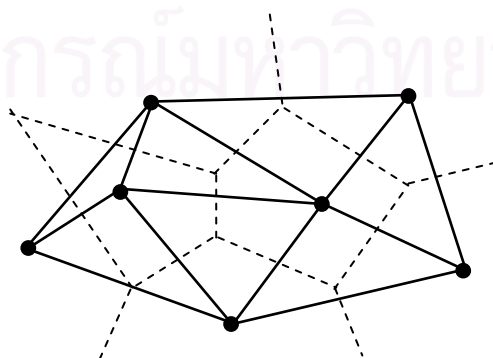
บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยฉบับนี้ทำการศึกษาประเด็นปัญหาสองประการหลัก ๆ ดังนี้ ประการที่หนึ่ง ศึกษาวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ภายใต้เงื่อนไขของสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) ในระนาบสองมิติ สำหรับประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสถานะคงตัวและสถานะไม่คงตัว และประการที่สอง ศึกษาปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ โดยเอกสารและงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้องมีดังต่อไปนี้

2.1 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

Bowyer [13] และ **Watson** [14] นำเสนออัลกอริทึมการสร้างแผนผังโวโรนอย (Voronoi diagram หรือ Dirichlet Tessellation) ซึ่งเป็นแผนผังที่ได้จากการเชื่อมต่อจุดซึ่งเป็นปัญหาการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (optimized path searching) เช่น กำหนด n จุดในระนาบหนึ่ง ๆ ถ้าหากต้องการที่จะสร้างโครงสร้างข้อมูล (data structure) เพื่อค้นหาจุด q โดยใช้เวลาน้อยที่สุดสามารถกระทำได้โดยการแบ่งระนาบออกเป็นโครงร่างทั้งหมด n โครงร่าง โดยที่แต่ละโครงร่างจะสัมพันธ์กับแต่ละจุด ดังนั้นโครงร่าง P ที่สัมพันธ์กับจุด p ถ้าหาก P เป็นเส้นทางการเดินทางของจุดของโครงร่างที่ใกล้กับจุด p มากกว่าจุดอื่น ๆ ในระนาบ การแบ่งระนาบออกเป็นโครงร่างย่อย ๆ ที่ต่อเชื่อมกันเรียกว่า แผนผังโวโรนอย ซึ่งถูกแสดงด้วยเส้นประ และการสร้างสามเหลี่ยมที่ได้จากการเชื่อมต่อจุดที่สัมพันธ์กับแต่ละโครงร่างเรียกว่า การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ข้างล่าง



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างแผนผังโวโรนอยและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

Weatherill [15] ได้นำเสนอวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และวิธีการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติ (automatic point creation) ในระนาบสองมิติ โดยอัลกอริทึมการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในระนาบสองมิติได้ใช้เกณฑ์การทดสอบจุดที่อยู่ภายในวงกลม (in-circle test criterion) สำหรับอัลกอริทึมการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติ ได้ใช้วิธีการแทรกจุดลงตรงตำแหน่งจุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยม และควบคุมเงื่อนไขการสร้างสามเหลี่ยมใหม่ด้วยสัมประสิทธิ์อัลฟา (α) และสัมประสิทธิ์เบต้า (β) โดยที่สัมประสิทธิ์อัลฟาเป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดที่ต้องการแทรกและจุดต่อทั้งสามของสามเหลี่ยม ซึ่งจะมีผลต่อความหนาแน่นของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (mesh density) และสัมประสิทธิ์เบต้า เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการทดสอบระยะห่างระหว่างจุดในบริเวณใกล้เคียงที่มีอยู่แล้วกับจุดที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ ซึ่งจะมีผลต่อรูปร่างของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ (regularity of triangulation)

Karamete et al. [16] ได้นำเสนอเทคนิคการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (Object Oriented Programming, OOP) และการจัดเก็บข้อมูลของจุดต่อและสามเหลี่ยมด้วยโครงสร้างข้อมูลแบบแผนภูมิต้นไม้ดิจิทัลที่เรียกว่า Alternating Digital Tree (ADT) มาใช้ปรับปรุงเทคนิคการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และวิธีการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติของ Weatherill [15] ในระนาบสองมิติ

Frey and Field [17] ได้นำเสนอเทคนิคการปรับปรุงคุณภาพของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม เพื่อให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีความใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่ามากที่สุด โดยการใช้กระบวนการสลับด้านของสามเหลี่ยมที่อยู่ติดกัน (edge swapping) ซึ่งกระบวนการดังกล่าวเรียกว่า mesh relaxation จากการทดลองพบว่าโดยทั่วไปเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้รับการปรับปรุงคุณภาพด้วยวิธี mesh relaxation จะมีคุณภาพโดยรวมดีกว่าก่อนกระบวนการปรับปรุงคุณภาพ โดยคุณภาพของสามเหลี่ยมวัดจากความใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่าของทุก ๆ สามเหลี่ยมภายในโดเมน

Peraire et al. [18] ทำการศึกษาเกี่ยวกับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ สำหรับนำมาใช้ปรับปรุงคุณภาพของผลลัพธ์ในสภาวะคงตัว (steady state) ของระบบสมการออยเลอร์ (Euler equations) โดยใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบชัดแจ้ง (explicit time-stepping) สำหรับระเบียบวิธีปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ก็อาศัยเทคนิคการสร้างฟอนต์แบบคืบหน้า (advancing front technique) แต่ขนาดและทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะถูกควบคุม

ด้วยตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด (error indicator) โดยในบทความนี้ใช้ปริมาณอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของค่าความหนาแน่นของไหลเป็นตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด ซึ่งพบว่าสามารถใช้กำหนดขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมได้ดีในระดับหนึ่ง

Probert et al. [19] ได้ทำการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และกระบวนการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ สำหรับการคำนวณผลลัพธ์ที่ขึ้นกับเวลาของปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัว โดยใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ และวิธีการเลือกช่วงเวลาแบบผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (central difference time-stepping) สำหรับตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดที่ใช้ในบทความจะใช้ค่าตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ที่ได้จากการคำนวณ และนำมาคำนวณในรูปแบบของค่าสัมประสิทธิ์ Pressure-Switch (Pressure-Switch coefficient) และใช้ค่าดังกล่าวสำหรับกำหนดขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

Kumar et al. [20] ได้ทำการศึกษาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และวิธีการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติในระนาบสองมิติ ด้วยการแทรกจุดลงที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ลากผ่านจุดปลายทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม โดยขั้นตอนการแทรกจุดในโดเมนจะดำเนินไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมทั้งหมดภายในโดเมนเป็นไปตามที่กำหนด สำหรับกระบวนการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ จะเริ่มต้นจากการใช้ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด ซึ่งคำนวณจากความไม่ต่อเนื่องของปริมาณฟลักซ์ผ่านขอบของเอลิเมนต์ในการประมาณขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เหมาะสมกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ และทำการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ภายใต้เงื่อนไขของการกระจายความผิดพลาดให้มีความสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน และกระบวนการทั้งหมดที่ได้นำเสนอได้ถูกนำมาทดสอบกับปัญหาการนำความร้อน (heat conduction)

สุทธิศักดิ์ พงษ์นาพาณิช [21] ได้ทำการศึกษาวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และการสร้างจุดในโดเมนแบบอัตโนมัติ โดยอาศัยเทคนิคของ Weatherill [15] จากนั้นได้นำเสนอวิธีการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ และได้ทำการทดสอบกับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัวในระนาบสองมิติ และปัญหาการระเบิดใต้น้ำ พบว่าวิธีที่นำเสนอยังคงมีจุดอ่อนอยู่บ้างเพราะไม่สามารถให้เส้นซ็อกที่มีความคมชัดตลอดแนว เช่น กรณีของปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกระบอก วิธีที่นำเสนอจะให้เส้นซ็อกที่ไม่คมชัดในบริเวณปลายด้านบนของโดเมน ดังนั้นในงานวิจัยใหม่นี้จะนำเสนอแนวความคิดใหม่ที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าว

2.2 ปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์

Roe [4] ได้ทำการศึกษาวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาการไหลที่ถูกควบคุมด้วยระบบสมการออยเลอร์ และการทดสอบความถูกต้องกับปัญหาของรีมันน์ (Riemann problem) โดยโรว์ได้นำเสนอวิธีการคำนวณปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขโดยใช้วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ (flux-difference splitting) สำหรับในตอนท้ายของบทความโรว์ได้ให้ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับความสอดคล้องกับเงื่อนไขเอนโทรปี (entropy condition) ของวิธีที่นำเสนอซึ่งอาจจะให้ผลลัพธ์ที่ไม่ถูกต้องในบางกรณี

Harten [22] ได้นำเสนอเทคนิคการคำนวณผลลัพธ์อย่างอ่อน (weak solution) ของกฎอนุรักษ์ชนิดไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic conservation laws) ด้วยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (finite difference method) ด้วยความแม่นยำอันดับที่สอง (second order) และเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีของโรว์ และเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกับสภาพเอนโทรปี จึงได้นำเสนอวิธีการแก้ไขค่าเจาะจง (eigenvalue) โดยการเพิ่มค่าตัวเลขน้อย ๆ ให้กับค่าเจาะจงถ้าหากค่าเจาะจงดังกล่าวมีค่าน้อยมาก ๆ แต่อย่างไรก็ตามงานวิจัยชิ้นนี้ไม่ได้แนะนำว่า ค่าเจาะจงดังกล่าวมีค่าน้อยมาก ๆ หมายถึงค่าแบบเจาะจงที่มีค่าเท่าไร และค่าตัวเลขน้อยมาก ๆ ที่กำหนดให้กับค่าแบบเจาะจงควรมีค่าเป็นเท่าไร

Peery and Imlay [6] ได้ทำการศึกษาปัญหาการไหลผ่านวัตถุมน (blunt-body flow) และพบว่าระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ไม่ถูกต้องโดยเฉพาะอย่างยิ่งผลลัพธ์บริเวณเส้นหยุดนิ่ง (stagnation line) ซึ่งอยู่ด้านหน้าของวัตถุมน โดยแทนที่เส้นช็อกด้านหน้าที่ได้จะมีลักษณะโค้งตามลักษณะของวัตถุมน แต่เส้นช็อกบริเวณเส้นหยุดนิ่งกลับมีลักษณะของการเคลื่อนตัวห่างออกจากด้านหน้าของวัตถุมน และเรียกปรากฏการณ์ดังกล่าวว่าปรากฏการณ์โปงนูน (carbuncle phenomena)

Einfeldt et al. [7] ได้ทำการศึกษาปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีของโกดุนอฟ (Godunov) และโรว์ (Roe) โดยพบว่าถ้าหากการไหลมีความเร็วสูงมาก ซึ่งเป็นการไหลที่มีพลังงานจลน์สูง (highly energetic flows) ระเบียบวิธีทั้งสองสามารถให้คำตอบที่ไม่เป็นจริง โดยจะให้ค่าตัวแปรสถานะการไหล เช่น ค่าความหนาแน่น ค่าความความดันหรือค่าพลังงานภายในที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ พร้อมกันนี้ได้นำเสนอวิธี HLLC เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

Van Leer et al. [9] ได้ทำการศึกษาปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ (flux-difference splitting) ในกรณีที่มีจุดโซนิค (sonic point)

อยู่ภายในคลื่นขยาย (expansion wave) โดยแทนที่วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์จะให้ผลลัพธ์ที่เป็นคลื่นขยาย แต่กลับให้ผลลัพธ์ที่เป็นคลื่นช็อกขยาย (expansion shock) เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้ไม่สอดคล้องกับสภาพเอนโทรปี (entropy violate) และนอกจากนี้ยังได้นำเสนอวิธีการแก้ไขค่าเอนโทรปีสำหรับปัญหาการไหลในหนึ่งมิติ

Quirk [8] ได้ทำการศึกษาปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และได้แนะนำเสนอปัญหาสำหรับการทดสอบปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในรูปแบบของปัญหาของริมันน์ โดยปริมาตรควบคุมตลอดแนวกึ่งกลางท่อในแนวนอนจะถูกขยับขึ้นและลงในลักษณะสลับฟันปลา เพื่อจำลองการใส่ค่าการรบกวนการไหล (perturbation) ซึ่งถูกเรียกว่าปัญหา odd-even decoupling หรือปัญหาการทดสอบของเควิร์ก (Quirk's test problem) โดยการทดสอบดังกล่าวจะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ไม่ถูกต้อง โดยปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขนี้ได้ถูกจัดให้เป็นปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขรูปแบบใหม่ของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์

Lin [10] ได้ทำการศึกษาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ กับปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกอย่างช้า (slowly moving shock) และปัญหาการไหลผ่านวัตถุมน (blunt-body flow) โดยพบว่าระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ก่อให้เกิดปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข โดยสำหรับปัญหาการเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกอย่างช้าได้ก่อให้เกิดการสั่น (oscillation) ของผลลัพธ์ด้านหลังคลื่นช็อก ส่วนปัญหาการไหลผ่านวัตถุมนได้ก่อให้เกิดปัญหาไปงนูน จากนั้นได้นำเสนอเทคนิคการปรับค่าการกระจาย (dissipation) ของปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขโดยอาศัยค่าความดัน

Gressier and Moschetta [11] ได้ทำการศึกษาปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์โดยเปรียบเทียบกับวิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ โดยพบว่าวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ซึ่งมีคุณสมบัติสามารถให้ผลลัพธ์แม่นยำตรงของผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง (contact discontinuity) แต่ไม่สามารถลงความมีเสถียรภาพเอาไว้ได้ ในทางกลับกันวิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ถึงแม้ว่าไม่สามารถให้ผลลัพธ์แม่นยำตรงของผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง แต่มีความเสถียรภาพสูงกว่าวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ เพราะวิธีการแบ่งแยกฟลักซ์แบบเวกเตอร์มีการกระจาย (dissipation) สูงกว่า

Xu and Li [23] ได้ทำการศึกษากลไกของการเกิดการกระจาย (dissipation) ของวิธีการจับช็อก (shock capturing scheme) เช่น ระเบียบวิธีของโกคูนอฟหรือโรว์ เป็นต้น โดยพบว่า

สำหรับระเบียบวิธีของโกดุนอฟ (Godunov method) สามารถให้ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์ที่มีความแม่นยำสูง เพราะเป็นวิธีที่มีค่าการกระจายต่ำมาก โดยค่าการกระจายเกิดจากกระบวนการสร้างปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขโดยตรง และการที่ระเบียบวิธีของโกดุนอฟเป็นวิธีที่มีค่าการกระจายต่ำมาก จึงสามารถก่อให้เกิดปัญหาด้านความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข เช่น กรณีของปัญหาทดสอบของเควิร์ก เป็นต้น

Dumbser et al. [24] ได้ทำการศึกษากลไกของการเกิดปรากฏการณ์ไป๋งนู่นของวิธีการจับช็อก (shock capturing scheme) เช่น ระเบียบวิธีของโกดุนอฟ, โรว์, แวนเรียร์ (van Leer) หรือ HLLC เป็นต้น ด้วยการวิเคราะห์เมตริกซ์เสถียรภาพ (matrix stability analysis) โดยพบว่าในกรณีของปัญหาค้นช็อกแบบคงตัว (steady shock problem) ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขที่เกิดขึ้นกับระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ นอกจากจะขึ้นกับสภาวะการไหลต้นทาง เช่น หมายเลขแมค (Mach number) แล้วยังขึ้นกับ โครงสร้างของช็อกเชิงตัวเลขโดยตรง (numerical shock)

Roe et al. [12] ได้ทำการศึกษากลไกของการเกิดปรากฏการณ์ไป๋งนู่นของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ โดยพบว่า การเกิดปรากฏการณ์ดังกล่าวสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ช่วงหลัก ๆ ดังนี้ ช่วงแรกเป็นการเกิดความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขรอบ ๆ บริเวณที่เกิดช็อกภายในโดเมน ช่วงที่สองเป็นผลต่อเนื่องจากช่วงแรกและความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขบริเวณด้านหลังของช็อกปรากฏอย่างชัดเจน และช่วงที่สามเป็นพัฒนาการของการเกิดปรากฏการณ์ไป๋งนู่นบริเวณด้านหน้าของช็อก

บทที่ 3

การสร้างสามเหลี่ยมเดลอนเนและการปรับตัวได้

เนื้อหาในบทนี้เป็นส่วนแรกของงานวิจัย โดยเป็นการวิเคราะห์จุดอ่อนของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ (adaptive remeshing technique) ที่เคยถูกนำเสนอโดยสุทธิศักดิ์ พงษ์นาพาณิช [21] และนำเสนอวิธีการแก้ไขจุดอ่อนดังกล่าวเพื่อให้การปรับตัวได้ของสามเหลี่ยมสอดคล้องกับลักษณะและพฤติกรรมของผลลัพธ์ที่ได้ โดยเฉพาะบริเวณที่มีการเกิดความไม่ต่อเนื่องของผลลัพธ์ เช่น บริเวณคลื่นซ็อก เป็นต้น ทั้งนี้เพื่อให้สามารถวางเอลิเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กลงในบริเวณดังกล่าว และในขณะเดียวกันวางสามเหลี่ยมขนาดใหญ่ที่โตกว่าในบริเวณที่มีสถานะของการไหลค่อนข้างสม่ำเสมอ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นและช่วยลดเวลาในการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน

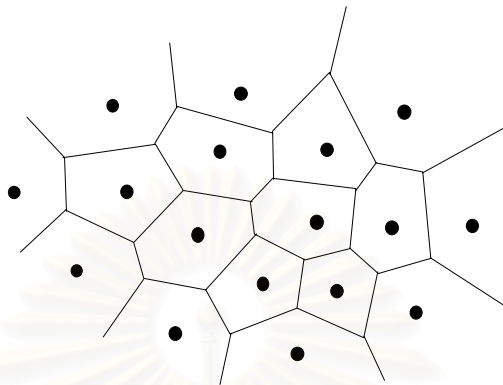
3.1 แผนผังโวโรนอยและสามเหลี่ยมเดลอนเน

การสร้างสามเหลี่ยมเดลอนเน สามารถที่จะดำเนินการภายหลังจากที่ทำการสร้างแผนผังโวโรนอยเสร็จเรียบร้อยแล้ว ซึ่งแผนผังโวโรนอยเป็นพื้นที่รูปทรงหลายเหลี่ยมล้อมรอบจุดที่กำหนด ดังนั้น จึงสามารถกล่าวได้ว่าแผนผังโวโรนอยเป็นรูปทรงทางเรขาคณิตที่มีความเป็นคู่กับสามเหลี่ยมเดลอนเน [21,25] ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงขอกกล่าวถึงนิยามและคุณสมบัติพื้นฐานของแผนผังโวโรนอยและสามเหลี่ยมเดลอนเนสำหรับระนาบในสองมิติ เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ต่อไป

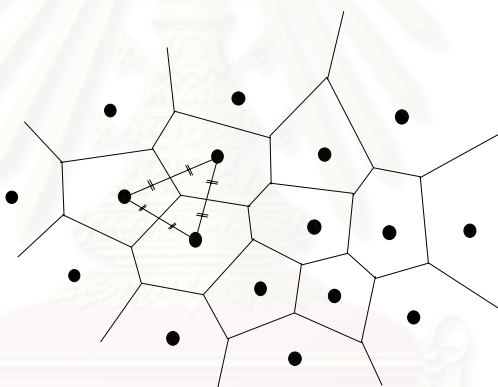
3.1.1 แผนผังโวโรนอย

แผนผังโวโรนอย (Voronoi diagram, Dirichlet tessellation) ถูกนำเสนอและนำมาขยายความรู้การสร้างแผนผังโวโรนอยโดย โวโรนอยและดิริคเลท [13,14,25,26] โดยนิยามในด้านเรขาคณิตการคำนวณ (computational geometry) แผนผังโวโรนอย หมายถึง แผนผังที่ได้จากการแบ่งโดเมนออกเป็นกลุ่มของรูปทรงหลายเหลี่ยม โดยถ้าหากกำหนดให้มีจุดต่อภายในโดเมน $P_k, k = 1, \dots, n$ เราสามารถที่สร้างพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม $V_k, k = 1, \dots, n$ ล้อมรอบจุดต่อดังกล่าว โดยแต่ละพื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมจะล้อมรอบจุดต่อเพียงจุดเดียว ซึ่งจะทำให้ระยะห่างตั้งฉากจากจุดต่อไปยังขอบของรูปทรงหลายเหลี่ยมจะเป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เมื่อเทียบ

กับระยะห่างจากจุดต่อของพื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมที่ลากมายังขอบของรูปทรงหลายเหลี่ยมดังกล่าว ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แผนผังโหนดของจุดต่อภายในโดเมน



รูปที่ 3.2 ระยะห่างที่เท่ากันของระยะทางจากจุดต่อมายังเส้นขอบเขตร่วม

ดังนั้นจากนิยามข้างต้น เราก็สามารถที่จะแสดงความหมายของแผนผังโหนดของจุด p ใด ๆ (พื้นที่ของรูปทรงหลายเหลี่ยมล้อมรอบจุดต่อ p ใด ๆ) ในรูปแบบของสมการเซต [25,26] ได้ดังนี้

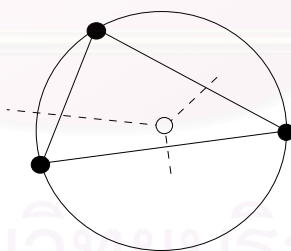
$$V_k = \{p \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : |p - P_k| < |p - P_j|, \forall k \neq j\} \quad (3.1)$$

จากสมการ (3.1) สามารถกล่าวได้ว่าเส้นขอบเขตของแผนผังโหนดแต่ละด้านจะต้องวางอยู่ต่องกึ่งกลางระหว่างจุดต่อสองจุดต่อที่เส้นขอบเขตดังกล่าวเป็นเส้นขอบเขตร่วมดังแสดงในรูปที่ 3.2 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าระยะทางจากจุดใด ๆ บนเส้นขอบเขตของแผนผังโหนดไปยังจุดต่อทั้งสองด้านต้องมีค่าเท่ากันเสมอ และถ้าหากพิจารณาจากจุดใด ๆ ภายในโดเมน

สองมิติ $p \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ ตามนิยามของแผนผังไวโรนอยต้องไม่มีจุดต่อมากกว่า 1 จุดอยู่ในบริเวณพื้นที่ไวโรนอยเดียวกัน แต่ถ้าหากมีจุด p ใดก็ตามที่ถูกเป็นเจ้าของโดยมากกว่าหนึ่งพื้นที่ไวโรนอยจุด p ดังกล่าวต้องอยู่บนเส้นขอบเขตของพื้นที่ไวโรนอยเสมอ

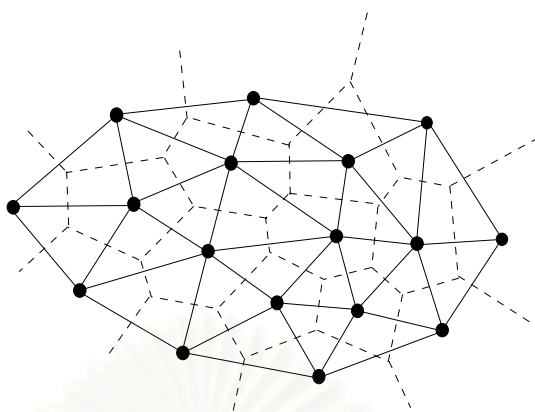
3.1.2 สามเหลี่ยมเดอลอนเน่

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 3.2 การลากเส้นตรงต่อเชื่อมระหว่างจุดต่อ 3 จุดที่อยู่ภายในพื้นที่ไวโรนอยที่มีเส้นขอบเขตร่วมเดียวกันก็จะได้รูปทรงสามเหลี่ยม โดยคุณสมบัติของรูปทรงสามเหลี่ยมดังกล่าว คือ เส้นขอบทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยมเป็นเส้นที่แบ่งระยะทางกึ่งกลางของระยะทางระหว่างจุดต่อทั้งสองของสองพื้นที่ไวโรนอยที่มีเส้นขอบเขตร่วมเดียวกัน รูปทรงสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากกระบวนการดังกล่าวจะถูกเรียกว่าสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangle) ในทางทฤษฎีสามเหลี่ยมเดอลอนเน่จะถูกนิยามให้เป็นกราฟ (graph) โดยเมื่อลากวงกลมล้อมรอบผ่านจุดปลายทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยม จะต้องไม่มีจุดต่ออื่นใดอยู่ในวงกลมดังกล่าว ยกเว้นจุดปลายทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยมเองซึ่งจะอยู่บนเส้นรอบวงกลม คุณสมบัติดังกล่าวของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ถูกเรียกว่าคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่า (empty circumcircle) [27] คุณสมบัติดังกล่าวเป็นคุณสมบัติที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง และสามารถนำมาใช้เป็นเงื่อนไขในการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ จากจุดต่อทั้งหมดภายในโดเมน



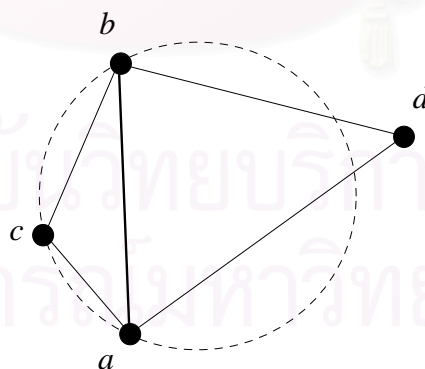
รูปที่ 3.3 ตัวอย่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และคุณสมบัติวงกลมว่างเปล่า

รูปที่ 3.3 แสดงตัวอย่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบผ่านจุดปลายทั้งสามของรูปทรงสามเหลี่ยม หมายถึง จุดปลายของแผนผังไวโรนอย ซึ่งถูกแสดงด้วยวงกลมโปร่ง และในทางปฏิบัติจุดศูนย์กลางดังกล่าวสามารถที่จะอยู่ในหรือภายนอกพื้นที่ของรูปทรงสามเหลี่ยมก็ได้ ดังนั้น เมื่อทำการลากเส้นตรงต่อเชื่อมระหว่างสองจุดต่อที่มีเส้นขอบเขตของพื้นที่ไวโรนอยร่วมกันทั้งหมดภายในแผนผังไวโรนอย ก็จะได้รูปทรงสามเหลี่ยมที่เรียกว่า สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.4 [28]



รูปที่ 3.4 แผนผังโวโรนอยและสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

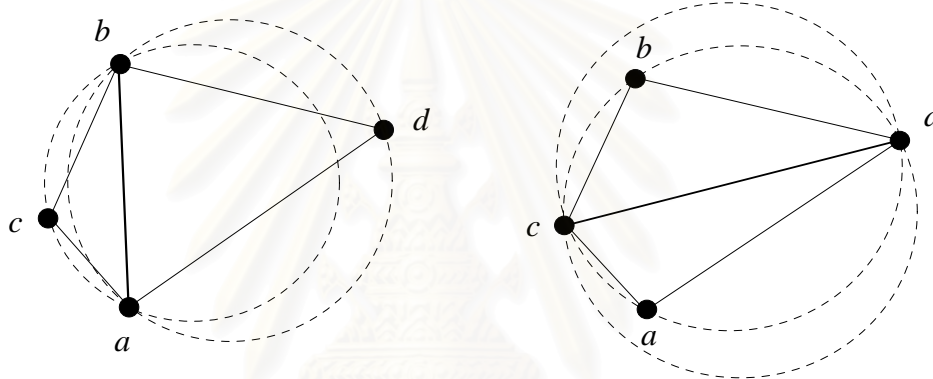
เมื่อกลับมาพิจารณาถึงการแบ่งพื้นที่โดเมนออกเป็นรูปทรงสามเหลี่ยมใด ๆ สามเหลี่ยมที่ได้จะประกอบด้วยจุดปลายและเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยม โดยเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยม มีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่ (locally Delaunay) ก็ต่อเมื่อ เส้นขอบเขตที่เป็นสมาชิกของสามเหลี่ยมเพียงสามเหลี่ยมเดียว ต้องเป็นเส้นขอบเขตของโดเมน และเส้นขอบเขตที่เป็นสมาชิกของสองสามเหลี่ยม เช่นดังตัวอย่างในรูปที่ 3.5 เส้นขอบเขต ab เป็นสมาชิกของสามเหลี่ยม abc และ adb จุด d ต้องอยู่ภายนอกวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม abc เสมอ เส้นขอบเขต ab จึงจะมีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่ และถ้าหากเส้นขอบเขตของสามเหลี่ยมทุก ๆ เส้นภายในโดเมนมีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่ สามเหลี่ยมทั้งหมดภายในโดเมนเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ [27]



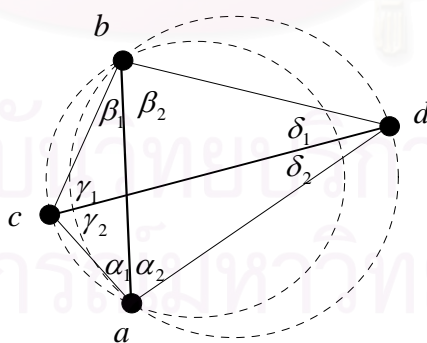
รูปที่ 3.5 เส้นขอบเขต ab มีคุณสมบัติเดอลอนเน่เฉพาะที่

ดังนั้นจากรูปที่ 3.5 เมื่อรวมสามเหลี่ยม abc และ adb เข้าด้วยกัน ก็จะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมแหลม $adbc$ (convex quadrilateral) และเมื่อทำการแบ่งสี่เหลี่ยมมุมแหลมออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูป สามารถกระทำได้ 2 วิธี วิธีแรกเป็นการแบ่งสี่เหลี่ยมมุมแหลมด้วยเส้น ab ซึ่งจะ

ได้สามเหลี่ยม abc และ adb ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ส่วนวิธีที่สองเป็นการแบ่งสี่เหลี่ยมมุมแหลมด้วยเส้น cd ซึ่งจะได้สามเหลี่ยม adc และ bcd ซึ่งไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ดังนั้น การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่จากสี่เหลี่ยมใด ๆ สามารถกระทำได้โดยการกลับเส้นขอบเขตร่วมของสามเหลี่ยมสองรูปที่อยู่ติดกัน ดังเช่นในกรณีของรูปที่ 3.6 สามเหลี่ยม adc และ bcd สามารถแปลงให้เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ได้ด้วยการกลับเส้นขอบเขตร่วมของสามเหลี่ยมทั้งสอง จากเส้น cd มาเป็นเส้น ab เป็นต้น กระบวนการดังกล่าวสามารถประยุกต์ใช้กับสามเหลี่ยมใด ๆ ภายในโดเมนสองมิติ โดยสามเหลี่ยมที่ได้จะเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่เสมอ ซึ่งกระบวนการดังกล่าวถูกเรียกว่า อัลกอริทึมการกลับด้าน (edge-flip algorithm) [27,29]



รูปที่ 3.6 ซ้ายมือสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ และขวามือไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่



รูปที่ 3.7 มุมภายในสามเหลี่ยม

เมื่อพิจารณารูปที่ 3.7 สามเหลี่ยม adc และ bcd ซึ่งไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ มีมุมภายในดังนี้ $\alpha_1 + \alpha_2, \delta_2, \gamma_2$ และ $\beta_1 + \beta_2, \gamma_1, \delta_1$ ตามลำดับ ส่วนสามเหลี่ยม abc และ adb ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่มีมุมภายในดังนี้ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 + \gamma_2$ และ $\alpha_2, \delta_1 + \delta_2, \beta_2$ ตามลำดับ โดย

อาศัยความรู้ด้านเรขาคณิตเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยมมุมแหลม $abcd$ และมุมภายในที่เกิดจากด้านทั้งสี่ พบว่า

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\geq \delta_1 \\ \beta_1 &\geq \delta_2 \\ \gamma_2 &\geq \beta_2 \\ \gamma_1 &\geq \alpha_2\end{aligned}\tag{3.2}$$

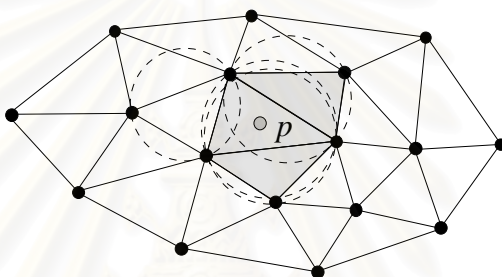
สามเหลี่ยม adc และ bcd มีมุม δ_2 และ δ_1 เป็นมุมที่เล็กที่สุดตามลำดับ ดังนั้น สามเหลี่ยม abc มีมุมที่เล็กที่สุดที่โตกว่ามุม δ_2 และ δ_1 เสมอ ส่วนสามเหลี่ยม adb จากรูปที่เห็นว่ามุม α_2 และ β_2 โตกว่า α_1 และ β_1 ตามลำดับ ดังนั้นมุม $\delta_1 + \delta_2$ ย่อมโตกว่ามุม δ_2 และ δ_1 เสมอ จึงสามารถสรุปได้ว่ามุมภายในที่เล็กที่สุดของสามเหลี่ยม abc และ adb มีขนาดไม่เล็กกว่ามุมภายในที่เล็กที่สุดของสามเหลี่ยม adc และ bcd หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า มุมภายในที่เล็กที่สุดของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ย่อมมีขนาดไม่เล็กกว่ามุมภายในที่เล็กที่สุดของสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวเรียกว่า คุณสมบัติมุมภายในที่เล็กที่สุดมีขนาดโตที่สุด (MaxMin angle property) [27] ดังนั้น สามเหลี่ยมเดอลอนเน่จึงเป็นสามเหลี่ยมที่มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่ามากที่สุด

3.2 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่และการสร้างจุดต่อภายในโดเมน

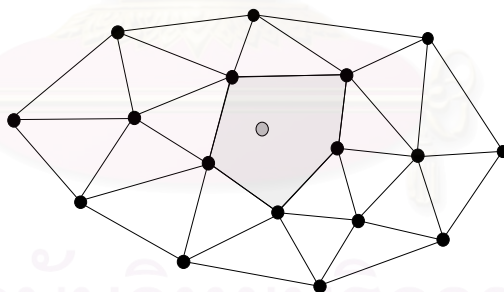
การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ สามารถแบ่งออกได้เป็นสองขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้ ขั้นตอนหนึ่งเป็นการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ให้กับจุดต่อที่อยู่บนเส้นขอบเขตของโดเมน (boundary triangulation) และขั้นตอนที่สองเป็นการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ภายในโดเมนโดยการแบ่งย่อยสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากขั้นตอนที่หนึ่ง ด้วยวิธีการสร้างจุดต่อภายในโดเมนแบบอัตโนมัติ (automatic node insertion) โดยดำเนินการพร้อม ๆ กับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อที่มีอยู่แล้วกับจุดต่อที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ เพื่อป้องกันการเกิดสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบนราบจนเกินไป (sliver) ซึ่งจะมีผลต่อความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สำหรับอัลกอริทึมในการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ในบทความนี้ จะอ้างอิงถึงอัลกอริทึมที่พัฒนาโดยโบว์เยอร์และวัตสัน (Bowyer and Watson) [13,14] ซึ่งได้นำเสนอวิธีการทดสอบจุดต่อภายในวงกลม (in-circle test) มาใช้ในการทดสอบคุณสมบัติเดอลอนเน่ของสามเหลี่ยม

3.2.1 อัลกอริทึมของโบว์เยอร์และวัตสัน

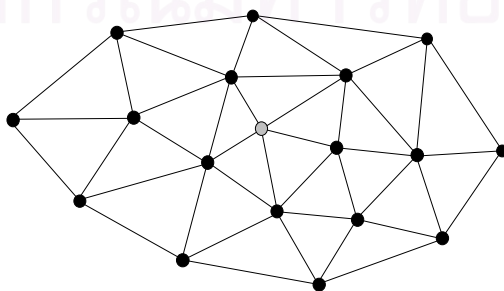
สมมติให้โดเมนถูกแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ดังในรูปที่ 3.8 จากนั้นกำหนดให้ทำการแทรกจุดต่อ p ซึ่งถูกแสดงด้วยวงกลมระบายสีเทาภายในโดเมน กระบวนการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ภายใต้การแทรกจุดลงโดเมน เริ่มด้วยการค้นหาสามเหลี่ยมที่มีจุดต่อ p อยู่ในใน และทำการทดสอบคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่าของสามเหลี่ยมที่อยู่รอบข้างทั้งหมด ขั้นตอนต่อไปก็ทำการลบทิ้งสามเหลี่ยมดังกล่าวทั้งหมด ซึ่งทำให้เกิดพื้นที่ว่าง (cavity) ล้อมรอบจุดต่อ p ดังในรูปที่ 3.9 และสุดท้ายก็ทำการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ขึ้นมาใหม่ ด้วยการลากเส้นต่อจากจุดต่อทั้งหมดของพื้นที่ว่างมายังจุดต่อ p ดังในรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.8 สามเหลี่ยมที่ไม่ผ่านคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่าภายใต้การแทรกจุดต่อ p



รูปที่ 3.9 ลบทิ้งสามเหลี่ยมดังกล่าวทั้งหมดและทำให้เกิดพื้นที่ว่าง



รูปที่ 3.10 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ขึ้นมาใหม่

การแทรกจุดลงในโดเมนที่ถูกแบ่งด้วยสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทั้งหมดก่อนการแทรกจุดต่อ p (T_i) และสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ทั้งหมดภายหลังการแทรกจุดต่อ p (T_{i+1}) ดังนี้

$$T_{i+1} = T_i - C_p + B_p \quad (3.3)$$

โดยที่ C_p หมายถึง เซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกลบทิ้งซึ่งทำให้เกิดพื้นที่ว่าง และ B_p หมายถึง เซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ด้วยการลากเส้นต่อจากจุดต่อทั้งหมดของพื้นที่ว่างมายังจุดต่อ p

3.2.2 การสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่

อัลกอริทึมการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (*Delaunay Triangulation*) ประกอบด้วยกระบวนการหลัก ๆ สองประการ ดังนี้ ประการที่หนึ่งการแบ่งจุดบนเส้นขอบเขตของโดเมน และประการที่สองการลากเส้นเชื่อมโยงจุดต่อดังกล่าวเพื่อแบ่งพื้นที่ของโดเมนออกเป็นสามเหลี่ยมภายใต้เงื่อนไขสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ ดังแสดงในอัลกอริทึมที่ 1 ข้างล่าง [28]

อัลกอริทึมที่ 1 *Delaunay Triangulation*(P, T, p)

1. กำหนดให้ $P, k = 1, \dots, n$ เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนเส้นขอบเขตของโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายนอกของโดเมนจะต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา (ccw) ถ้าหากเป็นจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายในของโดเมน และจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา (cw) และกำหนดให้ T เป็นเซตว่างของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่
2. กำหนดให้ p_i เป็นจุดต่อหมายเลข i ของเซต P และ t_i เป็นสามเหลี่ยมเดอลอนเน่หมายเลข i ของเซต T
3. สร้างสามเหลี่ยมเริ่มต้นล้อมรอบจุดทั้งหมดของเซต P และกำหนดให้เป็นสมาชิกของเซต T
4. อ่านจุดต่อ p_i ลำดับถัดไปจากเซต P
5. ค้นหาสามเหลี่ยม t_i ของเซต T ที่บรรจุจุดต่อ p_i ภายใน ซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้วิธีของลอว์สัน (Lawson searching method) [29,30]

6. ลบทั้งสามเหลี่ยม t_i ทั้งหมดที่ไม่ผ่านคุณสมบัติวงกลมล้อมรอบว่างเปล่าออกจากเซต T จากนั้นทำการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ขึ้นมาใหม่ด้วยวิธีที่ได้อธิบายหัวข้อ 3.2.1 ข้างต้น และกำหนดให้สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่เป็นสมาชิกของเซต T
7. ทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 4 ถึง 6 จนกระทั่งจุดต่อทั้งหมดของเซต P ถูกพิจารณา
8. ลบทั้งสามเหลี่ยมทั้งหมดที่อยู่ภายนอกโดเมน ซึ่งประกอบด้วยสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดต่อร่วมกับจุดต่อของสามเหลี่ยมเริ่มต้น หรือสามเหลี่ยมที่มีจุดต่อทั้งหมดอยู่บนเส้นขอบเขตภายในของโดเมน และเป็นสามเหลี่ยมที่มีผลคูณไขว้ (cross product) ของด้านร่วมทั้งสองของสามเหลี่ยมมีค่าน้อยกว่าศูนย์

อัลกอริทึมที่ 1 สามารถเขียนในรูปแบบของโค้ดเทียมภายใต้แนวคิดของการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (object oriented programming) [31] ได้ดังนี้

DelaunayTriangulation(P, T, p)

Let $P0$ be the collection of node objects;
Let $T0$ be the collection of triangle objects;

```

P0.Initialize;
T0.Initialize;
t ← T.FindTriangleContainNode(p);
T0 ← T.IncircleTriangles(t, p);
P0 ← T0.DestroyTriangles();
T.CreateNewTriangles(P0, p);
T.AssignNeighborhoodTriangles;

```

End;

3.2.3 การสร้างจุดต่อภายในโดเมน

การสร้างจุดต่อภายในโดเมนสำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้เทคนิคที่แนะนำในเอกสารอ้างอิง [15,16] โดยการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ จะถูกควบคุมด้วยพารามิเตอร์ที่สำคัญสองตัว คือ สัมประสิทธิ์อัลฟา (α) เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการตรวจสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อที่ต้องการแทรกและจุดต่อทั้งสามของสามเหลี่ยม ซึ่งจะมีผลต่อความหนาแน่นของสามเหลี่ยม (mesh density) ส่วนสัมประสิทธิ์เบต้า (β) เป็นค่าสัมประสิทธิ์สำหรับการทดสอบระยะห่างระหว่างจุดต่อในบริเวณใกล้เคียงที่มีอยู่แล้วกับจุดต่อที่ต้องการแทรกเข้าไปใหม่ ซึ่งจะมีผลต่อรูปร่างของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ (regularity of triangulation)

หลังจากที่จุดต่อที่ถูกสร้างขึ้นใหม่ภายในโดเมนผ่านการทดสอบด้วยค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสอง สามเหลี่ยมเดอลอนเน่ก็จะถูกสร้างขึ้นมาด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นทุกประการ โดยอัลกอริทึมสำหรับการสร้างจุดต่อภายในโดเมนโดยอัตโนมัติ (*MeshRefinement*) [28] มีดังต่อไปนี้

อัลกอริทึมที่ 2 *MeshRefinement(P, T, $\alpha, \beta, iteration$)*

1. กำหนดให้ $P, k = 1, \dots, n$ เป็นเซตของจุดต่อทั้งหมดบนเส้นขอบเขตโดเมน โดยลำดับของจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายนอกของโดเมนต้องจัดเก็บตามลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา (ccw) และจุดต่อบนเส้นขอบเขตภายในของโดเมนต้องจัดเก็บตามลำดับแบบตามเข็มนาฬิกา (cw)
2. กำหนดให้ V เป็นเซตว่างของจุดต่อที่จะถูกแทรกลงภายในโดเมน และ T เป็นเซตของสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation*
3. กำหนดค่าระยะห่างของจุดต่อ (nodal spacing value, dp_i) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของระยะห่างระหว่างจุดต่อที่มีด้านเชื่อมต่อกับจุดปลายของสามเหลี่ยม โดยค่าดังกล่าวจะเป็นค่าประจำของทุก ๆ จุดต่อภายในโดเมน ดังนี้

$$dp_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |p_j - p_i| \quad (3.4)$$

โดยที่ M หมายถึงจุดต่อรอบ ๆ จุดต่อ i

4. อ่านสามเหลี่ยม t_i จากเซต T
5. กำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลางวงเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i เป็นจุดต่อ Q กำหนดค่าระยะห่างของจุดต่อ Q ด้วยสมการ (3.4) และคำนวณระยะห่างจากจุดต่อ Q ไปยังจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม t_i (d_m โดยที่ $m = 1, 2, 3$)
6. ทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ α โดยถ้าหาก $d_m < (\alpha \cdot dp_q)$ สำหรับบางค่าของ $m = 1, 2, 3$ แสดงว่าจุดต่อ Q ไม่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ α ก็ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 4 เพื่ออ่านสามเหลี่ยมถัดไป
7. กำหนดระยะห่าง s_j จากจุดต่อ Q ไปยังจุดต่อที่ถูกแทรกก่อนหน้านี้ สมมติให้เท่ากับจำนวน N จุดต่อ
8. ทำการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ β โดยถ้าหาก $s_j < (\beta \cdot dp_q)$ สำหรับบางค่าของ $j = 1, \dots, N$ แสดงว่าจุดต่อ Q ไม่ผ่านการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ β ก็ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 4 เพื่ออ่านสามเหลี่ยมถัดไป

9. จัดเก็บจุดต่อ Q ลงในเซต V
10. ถ้าหากยังคงมีสามเหลี่ยมที่ยังไม่ถูกอ่านจากเซต T ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 4 เพื่ออ่านสามเหลี่ยมถัดไป
11. ทำการแทรกจุดทั้งหมดในเซต V ลงในโดเมน และสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* ข้างต้น
12. ทำการวนซ้ำขั้นตอนที่ 4 ถึง 11 เท่ากับจำนวนครั้งที่กำหนดโดยพารามิเตอร์ *iteration*

และอัลกอริทึมที่ 2 สามารถเขียนในรูปแบบของโค้ดเทียมภายใต้แนวคิดของการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (object oriented programming) [31] ได้ดังนี้

MeshRefinement(P , T , $alpha$, $beta$, $iteration$)

Let $P0$ be the collection of node objects;

```

For i=1 To iteration {
  Do t ← T.NextTriangle {
    p ← t.ComputeTriangleCentroid();
    p.dp ← t.ComputePointDistributionFunction();
    p.dm(1:3) ← t.DistanceCentroidToVertices();
    p.Rejected = FALSE;
    For j=1 To 3 {
      If (p.dm(j) < (alpha * p.dp)) {
        p.Rejected = TRUE;
        Break;
      };
    };
    If (Not p.Rejected) {
      P0.Initialize;
      P0 ← T.FindInsertedNodeOfNearestTriangles;
      Do pl ← P0.NextNode {
        If (distance(p, pl) < (beta * p.dp)) {
          p.Rejected = TRUE;
          Break;
        };
      };
      If (Not p.Rejected) P.AddNodeAsInsertedNode(p);
    };
  };

  Do p ← P.NextInsertedNode {
    Call DelaunayTriangulation(P, T, p);
  };
};

End;

```

โดยปกติสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ที่ได้จากการสร้างด้วยอัลกอริทึมทั้งสองข้างต้น อาจจะยังไม่มีค่าสัดส่วนของด้านยาวที่สุดและด้านที่ตั้งฉากกัน (aspect ratio) ที่ดีเพียงพอ ดังนั้นจึง ควรที่จะทำการปรับปรุงรูปร่างของสามเหลี่ยมให้ดีขึ้น โดยการทำให้ค่าสัดส่วนของด้านยาวที่สุด และด้านที่ตั้งฉากกัน (aspect ratio) ของแต่ละสามเหลี่ยมมีค่าใกล้เคียงกันด้วยวิธีลาปลาซ (Laplacian smoothing technique) ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมาก [21,28] เนื่องจากทำให้ได้ สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดีขึ้นและเป็นวิธีที่สามารถที่จะทำงานได้รวดเร็ว การปรับปรุงรูปร่างของ สามเหลี่ยมด้วยวิธีลาปลาซ เป็นการย้ายตำแหน่งพิกัดของจุดต่อที่ถูกล้อมรอบด้วยจุดต่ออื่นๆ ไป ยังตำแหน่งพิกัดที่ได้จากค่าเฉลี่ยของตำแหน่งพิกัดของจุดต่อที่ล้อมรอบ เช่น สมมติว่าต้องการ ประยุกต์วิธีลาปลาซกับจุดต่อ Q ซึ่งถูกล้อมรอบโดยจุดต่อ M จุด

$$x_{Qc} = \frac{\sum_{i=1}^M x_i}{M} \quad \text{and} \quad y_{Qc} = \frac{\sum_{i=1}^M y_i}{M} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.5)$$

โดยที่ x_{Qc} และ y_{Qc} เป็นตำแหน่งพิกัดใหม่ของจุดต่อ Q

3.3 ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดและวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นการประยุกต์ อัลกอริทึมการสร้างสามเหลี่ยมเดอลอนเน่ (Delaunay triangulation) และวิธีการสร้างจุดต่อภายใน โดเมนแบบอัตโนมัติเข้ากับการสร้างสามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่ (remeshing) โดยอาศัยผลลัพธ์จากการ คำนวณตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด (error indicator) และตำแหน่งของสามเหลี่ยมครั้งที่ผ่านมาเป็น ตัวกำหนดเงื่อนไขในการกำหนดขนาดและตำแหน่งที่เหมาะสมของสามเหลี่ยมที่ถูกสร้างขึ้น มาใหม่ด้วยวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ครั้งใหม่ ซึ่งการกำหนดขนาดและตำแหน่งของ สามเหลี่ยมได้อย่างสอดคล้องกับผลลัพธ์ของการคำนวณ จะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้อง มากยิ่งขึ้น

สำหรับเนื้อหาในหัวข้อนี้จะเริ่มต้นด้วยการอธิบายตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด และตามด้วยวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ โดยจะยกเอาวิธีที่ได้ถูกนำเสนอโดยสุทธิศักดิ์ พงษ์ชนะพาณิช [21,28,31] มาแสดงอีกครั้งเพื่อความสะดวกในการอธิบายความแตกต่างและการ เปรียบเทียบประสิทธิภาพกับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ที่ได้รับการปรับปรุง และ นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

3.3.1 ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด

สำหรับการเลือกตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด จะต้องเลือกตัวแปรที่สามารถบ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของผลลัพธ์จากการคำนวณภายในโดเมนได้เป็นอย่างดี โดยทั่วไปจะหมายถึงการเปลี่ยนแปลงของเกรเดียนต์ (gradient) ของผลลัพธ์ เช่น ความหนาแน่น ความดัน หรือค่าตัวเลขมัค (Mach number) เป็นต้น [18,19,32] การสร้างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดสามารถที่จะกระทำได้ในหลาย ๆ รูปแบบ ทั้งนี้ขึ้นกับเวกเตอร์นอร์ม (norm) ที่ต้องการพิจารณา สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของค่าความหนาแน่นในระนาบสองมิติ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์จัตุรัส ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

โดยอาศัยแนวคิดจากการคำนวณค่าความเค้นหลัก (principal stress) ในด้านกลศาสตร์ของแข็ง ในการคำนวณค่าสูงสุดของอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของค่าความหนาแน่น ก็จะสามารถหาค่าปริมาณหลัก (principal quantities) ซึ่งจะช่วยให้ผลคูณอนุพันธ์ย่อยขวาง (cross derivatives) ในสมการ (3.6) หดไป และได้รับความสัมพันธ์ของปริมาณหลักและขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

จากนั้น จึงนำค่าปริมาณหลักที่มีค่ามากที่สุด (λ_{\max}) ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (3.7) มาใช้ในการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม (h) โดยที่ค่า h_{\min} ในสมการ (3.8) จะถูกกำหนดโดยผู้ใช้

$$h_i^2 \lambda_i = h_{\min}^2 \lambda_{\max} = \text{constant} \quad (3.8)$$

$$\lambda_i = \max \left(\left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (3.9)$$

จากสมการ (3.8) จะเห็นว่าในการคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ จำเป็นต้องกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุด (h_{\min}) ซึ่งการกำหนดค่า h_{\min} ที่น้อยเกินไปจะทำให้มีการแบ่งตัวของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มากเกินไป และในทางกลับกันถ้าหากกำหนดค่า h_{\min} ที่มากเกินไปจะทำให้มีการแบ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมน้อยเกินไป ซึ่งอาจจะส่งผลกระทบต่อความแม่นยำในการคำนวณหาผลลัพธ์ ดังนั้นการเลือกค่า h_{\min} ที่เหมาะสมจึงเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ในทางปฏิบัติในการสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ขึ้นมาใหม่ในแต่ละครั้ง ยังไม่มีวิธีใดที่สามารถบอกได้ว่าค่า h_{\min} ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่าใด ทั้งนี้ก็ขึ้นกับลักษณะของปัญหาและประสบการณ์ แต่จากการทดสอบกับปัญหาที่หลากหลายพบว่า การปรับลดค่า h_{\min} ลงมาสำหรับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้แต่ละครั้งไม่ควรเกิน 3 เท่าของครั้งก่อน

จากการทดสอบประสิทธิภาพของตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดกับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสภาวะคงตัวและสภาวะไม่คงตัว ซึ่งโดยปกติมักจะให้ผลลัพธ์ที่ไม่มีความสม่ำเสมอ โดยเฉพาะบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกหรือผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง (contact discontinuity) ผลลัพธ์ในบริเวณดังกล่าวจะมีลักษณะของการกระโดด (jump) หรือไม่มีความต่อเนื่อง โดยพบว่าตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดประเภทอนุพันธ์ลำดับสองดังที่ได้แสดงในสมการ (3.7) ถึง (3.9) สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาในสภาวะคงตัวได้เป็นอย่างดี แต่ให้ผลลัพธ์ที่ไม่น่าพอใจเมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาในสภาวะไม่คงตัว ทั้งนี้เนื่องจากปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัวนั้น ค่าอนุพันธ์ลำดับสองที่ได้จากบริเวณที่เกิดคลื่นช็อก ผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องและขอบทั้งสองด้านของคลื่นขยาย (expansion wave) มีค่าแตกต่างกันมาก ดังนั้นขนาดของเอลิเมนต์ที่ได้จากตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดดังกล่าว จะมีขนาดเล็กบริเวณคลื่นช็อก มีขนาดโตขึ้นในบริเวณผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องและคลื่นขยาย สุดท้ายเมื่อทำการคำนวณที่เวลามากขึ้นไป ก็จะทำให้ไม่สามารถจับผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องและคลื่นขยาย

ด้วยเหตุผลข้างต้นสำหรับกรณีของการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว จึงแนะนำให้ใช้ค่าสัมประสิทธิ์สวิตช์ความดัน (Pressure-Switch coefficient) [19] มาประยุกต์ใช้งานแต่มีหน้าที่ต่างกันเล็กน้อย โดยแทนที่จะนำค่าสัมประสิทธิ์สวิตช์ความดันมาใช้ในการกำหนดขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม แต่สำหรับงานวิจัยนี้จะนำมาใช้เพื่อระบุบริเวณที่ควรวางเอลิเมนต์ขนาดเล็กกว่าหรือบริเวณที่ควรวางเอลิเมนต์ขนาดโตกว่าเอลิเมนต์ก่อนหน้านั้นเท่านั้น ส่วนการกำหนดขนาดเอลิเมนต์ยังคงคำนวณจากตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดเช่นเดิม [33,34] โดยค่าสัมประสิทธิ์สวิตช์ความดันสำหรับจุดต่อ I เป็นดังนี้

$$E_I = \frac{\sum_{e \in I} |2\phi_I - \phi_J - \phi_K|}{\sum_{e \in I} (A^* + B^*)} \quad (3.10)$$

โดยที่ J และ K หมายถึงจุดปลายทั้งสองที่เหลือของสามเหลี่ยม (e) ส่วน A^* และ B^* เป็นค่าตัวแปรที่สามารถคำนวณได้จากสมการ (3.11) และ (3.12) ดังนี้

$$A^* = \max(|\phi_I - \phi_J|, \gamma(\phi_I + \phi_J)) \quad (3.11)$$

$$B^* = \max(|\phi_I - \phi_K|, \gamma(\phi_I + \phi_K)) \quad (3.12)$$

โดยค่าคงที่ γ ถูกใช้ในการระบุความไม่ต่อเนื่องและการสั้นของผลลัพท์ โดยจากการทดลองพบว่าค่า γ เท่ากับ 0.005 มีความเหมาะสมกับปัญหาที่ได้ทำการทดสอบ ดังนั้นในงานวิจัยฉบับนี้จึงกำหนดให้ γ มีค่าคงที่เสมอ และเมื่อนำค่า γ แทนกลับลงในสมการ (3.11) และ (3.12) ข้างต้น และสมมติให้ค่าของการสั้นของผลลัพท์ ϕ_J และ ϕ_K มีค่าไม่เกิน 1% ของ ϕ_I สมการข้างต้นจะลดรูปเป็นดังนี้

$$A^* = 0.005(\phi_I + \phi_J) \quad (3.13)$$

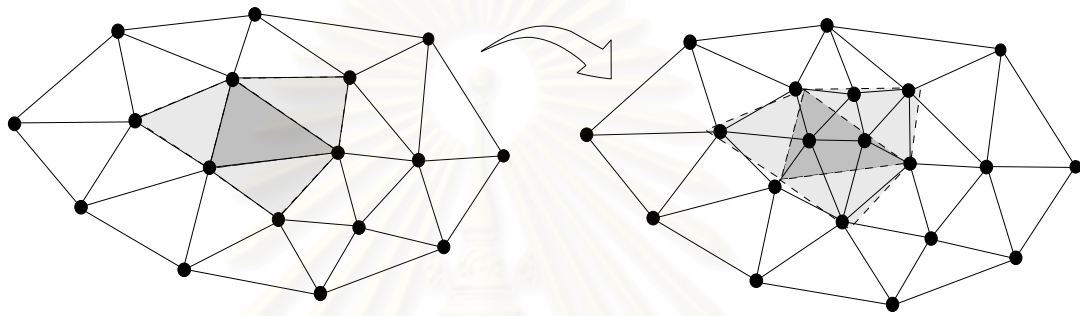
$$B^* = 0.005(\phi_I + \phi_K) \quad (3.14)$$

และส่งผลให้การคำนวณรวดเร็วขึ้น เพราะไม่ต้องมีการคำนวณค่าผลต่างของผลลัพท์และไม่ต้องทำการเปรียบเทียบเพื่อหาค่าสูงสุด อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติค่า γ มีค่าต่างจาก 0.005 ก็ได้ ทั้งนี้ก็ขึ้นกับลักษณะของปัญหาที่ทำการทดสอบ

3.3.2 วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ที่ได้รับการปรับปรุงประสิทธิภาพเสียใหม่ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยนี้ ก็ขอยกเอาวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ [28,31] มากล่าวอีกครั้ง สำหรับแนวคิดโดยพื้นฐานของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ มาจากความพยายามที่จะกระจายความผิดพลาดให้มีค่าเท่ากันตลอดทั้งโดเมน ดังนั้นบริเวณที่มีความผิดพลาดสูงก็ควรที่จะมีเอลิเมนต์ขนาดเล็กกว่าบริเวณที่มีความผิดพลาดน้อยกว่า เช่น รูปที่ 3.11 ซ้ายมือแสดงตัวอย่างบริเวณที่มีความผิดพลาดสูงกว่าด้วยสามเหลี่ยมที่ระบายด้วยสีเข้มกว่า ส่วนรูปขวามือแสดงโดเมนภายหลังการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ซึ่งสามารถสังเกตได้ว่าสามเหลี่ยมขนาดเล็กจำนวนมากกระจุกตัวอยู่ในบริเวณที่มีค่าความผิดพลาดสูง

โดยสรุปขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ เริ่มจากเมื่อสามารถหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตรงจุดต่อด้วยสมการ (3.7) ถึง (3.9) ในขั้นตอนถัดไปก็จะเป็นการประดิษฐ์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมครั้งก่อนหน้าเป็นตาข่ายพื้นหลัง (background mesh) และทำการสร้างสามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่โดยจะปรับขนาดของเอลิเมนต์ และจัดวางตำแหน่งให้มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ โดยขั้นตอนของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้มีดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.11 แนวคิดโดยพื้นฐานของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

อัลกอริทึมที่ 3 AdaptiveRemeshing($P, T, P_0, h_{\min}, h_{\max}, threshold$)

1. กำหนดให้ P_0 เป็นเซตจุดต่อของตาข่ายพื้นหลัง (background mesh) P เป็นเซตของจุดต่อที่จะถูกสร้างขึ้นมาใหม่ และ T เป็นเซตสามเหลี่ยมที่จะถูกสร้างขึ้นมาใหม่
2. กำหนดให้ h_{\min} และ h_{\max} เป็นขนาดเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเล็กที่สุดและใหญ่ที่สุดตามลำดับ
3. อ่านจุดต่อภายใน p_i จากเซต P_0
4. ถ้าหาก $h_i > h_{\max}$ กลับไปยังขั้นตอนที่ 3
5. ค้นหาสามเหลี่ยม t_i ของเซต T ที่บรรจุจุดต่อ p_i ภายใน ซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้วิธีของลอว์สัน แล้วทำการคำนวณตำแหน่งพิกัดจุดศูนย์กลางถ่วงของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i กำหนดให้เป็นจุดต่อ Q คำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ Q ด้วยสมการ (3.4)
6. คำนวณระยะห่างจากจุดต่อ Q ไปยังจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม t_i (d_m โดยที่ $m = 1, 2, 3$)
7. ถ้าหาก $h_i > average(d_m)$ หรือ $h_{\min} > d_m$ กลับไปยังขั้นตอนที่ 3
8. จัดเก็บจุดต่อ Q ลงในเซต P
9. ถ้าหากยังคงมีจุดต่อที่ยังไม่ถูกอ่านจากเซต P ให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 ถึง 8 ต่อไป

10. ทำการแทรกจุดต่อทั้งหมดในเซต P ลงในโดเมน และสร้างสามเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

และอัลกอริทึมที่ 3 สามารถเขียนในรูปแบบของโค้ดเทียมภายใต้แนวคิดของการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (object oriented programming) [31] ได้ดังนี้

AdaptiveRemeshing($P, T, P0, Hmin, Hmax, threshold$)

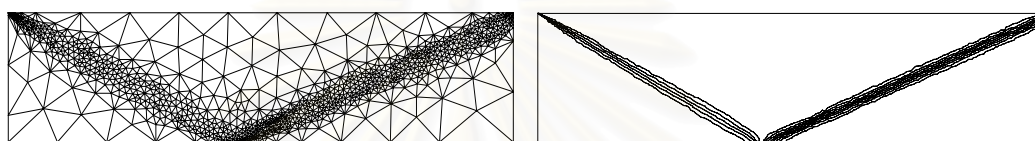
```

Do {
  Do  $p \leftarrow P0.NextInteriorNode$  {
    If ( $p.hi \leq Hmax$ ) {
       $t \leftarrow T.FindTriangleContainNode(p)$ ;
       $pq \leftarrow t.ComputeTriangleCentroid()$ ;
       $pq.dp \leftarrow t.ComputePointDistributionFunction()$ ;
       $pq.dm(1:3) \leftarrow t.DistanceCentroidToVertices()$ ;
       $pq.Rejected = FALSE$ ;
      For  $j=1$  To 3 {
        If ( $pq.hi > pq.dm.Average$  Or  $pq.dm(j) < Hmin$ ) {
           $pq.Rejected = TRUE$ ;
          Break;
        };
      };
      If (Not  $pq.Rejected$ )  $P.AddNodeAsInsertedNode(pq)$ ;
    };
  };

  Do  $p \leftarrow P.NextInsertedNode$  {
    Call DelaunayTriangulation( $P, T, p$ );
  };
} Loop Until ( $P.InsertedNodes \leq threshold$ );
End;
```

การประยุกต์ตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดประเภทอนุพันธ์ลำดับสองดังที่ได้แสดงในสมการ (3.7) ถึง (3.9) และอัลกอริทึมที่ 3 ในการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ถึงแม้ว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่ค่อนข้างแม่นยำกับการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน [28] หรือปัญหาการติดตามรอยแตกร้าว [31] ก็ตาม แต่กลับให้ผลลัพธ์ที่ไม่เป็นที่น่าพอใจสำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืด แต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง [21] ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.12 เป็นสามเหลี่ยมภายหลังการปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่าในสภาวะคงตัว ถึงแม้ว่าจะเปรียบเทียบวิธีที่นำเสนอจะสามารถวางสามเหลี่ยมขนาดเล็กรอบ ๆ บริเวณคลื่นช็อกอย่างถูกต้องก็ตาม แต่ขนาดของสามเหลี่ยมยังมีลักษณะของการกระจุกตัวบริเวณด้านซ้ายมือและบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกตกกระทบกับผนังด้านล่างของโดเมน ส่วนบริเวณอื่น ๆ ของคลื่นช็อกสามเหลี่ยมจะมีขนาดที่โตกว่าอย่างเห็นได้ชัด จึงทำให้

ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำไม่มากเพียงพอ ซึ่งสังเกตได้จากเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่แสดงแนวของเส้นซ็อกมีความหนาแน่นค่อนข้างมาก เป็นต้น สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงในสถานะไม่คงตัว จะให้ผลลัพธ์เมื่อเวลามากขึ้นที่แย่ลง เพราะการที่ไม่สามารถกำหนดสามเหลี่ยมขนาดเล็กลงอย่างสม่ำเสมอตลอดแนวของซ็อกที่มีความแข็งแรง (shock strength) ที่แตกต่างกัน จึงส่งผลให้บริเวณที่ปรากฏซ็อกที่มีความแข็งแรงน้อยกว่าจะมีขนาดของสามเหลี่ยมที่โตกว่า จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ในบริเวณดังกล่าวและบริเวณปลายน้ำ (downstream) ที่สามารถส่งผลไปถึง จะมีความแม่นยำลดลงเรื่อย ๆ



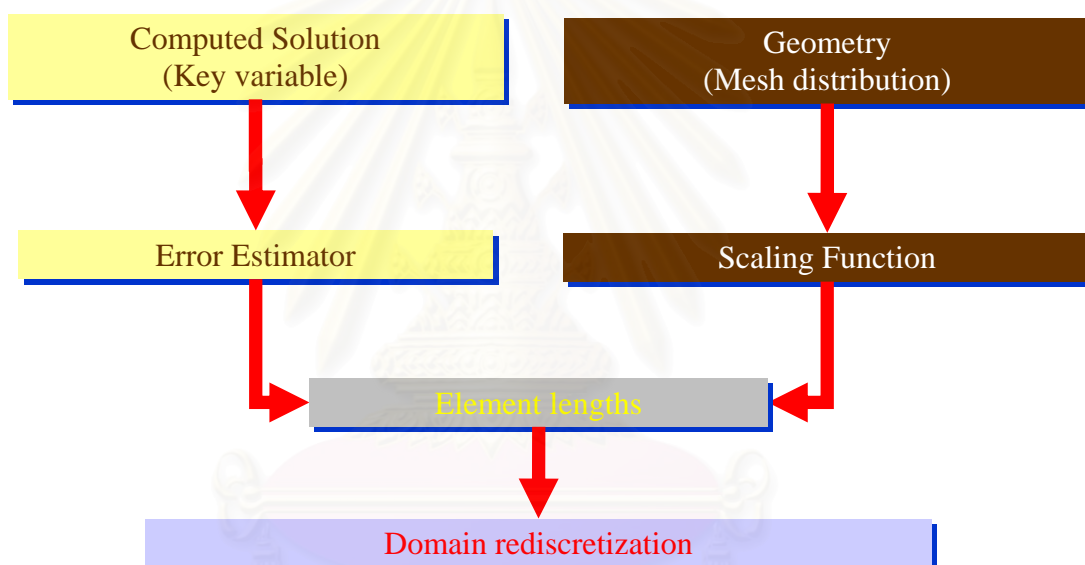
รูปที่ 3.12 สามเหลี่ยมภายหลังการปรับตัวและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น สำหรับปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดอัดตัวได้ที่ความเร็วสูงกว่าเสียง 2.9 และ 2.37 เท่า ในสถานะคงตัว

จากประสบการณ์การทดลองกับปัญหาที่มีพฤติกรรมของการไหลที่แตกต่างกันพบว่าจุดอ่อนที่สำคัญของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้มาจากสองประเด็นหลัก ดังนี้ ประเด็นแรกตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดประเภทอนุพันธ์ลำดับสองไม่สามารถที่จะจัดการกับบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่องของผลลัพธ์ เช่น คลื่นซ็อกหรือผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง เป็นต้น อย่างเสมอภาค หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าไม่สามารถกำหนดขนาดเอลิเมนต์ขนาดเล็กที่ใกล้เคียงกันสำหรับบริเวณดังกล่าว เพราะค่าอนุพันธ์อันดับที่สองที่ได้จากตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดมีค่าไม่เท่ากัน ประการที่สอง เงื่อนไขการตรวจสอบเพื่อแทรกจุดต่อลงในโดเมนโดยอัลกอริทึมที่ 3 ยังไม่ได้คำนึงถึงผลของบริเวณดังกล่าวเท่าที่ควร ดังนั้นเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าวข้างต้น จึงได้นำเสนอฟังก์ชันการปรับขนาด (scaling function) [33,34] ดังนี้

$$\chi_i = \text{ScaleRange} \left(\frac{h_{\max} - dp_i}{h_{\max} - h_{\min}}, 0, 1, \chi_{\min}, \chi_{\max} \right) \quad (3.15)$$

โดยค่า χ_{\min} และค่า χ_{\max} หมายถึง ค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดสำหรับการปรับขนาด และถูกกำหนดโดยผู้ใช้ โดยปกติค่าทั้งสองจะขึ้นกับประเภทของปัญหา แต่จากการทดลองค่า χ_{\min} ควรอยู่ในช่วง 0.35 ถึง 0.95 และค่า χ_{\max} ควรอยู่ในช่วง 0.6 ถึง 1.5

จากนั้นจึงนำเอาฟังก์ชันการปรับขนาดมาใช้ในอัลกอริทึม *Adaptive Remeshing* และทำการปรับปรุงเงื่อนไขการตรวจสอบเพื่อแทรกจุดต่อลงในโดเมน โดยผลของฟังก์ชันการปรับขนาดจะทำให้ค่าอนุพันธ์อันดับที่สองที่ได้จากตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดที่มีค่าแตกต่างกันอยู่ในช่วงตัวเลขหนึ่ง ๆ เช่น ค่าที่ได้จากบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกหรือเกิดผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง เป็นต้น จะถูกกำหนดให้สามเหลี่ยมปรับตัวได้ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดที่ใกล้เคียงกัน ดังจะได้แสดงในตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไป โดยแนวคิดพื้นฐานของการผสมผสานระหว่างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดและฟังก์ชันการปรับขนาด เพื่อใช้ในการกำหนดขนาดและตำแหน่งของสามเหลี่ยมปรับตัวได้ที่เหมาะสมได้ถูกแสดงดังในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 แนวคิดพื้นฐานของการผสมผสานระหว่างตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาด และฟังก์ชันการปรับขนาดสำหรับการสร้างสามเหลี่ยมปรับตัวได้

อัลกอริทึม *Adaptive Remeshing* ที่ได้รับการปรับปรุงประสิทธิภาพ (อัลกอริทึมที่ 4) จะถูกนำไปใช้แทนที่อัลกอริทึมที่ 3 สำหรับการคำนวณต่อจากนี้ไป มีรายละเอียดดังนี้

อัลกอริทึมที่ 4 *Adaptive Remeshing*($P, T, P_0, \alpha, \beta, h_{\min}, h_{\max}, \chi_{\min}, \chi_{\max}, threshold$)

1. กำหนดให้ P_0 เป็นเซตจุดต่อของสามเหลี่ยมพื้นหลัง (background mesh)
2. P เป็นเซตของจุดต่อที่จะถูกสร้างขึ้นใหม่ และ T เป็นเซตสามเหลี่ยมที่จะถูกสร้างขึ้นใหม่
3. อ่านจุดต่อภายใน p_i จากเซต P_0
4. ถ้าหาก $h_i > h_{\max}$ กลับไปยังขั้นตอนที่ 3

5. ค้นหาสามเหลี่ยม t_i ของเซต T ที่บรรจุจุดต่อ p_i ภายใน ซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้วิธีของลอว์สัน แล้วทำการคำนวณตำแหน่งพิกัดจุดศูนย์กลางถ่วงของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม t_i กำหนดให้เป็นจุดต่อ Q คำนวณค่าระยะห่างของจุดต่อ Q ด้วยสมการ (3.4)
6. คำนวณระยะห่างจากจุดต่อ Q ไปยังจุดปลายทั้งสามของสามเหลี่ยม t_i (d_m โดยที่ $m = 1, 2, 3$)
7. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ χ_i ของจุดต่อ Q ด้วยสมการ (3.15) และหาค่าระยะทางเฉลี่ยของ d_m ($s_i = (d_1 + d_2 + d_3)/3$)
8. ทำการทดสอบ $\chi \cdot \alpha$ ของจุดต่อ Q โดยถ้าหาก $(\chi_i \cdot \alpha \cdot h_i) \geq s_i$ ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 3
9. ทำการทดสอบ $\chi \cdot \beta$ ของจุดต่อ Q โดยถ้าหาก $d_m \leq (\chi_i \cdot h_{\min} / \beta)$ สำหรับบางค่าของ m ให้กลับไปยังขั้นตอนที่ 3
10. จัดเก็บจุดต่อ Q ลงในเซต P
11. ถ้าหากยังคงมีจุดต่อที่ยังไม่ถูกอ่านจากเซต P ให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 ถึง 10 ต่อไป
12. ทำการแทรกจุดต่อทั้งหมดในเซต P ลงในโดเมน และสร้างสามเหลี่ยมด้วยอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation* ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น
13. ถ้าหากจำนวนจุดต่อที่เพิ่มขึ้นมา (Q ในเซต P) มากกว่าค่า *threshold* ก็กลับไปยังขั้นตอนที่ 3 มิฉะนั้นก็ให้สิ้นสุดการทำงานของกระบวนการ

และอัลกอริทึมที่ 4 สามารถเขียนในรูปแบบของโค้ดเทียมภายใต้แนวคิดของการเขียนโปรแกรมเชิงวัตถุ (object oriented programming) ได้ดังนี้

```
AdaptiveRemeshing( $P, T, P0, \alpha, \beta, Hmin, Hmax, \_$ 
     $Xlmin, Xlmax, threshold$ )
```

```
Do {
  Do  $p \leftarrow P0.NextInteriorNode$  {
    If ( $p.hi \leq Hmax$ ) {
       $t \leftarrow T.FindTriangleContainNode(p)$ ;
       $pq \leftarrow t.ComputeTriangleCentroid()$ ;
       $pq.dp \leftarrow t.ComputePointDistributionFunction()$ ;
       $pq.dm(1:3) \leftarrow t.DistanceCentroidToVertices()$ ;
       $pq.Xi \leftarrow pq.ScalingFunction(Hmin, Hmax, Xlmin, Xlmax)$ ;
       $pq.Rejected = FALSE$ ;
      If ( $pq.Xi * \alpha * pq.hi < pq.dm.Average$ ) {
        For  $j=1$  To 3 {
          If ( $pq.dm(j) < (pq.Xi * Hmin / \beta)$ ) {
             $pq.Rejected = TRUE$ ;
            Break;
          };
        };
      Else  $pq.Rejected = TRUE$ ;
    }
  }
}
```

```

        If (Not  $pq$ .Rejected)  $P$ .AddNodeAsInsertedNode( $pq$ );
    };
};

Do  $p \leftarrow P$ .NextInsertedNode {
    Call DelaunayTriangulation( $P$ ,  $T$ ,  $p$ );
};
} Loop Until ( $P$ .InsertedNodes  $\leq$   $threshold$ );
End;
```

สำหรับวิธีการใช้งานอัลกอริทึม *DelaunayTriangulation*, *MeshRefinement* และ *AdaptiveRemeshing* (อัลกอริทึมที่ 4) สามารถอธิบายในรูปแบบของโค้ดเทียม ดังแสดงในอัลกอริทึม *Main* ข้างล่าง

อัลกอริทึมที่ 5 $Main(P, T, P0, \alpha, \beta, iteration, Hmin, Hmax, _$
 $XImin, XImax, threshold, isadaptive)$

```

Let  $BP$  be the collection of boundary point objects that stored in
sequence of counter-clockwise direction for all outside boundaries
and clockwise direction for all inside boundaries;
Let  $P0$  be the collection of background point objects;
Let  $P$  be the collection of point objects;
Let  $T$  be the collection of mesh objects;
Let  $\alpha$  be the constant that controls shape of formed triangles;
Let  $\beta$  be the constant that controls regularity of the
triangulation;
Let  $iteration$  be the number of loops to refine meshes;
Let  $Hmin$  and  $Hmax$  be the minimum and maximum element size,
respectively;
Let  $Xi\_min$  and  $Xi\_max$  be the minimum and maximum scaling
coefficients,
respectively;
Let  $threshold$  be the number of minimum increasing points for each
iteration;
Let  $isadaptive$  be the flag to generate background or adaptive meshes;

 $BP$ .Initialize;
 $P0$ .Initialize;
 $P$ .Initialize;
 $T$ .Initialize;
If ( $isadaptive$ ) {
     $P0$ .ReadBackgroundNodes;
     $BP$ .RediscretizeBoundaryNodes;
};
Else {
     $BP$ .ReadBoundaryNodes;
};
 $BP$ .CreateConvexHull;
```

```

P.AddNode(BP.p1, BP.p2, BP.p3, BP.p4);
T.AddTriangle(t1, BP.p1, BP.p2, BP.p3);
T.AddTriangle(t2, BP.p3, BP.p2, BP.p4);

Do p ← BP.NextBoundaryNode {
    Call DelaunayTriangulation(P, T, p);
};
T.RemoveOutsideDomainTriangles;

Call MeshRefinement(P, T, alpha, beta, iteration);
If (isadaptive)
    Call AdaptiveRemeshing(P, T, P0, alpha, beta, Hmin, Hmax, _
        XImax, XImax, threshold);

T.LaplaceSmoothing;

End;

```

3.4 ตัวอย่างการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

ตัวอย่างทั้งหมดที่ปรากฏในหัวข้อนี้เป็นตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบประสิทธิภาพการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ด้วยกระบวนการที่นำเสนอข้างต้น โดยขนาดของสามเหลี่ยม (h_i) ถูกกำหนดโดยฟังก์ชันต่าง ๆ ดังที่จะได้กล่าวถึงต่อไป กระบวนการทดสอบเริ่มต้นด้วยการสร้างตาข่ายเริ่มต้น (initial mesh) ตลอดทั้งโดเมน จากนั้นใช้ฟังก์ชันที่กำหนดเพื่อคำนวณขนาดของสามเหลี่ยม (h_i) โดยกำหนดค่าที่ได้ลงบนจุดต่อ จากนั้นใช้อัลกอริทึมที่ 4 ในการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ และให้ดำเนินการซ้ำจนกว่าจำนวนสามเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับตาข่ายครั้งก่อนไม่มีนัยสำคัญ

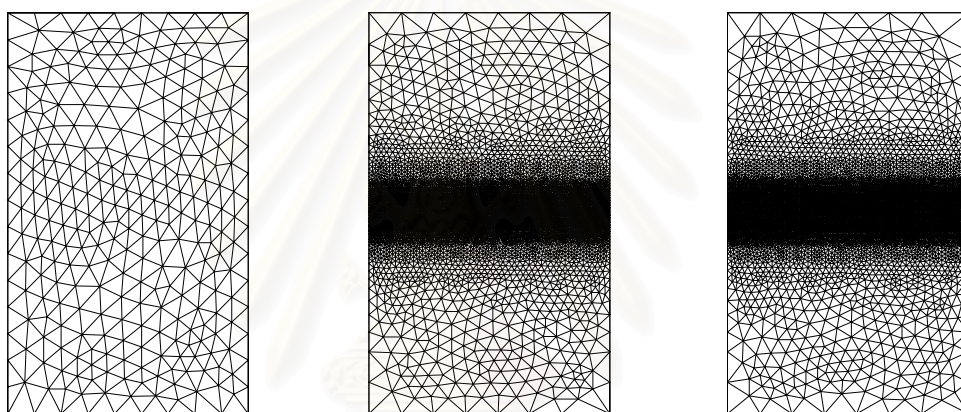
ตัวอย่างแรกเป็นการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวกึ่งกลางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (adaptive meshes along centerline of a rectangular domain) [33,34] โดยกำหนดให้ขนาดของสามเหลี่ยมที่จุดต่อถูกกำหนดโดยฟังก์ชันที่มีการกระจายแบบระฆังคว่ำ ดังนี้

$$h(y) = 0.42 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\left[\frac{y-\mu}{2\sigma}\right]^2} \quad (3.16)$$

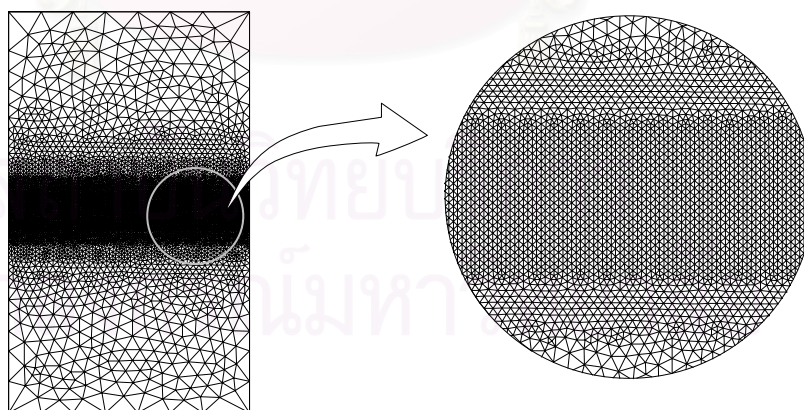
โดย y หมายถึง ตำแหน่งพิกัดในแนวตั้ง ส่วน μ และ σ ถูกกำหนดให้มีค่าคงที่เท่ากับ 0 และ 1 ตามลำดับ รูปที่ 3.14 แสดงสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ครั้งที่ 1 ถึง 3 ซึ่งเริ่มต้นจากตาข่ายเริ่มต้นที่มีขนาดค่อนข้างหยาบ และพารามิเตอร์สำหรับการสร้างสามเหลี่ยม α , β , χ_{\min} และ χ_{\max} มีค่าเท่ากับ 0.5, 0.6, 0.75 และ 1.10 ตามลำดับ รูปที่ 3.15 แสดงขนาดของสามเหลี่ยมตลอด

แนวแกน y ซึ่งถูกกำหนดโดยสมการ (3.16) จะเห็นว่าสามเหลี่ยมขนาดเล็กจะวางตัวตามแนวกึ่งกลางของโดเมน และห่างจากกึ่งกลางของโดเมนไปในทิศทางด้านบนและด้านล่างสามเหลี่ยมจะมีขนาดโตขึ้นเรื่อย ๆ และมีขนาดโตที่สุดตรงบริเวณขอบด้านบนและด้านล่างของโดเมน

เมื่อพิจารณาจากภาพขยายในรูปที่ 3.15 จะเห็นว่ากระบวนการที่นำเสนอสามารถสร้างสามเหลี่ยมขนาดเล็กเท่า ๆ กัน ตลอดพื้นที่ที่กำหนดโดยเส้นนอน b ถึง c ในขณะที่ขนาดของสามเหลี่ยม $h_a < h_b, h_c$ ซึ่งสามารถเทียบเคียงได้กับขนาดของสามเหลี่ยมที่ได้จากตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดสำหรับบริเวณคลื่นช็อกและผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง หรือบริเวณคลื่นช็อกที่มีขนาดความแข็งแรงแตกต่างกัน เป็นต้น

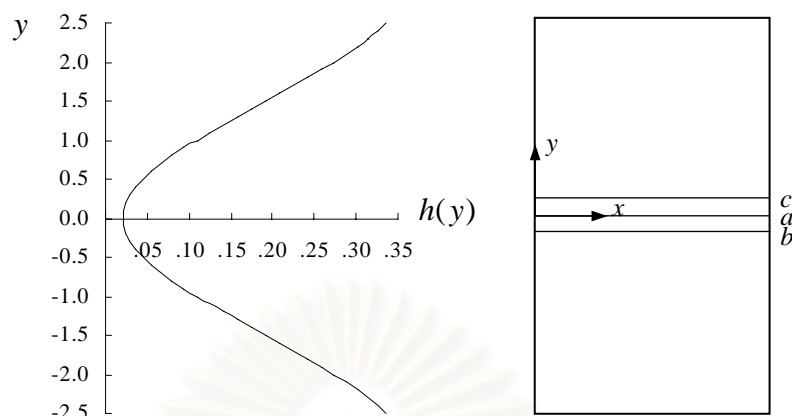


(ก) ตาข่ายเริ่มต้น (ข) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 1 (ค) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 2



(ง) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 3

รูปที่ 3.14 การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวกึ่งกลางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



รูปที่ 3.15 ขนาดสามเหลี่ยมตลอดแนวแกน y

ตารางที่ 3.1 ข้อมูลของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวกึ่งกลางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

การปรับตัวครั้งที่	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	คุณภาพเอลิเมนต์ (%)
ตาข่ายเริ่มต้น	297	544	99.45
1	9,287	18,438	99.95
2	9,782	19,426	99.91
3	9,797	19,456	99.87

ตารางที่ 3.1 แสดงข้อมูลของจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์และคุณภาพเอลิเมนต์ (ค่าเฉลี่ยของทุก ๆ เอลิเมนต์สามเหลี่ยม) ที่ได้จากการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวกึ่งกลางของโดเมน โดยเกณฑ์การตัดสินสามเหลี่ยมที่มีคุณภาพดี หมายถึง สามเหลี่ยมที่มีลักษณะใกล้เคียงสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งสามารถคำนวณโดยใช้สมการ (3.17) [35] ดังนี้

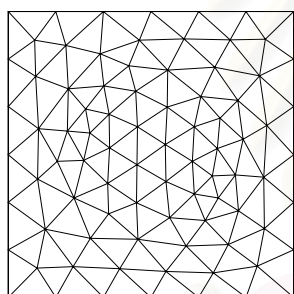
$$\left| \frac{1}{\sin \gamma} \right| \leq \frac{d_{\text{longest}}}{d_{\text{shortest}}} \leq \left| \frac{2}{\sin \gamma} \right| \quad (3.17)$$

โดยที่ d หมายถึง ระยะทาง และ γ กำหนดให้มามีค่าเท่ากับ 60° ซึ่งจะเห็นได้ว่าคุณภาพเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้มีค่าประมาณ 99% หรืออีกนัยหนึ่งหมายความว่า สามเหลี่ยมโดยส่วนใหญ่ในโดเมนมีลักษณะใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งสอดคล้องกับขนาดของสามเหลี่ยมที่กำหนดโดยสมการ (3.16)

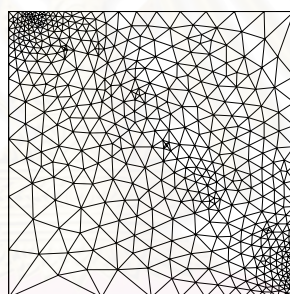
ตัวอย่างที่สองเป็นการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวขวางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (adaptive meshes along a diagonal of a square domain) [33,34] โดยกำหนดให้ขนาดของสามเหลี่ยมที่จุดต่อถูกกำหนดโดยสมการดังนี้

$$h(x, y) = 2y(1-y) \left[\tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2x)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2 \beta x(1-x)}{2(1+\beta^2)^2} \right] + 2x(1-x) \left[\tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2y)}{\sqrt{2}(1+\beta^2)} + \frac{\alpha^2 \beta y(1-y)}{2(1+\beta^2)^2} \right] \quad (3.17)$$

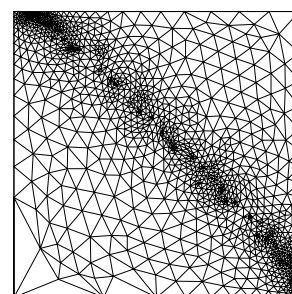
โดย $\beta = \alpha[(x+y)/\sqrt{2} - 0.8]$ เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ขึ้นกับตำแหน่งพิกัดของจุดต่อภายในโดเมน และ α มีค่าคงที่เท่ากับ 100 และเนื่องจากสมการ (3.17) สามารถให้ผลลัพธ์ทั้งที่มีค่ามากกว่าและน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้นเฉพาะค่าที่มากกว่าศูนย์เท่านั้นที่จะนำมากำหนดเป็นขนาดสามเหลี่ยมที่จุดต่อ



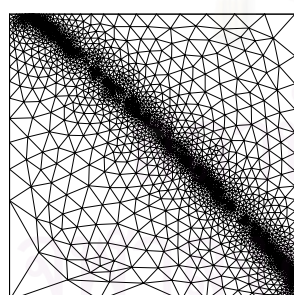
(ก) ตาข่ายเริ่มต้น



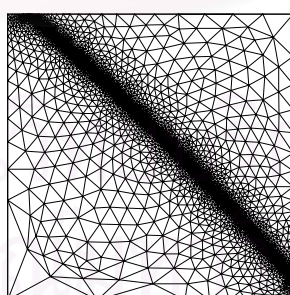
(ข) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 1



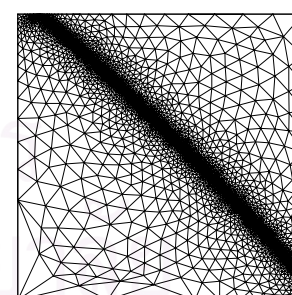
(ค) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 2



(ง) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 3



(จ) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 4



(ฉ) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 5

รูปที่ 3.16 การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวขวางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปที่ 3.16 แสดงสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ครั้งที่ 1 ถึง 5 ตามลำดับ ซึ่งเริ่มต้นจากตาข่ายเริ่มต้นที่มีขนาดค่อนข้างหยาบ และพารามิเตอร์สำหรับการสร้างสามเหลี่ยม α , β , χ_{\min} และ χ_{\max} มีค่าเท่ากับ 0.5, 0.6, 0.4 และ 0.75 ตามลำดับ จะเห็นว่าสามเหลี่ยมขนาดเล็กจะวางตัวตาม

แนวขวางจากบนซ้ายมายังล่างขวาของโดเมนอย่างถูกต้อง ส่วนบริเวณอื่น ๆ จะปรากฏสามเหลี่ยมขนาดที่โตกว่ามาก

ตารางที่ 3.2 ข้อมูลของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวขวางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

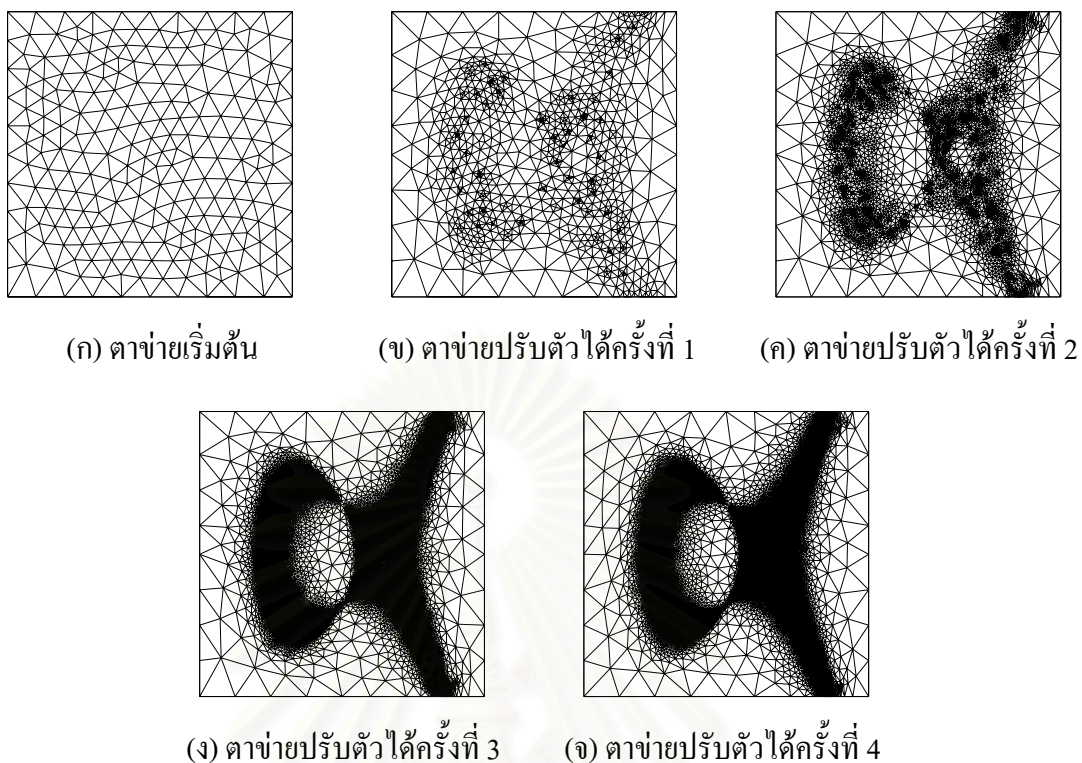
การปรับตัวครั้งที่	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	คุณภาพเอลิเมนต์ (%)
ตาข่ายเริ่มต้น	85	144	98.61
1	541	1,008	96.83
2	3,020	5,923	98.73
3	5,133	10,148	98.84
4	6,406	12,694	99.25
5	6,821	13,525	99.59

ตารางที่ 3.2 แสดงข้อมูลของจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์และคุณภาพเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตลอดแนวขวางของโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะเห็นว่าคุณภาพเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้มีค่าอยู่ในช่วง 96% ถึง 99% และเมื่อเปรียบเทียบกับตัวอย่างแรก ถึงแม้ว่าคุณภาพเอลิเมนต์จะมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่า แต่สามเหลี่ยมโดยส่วนใหญ่ในโดเมนกว่า 95% ยังคงมีลักษณะใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่า

ตัวอย่างที่สามเป็นการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้รูปร่างอัลฟาในสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Alpha-Shape adaptive meshes in a square domain) [33,34,36] โดยกำหนดให้ขนาดของสามเหลี่ยมที่จุดต่อถูกกำหนดโดยสมการดังนี้

$$h(x, y) = \begin{cases} \min(0.2(\lambda - 1)^3 + 0.005, 1.0) & \text{if } \lambda \geq 1 \\ \min(0.2(\lambda - 1)^2 + 0.01, 1.0) & \text{if } \lambda < 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

โดยค่าพารามิเตอร์ λ ถูกกำหนดโดยสมการกำลังสาม $x^3 - y^2 + 2 - 3\lambda x = 0$ รูปที่ 3.17 แสดงสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ครั้งที่ 1 ถึง 4 ตามลำดับ ซึ่งเริ่มต้นจากตาข่ายเริ่มต้นที่มีขนาดค่อนข้างหยาบเช่นเดิม และพารามิเตอร์สำหรับการสร้างสามเหลี่ยม α , β , χ_{\min} และ χ_{\max} มีค่าเท่ากับ 0.5, 0.6, 0.5 และ 0.85 ตามลำดับ จะเห็นว่าสามเหลี่ยมขนาดเล็กจะวางตัวตามแนวรูปร่างอัลฟาภายในโดเมนอย่างถูกต้อง ส่วนบริเวณอื่น ๆ จะปรากฏสามเหลี่ยมขนาดโตกว่า



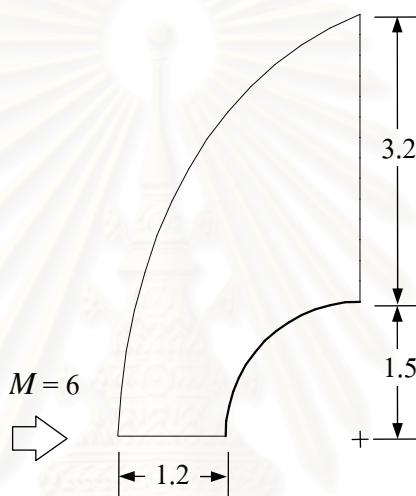
รูปที่ 3.17 การสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้รูปร่างอัลฟาในสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ตารางที่ 3.3 แสดงข้อมูลของจำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์และคุณภาพเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้รูปร่างอัลฟาในสี่เหลี่ยมจัตุรัส ตัวอย่างนี้สามารถใช้ในการทดสอบศักยภาพของกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมคอลอนเน่ และการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้เป็นอย่างดี เพราะจำนวนสามเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นจากการปรับตัวแต่ละครั้งมีเป็นจำนวนมาก ซึ่งจะเห็นได้ว่าคุณภาพเอลิเมนต์ที่ได้จากการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้มีค่าอยู่ในช่วง 87% ถึง 99% โดยการปรับตัวครั้งแรกให้สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพด้อยที่สุด แต่สำหรับการปรับตัวครั้งที่ 2 ถึง 4 สามารถให้สามเหลี่ยมที่มีคุณภาพสูงมาก

ตารางที่ 3.3 ข้อมูลของการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้รูปร่างอัลฟาในสี่เหลี่ยมจัตุรัส

การปรับตัวครั้งที่	จำนวนจุดต่อ	จำนวนเอลิเมนต์	คุณภาพเอลิเมนต์ (%)
ตาข่ายเริ่มต้น	229	416	99.76
1	5,645	11,128	87.44
2	23,271	46,376	97.62
3	66,400	132,634	99.50
4	141,364	282,562	99.87

ตัวอย่างสุดท้าย เป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ดังที่ได้แสดงในอัลกอริทึม 3 และ 4 เมื่อนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวในสภาวะคงตัว โดยรูปที่ 3.18 แสดงปัญหาการไหลที่หมายเลขมัก 6 ผ่านทรงกระบอก (Mach 6 flow past a cylinder) [21] เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความสมมาตร จึงทำการวิเคราะห์เพียงครึ่งด้านบนของโดเมน และกำหนดให้ของไหลความเร็วเหนือเสียง 6 เท่าไหลจากด้านซ้ายมือของโดเมนผ่านทรงกระบอก ซึ่งจะก่อให้เกิดคลื่นช็อกที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง (bow shock) ตามลักษณะของทรงกระบอก

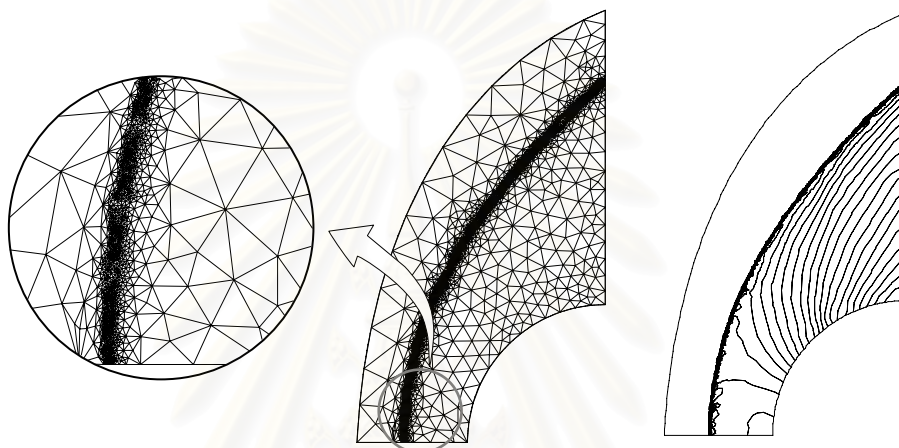


รูปที่ 3.18 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัก 6 ผ่านทรงกระบอก

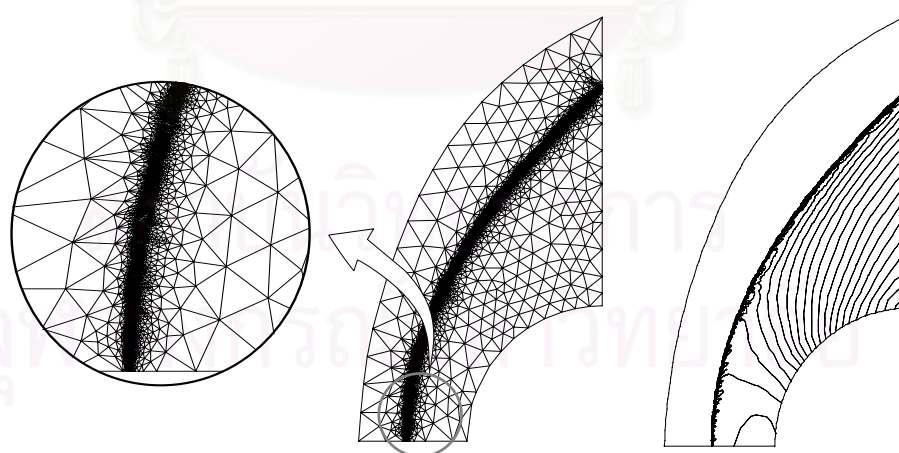
โดยเงื่อนไขขอบเขตสำหรับการไหลเข้าเป็นดังนี้ $\rho = 1.173$ $u = 2,045$ $v = 0$ และ $\varepsilon = 2,307,285$ และ $\gamma = 1.38$ (ดูความหมายของตัวแปรในบทที่ 4) ส่วนรูปที่ 3.19 แสดงเส้นชั้นความหนาแน่นของผลลัพธ์การคำนวณที่ได้จากสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายอัลกอริทึม 3 ซึ่งสามารถเห็นได้ว่าสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ขนาดเล็กจะวางตัวตลอดแนวคลื่นช็อกอย่างถูกต้อง และความหนาของเส้นชั้นความหนาแน่นของคลื่นช็อกยังไม่บางมากเพียงพอที่จะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง โดยสามารถพิจารณาได้จากภาพขยายของสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ด้านซ้ายมือของรูป จะเห็นว่าขนาดของสามเหลี่ยมตลอดแนวเส้นช็อกไม่มีความสม่ำเสมอ จึงส่งผลให้เส้นช็อกมีความหนาแตกต่างกัน และอาจส่งผลให้เกิดการสั่นของผลลัพธ์ด้านหลังเส้นช็อกโค้ง ซึ่งปรากฏอย่างชัดเจนในภาพขยายมือของรูปที่ 3.19

รูปที่ 3.20 แสดงเส้นชั้นความหนาแน่นของผลลัพธ์การคำนวณที่ได้จากสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายจากอัลกอริทึม 4 ซึ่งสามารถเห็นได้ว่าสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ขนาดเล็กจะวางตัวตลอดแนวคลื่นช็อกอย่างถูกต้องเช่นเดียวกัน และความหนาของเส้นชั้นความ

หนาแน่นของคลื่นช็อกมีความบางมากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ปรากฏในรูปที่ 3.19 และถ้าหากพิจารณาจากภาพขยายของสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ด้านซ้ายมือของรูป จะเห็นว่าขนาดของสามเหลี่ยมตลอดแนวเส้นช็อกมีความสม่ำเสมอมากกว่า และลักษณะของเส้นชั้นความหนาแน่นในบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อก ซึ่งเป็นบริเวณที่มีการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าเสียง (subsonic flow) จึงมีความสม่ำเสมอของเส้นมากกว่าเช่นเดียวกัน อันเป็นผลเนื่องจากการสั้นของผลลัพธ์ด้านหลังเส้นช็อกโค้งน้อยกว่า



รูปที่ 3.19 สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และเส้นชั้นความหนาแน่น
ของปัญหาการไหลที่หมายเลขมัก 6 ผ่านทรงกระบอก (อัลกอริทึม 3)



รูปที่ 3.20 สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และเส้นชั้นความหนาแน่น
ของปัญหาการไหลที่หมายเลขมัก 6 ผ่านทรงกระบอก (อัลกอริทึม 4)

บทที่ 4

กฎการอนุรักษ์และปัญหาของรีมันน์

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ (Roe's flux-difference splitting scheme) และการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ (cell-centered finite volume method) สำหรับการแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม ปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข และวิธีการแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขซึ่งถูกนำเสนอโดยนักวิจัยหลาย ๆ ท่าน [9,37,38] สำหรับบทที่ 4 จะขออธิบายความรู้พื้นฐานของพลศาสตร์การไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัว และระบบสมการออยเลอร์ซึ่งเป็นสมการควบคุมการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัว จากนั้นจะอธิบายถึงกฎการอนุรักษ์ (conservation laws) และปัญหาของรีมันน์ (Riemann problem) ซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานที่ใช้ในการศึกษาถึงคุณสมบัติกฎการอนุรักษ์ และพฤติกรรมของผลลัพธ์ของระบบสมการออยเลอร์ในหนึ่งมิติ เนื่องจากระบบสมการออยเลอร์สามารถให้ผลลัพธ์อย่างอ่อน (weak solution) ได้มากกว่าหนึ่งภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นเดียวกัน ดังนั้น เงื่อนไขในการเลือกผลลัพธ์ที่สามารถเกิดขึ้นได้จริงในทางปฏิบัติจึงเป็นสิ่งจำเป็นในการแก้ปัญหการไหลในทางปฏิบัติ เพื่อให้มั่นใจว่าผลลัพธ์ที่ได้เป็นผลลัพธ์ที่ถูกต้องอย่างแท้จริง

4.1 ระบบสมการควบคุมของการไหล

สำหรับปัญหการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวในสภาวะไม่คงตัว (two dimensional unsteady state inviscid compressible flows) สามารถเขียนในรูปแบบของระบบสมการออยเลอร์ (Euler equations) ซึ่งประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงาน และสำหรับระบบพิกัดฉากในสองมิติ x - y ดังในรูปที่ 4.1 สามารถเขียนในรูปแบบของสมการอินทิกรัล [2] ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})] dS = 0 \quad \text{สมการอนุรักษ์มวล} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [\rho \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) + p\vec{n}] dS = 0 \quad \text{สมการอนุรักษ์โมเมนตัม} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \varepsilon d\Omega + \oint_{\partial\Omega} [(\rho \varepsilon + p)(\vec{V} \cdot \vec{n})] dS = 0 \quad \text{สมการอนุรักษ์พลังงาน} \quad (4.3)$$

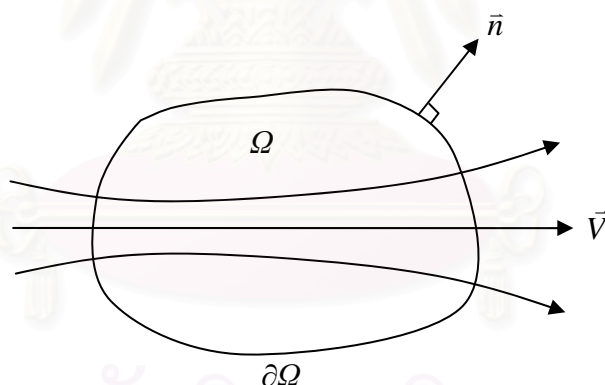
โดย Ω หมายถึงปริมาตรของโดเมน S หมายถึงพื้นที่ผิวของโดเมน \vec{n} หมายถึงเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยตั้งฉากกับพื้นที่ผิวของโดเมน \vec{V} หมายถึงความเร็วของของไหล ρ หมายถึงค่าความหนาแน่น p หมายถึงค่าความดัน และ ε หมายถึงค่าพลังงานรวม ซึ่งมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานภายใน (e) และพลังงานจลน์ ดังนี้

$$\varepsilon = e + 0.5(u^2 + v^2) \quad (4.4)$$

สมการ (4.1) ถึง (4.3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่กระชับ (compact form) ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} F(U) dS = 0 \quad (4.5)$$

โดย U หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ดังที่ได้แสดงในสมการ (4.8) และ $F(U)$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพ (physical fluxes) ซึ่งเป็นพจน์ที่สองในสมการ (4.1) ถึง (4.3)



รูปที่ 4.1 โดเมนทั่วไปสำหรับปัญหาการไหล

เนื่องจากจำนวนตัวแปรของระบบสมการออยเลอร์ (ρ , u , v , p , e) มีมากกว่าจำนวนสมการของระบบสมการออยเลอร์ข้างต้น ดังนั้นจึงต้องอาศัยสมการสถานะของก๊าซ (gas equation of state) มาใช้ในการแก้ระบบสมการ โดยงานวิจัยนี้กำหนดให้ของไหลที่ทำการวิเคราะห์เป็นก๊าซในอุดมคติ (ideal gas) ซึ่งสามารถเขียนสมการสถานะของก๊าซได้ดังนี้

$$p = \rho e(\gamma - 1) \quad (4.6)$$

โดย γ หมายถึงอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ (specific heat ratio) และเมื่อทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของ Green-Gauss เข้ากับระบบสมการออยเลอร์ (4-1) ถึง (4-3) ก็สามารถเขียนระบบสมการในรูปแบบของการอนุรักษ์ (conservation form) [2] ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

โดย U หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ส่วน E และ G หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$U = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho \varepsilon]^T \quad (4.8)$$

$$E = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho uv \quad \rho uH]^T \quad (4.9)$$

$$G = [\rho v \quad \rho uv \quad \rho v^2 + p \quad \rho vH]^T \quad (4.10)$$

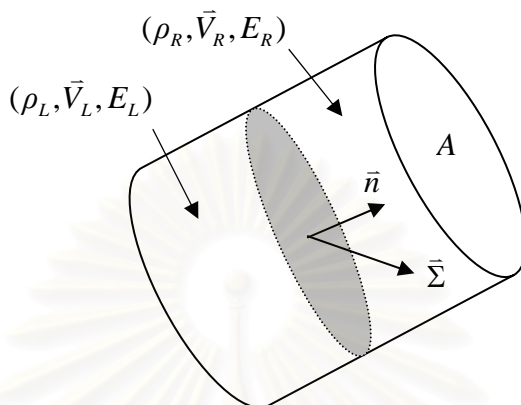
โดย H หมายถึงค่าเอนทัลปีรวม (total enthalpy) ซึ่งถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์

$$H = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \quad (4.11)$$

โดยทั่วไปสำหรับปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง มักจะปรากฏความไม่ต่อเนื่อง เช่น คลื่นช็อก เป็นต้น ดังนั้นในบริเวณดังกล่าวจะเกิดปรากฏการณ์การกระโดดของสถานะของการไหล และไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ของสถานะของการไหลที่ตำแหน่งนั้น ๆ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (4.7) จึงไม่สามารถประยุกต์ใช้กับบริเวณดังกล่าวได้โดยตรง แต่อย่างไรก็ตามในด้านคณิตศาสตร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้มีแนวคิดเกี่ยวกับการหาผลลัพท์อย่างอ่อน (weak solution) ซึ่งสามารถที่จะประยุกต์ใช้การหาผลลัพท์อย่างอ่อนกับบริเวณที่เกิดปรากฏการณ์การกระโดดของสถานะของการไหล [39,40] โดยผลลัพท์ที่ได้จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เป็นไปได้ตรงตำแหน่งที่มีการกระโดดของสถานะของการไหล ต้องไม่ขัดกับเงื่อนไขการกระโดด (jump condition) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ได้จากสมการในรูปแบบอินทิกรัล

เพื่อความง่ายในการได้มาซึ่งเงื่อนไขการกระโดด สมมติให้ปริมาตรควบคุมเป็นรูปทรงกระบอกและมีผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่อง (discontinuity surface) อยู่ภายในปริมาตรควบคุม และผิวสัมผัสดังกล่าวได้แบ่งสถานะของการไหลออกเป็น 2 ด้าน โดยด้านซ้ายถูก

กำหนดด้วยตัวห้อยท้าย L และด้านขวากำหนดด้วยตัวห้อยท้าย R และกำหนดให้ผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่องเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{\Sigma}$ ดังแสดงในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 รูปทรงกระบอกและมีผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่องภายใน

เพื่อความสะดวกในการแสดงปริมาณการกระโดดของสถานะของการไหล ดังนั้นกำหนดให้ปริมาณภายในเครื่องหมาย $[\bullet]$ หมายถึง การกระโดดของสถานะของการไหล เช่นสมการ (4.12) ซึ่งล่างแสดงการกระโดดของความหนาแน่น หรือผลต่างของความหนาแน่นทางด้านขวาและด้านซ้ายของผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่อง เป็นต้น

$$[\rho] = \rho_R - \rho_L \quad (4.12)$$

สำหรับในที่นี้จะแสดงตัวอย่างเฉพาะวิธีการหาเงื่อนไขการกระโดดของสมการอนุรักษ์มวลเท่านั้น ดังนั้นจากสมการ (4.1) การเปลี่ยนแปลงของมวลภายในปริมาตรควบคุมต่อหน่วยเวลา อันเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผิวสัมผัสที่สถานะของการไหลไม่ต่อเนื่อง จึงมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{\rho} d\Omega &= (\rho_L - \rho_R)(\vec{\Sigma} \cdot \vec{n})A \\ &= -[\rho](\vec{\Sigma} \cdot \vec{n})A \end{aligned} \quad (4.13)$$

และปริมาณฟลักซ์สุทธรมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS &= [\rho_R(\vec{V}_R \cdot \vec{n}) - \rho_L(\vec{V}_L \cdot \vec{n})]A \\ &= [\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})]A \end{aligned} \quad (4.14)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (4.13) และ (4.14) กลับลงในสมการ (4.1) ก็จะได้เงื่อนไขการกระโดดของสมการอนุรักษ์มวล ดังนี้

$$[\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})] = [\rho](\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}) \quad (4.15)$$

ส่วนเงื่อนไขการกระโดดของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการอนุรักษ์พลังงาน ก็สามารถดำเนินการเช่นเดียวกับตัวอย่างข้างต้นทุกประการ ก็จะได้ผลลัพธ์ดังปรากฏในสมการ (4.16) และ (4.17) ตามลำดับ

$$[\rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) + p\vec{n}] = [\rho\vec{V}](\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}) \quad (4.16)$$

$$[\rho\varepsilon(\vec{V} \cdot \vec{n}) + p(\vec{V} \cdot \vec{n})] = [\rho\varepsilon](\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}) \quad (4.17)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (4.15) ถึง (4.17) และเปรียบเทียบกับสมการ (4.1) ถึง (4.3) และ (4.5) พบว่าพจน์ทางซ้ายมือเป็นการกระโดดของปริมาณฟลักซ์ $F(U)$ ส่วนพจน์ทางขวามือเป็นการกระโดดของปริมาณตัวแปรอนุรักษ์ U และกำหนดให้ $s = (\vec{\Sigma} \cdot \vec{n})$ ดังนั้นสมการ (4.15) ถึง (4.17) จึงสามารถเขียนในรูปแบบที่กระชับได้ดังนี้

$$[F(U)] = s[U] \quad (4.18)$$

หรือ

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L) \quad (4.19)$$

สมการ (4.18) มักเรียกโดยทั่วไปว่า ความสัมพันธ์ของแรนไคน์และฮิวโกนิโอ (Rankine-Hugoniot relations) [41] ซึ่งเป็นสมการที่สำคัญและใช้ตรวจสอบความเป็นไปได้ของผลลัพธ์ของสถานะการไหลในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อก

4.2 กฎการอนุรักษ์สเกลาร์และปัญหาริมันน์

การศึกษาระบบสมการของกฎการอนุรักษ์ (system of conservation laws) เป็นเรื่องที่มีความซับซ้อน ดังนั้นในการศึกษาถึงพฤติกรรมของผลลัพธ์ของระบบสมการของกฎการอนุรักษ์ จึงเริ่มต้นจากสมการเพียงสมการเดียวที่เรียกว่า กฎการอนุรักษ์สเกลาร์ (scalar conservation laws) โดยการศึกษาผลลัพธ์ $u(x,t)$ ของปัญหาโคชี (Cauchy problem) สำหรับสมการสเกลาร์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาในหนึ่งมิติ [42,43] ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathcal{R} \text{ และ } t > 0 \quad (4.20)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (4.21)$$

การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.20) ที่สามารถให้ผลลัพธ์ที่ไม่มีคำตอบต่อเนื่อง สามารถกระทำได้ด้วยการคูณสมการดังกล่าว ด้วยฟังก์ชันทดสอบ (test function) ที่มีความต่อเนื่องของอนุพันธ์อันดับหนึ่งและมีค่าเท่ากับ 0 นอกโดเมนที่กำลังพิจารณา (compact support) $\phi(x,t) \in C_0^1(\mathcal{R} \times \mathcal{R})$ จากนั้นก็ทำการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) เช่น

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right] dx dt = 0 \quad (4.22)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left[\phi u \Big|_0^\infty - \int_0^\infty u \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right] dx + \int_0^\infty \left[\phi f(u) \Big|_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right] dt = 0 \quad (4.23)$$

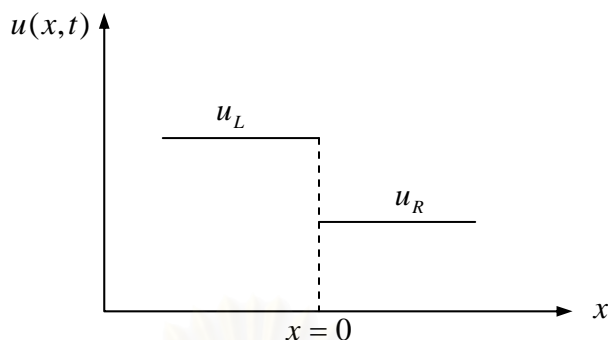
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx dt + \int_{-\infty}^\infty \phi(x,0) u(x,0) dx = 0 \quad (4.24)$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ $u(x,t)$ ของสมการ (4.20) เรียกว่าผลลัพธ์อย่างอ่อน (weak solution) ถ้าหากสมการ (4.24) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของฟังก์ชันทดสอบ $\phi(x,t) \in C_0^1(\mathcal{R} \times \mathcal{R})$ แต่อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติผลลัพธ์อย่างอ่อนที่ได้มักจะไม่มีความเป็นหนึ่งเดียว (non-uniqueness) [40,43] ดังนั้นจึงจำเป็นต้องค้นหาเงื่อนไขเพิ่มเติมเพื่อให้สามารถเลือกคำตอบที่ถูกต้องและสามารถเกิดขึ้นได้ในทางปฏิบัติ ซึ่งคำตอบดังกล่าวเรียกว่า entropy solution

การหาผลลัพธ์ $u(x,t)$ ของระบบสมการ (4.5) อันประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ที่มีค่าคงที่เป็นช่วง ๆ (piecewise constant) ได้ถูกเรียกว่าปัญหาของริมันน์ (Riemann problem) สำหรับปัญหาในหนึ่งมิติที่ถูกกำหนดโดยสมการ (4.20) และเงื่อนไขเริ่มต้น ดังที่ปรากฏในสมการ (4.21) สามารถเขียนในรูปแบบของปัญหาของริมันน์ (คล้ายกับปัญหาค้นซ็อกในท่อ, shock tube problem [43,44]) ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathcal{R} \text{ และ } t > 0 \quad (4.25)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.26)$$



รูปที่ 4.3 เงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับปัญหาของริมันน์

การหาผลลัพธ์ $u(x,t)$ ของสมการ (4.25) และ (4.26) สามารถกระทำได้เมื่อ ปริมาณฟลักซ์ $f(u)$ และเงื่อนไขเริ่มต้นได้ถูกกำหนดอย่างชัดเจน สำหรับรูปแบบไม่เชิงเส้นของ ปริมาณฟลักซ์ $f(u)$ ที่ง่ายที่สุดคือ $f(u) = u^2/2$ และเรียกสมการ (4.25) ด้วยรูปแบบไม่เชิงเส้น ของปริมาณฟลักซ์ดังกล่าวว่า สมการเบอร์เกอร์แบบไร้ความหนืด (inviscid Burgers' equation) [43]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \quad (4.27)$$

และเนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นได้ถูกกำหนดให้มีค่าคงที่เป็นช่วง ๆ ดังนั้นจึง สามารถแบ่งพฤติกรรมของผลลัพธ์ของสมการ (4.27) และเงื่อนไขเริ่มต้น (4.26) ออกได้เป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $u_L > u_R$

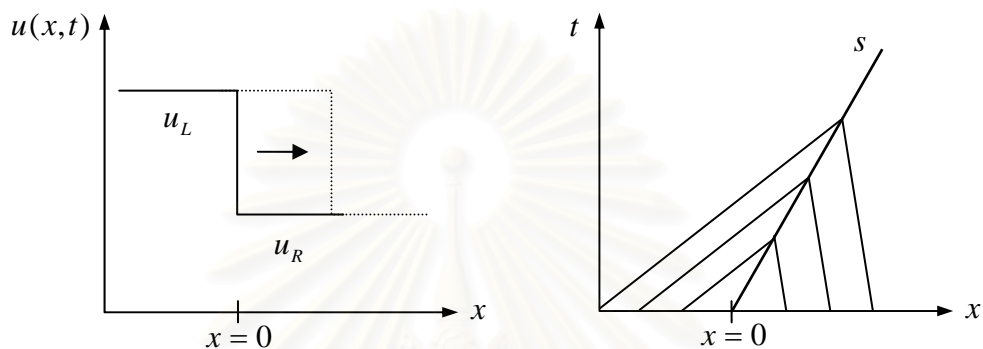
สำหรับกรณีนี้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าว คือ

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & , x < st \\ u_R & , x \geq st \end{cases} \quad (4.28)$$

โดยที่ s หมายถึง ความเร็วของช็อก (shock speed) ซึ่งสามารถคำนวณหาได้จาก ความสัมพันธ์ของเรนโกล์และฮิวโกนิโอ โดยใช้สมการ (4.18) หรือ (4.19)

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \frac{u_R^2 - u_L^2}{u_R - u_L} \\ &= \frac{u_R + u_L}{2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

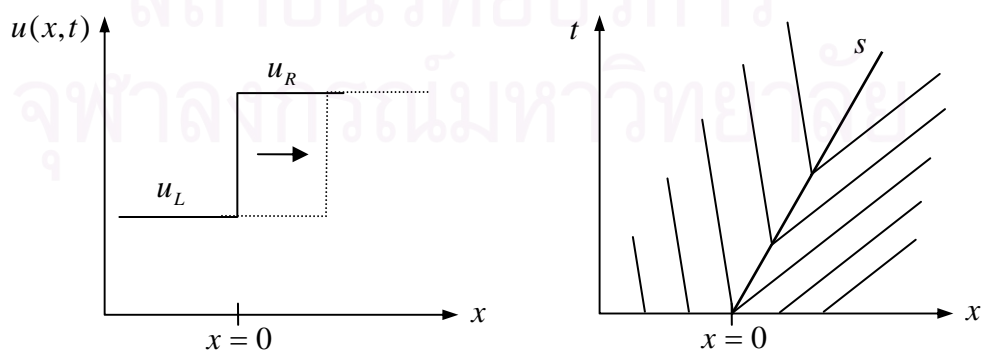
รูปที่ 4.4 แสดงเส้นช็อกเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว s ซึ่งเกิดจากการตัดกันของเส้นคุณลักษณะ (characteristic curve) จากทั้งสองด้านของเส้นช็อก โดยเส้นคุณลักษณะด้านหลังจะมีความเร็วมากกว่าความเร็วของเส้นช็อก และเส้นคุณลักษณะด้านหน้าจะมีความเร็วน้อยกว่าความเร็วของเส้นช็อก



รูปที่ 4.4 ผลลัพธ์ของสมการ (4.27) ในกรณี $u_L > u_R$

กรณีที่ 2 $u_L < u_R$

สำหรับกรณีนี้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวสามารถเป็นไปได้ 2 ประการ สำหรับประการแรกผลลัพธ์เช่นเดียวกับที่ปรากฏในสมการ (4.28) แต่ลักษณะของการตัดกันของเส้นคุณลักษณะทั้งสองด้านของเส้นช็อกจะมีความแตกต่างกันดังในรูปที่ 4.5 โดยเส้นคุณลักษณะด้านหลังจะมีความเร็วน้อยกว่าความเร็วของเส้นช็อก และเส้นคุณลักษณะด้านหน้าจะมีความเร็วมากกว่าความเร็วของเส้นช็อก ซึ่งเรียกว่า คลื่นช็อกขยาย (expansion shock)

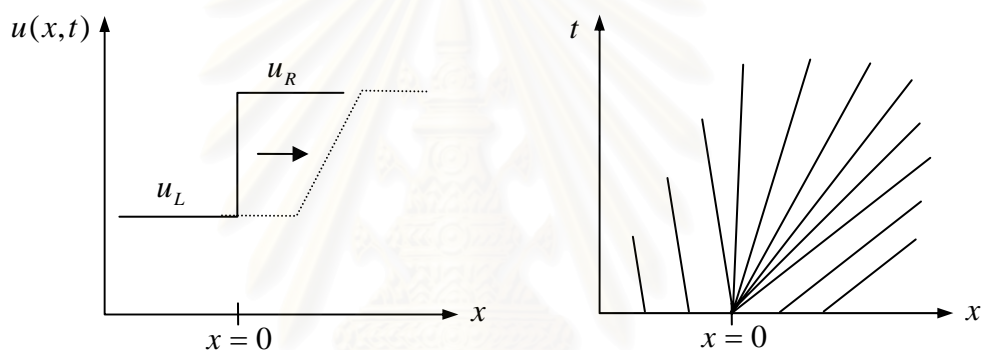


รูปที่ 4.5 ผลลัพธ์ของสมการ (4.27) ในกรณี $u_L < u_R$ (คลื่นช็อกขยาย)

สำหรับประการที่สองผลลัพธ์ผลลัพธ์ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าว คือ

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & , x < u_L t \\ x/t & , u_L t \leq x \leq u_R t \\ u_R & , x > u_R t \end{cases} \quad (4.30)$$

ลักษณะของการตัดกันของเส้นคุณลักษณะเป็นไปดังในรูปที่ 4.6 ซึ่งจะเห็นว่าไม่ปรากฏเส้นช็อกในผลลัพธ์ แต่จะปรากฏการกระจายตัวของเส้นคุณลักษณะไปทางด้านซ้ายและขวา และเส้นคุณลักษณะจะตัดกันที่จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งในกรณีนี้เส้นคุณลักษณะตัดกันที่จุดกำเนิด ซึ่งเรียกผลลัพธ์ในลักษณะดังกล่าวว่า คลื่นขยาย (expansion wave)



รูปที่ 4.6 ผลลัพธ์ของสมการ (4.27) ในกรณี $u_L < u_R$ (คลื่นขยาย)

ตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าในกรณีที่ $u_L < u_R$ มีผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนด 2 ประการด้วยกัน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมเพื่อให้สามารถเลือกผลลัพธ์ที่แท้จริงเพียงหนึ่งเดียว และได้มีการศึกษาในกรณีนี้โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ Lax [40] และได้เสนอว่า กรณีของการเกิดเส้นช็อกนั้น เส้นคุณลักษณะด้านหลังจะมีความเร็วกว่าความเร็วของเส้นช็อก และเส้นคุณลักษณะด้านหน้าจะมีความเร็วน้อยกว่าความเร็วของเส้นช็อก ดังนั้นเส้นคุณลักษณะต้องมีการตัดกันบนเส้นช็อกเช่นเดียวกับที่ปรากฏในรูปที่ 4.4 ข้างต้นเท่านั้น และเงื่อนไขข้างต้นถูกเรียกว่า เงื่อนไขเอนโทรปีของแล็กซ์ (Lax entropy condition) ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบของความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$f'(u_L) > s > f'(u_R) \quad (4.31)$$

โดยที่ $f'(u)$ หมายถึง ความเร็วของเส้นคุณลักษณะ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ในกรณีที่ $u_L < u_R$ ไม่สามารถเกิดคลื่นช็อกเพราะผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขเอนโทรปีของ

แก๊ซ จึงเหลือเพียงสมการ (4.30) หรือการเกิดคลื่นขยายเท่านั้นที่เป็นไปได้สำหรับในกรณีที่สอง และการละเมิดเงื่อนไขของโทรปีของแก๊ซ สามารถก่อให้เกิดปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

4.3 ระบบสมการออยเลอร์และปัญหาริมันน์

ระบบสมการออยเลอร์ในหนึ่งมิติ อันประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และสมการอนุรักษ์พลังงาน สามารถเขียนระบบสมการในรูปแบบของการอนุรักษ์ (conservation form) ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

โดยที่ U และ E ถูกกำหนด ดังนี้

$$U = [\rho \quad \rho u \quad \rho \varepsilon]^T \quad (4.33)$$

$$E = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho u H]^T \quad (4.34)$$

สมมติว่า E มีความต่อเนื่องและสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ สมการ (4.32) สามารถเขียนในรูปแบบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกึ่งเชิงเส้นตรง (quasi-linear form) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (4.35)$$

โดยที่ $A(U) = \frac{\partial E}{\partial U}$ หมายถึงเมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix) ซึ่งเป็นเมตริกซ์

ขนาด 3×3 ดังแสดงในสมการ (4.36) ข้างล่าง

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(\gamma-3)u^2}{2} & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{(\gamma-2)u^3}{2} - \frac{a^2u}{\gamma-1} & \frac{(3-2\gamma)u^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

โดย a หมายถึง ความเร็วเสียง (speed of sound) ซึ่งถูกนิยามดังนี้

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\rho}} \quad (4.37)$$

และเนื่องจากระบบสมการออยเลอร์เป็นระบบสมการที่มีคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์แบบไฮเปอร์โบลิก [42,45] ดังนั้นจึงสามารถหาค่าเจาะจง (eigenvalues) และเวกเตอร์เจาะจง (eigenvectors) ของเมตริกซ์ยาโคบีดังที่ปรากฏในสมการ (4.36) ได้ดังแสดงในสมการ (4.38) และ (4.39) ตามลำดับ

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a \quad (4.38)$$

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

โดยที่ λ_i และ r_i และ $i = 1,2,3$ หมายถึง ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงตามลำดับ และจากการทดสอบพบว่า $\nabla \lambda_i \cdot r_i$ พบว่า

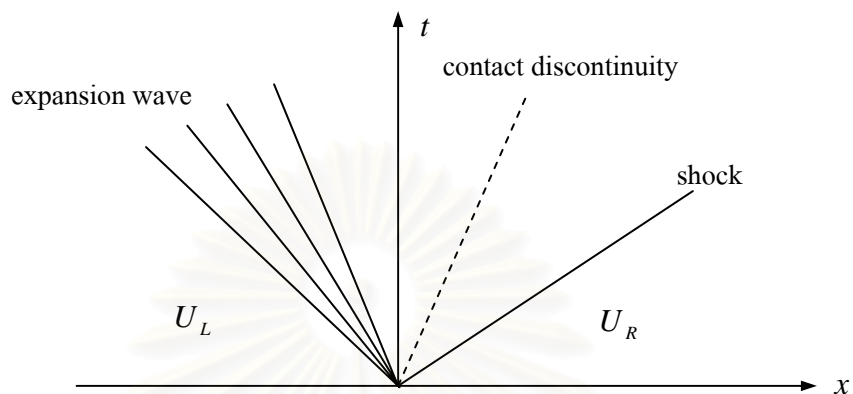
$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 \neq 0, \quad \nabla \lambda_2 \cdot r_2 = 0, \quad \nabla \lambda_3 \cdot r_3 \neq 0 \quad (4.39)$$

ดังนั้น ฟิสิกส์คุณลักษณะ λ_1 และ λ_3 จึงถูกเรียกว่า ฟิสิกส์ไม่เชิงเส้นแท้จริง (genuinely nonlinear field) ซึ่งเป็นฟิสิกส์คุณลักษณะที่เกี่ยวข้องกับคลื่นช็อกหรือคลื่นขยาย โดยขึ้นอยู่กับว่าการเปลี่ยนแปลงของ U ข้ามฟิสิกส์คุณลักษณะดังกล่าวเป็นแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่องตามลำดับ ส่วน λ_2 ถูกเรียกว่า ฟิสิกส์เชิงเส้นเสื่อมถอย (linearly degenerate field) ซึ่งเป็นฟิสิกส์คุณลักษณะที่เกี่ยวข้องกับผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง โดยในกรณีนี้ฟิสิกส์คุณลักษณะ λ_2 จะมีความเร็วเท่ากับความเร็วของผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบของความสัมพันธ์ [40,45] ได้ดังนี้

$$\lambda_2(u_L) = s = \lambda_2(u_R) \quad (4.40)$$

ดังนั้น การแก้ปัญหาของริมันน์โดยทั่วไปผลลัพธ์ที่ได้ของระบบสมการออยเลอร์ (4.32) จะเป็นดังที่ได้แสดงในรูปที่ 4.7 ซึ่งประกอบด้วยคลื่นช็อก (shock) ผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง (contact discontinuity) หรือคลื่นขยาย (expansion wave) ทั้งนี้ขึ้นกับค่าเริ่มต้นของสถานะของการไหลและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดในโดเมน โดยที่คลื่นช็อกและคลื่นขยายจะมีความสัมพันธ์กับฟิสิกส์คุณลักษณะ λ_1 และ λ_3 ส่วนผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องจะมีความสัมพันธ์กับฟิสิกส์คุณลักษณะ λ_2

และจากสมการ (4.40) จะได้ว่า u และ p จะมีค่าเท่ากันสำหรับพื้นที่ทั้งสองข้างของผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง [40]



รูปที่ 4.7 ผลลัพธ์โดยทั่วไปปัญหาของรีมันน์สำหรับระบบสมการออยเลอร์ในหนึ่งมิติ

บทที่ 5

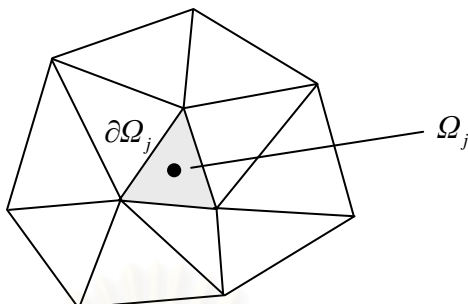
ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์

บทที่ 5 จะกล่าวถึงการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ (cell-centered finite volume method) สำหรับการแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม เนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาที่เกิดความไม่ต่อเนื่องของผลลัพธ์ได้เป็นอย่างดี และสำหรับการประมาณปริมาณฟลักซ์ที่ได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ จะใช้วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ (Roe's flux-difference splitting scheme) ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ความแม่นยำสูงโดยเฉพาะความแม่นยำของผลลัพธ์ในบริเวณที่เกิดผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง ถึงแม้ว่าวิธีดังกล่าวจะมีปัญหาด้านความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขอยู่บ้างก็ตาม และในตอนท้ายจะกล่าวถึงวิธีการคำนวณหาช่วงเวลา (time step) ที่เหมาะสม สำหรับการแก้ระบบสมการออยเลอร์ในสองมิติเชิงตัวเลขด้วยวิธีแบบชัดแจ้ง (explicit method) อย่างมีเสถียรภาพ ซึ่งเป็นส่วนที่มีความสำคัญมากสำหรับวิธีการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพราะถ้าหากกำหนดช่วงเวลาที่ไม่เหมาะสม อาจจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ไม่ถูกต้อง หรือในบางกรณีอาจจะไม่สามารถคำนวณหาผลลัพธ์ที่ต้องการได้เลย

5.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมสำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงซึ่งสามารถก่อให้เกิดความไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ของผลลัพธ์ภายในโดเมน เช่น คลื่นช็อกหรือผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง การไหลดังกล่าวถูกควบคุมโดยระบบสมการออยเลอร์ดังที่ได้แสดงด้วยสมการ (4.1) ถึง (4.3) โดยงานวิจัยนี้จะเลือกใช้วิธีเซลล์เซนเตอร์ (cell-centered method) ในการแบ่งโดเมนออกเป็นพื้นที่ขนาดเล็กที่เรียกว่า ปริมาตรควบคุม (control volume) ดังในรูปที่ 5.1 โดย Ω_j หมายถึงปริมาตรควบคุมที่ j และ $\partial\Omega_j$ หมายถึงพื้นผิวควบคุม (control surface) ของปริมาตรควบคุมที่ j สำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมพื้นผิวควบคุมประกอบด้วยด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม

การเก็บค่าสถานะการไหลสำหรับแต่ละปริมาตรควบคุม ถูกกำหนดให้เป็นค่าที่ตำแหน่งกึ่งกลางของปริมาตรควบคุม ซึ่งจะมีค่าคงที่ตลอดภายในสำหรับปริมาตรควบคุมหนึ่ง ๆ และเรียกการแบ่งโดเมนออกเป็นพื้นที่ขนาดเล็กด้วยวิธีดังกล่าวว่า การแบ่งโดเมนออกเป็นพื้นที่ขนาดเล็กที่มีความถูกต้องในอันดับหนึ่ง (first order spatial discretization) [2,45]



รูปที่ 5.1 ปริมาตรควบคุมสำหรับวิธีเซลล์เซนเตอร์

การแก้ปัญหาคาร์ไหลของระบบสมการออยเลอร์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เซลล์เซนเตอร์ [45,46] เริ่มต้นด้วยการเขียนสมการ (3.6) ให้อยู่ในรูปแบบที่กะชับ (compact form)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0 \quad (5.1)$$

โดย $F(U)$ หมายถึง เวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพ (physical flux vectors) ดังแสดงในสมการ (4.9) และ (4.10) และการประมาณสถานะของคาร์ไหลภายในแต่ละ ปริมาตรควบคุมภายใต้โดเมนสำหรับการคำนวณ Ω_j เริ่มต้นด้วยการอินทิเกรตสมการ (5.1) ภายใต้ ปริมาตรควบคุม Ω_j

$$\int_{\Omega_j} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) \right] d\Omega_j = 0 \quad (5.2)$$

จากนั้นทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของกรีนและเกาส์ (Green-Gauss theorem) เข้า กับพจน์ที่สองของสมการ (5.2) ซึ่งจะได้

$$\int_{\Omega_j} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega_j + \oint_{\partial\Omega_j} [F(U) \cdot \vec{n}] dS_j = 0 \quad (5.3)$$

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น วิธีเซลล์เซนเตอร์กำหนดให้สถานะของคาร์ไหลภายใน แต่ละปริมาตรควบคุมมีค่าคงที่ โดยมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของสถานะของคาร์ไหลภายในแต่ละ ปริมาตรควบคุมนั้น ๆ ดังนั้น การประมาณค่าสถานะของคาร์ไหลภายในแต่ละปริมาตรควบคุม สามารถกระทำได้ด้วยการหาค่าเฉลี่ยจากการอินทิเกรตตลอดทั้งปริมาตรควบคุม

$$\bar{U}_j = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j \quad (5.4)$$

จากนั้นทำการแทนค่าสมการ (5.4) ลงในสมการ (5.3) และจัดรูปเสียใหม่ได้เป็น

$$\frac{d\bar{U}_j}{dt} = -\frac{1}{\Omega_j} \oint_{\partial\Omega_j} [F(U) \cdot \bar{n}] dS_j \quad (5.5)$$

เนื่องจากพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (5.5) เป็นการคำนวณปริมาณการไหลของฟลักซ์ผ่านพื้นผิวควบคุม $\partial\Omega_j$ ของปริมาตรควบคุม Ω_j ซึ่งในทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถที่จะประมาณปริมาณการไหลของฟลักซ์ดังกล่าวด้วยการรวม (การบวก) ปริมาณการไหลของฟลักซ์ผ่านด้านทั้งหมดของปริมาตรควบคุมเข้าด้วยกัน ดังนี้

$$\frac{d\bar{U}_j}{dt} = -\frac{1}{\Omega_j} \sum_{l=1}^{N_j} [F(U) \cdot \bar{n}] \Delta S_j^l \quad (5.6)$$

โดย N_j หมายถึงจำนวนด้านทั้งหมดของปริมาตรควบคุม สำหรับกรณีของการแบ่งโดเมนด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในสองมิติ N_j ต้องมีค่าเท่ากับ 3 เสมอ และ ΔS_j^l หมายถึงความยาวของด้านของปริมาตรควบคุม j ที่อยู่ติดกับปริมาตรควบคุม l (ปริมาตรควบคุมทั้งหมดที่ล้อมรอบปริมาตรควบคุม j)

การประมาณพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (5.6) โดยทั่วไปจะใช้วิธีการแบ่งแยกเวลาแบบชัดแจ้งของออยเลอร์ (explicit Euler method) และจัดพจน์ใหม่ก็จะได้สมการสำหรับการคำนวณสถานะของการไหลสำหรับปริมาตรควบคุม Ω_j ดังนี้

$$\frac{\Delta \bar{U}_j}{\Delta t} = -\frac{1}{\Omega_j} \sum_{l=1}^{N_j} [F(U) \cdot \bar{n}] \Delta S_j^l \quad (5.7)$$

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Omega_j} \sum_{l=1}^{N_j} [F(U) \cdot \bar{n}] \Delta S_j^l \quad (5.8)$$

โดยที่ $\Delta \bar{U}_j = \bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n$ ส่วน \bar{U}_j^{n+1} และ \bar{U}_j^n หมายถึง สถานะของการไหลสำหรับปริมาตรควบคุม Ω_j ณ เวลาในอนาคต $n+1$ และเวลาปัจจุบัน n ตามลำดับ สำหรับขั้นตอนต่อไปของการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ เป็นการประมาณปริมาณฟลักซ์ $[F(U) \cdot \bar{n}]$ ของสมการ (5.8) ซึ่งมีอยู่ด้วยกันหลากหลายวิธี [45] สำหรับในงานวิจัยนี้จะเลือกใช้ระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ ดังจะได้กล่าวรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

5.2 วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์

วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์เป็นวิธีที่ได้รับการยอมรับกันมากจนถึงปัจจุบัน เพราะสามารถให้ผลลัพธ์การคำนวณที่แม่นยำโดยเฉพาะในส่วนผลต่างของผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง นอกจากนี้ยังเป็นวิธีที่สามารถพิสูจน์และอธิบายด้วยความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่ชัดเจน ถึงแม้ว่าวิธีดังกล่าวจะมีปัญหาด้านความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขสำหรับบางปัญหาอยู่บ้างก็ตาม [33,34,47,48] เมื่อพิจารณาสมการ (5.8) พบว่าพจน์ทางขวามือของสมการซึ่งอธิบายปริมาณการไหลของฟลักซ์ผ่านด้านทั้งหมดของปริมาตรควบคุม และเป็นพจน์ที่ต้องทำการประมาณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้สามารถทำการคำนวณสถานะของการไหลสำหรับปริมาตรควบคุม Ω_j ที่เวลาในอนาคต $n+1$ ซึ่งการคำนวณพจน์ดังกล่าวสามารถกระทำได้ด้วยการประมาณปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพ $F(U)$ ด้วยปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข $F(U)$ โดยโกดุนอฟ (Godunov) [49] เป็นนักวิจัยท่านแรกที่น่าเสนอวิธีการคำนวณปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขดังกล่าวด้วยการแก้ปัญหของริมันน์ที่พื้นผิวควบคุมระหว่างสองปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน

การแก้ปัญหของริมันน์สำหรับระบบสมการออยเลอร์ด้วยวิธีของโกดุนอฟ ไม่เป็นที่นิยมมากนัก เพราะการคำนวณปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขแบบแม่นยำตรงต้องใช้เวลาในการประมวลผลมาก และระบบสมการออยเลอร์เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรง ดังนั้นในช่วงเวลาต่อ ๆ มาจึงมีนักวิจัยท่านอื่นได้นำเสนอการแก้ปัญหของริมันน์สำหรับระบบสมการออยเลอร์แบบประมาณค่า (approximate Riemann solver) เช่น โรว์ [4] ได้นำเสนอวิธีการคำนวณปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขแบบแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ เป็นต้น วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์เริ่มต้นด้วยการเขียนสมการ (5.1) ในรูปแบบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกึ่งเชิงเส้นตรง (quasi-linear form) เช่น

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)(\nabla \cdot U) = 0 \quad (5.9)$$

โดย $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$ หมายถึง เมตริกซ์ยาโคบี (Jacobian matrix) สำหรับวิธีแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์จะถูกนำมาประยุกต์เข้ากับเมตริกซ์ยาโคบี และต่อไปจะเขียนแทนเมตริกซ์ดังกล่าวสำหรับการประมาณของโรว์ (Roe's approximation) ด้วยสัญลักษณ์ \tilde{A}

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U_L, U_R)(\nabla \cdot U) = 0 \quad (5.10)$$

โดยเมตริกซ์ยาโคบีของโรว์ \tilde{A} ต้องมีคุณสมบัติ [4] ดังต่อไปนี้

1. $\tilde{A}(U, U) = A(U)$ โดยที่ $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$ หมายถึง เมตริกซ์ยาโคบี
2. $\tilde{A}(U_L, U_R)$ ต้องมีค่าเฉพาะ (eigenvalues) ที่เป็นตัวเลขจำนวนจริงเท่านั้น และเวกเตอร์เฉพาะ (eigenvectors) ที่มีความอิสระต่อกันสำหรับทุกค่าของ U_L และ U_R
3. ความสัมพันธ์เชิงเอกลักษณ์ดังแสดงในสมการ (5.11) ข้างล่างต้องเป็นจริงเสมอสำหรับบางค่าของ U_L และ U_R

$$\tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (5.11)$$

เมื่อเปรียบเทียบระหว่างพิจารณาสมการ (5.3) และ (5.10) จะเห็นว่าเมื่อทำการอินทิเกรตสมการ (5.10) ตลอดทั้งโดเมน และประยุกต์ทฤษฎีบทของกรีนและเกาส์เข้ากับพจน์ที่สองของสมการดังกล่าวก็จะได้สมการ (5.3) แสดงว่าสมการทั้งสองมีความสอดคล้องกัน และเมื่อเปรียบเทียบสมการ (5.8) และ (5.10) ปริมาณฟลักซ์ตั้งฉากกับขอบของปริมาตรควบคุม F_n สามารถเขียนในรูปแบบของฟลักซ์ยาโคบี ดังนี้

$$F_n = F(U) \cdot \vec{n} = A(U) \cdot U \quad (5.12)$$

และปริมาณฟลักซ์ตั้งฉากเชิงตัวเลข F_n ถูกกำหนดโดย

$$F_n = \tilde{A}(U_L, U_R) \cdot U \quad (5.13)$$

สำหรับปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขตั้งฉากกับขอบของปริมาตรควบคุม F_n ของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ [4,45,46] สามารถเขียนในรูปแบบของสมการ (5.14) ดังแสดงข้างล่าง

$$F_n = \frac{1}{2} [F_n(U_L) + F_n(U_R) - \tilde{A}(U_R - U_L)] \quad (5.14)$$

โดย \tilde{A} หมายถึงเมตริกซ์ของค่าการกระจายของโรว์ (dissipation matrix) ซึ่งเมตริกซ์ของค่าการกระจายดังกล่าว สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ของค่าเฉพาะและเมตริกซ์ของเวกเตอร์เฉพาะ เช่น

$$\tilde{A} = \tilde{R}\tilde{\Lambda}\tilde{R}^{-1} \quad (5.15)$$

$$|\tilde{A}| = \tilde{R}|\tilde{\Lambda}|\tilde{R}^{-1} \quad (5.16)$$

โดย \tilde{R} หมายถึง เมตริกซ์ของเวกเตอร์เจาะจงด้านขวา (right eigenvector matrix) และ $\tilde{\Lambda}$ หมายถึง เมตริกซ์ของค่าเจาะจง (eigenvalue matrix) ดังนี้

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \\ \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_3 \\ \tilde{\lambda}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_n - \tilde{a} \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{V}_n \\ \tilde{V}_n + \tilde{a} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

โดย \tilde{V}_n หมายถึง ค่าความเร็วตั้งฉากกับขอบของปริมาตรควบคุม และ \tilde{a} หมายถึง ค่าความเร็วเสียง (sound speed) เมื่อทำการแทนค่าสมการ (5.16) ลงในสมการ (5.14) และกำหนดให้ค่าความแข็งแรงของคลื่น (wave strength, α) ถูกนิยามโดยการคูณเมตริกซ์ของเวกเตอร์เจาะจงด้านซ้าย (left eigenvector matrix) เข้ากับค่าของผลต่างของสถานะของการไหล $\alpha = \tilde{R}^{-1}(U_R - U_L)$ และทำการจัดเรียงพจน์ใหม่ ดังเช่น

$$F_n = \frac{1}{2} [F_n(U_L) + F_n(U_R) - \tilde{R}|\tilde{\Lambda}|\tilde{R}^{-1}(U_R - U_L)] \quad (5.18)$$

$$F_n = \frac{1}{2} [F_n(U_L) + F_n(U_R) - \tilde{R}|\tilde{\Lambda}|\alpha] \quad (5.19)$$

สำหรับปัญหาการไหลในสองมิติที่ถูกควบคุมด้วยระบบสมการออยเลอร์ อันประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์ในแนวแกน x สมการอนุรักษ์ในแนวแกน y และ สมการอนุรักษ์พลังงาน โดยค่าของ α และ \tilde{R} เป็นดังนี้

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{a}\Delta V_n}{2\tilde{a}^2} \\ \frac{\tilde{\rho}\Delta V_t}{\tilde{a}} \\ \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \\ \frac{\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{a}\Delta V_n}{2\tilde{a}^2} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \tilde{u} - n_x \tilde{a} & n_y \tilde{a} & \tilde{u} & \tilde{u} + n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} - n_y \tilde{a} & n_x \tilde{a} & \tilde{v} & \tilde{v} + n_y \tilde{a} \\ \tilde{H} - \tilde{a} \tilde{u} & \tilde{V}_t \tilde{a} & 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) & \tilde{H} + \tilde{a} \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

โดย \tilde{V}_t หมายถึง ค่าความเร็วขนานกับพื้นผิวควบคุม ส่วน n_x และ n_y หมายถึง เวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในแนวแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับสมการ (5.19) ยังสามารถเขียน ในรูปแบบขององค์ประกอบทั้งสี่ของค่าเฉลี่ยสำหรับสมการออยเลอร์ในสองมิติได้ดังนี้

$$F_n = \frac{1}{2} [F_n(U_L) + F_n(U_R)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \alpha_k |\tilde{\lambda}_k| \tilde{r}_k \quad (5.22)$$

โดย α_k หมายถึง ค่าความแข็งแรงของคลื่น k , $\tilde{\lambda}_k$ หมายถึงค่าเฉลี่ยของคลื่น k และ r_k หมายถึงเวกเตอร์เฉลี่ยด้านขวาที่สัมพันธ์กับค่าเฉลี่ย $\tilde{\lambda}_k$ ของคลื่น k

สำหรับปริมาณที่มีเครื่องหมาย $\tilde{\circ}$ ด้านบน หมายถึง ค่าเฉลี่ยปริมาณสถานะการไหลของโรว (Roe-averaged state) ดังนี้

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (5.23)$$

$$\tilde{u} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (5.24)$$

$$\tilde{v} = \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (5.25)$$

$$\tilde{H} = \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (5.26)$$

$$\tilde{a}^2 = (\gamma - 1) \left[\tilde{H} - \frac{1}{2} (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \right] \quad (5.27)$$

5.3 การกำหนดช่วงเวลา

ในทางทฤษฎีการใช้สมการ (5.8) สำหรับการแก้ระบบสมการออยเลอร์ในสองมิติเชิงตัวเลขด้วยวิธีแบบชัดแจ้ง (explicit method) จะมีความเสถียรเมื่อช่วงเวลา (time step) มีค่าน้อยกว่าค่าคงที่หนึ่ง ๆ เท่านั้น [50] โดยเงื่อนไขของการกำหนดช่วงเวลาสำหรับการคำนวณที่มีเสถียร

เรียกว่า เงื่อนไข CFL (CFL condition) แต่ก่อนจะกล่าวถึงวิธีการกำหนดช่วงเวลาขอลกลับมาพิจารณาการอนุรักษสเกลาร์อีกครั้ง และกำหนดให้ปริมาณฟลักซ์ $f(u)$ ของสมการ (4.20) เป็นปริมาณฟลักซ์เชิงเส้นตรง $f(u) = au$ โดยที่ a เป็นตัวเลขค่าคงที่ใด ๆ เมื่อแทนค่า $f(u)$ ลงในสมการ (4.20) ก็จะได้สมการ (5.28) ซึ่งเรียกว่า สมการการพาเชิงเส้นตรง (linear advection equation) ในหนึ่งมิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.28)$$

โดย u หมายถึง ตัวแปรไม่ทราบค่าของสมการ และ a หมายถึง ค่าความเร็วของการพาในแนวแกน x สำหรับในที่นี้กำหนดให้มีค่าคงที่มากกว่าศูนย์ และกำหนดให้โดเมนสำหรับการคำนวณอยู่ภายใต้เงื่อนไข $(x, t) \in [\mathcal{R} \times \mathcal{R}^+]$ และมีเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (5.29)$$

ผลลัพธ์แม่นยำตรงของสมการ (3.39) สำหรับเงื่อนไข $t \geq 0$ [42] คือ

$$u(x, t) = u_0(x - at) \quad (5.30)$$

เมื่อพิจารณาจากสมการ (5.28) ข้างต้น เราสามารถเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) อย่างง่าย ถ้าหากสมมติว่า a ถูกนิยามให้มีค่าเท่ากับความเร็ว ดังนี้

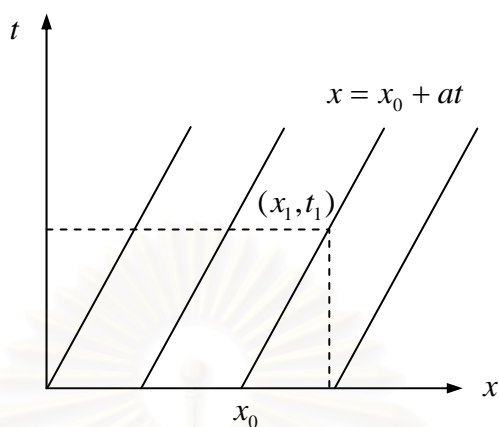
$$a = \frac{dx}{dt} \quad (5.31)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (5.31) ลงในสมการ (5.28) ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เช่น

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (5.32)$$

เส้นตรง $x = x(t)$ ที่สอดคล้องกับสมการ (5.31) ในระนาบ $x-t$ เรียกว่า เส้นคุณลักษณะ (characteristic curve) [42] เพื่อให้ง่ายต่อการแสดงผลสมการ (5.28) ในระนาบ $x-t$ สมมติให้ตำแหน่ง x เมื่อเวลาเริ่มต้น ($t_0 = 0$) มีค่าเท่ากับ x_0 และทำการอินทิเกรตสมการ (5.31) ภายในโดเมน $[(x_0, x) \times (0, t)]$ จะได้สมการเส้นคุณลักษณะผ่านจุด $(x_0, 0)$ ในระนาบ $x-t$ ดังแสดงในรูปที่ 5.2

$$x = x_0 + at \quad (5.33)$$



รูปที่ 5.2 เส้นคุณลักษณะผ่านจุด $(x_0, 0)$

เมื่อพิจารณารูปที่ 5.2 อีกครั้ง โดยสมมติว่าเมื่อเวลาผ่านไป ($t_1 > 0$) ผลลัพธ์ที่ตำแหน่ง (x_1, t_1) จะเป็นผลลัพธ์อันเนื่องมาจากเงื่อนไขเริ่มต้นดังที่กำหนดในสมการ (5.30) เพราะเป็นผลลัพธ์บนจุดที่อยู่บนเส้นคุณลักษณะผ่านจุด $(x_0, 0)$ ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้น ณ ตำแหน่งอื่น ๆ นอกเหนือจากตำแหน่ง x_0 จะไม่มีผลใด ๆ ต่อการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่ตำแหน่ง (x_1, t_1) ดังนั้นตำแหน่ง x_0 ที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่ตำแหน่ง (x_1, t_1) เรียกว่า โดเมนของการมีผลต่อกัน (domain of dependence)

$$\Omega(x_1, t_1) = \{x_0\} \quad (5.34)$$

สำหรับโดเมนของการมีผลต่อกันข้างต้น จะเป็นช่วงที่มีขอบเขตจำกัดอันเป็นผลมาจากการที่ค่าความเร็วของการพาที่แตกต่างกันของแต่ละสมการ ซึ่งอาจจะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าศูนย์ก็ได้ ดังนั้นสมการ (5.34) สามารถที่จะเขียนในรูปแบบสำหรับระบบสมการโดยทั่วไป ดังนี้

$$\Omega(x_1, t_1) = \{x : |x - x_1| \leq a_{\max} t_1\} \quad (5.35)$$

สำหรับระบบสมการออยเลอร์นั้น ค่าความเร็วที่มากที่สุด (a_{\max}) ใช้ในการประมาณช่วงเวลาจะใช้ค่าตัวเลขมากที่สุดของค่าเจาะจงดังที่กำหนดในสมการ (5.17) ดังนั้นเมื่อทำการเปรียบเทียบกับสมการ (5.35) การกำหนดช่วงเวลาของแต่ละปริมาตรควบคุม Ω สำหรับสมการ (5.8) จึงสามารถเขียนในรูปแบบดังนี้ [51]

$$\Delta t_j = \sigma \frac{\Omega_j}{(|u|+a)\Delta S_j^x + (|v|+a)\Delta S_j^y} \quad (5.36)$$

โดยที่ σ หมายถึง ตัวเลขคอแรนท์ (Courant number) สำหรับปัญหาโดยทั่วไป มักจะมีค่าน้อยกว่า 1 เสมอ ส่วน ΔS_j^x และ ΔS_j^y หมายถึง ขนาดความยาวพื้นผิวควบคุมทั้งสาม ด้านของปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม เมื่อทำการฉายไปยังระนาบตั้งฉากกับแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$\Delta S_j^x = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 |S_j^x \cdot \bar{n}_j| \quad (5.37)$$

$$\Delta S_j^y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 |S_j^y \cdot \bar{n}_j| \quad (5.38)$$

จากการทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ พบว่า ถึงแม้ว่าการคำนวณหาค่าช่วงเวลาที่เหมาะสมสำหรับแต่ละปริมาตรควบคุม Δt_j ด้วยสมการ (5.36) สามารถทำให้เกิดความมีเสถียรภาพกับการแก้ระบบสมการ (5.8) ก็ตาม แต่ช่วงเวลาที่ได้อาจมีค่าน้อยเกินไปเพราะค่าตัวเลขคอแรนท์มักมีค่าน้อยกว่า 0.5 โดยเฉพาะปัญหาที่ก่อให้เกิดการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าเสียง (subsonic) ภายในโดเมน [47,48] ดังนั้น เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าวจึงขอเสนอวิธีการคำนวณหาค่าช่วงเวลาซึ่งนำเสนอโดยลินเดอร์และโรว์ (Linde and Roe) [52] ซึ่งมีวิธีการคำนวณคล้าย ๆ กับสมการ (5.36) แต่จะแยกการพิจารณาตัวหารในทิศทางตั้งฉากกับทุก ๆ พื้นผิวควบคุม โดยสมการ (5.39) ได้ถูกแก้ไขจากที่ปรากฏใน [52] เล็กน้อย ดังนี้

$$\Delta t_j = \sigma \frac{\Omega_j}{\sum_{l=1}^{N_j} \max(|\bar{V}_{nj}| + a_j, |\bar{V}_{nl}| + a_l) \Delta S_j^l} \quad (5.39)$$

โดยที่ \bar{V}_{nj} และ \bar{V}_{nl} หมายถึง ความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับปริมาตรควบคุม j และ ปริมาตรควบคุมที่มีพื้นผิวควบคุมร่วมกับ j (ปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน) ตามลำดับ ส่วน a_j และ a_l หมายถึง ความเร็วเสียงในปริมาตรควบคุม j และปริมาตรควบคุมที่มีพื้นผิวควบคุมร่วมกับ j ตามลำดับ และจากการทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ พบว่า ช่วงเวลาที่คำนวณได้จากสมการ (5.39) สามารถทำให้เกิดความมีเสถียรภาพกับการแก้ระบบสมการ (5.8) ดีกว่าช่วงเวลาที่คำนวณได้จากสมการ (5.36) [33,34]

บทที่ 6

ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์

บทที่ 6 จะกล่าวถึงผลของการศึกษาปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ (Roe's flux-difference splitting scheme) จากนั้นจะนำเสนอการทดสอบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์กับปัญหาต่าง ๆ ที่สามารถก่อให้เกิดความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข และทดลองนำวิธีการแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขซึ่งถูกนำเสนอโดยนักวิจัยหลาย ๆ ท่าน [9,37,38] มาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมและทำการทดสอบประสิทธิภาพกับปัญหาต่าง ๆ พร้อมทั้งชี้ให้เห็นข้อบกพร่องของวิธีเหล่านี้ จากนั้นจึงทำการนำเสนอวิธีการแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขรูปแบบใหม่ที่มีประสิทธิภาพมากกว่าและสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาค่าต่าง ๆ ได้หลากหลายกว่า และในตอนท้ายก็จะเป็นการวิเคราะห์ห้วิธีการแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขรูปแบบใหม่ที่ถูกนำเสนอในงานวิจัยนี้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

6.1 ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์

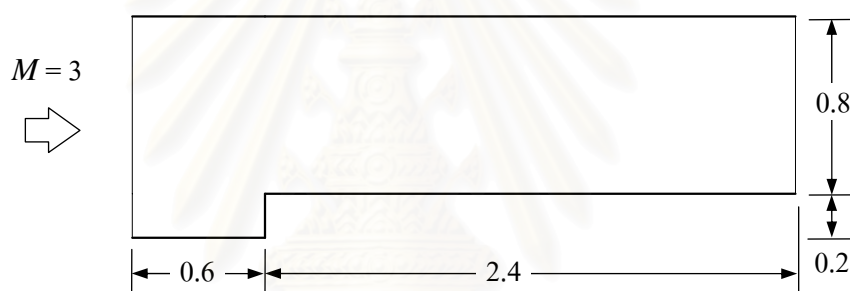
สำหรับในหัวข้อนี้จะนำเสนอตัวอย่างของความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ เมื่อนำมาใช้แก้ปัญหาค่าไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงทั้งในสถานะคงตัวและสถานะไม่คงตัวในสองมิติ โดยตัวอย่างปัญหาที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้เป็นการรวบรวมจากงานวิจัยในบทความต่าง ๆ ซึ่งพบว่าปัญหาดังกล่าวสามารถก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ที่ไม่เป็นความจริง โดยทั่วไปความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกเป็นความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติหรือผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของแกล็กซ์ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 [4,7,9,33,34,43,47,48] โดยจะก่อให้เกิดความเป็นไปได้ใน 2 กรณี กรณีแรกเกิดคลื่นช็อกขยาย (expansion shock) หรือกรณีที่สองกระบวนการแก้ปัญหาลู่ออก (diverge) และทำให้สถานะของการไหล เช่น ค่าความหนาแน่นหรือค่าความดันน้อยกว่าศูนย์ เป็นต้น กลุ่มที่สองเป็นความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติแต่ยังคงเป็นไปตามเงื่อนไขของแกล็กซ์ [8,11,24,33,34,37,38,47,48] เช่น การเกิดปรากฏการณ์โป่งนูน (carbuncle phenomena) [6] เป็นต้น ดังนั้นตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาในงานวิจัยนี้ จึงเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็น

เห็นถึงความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักร์ของ โรว้ทั้งสองกลุ่มข้างต้น

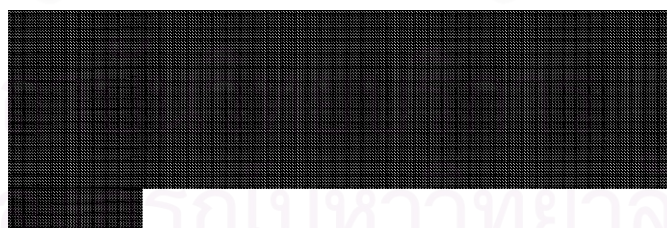
6.1.1 ปัญหาการไหลความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน

รูปที่ 6.1 แสดงปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่า (หมายเลขมักเท่ากับ 3) ผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน (Mach 3 flow past a forward facing step) [53] โดยหมายเลขมัก M ได้ถูกนิยามดังนี้

$$M = \frac{|\vec{V}|}{a} \quad (6.1)$$



รูปที่ 6.1 ปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน



รูปที่ 6.2 ตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบของปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน

รูปที่ 6.2 แสดงตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบที่ใช้ในการคำนวณ และรูปที่ 6.3 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่น (density contour) [34] ซึ่งจะเห็นว่าเกิดคลื่นช็อกขยาย (expansion shock) เป็นเส้นตรงแนวตั้งและแนวเฉียงไปทางขวามือ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นจากมุมบนของพื้นระนาบ

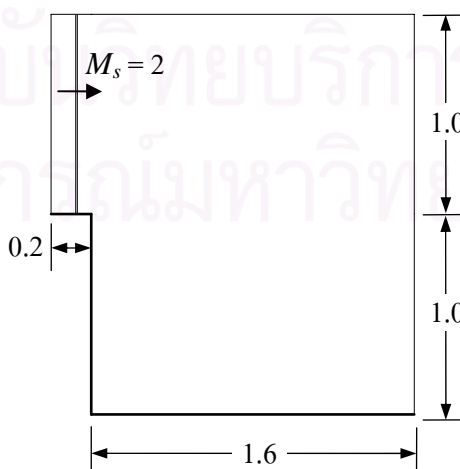
ด้านล่างของช่องแคบแทนที่จะเป็นคลื่นขยาย (expansion wave) ในบริเวณดังกล่าว แสดงว่าเกิดความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติและไม่เป็นไปตามเงื่อนไขของโทรปีของแล็กซ์



รูปที่ 6.3 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน

6.1.2 ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90° (Diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner) [47,48] ได้ถูกแสดงในรูปที่ 6.4 โดยกำหนดให้คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) หมายเลข 2 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือ และเมื่อคลื่นช็อกตั้งฉากเคลื่อนที่ผ่านมุมหักลงด้านล่าง 90° องศา ก็จะเกิดการกระจายของคลื่นช็อกตั้งฉากตรงมุมหัก และเกิดการเปลี่ยนรูปของคลื่นช็อกตั้งฉาก เนื่องจากเมื่อคลื่นช็อกเคลื่อนที่ผ่านมุมหักลงด้านล่าง 90° องศา ก็จะเกิดการกระจายของคลื่นอย่างรวดเร็ว จึงสามารถก่อให้เกิดปัญหาสถานะของการไหลไม่เป็นจริงได้โดยง่าย



รูปที่ 6.4 ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

รูปที่ 6.5 แสดงตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบที่ใช้ในการคำนวณ และรูปที่ 6.6 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของตำแหน่งสุดท้ายของคลื่นช็อก ก่อนที่กระบวนการแก้ปัญหาจะออก (diverge) และทำให้สถานะของการไหล เช่น ค่าความหนาแน่นหรือค่าความดันน้อยกว่าศูนย์ เนื่องจากพลังงานจลน์ที่คำนวณจากสมการอนุพันธ์โมเมนต์มีค่ามากกว่าพลังงานรวมที่คำนวณจากสมการอนุพันธ์พลังงาน [7]



รูปที่ 6.5 ตาข่ายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบของปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

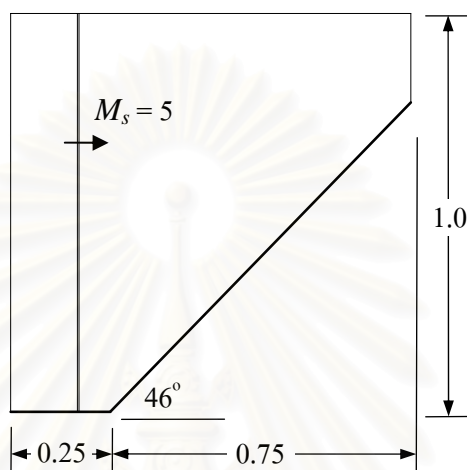


รูปที่ 6.6 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

6.1.3 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลข 5 ผ่านพื้นยกระดับมุม 46°

ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลข 5 ผ่านพื้นยกระดับมุม 46° (Reflection of a Mach 5 shock over a 46° ramp) [47,48] ได้ถูกแสดงในรูปที่ 6.7 โดยกำหนดให้

คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) หมายเลขมัด 5 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือ และเมื่อคลื่นช็อกเคลื่อนที่ผ่านพื้นยกระดัดก็จะเกิดปรากฏการณ์การสะท้อนและเกิดจุดที่ช็อก 3 ก้านมารวมกัน (triple points) โดยก้านมัด (Mach stem) จะตกกระทบและทำมุมตั้งฉากกับพื้นยกระดัด [54] เสมอ



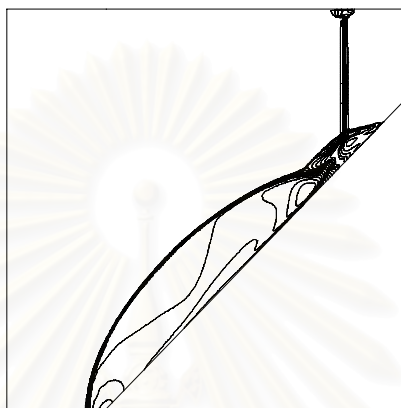
รูปที่ 6.7 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้นยกระดัดมุม 46°



รูปที่ 6.8 ค่าขายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบของปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัด 5 ผ่านพื้นยกระดัดมุม 46°

รูปที่ 6.8 แสดงค่าขายสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบที่ใช้ในการคำนวณ และรูปที่ 6.9 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่น ซึ่งจะเห็นว่าก้านมัดเกิดการโค้งตัวไปด้านหน้า ซึ่งปรากฏการณ์ดังกล่าวเรียกว่า Kinked Mach stem [8] และคลื่นช็อกตกกระทบ (incident shock) ซึ่งแสดงในลักษณะของคลื่นช็อกตั้งฉากในแนวตั้ง เกิดการแตกกระจายบริเวณด้านบนของคลื่นช็อกตกกระทบ

ทั้งนี้เนื่องจากปริมาณการกระจาย (dissipation) ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ไม่เพียงพอที่จะลดผลกระทบของการถูกรบกวนในแนวขวาง (transverse perturbation) [8,11] ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขที่เกิดขึ้นเป็นส่วนหนึ่งของปรากฏการณ์ไปงนู่น ซึ่งผลลัพธ์การคำนวณยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขของโทรปีของแล็กซ์

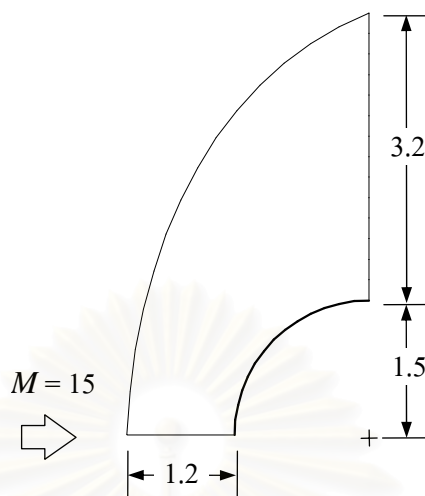


รูปที่ 6.9 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลขมัก 5 ผ่านพื้นยกระดุมมุม 46°

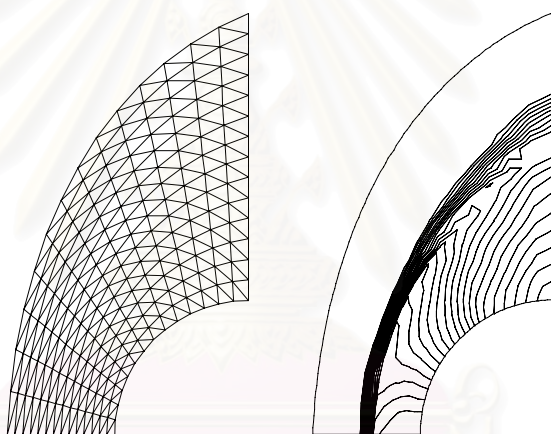
6.1.4 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัก 15 ผ่านทรงกระบอก

ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัก 15 ผ่านทรงกระบอก (Mach 15 flow past a cylinder) [47,48] เป็นปัญหาที่มีความสมมาตร ดังนั้นในตัวอย่างนี้จึงนำเอาเพียงหนึ่งในสี่ของโดเมนมาใช้ในการทดลองดังปรากฏในรูปที่ 6.10 โดยกำหนดให้คลื่นช็อกหมายเลขมัก 15 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามืออดกระทบบทงกระบอก ซึ่งก่อให้เกิดช็อกโค้ง (bow shock) บริเวณด้านหน้าของทรงกระบอก และเส้นช็อกตั้งตั้งฉากกับแนวเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอก ซึ่งเรียกแนวดังกล่าวว่า เส้นหยุดนิ่ง (stagnation line) [38]

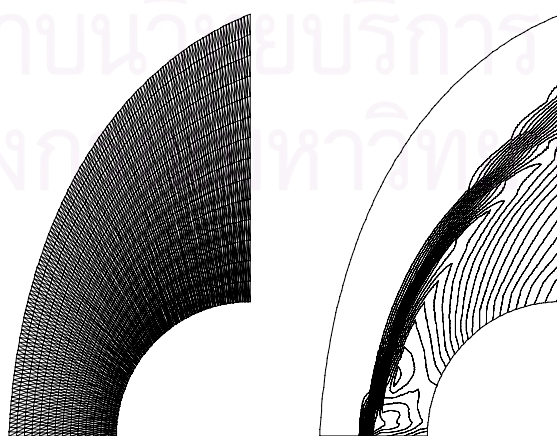
เนื่องจากปรากฏการณ์ไปงนู่นสำหรับปัญหานี้ เป็นปรากฏการณ์ที่ขึ้นกับอัตราส่วนขนาดของปริมาตรควบคุม (aspect ratio) [11,38] ดังนั้นจึงทำการทดสอบปัญหาโดยการสร้างปริมาตรควบคุมภายในโดเมน 3 ขนาดด้วยกัน รูปที่ 6.11 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นกรณีทีโดเมนถูกแบ่งออกเป็น 15×15 จุดต่อ ตามแนวแกนรัศมีและแนวแกนสัมผัสผิวทรงกระบอกตามลำดับ ส่วนรูปที่ 6.12 และ 6.13 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นกรณีทีโดเมนถูกแบ่งออกเป็น 15×90 จุดต่อ และ 15×280 จุดต่อตามลำดับ ทั้งนี้เพื่อให้เห็นถึงผลกระทบของอัตราส่วนขนาดของปริมาตรควบคุมที่มีต่อการเกิดปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข



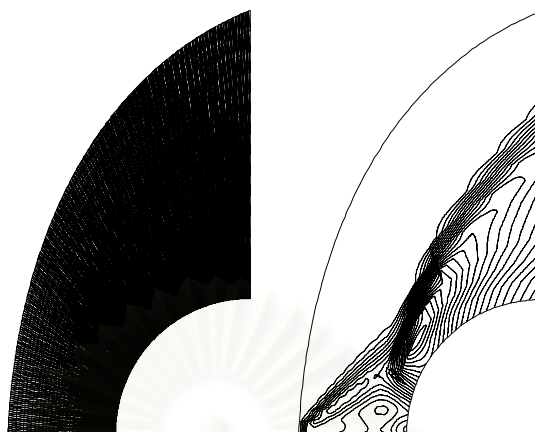
รูปที่ 6.10 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านทรงกระบอก



รูปที่ 6.11 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านท่อทรงกระบอก: 15 × 15 จุดต่อ



รูปที่ 6.12 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมัด 15 ผ่านท่อทรงกระบอก: 15 × 90 จุดต่อ



รูปที่ 6.13 ปัญหาการไหลที่หมายเลขมีด 15 ผ่านท่อทรงกระบอก: 15×280 จุดต่อ

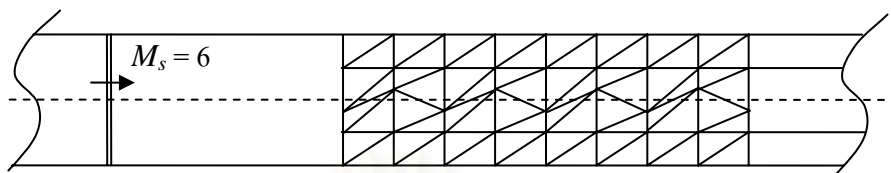
เมื่อสังเกตบริเวณด้านหน้าของทรงกระบอกโดยเฉพาะใกล้บริเวณเส้นหยุดนิ่ง (แนวสมมาตรของทรงกระบอก) พบว่า ในกรณีของ 15×15 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 6.11 คลื่นช็อกโค้งมีลักษณะเป็นไปตามผลการทดลองและคลื่นช็อกโค้งตั้งฉากกับแนวเส้นหยุดนิ่งของทรงกระบอก ส่วนกรณีของ 15×90 จุดต่อ ปรากฏว่าคลื่นช็อกบริเวณใกล้ ๆ แนวเส้นหยุดนิ่งของทรงกระบอกเริ่มที่จะเคลื่อนตัวมาทางด้านซ้ายมือ และปรากฏการณ์ดังกล่าวแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนในกรณีของ 15×280 จุดต่อ ซึ่งลักษณะการเกิดคลื่นช็อกดังกล่าวเรียกว่าปรากฏการณ์โป่งนูน [6] เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับอัตราส่วนขนาดของปริมาตรควบคุม พบว่าปรากฏการณ์โป่งนูนปรากฏได้โดยง่ายถ้าหากปริมาตรควบคุมมีขนาดความยาวตามแนวแกนรัศมี มากกว่าความยาวตามแนวแกนสัมผัสผิวทรงกระบอก [34]

6.1.5 ปัญหาทดสอบของเควิร์ก

ปัญหาทดสอบของเควิร์ก (Quirk's test problem) [8] เป็นปัญหาที่ได้รับยอมรับสำหรับการทดสอบความถูกต้องและความมีเสถียรภาพของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับใช้แก้ไขปัญหาของระบบสมการออยเลอร์ ภายใต้สภาพของการจำลองเหตุการณ์ที่กำหนดให้ค่าตัวแปรสถานะของการไหลถูกรบกวน (odd-even grid perturbation) และมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย โดยกำหนดโดเมนรูปสี่เหลี่ยมอัตราส่วนเท่ากับ 40:1 ($x:y$) แล้วแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์จำนวน 800 และ 20 ตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ และตลอดแนวกึ่งกลางของโดเมนตลอดแนวแกน x จะถูกปรับตำแหน่งขึ้นและลงตามแนวแกน y ตามสมการ (6.2)

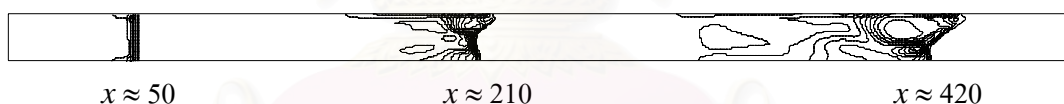
$$y_{i,j}^{\text{new}} = y_{i,j}^{\text{old}} + (-1)^i \times 10^{-6} \quad (6.2)$$

จากนั้นกำหนดให้คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) ที่ความเร็วเหนือเสียง 6 เท่า เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมือมายังด้านขวามือของโดเมนดังปรากฏในรูปที่ 6.14



รูปที่ 6.14 ตัวอย่างการปรับตำแหน่งจุดต่อตามแนวกึ่งกลางโดเมน สำหรับปัญหาทดสอบของเควิร์ก

รูปที่ 6.15 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่น โดยพบว่าคลื่นช็อกตั้งฉากเริ่มมีการเปลี่ยนแปลงโดยปลายด้านบนของคลื่นช็อกตั้งฉากเริ่มมีการแตกที่ตำแหน่ง x ประมาณ 50 และเมื่อปล่อยให้คลื่นช็อกตั้งฉากเคลื่อนที่ไปเรื่อยๆ การเสียรูปของคลื่นช็อกตั้งฉากก็ยิ่งปรากฏชัดเจนมากขึ้น อันเนื่องมาจากความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์ ซึ่งเป็นอีกหนึ่งตัวอย่างของปรากฏการณ์โป่งนูน [34]



รูปที่ 6.15 เส้นชั้นความหนาแน่นสำหรับปัญหาทดสอบของเควิร์ก

6.2 การแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์

ตัวอย่างที่ได้แสดงในหัวข้อที่ 6.1 ข้างต้น เห็นได้ว่าระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์ ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขกับปัญหาบางประเภท ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการปรับปรุงประสิทธิภาพและเสถียรภาพของระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์ และภายหลังจากปัญหาดังกล่าวได้ถูกตีพิมพ์เผยแพร่ทางวารสารวิชาการ ได้มีนักวิจัยหลายท่านพยายามที่จะอธิบาย และเสนอแนะวิธีการแก้ไขปัญหาคความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขทั้งสองกรณี [7-12,22-24,33,34,37,38,47,48,55] และเพื่อความกระชับต่อไปนี้จะใช้คำย่อสำหรับการกล่าวถึงชื่อของแต่ละวิธีที่ถูกนำเสนอเพื่อแก้ไขปัญหาคความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข และได้นำมาศึกษาและทำการทดสอบในงานวิจัยฉบับนี้ ดังนี้

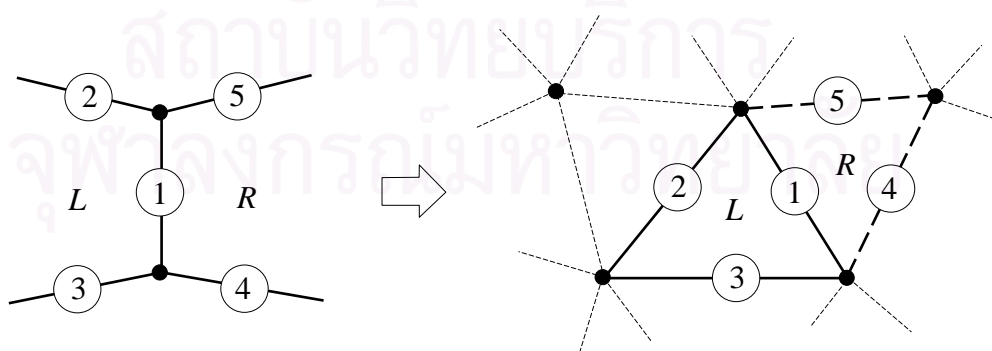
วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และวิธีการแก้ไขค่าเอนโทรปีของแวนเรียร์ (Roe's FDS with Van Leer's entropy fix method, RoeVL) [9]

วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และวิธีการเพิ่มการกระจายในหลายมิติของแซนเดอร์ส (Roe's FDS with Sanders's multidimensional dissipation method, RoeSA) [37]

วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และวิธีการเพิ่มการกระจายในหลายมิติของแพนโดลฟี (Roe's FDS with Pandolfi's multidimensional dissipation method, RoePA) [38]

วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ และวิธีการเพิ่มการกระจายในหลายมิติที่ถูกปรับปรุงของสุทธีศักดิ์ (Roe's FDS with Sutthisak's modified multidimensional dissipation method, RoeVLPA) [33,34,47,48]

เนื่องจากวิธีการแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขสำหรับวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ RoeVL, RoeSA และ RoePA ได้ถูกนำเสนอสำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสี่เหลี่ยมแบบมีระเบียบ (structured rectangular grid) ดังนั้น จึงต้องมีการแก้ไขปรับปรุงเพื่อให้สามารถนำมาใช้กับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ (unstructured triangular mesh) โดยรูปที่ 6.16 แสดงแนวคิดการแก้ไขดังกล่าว [33,34,47,48,55] โดยที่ L และ R หมายถึง ปริมาตรควบคุมด้านซ้ายและปริมาตรควบคุมด้านขวาของหน้าสัมผัสระหว่างปริมาตรควบคุม (หน้าสัมผัสหมายเลข 1) ซึ่งแนวคิดการแก้ไขที่นำเสนอนี้ ก็มาจากความรู้ในเรื่องของการแก้ปัญหาของริมันน์และระเบียบวิธีของโกคูนอฟ ซึ่งเป็นการแก้สมการ (5.14) ที่ผนังร่วมของปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน



รูปที่ 6.16 การประยุกต์ปริมาตรควบคุมรูปทรงสี่เหลี่ยมแบบมีระเบียบ มาใช้กับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ

วิธี RoeVL ได้ถูกนำเสนอเพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติและไม่เป็นไปตามเงื่อนไขเอนโทรปีของแเล็กซ์ ซึ่งมักก่อให้เกิดคลื่นช็อกขยายหรือสถานะของการไหลที่ไม่เป็นจริง ด้วยการแก้ไขค่าเจาะจงที่มีความสัมพันธ์กับคลื่นช็อกหรือคลื่นขยาย (λ_1 และ λ_4) ดังที่ได้อธิบายในบทที่ 5 ที่ผ่านมา ดังนี้

$$|\lambda_k|^* = \begin{cases} |\lambda_k| & , |\lambda_k| \geq 2\eta^{VL} \\ \frac{|\lambda_k|^2}{4\eta^{VL}} + \eta^{VL} & , |\lambda_k| < 2\eta^{VL} \end{cases} \quad (6.3)$$

โดยที่ η^{VL} หมายถึง ค่าการกระจาย (dissipation) ที่ถูกเพิ่มให้กับค่าเจาะจงที่มีค่าน้อย ๆ ซึ่งถูกกำหนดดังในสมการ (6.4)

$$\eta^{VL} = \max(\lambda_R - \lambda_L, 0) \quad (6.4)$$

วิธี RoeSA ได้ถูกนำเสนอเพื่อนำมาใช้แก้ปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติแต่ยังคงเป็นไปตามเงื่อนไขเอนโทรปีของแเล็กซ์ ซึ่งมักก่อให้เกิดปรากฏการณ์โป่งนูน ด้วยการแก้ไขค่าเจาะจงเช่นเดียวกับวิธี RoeVL แต่แทนที่จะเป็นการแก้ไขในมิติเดียววิธี RoeSA จะทำการแก้ไขด้วยค่าการกระจายที่มากที่สุดจากทุก ๆ มิติ (ในที่นี่หมายถึง 2 มิติ) และทุกพื้นผิวควบคุมของปริมาตรควบคุม L และ R แล้วจึงใช้แก้ไขค่าเจาะจงทุกตัว (λ_1 ถึง λ_4) วิธี RoeSA มีชื่อเรียกว่า การแก้ไขค่าเอนโทรปีรูปตัว H (H -correction entropy fix) [37,55] ดังนี้

$$\eta^{SA} = \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (6.5)$$

โดยที่ $\eta_i, i = 1, \dots, 5$ ถูกกำหนดโดย

$$\eta_i = \frac{1}{2} \max_k (|\lambda_{kR} - \lambda_{kL}|) \quad (6.6)$$

วิธี RoePA เป็นวิธีที่ปรับปรุงจากวิธี RoeSA ด้วยการตัด η_1 ซึ่งเป็นค่าการกระจายจากด้านร่วมของปริมาตรควบคุม L และ R ออกจากสมการ (6.5) โดยให้เหตุผลว่าด้านร่วมดังกล่าวได้ถูกนำไปใช้ในการแก้ปัญหของริมันน์แล้วในระเบียบวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ ดังนั้นจึงไม่ควรนำค่าดังกล่าวมาพิจารณาซ้ำอีกครั้ง และใช้แก้ไขเฉพาะค่าเจาะจงที่มีความสัมพันธ์กับคลื่นเอนโทรปี (entropy wave) และคลื่นเฉือน (shear wave) เท่านั้น (λ_2 และ λ_3) วิธี RoePA มี

ชื่อเรียกว่า การแก้ไขค่าเอนโทรปีรูปตัว H แบบปรับปรุง (modified H -correction entropy fix) [38,47,48] ดังนี้

$$\eta^{PA} = \max(\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (6.7)$$

โดยที่ $\eta_i, i = 2, \dots, 5$ ถูกกำหนดโดยสมการ (6.6) ข้างต้น

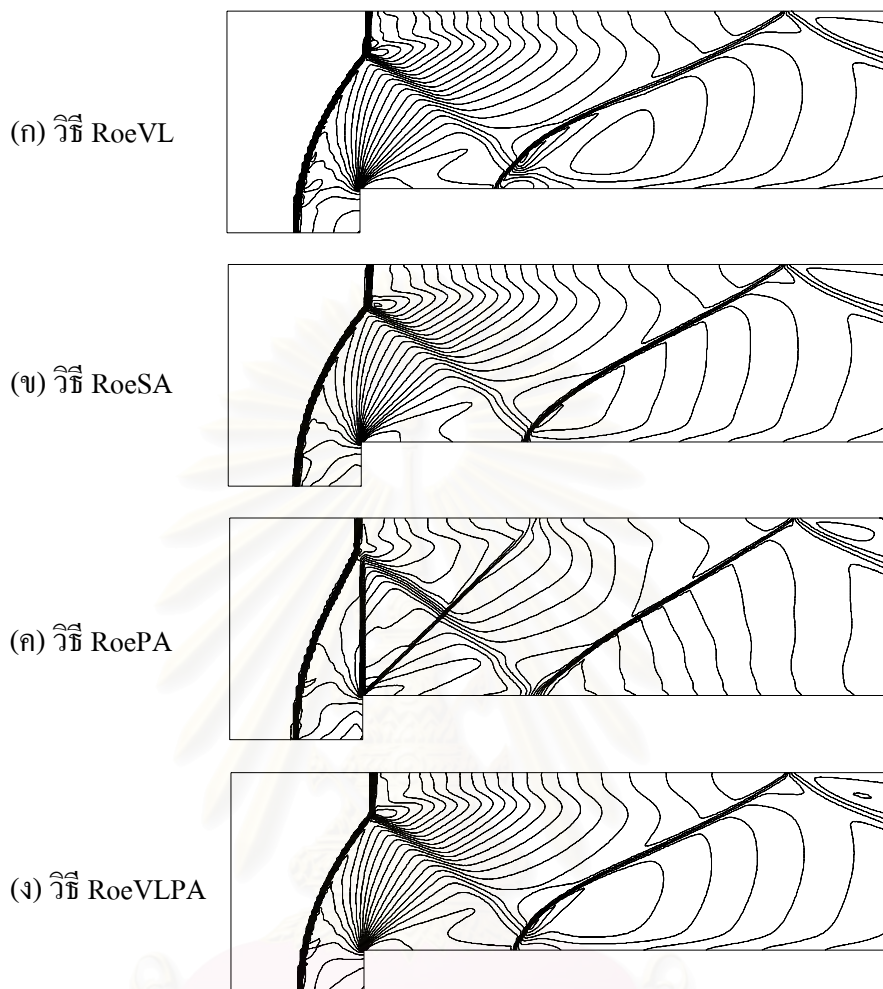
วิธี RoeVLPA เป็นวิธีที่ปรับปรุงจากวิธี RoeVL และวิธี RoePA โดยจากการทดลอง [47,48] พบว่าวิธีทั้งสามข้างต้นมีจุดแข็งและจุดอ่อนที่แตกต่างกัน โดยพบว่า วิธี RoeVL สามารถแก้ไขปัญหาค่าเอนโทรปีที่เกิดขึ้นหรือสถานะของการไหลที่ไม่เป็นจริงได้เป็นอย่างดี แต่ไม่มีผลต่อปัญหาการเกิดปรากฏการณ์ไปงนู ในทางกลับกันวิธี RoePA สามารถแก้ไขปัญหาค่าเอนโทรปีที่เกิดขึ้นหรือสถานะของการไหลที่ไม่เป็นจริง ส่วนวิธี RoeSA สามารถแก้ไขปัญหาค่าเอนโทรปีทั้งสองได้เป็นบางกรณีและไม่ประสบความสำเร็จในบางกรณี ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงขอเสนอแนะวิธีที่สามารถแก้ไขปัญหาค่าเอนโทรปีทั้งสองได้สำหรับทุก ๆ กรณีที่นำมาทดสอบ ด้วยการแยกพิจารณาวิธีการแก้ไขค่าเอนโทรปีตามพฤติกรรมของค่าเอนโทรปี ดังนี้

$$|\lambda_k| = \begin{cases} |\lambda_{1,4}| & , |\lambda_{1,4}| \geq 2\eta^{VL} \\ \frac{|\lambda_{1,4}|^2}{4\eta^{VL}} + \eta^{VL} & , |\lambda_{1,4}| < 2\eta^{VL} \\ \max(|\lambda_{2,3}|, \eta^{PA}) & \end{cases} \quad (6.8)$$

โดยที่ η^{VL} และ η^{PA} ได้ถูกกำหนดโดยสมการ (6.4) และ (6.6) ข้างต้น และเพื่อให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีดังกล่าวมาแล้วข้างต้นในการแก้ไขปัญหาค่าเอนโทรปีเชิงตัวเลข ดังนั้นจึงทำการทดสอบกับปัญหาค่าเอนโทรปีดังกล่าวมาแล้วในหัวข้อ 6.1 อีกครั้ง

6.2.1 ปัญหาการไหลความเร็วเหนือเสียง 3 เท่าผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยฉับพลัน

รูปที่ 6.17(ก) ถึง (ง) แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพธ์ที่ได้วิธี RoeVL, RoeSA, RoePA และ RoeVLPA ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าวิธี RoePA เป็นวิธีเดียวที่ไม่สามารถแก้ปัญหาค่าเอนโทรปีที่เกิดขึ้นและเมื่อกลับไปพิจารณาสมการ (6.3) ถึง (6.8) พบว่าวิธี RoePA ไม่มีการแก้ไขค่าเอนโทรปี λ_1 และ λ_4 ซึ่งเป็นค่าเอนโทรปีที่มีความสัมพันธ์กับคลื่นช็อกหรือคลื่นขยาย และจากบทที่ 5 ได้ทำการพิสูจน์ให้เห็นว่าคลื่นช็อกขยายก็มีความสัมพันธ์กับค่าเอนโทรปีดังกล่าว ดังนั้นวิธี RoePA จึงไม่สามารถแก้ปัญหาค่าเอนโทรปีที่เกิดขึ้นตามที่ปรากฏในรูปที่ 6.17(ค)

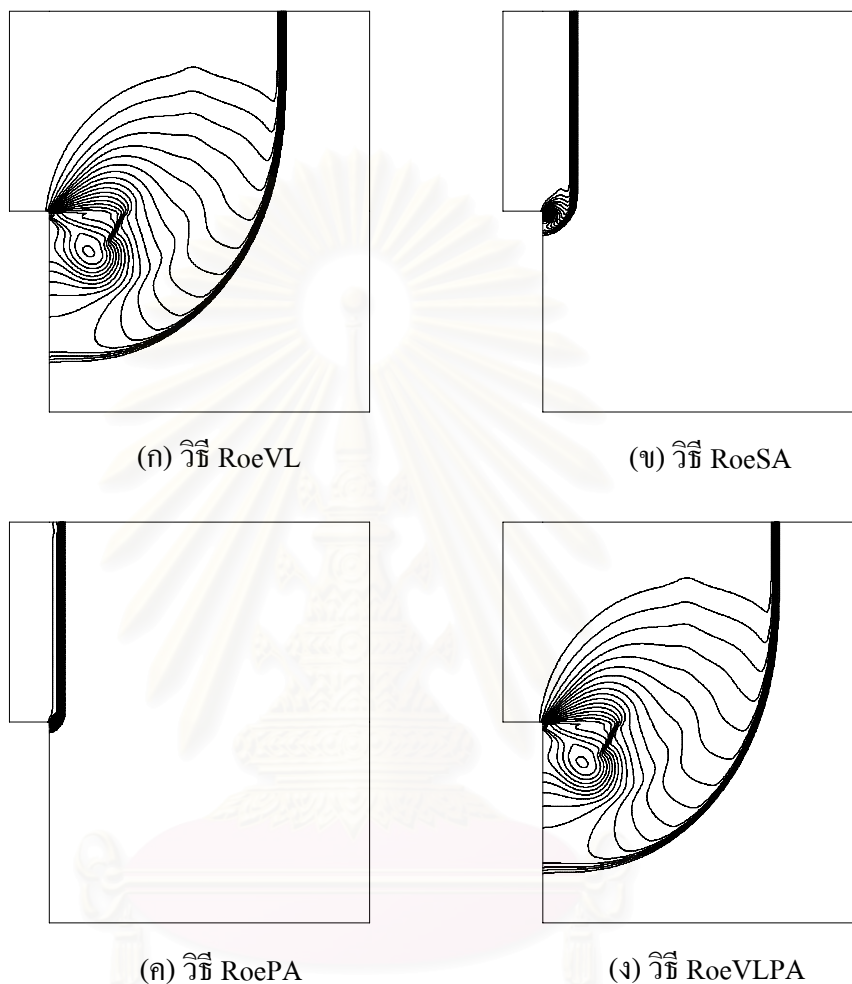


รูปที่ 6.17 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลที่ความเร็วเหนือเสียง 3 เท่า ผ่านช่องแคบที่มีการลดขนาดพื้นที่หน้าตัดโดยจับปล้น

6.2.2 ปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

รูปที่ 6.18(ก) ถึง (ง) แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพธ์ที่ได้วิธี RoeVL, RoeSA, RoePA และ RoeVLPA ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าวิธี RoeSA และ RoePA เป็นวิธีที่ไม่สามารถแก้ปัญหาสถานะของการไหลไม่เป็นจริง และเมื่อกลับไปพิจารณาสมการ (6.3) ถึง (6.8) พบว่าวิธี RoePA ไม่มีการแก้ไขค่าเจาะจง λ_1 และ λ_4 ซึ่งเป็นค่าเจาะจงที่มีความสัมพันธ์กับคลื่นช็อกหรือคลื่นขยายและสัมพันธ์กับการเกิดปัญหาดังกล่าว [9] ดังนั้นวิธี RoePA จึงไม่สามารถแก้ปัญหาสถานะของการไหลไม่เป็นจริงตามที่ปรากฏในรูปที่ 6.18(ค) ส่วนวิธี RoeSA ถึงแม้จะมีการแก้ไขค่าเจาะจง λ_1 และ λ_4 ก็ตาม ถึงแม้ว่าจะสามารถให้ผลลัพธ์ที่เวลามากกว่าวิธี RoePA แต่ยังคงไม่สามารถแก้ปัญหาสถานะของการไหลไม่เป็นจริงเช่นกัน ในทางกลับกันวิธี RoeVLPA สามารถ

แก้ปัญหาดังกล่าวได้ ดังนั้นจึงพอสรรูปในเบื้องต้นได้ว่าการตัดค่า η_1 ออกจากสมการ(6.5) น่าจะเป็นการกระทำที่มีเหตุผล

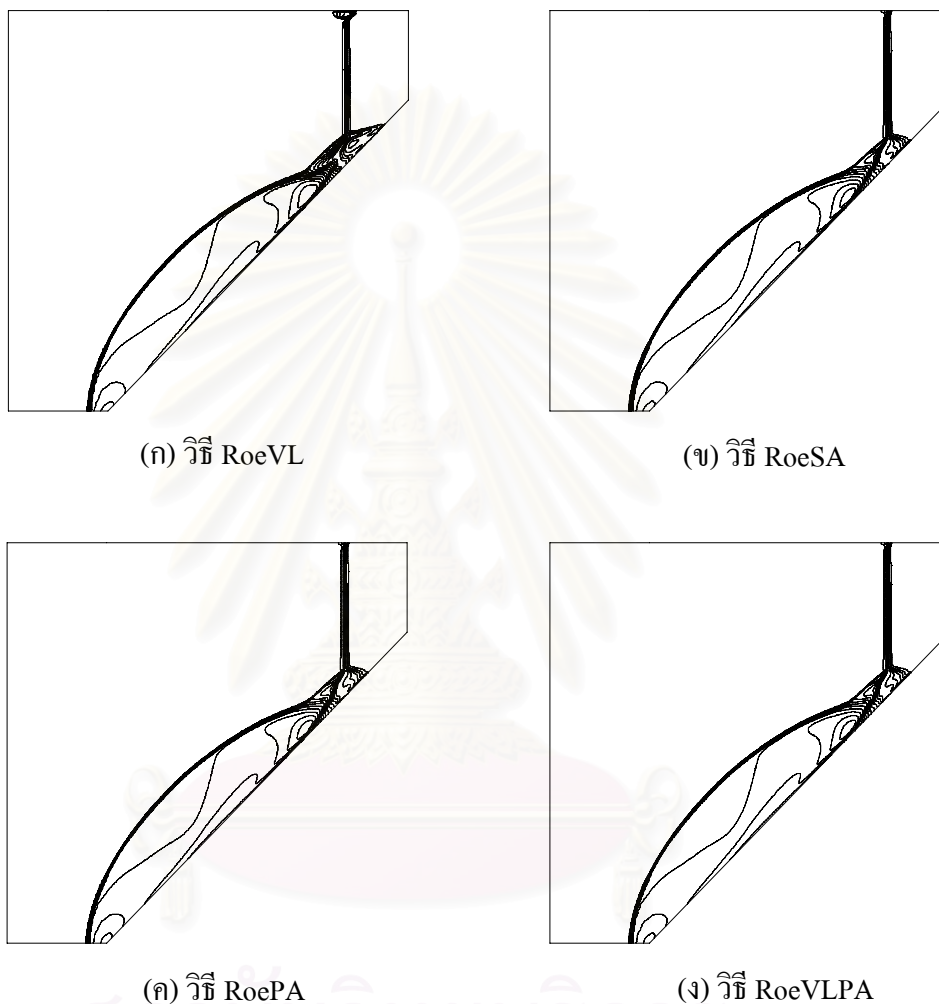


รูปที่ 6.18 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการกระจายของคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

6.2.3 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลข 5 ผ่านพื้นยกระดัดมุม 46°

รูปที่ 6.19(ก) ถึง (ง) แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพธ์ที่ได้วิธี RoeVL, RoeSA, RoePA และ RoeVLPA ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าวิธี RoeSA, RoePA และ RoeVLPA ให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันมากและสามารถแก้ปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขได้เป็นอย่างดี เพราะสามารถแก้ปัญหาการ โกงตัวของก้านมัทซึ่งทำให้ก้านมัทตั้งฉากกับพื้นระนาบยกระดัด และสามารถลดการแตกกระจายบริเวณด้านบนของคลื่นช็อกตกกระทบได้พร้อม ๆ กัน เมื่อพิจารณาวิธี ทั้งสามพบว่า มีข้อที่เหมือนกันอยู่ประการหนึ่ง ก็คือเป็นวิธีที่มีการแก้ไขค่าเจาะจง λ_2 และ λ_3 และ

แตกต่างจากวิธี RoeVL ซึ่งแก้ไขเฉพาะค่าเจาะจง λ_1 และ λ_4 เท่านั้น ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่าปรากฏการณ์ไปงนูสามารถแก้ไขด้วยการเพิ่มค่าการกระจายอย่างเพียงพอให้กับค่าเจาะจง λ_2 และ λ_3 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับคลื่นเอนโทรปีและคลื่นเฉือน [33,34]

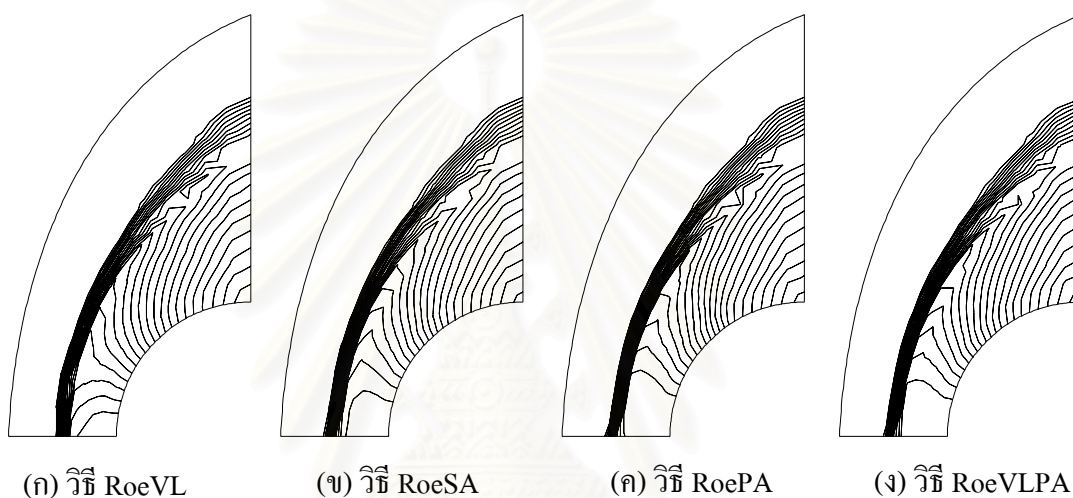


รูปที่ 6.19 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกหมายเลข 5 ผ่านพื้นยกกระดุมมุม 46°

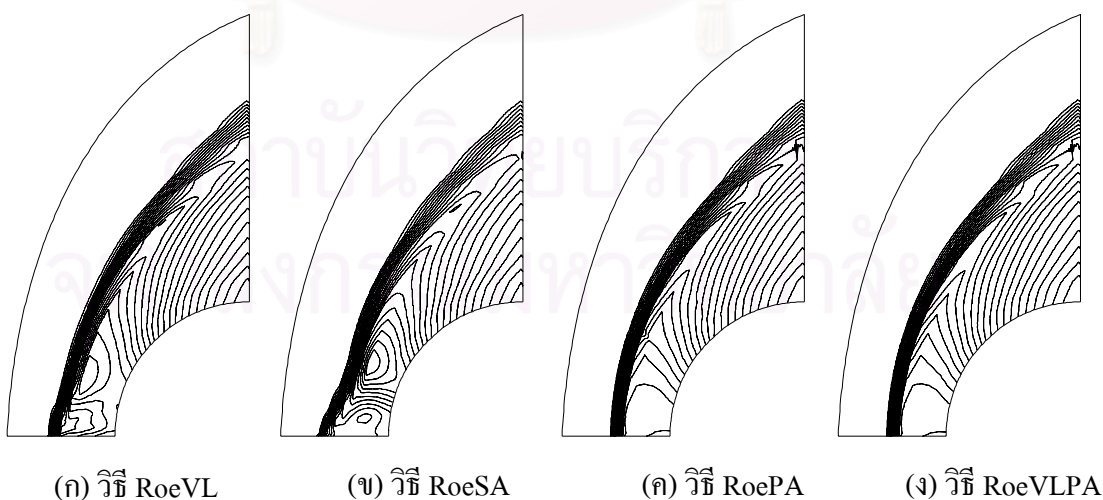
6.2.4 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 15 ผ่านทรงกระบอก

รูปที่ 6.20(ก) ถึง (ง) แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพท์สำหรับ 15×15 จุดต่อที่ได้วิธี RoeVL, RoeSA, RoePA และ RoeVLPA ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าวิธีทั้งหมดให้ผลลัพท์ที่ใกล้เคียงกันและไม่ปรากฏปรากฏการณ์ไปงนู ส่วนรูปที่ 6.21(ก) ถึง (ง) แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพท์สำหรับ 15×90 จุดต่อ พบว่าวิธี RoeVL และ RoeSA เริ่มที่จะให้

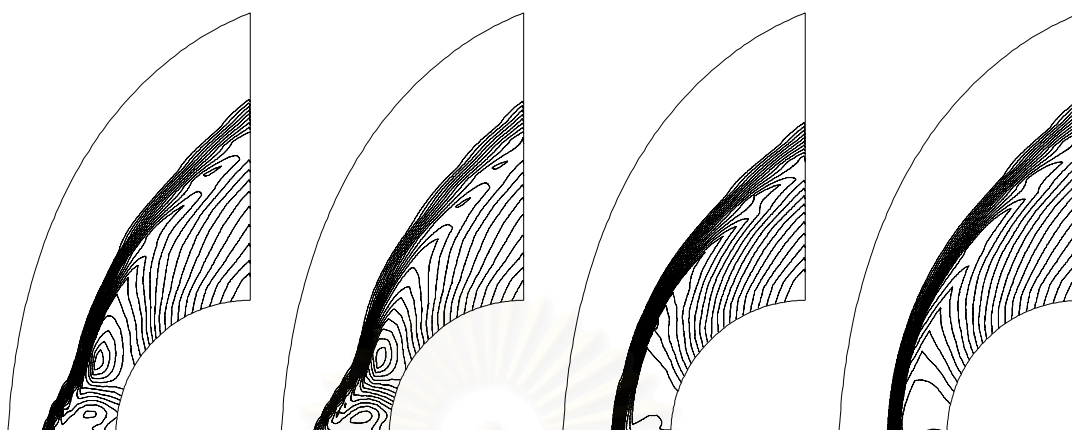
ผลลัพธ์ที่ปรากฏปรากฏการณ์โป่งนูน และยิ่งปรากฏชัดเจนมากขึ้นเมื่อมีการปรับอัตราส่วนขนาดของปริมาตรควบคุมมาเป็น 15×280 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.22(ก) ถึง (ง) ส่วนผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี RoePA และ RoeVLPA มีความถูกต้องเพราะไม่ปรากฏปัญหาปรากฏการณ์โป่งนูน และเช่นเดียวกับตัวอย่างปัญหาที่ที่แล้ว เนื่องจากวิธี RoePA และ RoeVLPA มีการแก้ไขค่าเจาะจง λ_2 และ λ_3 และแตกต่างจากวิธี RoeVL ซึ่งแก้ไขเฉพาะค่าเจาะจง λ_1 และ λ_4 เท่านั้น ส่วนวิธี RoeSA ยังคงปรากฏปรากฏการณ์โป่งนูน ก็น่าจะเป็นผลเนื่องจาก η_1 ที่ปรากฏสมการ(6.5)



รูปที่ 6.20 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก: 15×15 จุดต่อ



รูปที่ 6.21 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก: 15×90 จุดต่อ



(ก) วิธี RoeVL

(ข) วิธี RoeSA

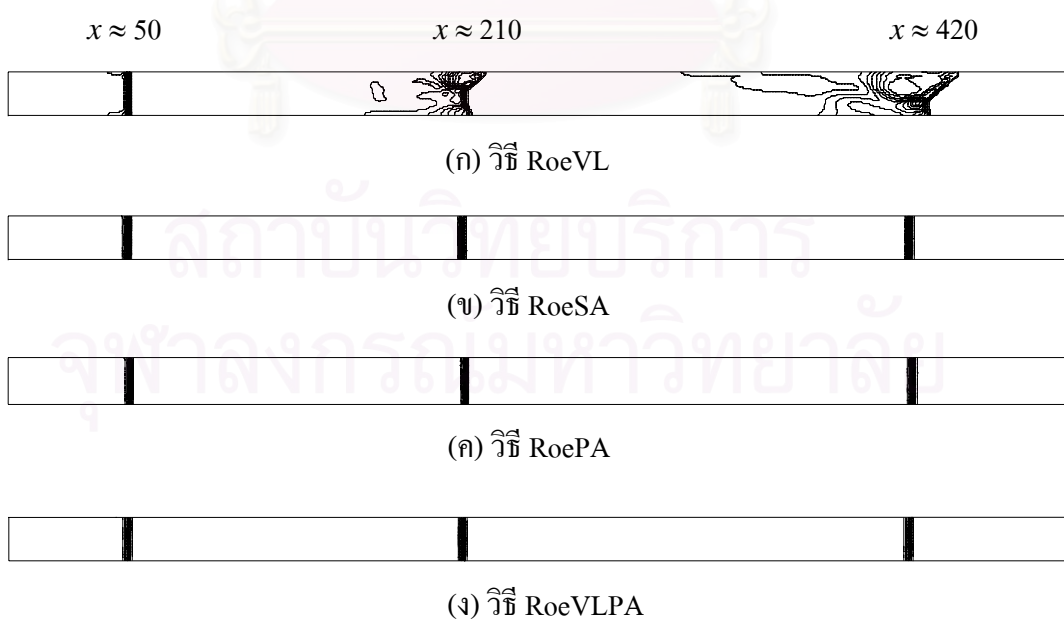
(ค) วิธี RoePA

(ง) วิธี RoeVLPA

รูปที่ 6.22 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาการไหลผ่านท่อทรงกระบอก: 15×280 จุดต่อ

6.2.5 ปัญหาทดสอบของเควิร์ก

รูปที่ 6.23(ก) ถึง (ง) แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพธ์ที่ได้วิธี RoeVL, RoeSA, RoePA และ RoeVLPA ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าวิธีทั้งหมดยกเว้นวิธี RoeVL ให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันและไม่พบปรากฏการณ์ไปงนูน ดังนั้น ตัวอย่างนี้จึงเป็นอีกปัญหาที่ยืนยันได้ว่าการแก้ไขค่าเจาะจง λ_2 และ λ_3 สามารถที่จะแก้ไขปรากฏการณ์ไปงนูนได้เป็นอย่างดี



(ก) วิธี RoeVL

(ข) วิธี RoeSA

(ค) วิธี RoePA

(ง) วิธี RoeVLPA

รูปที่ 6.23 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาทดสอบของเควิร์ก

6.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขที่ใช้ในงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีที่เสนอแนะโดยหลิว (Liou) [56] ซึ่งเป็นการวิเคราะห์พจน์การกระจายของสมการอนุกรมมวลในส่วนที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงของความดัน $D^{(p)}(U_L, U_R)$ ซึ่งหลิวได้ให้ความเห็นว่าพจน์ดังกล่าวมีส่วนที่มีความสัมพันธ์กับการเกิดปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ โดยในหัวข้อนี้จะทำการประยุกต์วิธีวิเคราะห์ของหลิวเข้ากับวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์และเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์กับวิธี HLLC [57] และวิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ของแวนเรียร์ [58]

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของปัญหาความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขที่นำเสนอโดยหลิว เป็นการวิเคราะห์พจน์การกระจายของสมการอนุกรมมวลในส่วนที่สัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงของความดัน ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับการวิเคราะห์ฟลักซ์ของมวล (mass flux) ของสมการอนุกรมมวล โดยเริ่มจากการพิจารณาสมการออยเลอร์ในรูปแบบที่กระชับดังที่แสดงในสมการ (5.1) ซึ่งเวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์เชิงกายภาพ $F(U)$ สามารถเขียนใหม่โดยการแยกพจน์ที่เกี่ยวข้องกับความดันออกมาต่างหาก เช่น

$$F(U) = \dot{m}F^{(c)} + F^{(p)} \quad (6.9)$$

โดยที่ $F^{(c)}$ หมายถึง ฟลักซ์การพาเชิงกายภาพ และ $F^{(p)}$ หมายถึง ฟลักซ์ความดันเชิงกายภาพ ดังนี้

$$F^{(c)} = [1 \quad u \quad v \quad H]^T \quad (6.10)$$

$$F^{(p)} = [0 \quad p\bar{i} \quad p\bar{j} \quad 0]^T \quad (6.11)$$

โดย \bar{i} และ \bar{j} หมายถึง เวกเตอร์ในทิศทางของแกน x และ y ตามลำดับ การแก้ระบบสมการ (5.8) ปริมาณฟลักซ์ที่ไหลผ่านด้านร่วมของปริมาตรควบคุม เป็นปริมาณฟลักซ์ที่ไหลในทิศทางตั้งฉากกับด้านร่วม โดยสมมติให้ $\bar{n} = (n_x, n_y)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของด้านร่วม ดังนั้น

$$F_n = F(U) \cdot \bar{n} = \dot{m}_n F^{(c)} + F_n^{(p)} \quad (6.12)$$

โดย

$$\dot{m}_n = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} = n_x \dot{m}_x + n_y \dot{m}_y \quad (6.13)$$

$$F_n^{(p)} = [0 \quad pn_x \quad pn_y \quad 0]^T \quad (6.14)$$

สมการ (6.12) สำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยทั่วไป สามารถเขียนให้อยู่ใน รูปแบบของการแบ่งแยกฟลักซ์ได้ดังเช่น

$$F_n = \dot{m}_{1/2}^+ F_L^{(c)} + \dot{m}_{1/2}^- F_R^{(c)} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} n_x \\ p_{1/2} n_y \\ \delta \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

โดยที่ $F_L^{(c)}$ และ $F_R^{(c)}$ หมายถึง ฟลักซ์การพาของปริมาตรควบคุมด้านซ้ายและ ขวาตามลำดับ δ หมายถึง พจน์ที่เกิดจากการจัดรูปใหม่ดังจะได้อธิบายต่อไป และ $\dot{m}_{1/2}^+$ และ $\dot{m}_{1/2}^-$ หมายถึง องค์ประกอบของฟลักซ์ของมวลที่ตั้งฉากกับด้านร่วม และเมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (6.12) จะมีความหมาย ดังนี้

$$\dot{m}_{1/2} = \dot{m}_{1/2}^+ + \dot{m}_{1/2}^- \quad (6.16)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (6.16) ลงในสมการ (6.15) และจัดรูปเสียใหม่ ดังนี้

$$F_n = \frac{1}{2} \dot{m}_{1/2} (F_L^{(c)} + F_R^{(c)}) - \frac{1}{2} D_m (F_R^{(c)} - F_L^{(c)}) + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} n_x \\ p_{1/2} n_y \\ \delta \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

โดยที่ D_m หมายถึง พจน์การกระจาย (dissipation term) ซึ่งถูกนิยามดังนี้

$$D_m = \dot{m}_{1/2}^+ - \dot{m}_{1/2}^- \quad (6.18)$$

เพื่อความง่ายในการศึกษา สมมติให้พิจารณาเฉพาะสมการอนุรักษ์มวลของสมการ (6.17) พจน์ฟลักซ์ของมวลสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของพจน์ของค่าเฉลี่ย $\langle \dot{m} \rangle$ และพจน์ ของค่าผลต่างของสถานะของการไหลหรือที่เรียกว่าพจน์การกระจาย $D(U_L, U_R)$ เช่น

$$\dot{m}_{1/2} = \langle \dot{m} \rangle - \frac{1}{2} D(U_L, U_R) \quad (6.19)$$

โดยที่ $D(U_L, U_R)$ สามารถแยกออกเป็นพจน์ต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$D(U_L, U_R) = D^{(\rho)}(U_L, U_R)\Delta\rho + D^{(u)}(U_L, U_R)\Delta u + D^{(v)}(U_L, U_R)\Delta v + D^{(p)}(U_L, U_R)\Delta p \quad (6.20)$$

และ $\Delta(\bullet) = (\bullet)_R - (\bullet)_L$ จากนั้นเมื่อนำเอาเฉพาะสมการอนุรักษ์มวลจากสมการ (6.15) ถึง (6.20) มาประยุกต์ใช้กับฟลักซ์เชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ดังแสดงในสมการ (5.22) ก็สามารเขียนพจน์ต่าง ๆ ของสมการ (6.19) และ (6.20) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{m}_{1/2} = & \frac{1}{2}(\dot{m}_L + \dot{m}_R) - \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{2\tilde{a}^2} (|\tilde{\lambda}_1| + |\tilde{\lambda}_4| - 2|\tilde{\lambda}_3|) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\rho}\Delta V_n}{2\tilde{a}} (|\tilde{\lambda}_4| - |\tilde{\lambda}_1|) + \Delta\rho|\tilde{\lambda}_3| \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{1}{2}(\dot{m}_L + \dot{m}_R) \quad , \quad \dot{m}_{L/R} = (\rho V_n)_{L/R} \quad (6.22)$$

$$D^{(\rho)}(U_L, U_R) = -2|\tilde{\lambda}_3| \quad (6.23)$$

$$D^{(p)}(U_L, U_R) = \frac{1}{2\tilde{a}^2} (|\tilde{\lambda}_1| + |\tilde{\lambda}_4| - 2|\tilde{\lambda}_3|) \quad (6.24)$$

โดยหิวได้ตั้งข้อสังเกตไว้ว่า ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดก็ตามที่ให้ผลลัพธ์ในสมการอนุรักษ์มวล $D^{(p)}(U_L, U_R) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ M เมื่อทำการคำนวณที่เวลามากขึ้นไป ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข เช่น ปรากฏการณ์โป่งนูน สามารถที่จะเกิดขึ้นมาได้ ในทางกลับกันถ้าหากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดก็ตามที่ให้ผลลัพธ์ในสมการอนุรักษ์มวล $D^{(p)}(U_L, U_R) = 0$ สำหรับทุก ๆ M ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถที่จะมีเสถียรภาพมากพอที่จะไม่ก่อให้เกิดความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข

ดังนั้น เมื่อกลับไปพิจารณาวิธีการแก้ไขความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขข้างต้น จะเห็นว่าวิธี RoeSA (สำหรับบางกรณี) RoePA และ RoeVLPA สามารถที่จะแก้ไขปัญหามาปรากฏการณ์โป่งนูนได้เนื่องจากมีการเพิ่มค่าการกระจายลงในค่าเจาะจง λ_2 และ λ_3 เมื่อค่าดังกล่าวมีค่าตัวเลขที่น้อยเกินไป ซึ่งสอดคล้องกับผลของการวิเคราะห์ด้วยวิธีข้างต้น เมื่อพิจารณาจากสมการ(6.24) จะเห็นว่าถ้าหาก $|\tilde{\lambda}_3|$ มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่า $D^{(p)}(U_L, U_R) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ M ดังนั้นการเพิ่มค่าการกระจายลงในค่าเจาะจง ก็ทำให้มีโอกาสที่เกิดการหักล้างภายในสมการดังกล่าวและทำให้ $D^{(p)}(U_L, U_R) = 0$ สำหรับทุก ๆ M โดย $D^{(p)}(U_L, U_R)$ สำหรับวิธี RoeSA, RoePA และ RoeVLPA สามารถเขียนในรูปแบบ ดังนี้

$$D_{RoeSA}^{(p)}(U_L, U_R) = \frac{1}{2\tilde{a}^2} (|\tilde{\lambda}_1| + |\tilde{\lambda}_4| - 2\eta^{SA}) \quad (6.25)$$

$$D_{RoePA}^{(p)}(U_L, U_R) = \frac{1}{2\tilde{a}^2} (|\tilde{\lambda}_1| + |\tilde{\lambda}_4| - 2\eta^{PA}) \quad (6.26)$$

$$D_{RoeVSPA}^{(p)}(U_L, U_R) = \frac{1}{2\tilde{a}^2} (|\tilde{\lambda}_1| + |\tilde{\lambda}_4| - 2\eta^{PA}) \quad (6.27)$$

และเพื่อเป็นการทดสอบความถูกต้องของข้อสังเกตของหลิว จึงทำการทดลองประยุกต์การวิเคราะห์ข้างต้นเข้ากับวิธี HLLC [57] โดยปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขที่ไหลในทิศทางตั้งฉากกับด้านร่วม เป็นดังนี้

$$F_n = \frac{b_{1/2}^+ F_{nL} - b_{1/2}^- F_{nR}}{b_{1/2}^+ - b_{1/2}^-} + \frac{b_{1/2}^+ b_{1/2}^-}{b_{1/2}^+ - b_{1/2}^-} (U_R - U_L) \quad (6.28)$$

โดยที่ $b_{1/2}^+$ และ $b_{1/2}^-$ หมายถึง ความเร็วของคลื่นที่เคลื่อนที่มาจากขวาและซ้ายตามลำดับ ซึ่งถูกนิยามดังนี้

$$b_{1/2}^+ = \max(0, \max(\tilde{V}_n + \tilde{a}, V_{nR} + a_R)) \quad (6.29)$$

$$b_{1/2}^- = \min(0, \min(\tilde{V}_n - \tilde{a}, V_{nL} - a_L)) \quad (6.30)$$

จากนั้นเมื่อนำเอาเฉพาะสมการอนุรักษ์มวลจากสมการ (6.15) ถึง (6.20) มาประยุกต์ใช้กับฟลักซ์เชิงตัวเลขดังแสดงในสมการ (6.28) ก็สามารถเขียนพจน์ต่าง ๆ ของสมการ (6.19) และ (6.20) ได้ดังนี้

$$\dot{m}_{1/2} = \frac{b_{1/2}^+ \dot{m}_L - b_{1/2}^- \dot{m}_R}{b_{1/2}^+ - b_{1/2}^-} + \frac{b_{1/2}^+ b_{1/2}^- (\Delta \rho_R)}{b_{1/2}^+ - b_{1/2}^-} \quad (6.31)$$

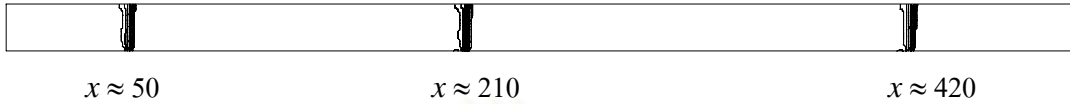
$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{b_{1/2}^+ \dot{m}_L - b_{1/2}^- \dot{m}_R}{b_{1/2}^+ - b_{1/2}^-} \quad (6.32)$$

$$D^{(\rho)}(U_L, U_R) = -2 \frac{b_{1/2}^+ b_{1/2}^-}{b_{1/2}^+ - b_{1/2}^-} \quad (6.33)$$

$$D^{(p)}(U_L, U_R) = 0 \quad (6.34)$$

และได้ทำการทดสอบวิธี HLLC กับปัญหาทดสอบของเควิร์กอีกครั้ง ดังในรูปที่ 6.24 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพท์ที่ได้ ซึ่งพบว่าไม่แสดงปรากฏการณ์ไปงนูน

เนื่องจากสมการ (6.31) แสดงให้เห็นว่า $D^{(p)}(U_L, U_R) = 0$ ดังนั้น แสดงว่าข้อสังเกตหิวดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขได้ดีในระดับหนึ่ง



รูปที่ 6.24 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาทดสอบของเควิร์กจากวิธี HLLC

และได้ทำการทดลองประยุกต์การวิเคราะห์ข้างต้นอีกครั้ง เข้ากับวิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ของแวนเลียร์ (Van Leer's flux-vector splitting scheme, FVS) [5] โดยสมการ (6.35) แสดงปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลขที่ไหลในทิศทางตั้งฉากกับด้านร่วม ซึ่งได้ถูกปรับปรุงให้มีประสิทธิภาพดีขึ้นสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะคงตัว [58] ดังนี้

$$F_n = \dot{m}_{1/2}^+ F_L^{(c)} + \dot{m}_{1/2}^- F_R^{(c)} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} n_x \\ p_{1/2} n_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

โดยที่ $\dot{m}_{1/2}^+$, $\dot{m}_{1/2}^-$ และ $p_{1/2}$ ได้ถูกนิยามดังนี้

$$\dot{m}_{1/2}^\pm = \rho_{L/R} a_{L/R} M^\pm \quad (6.36)$$

$$M^\pm = \pm \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 \quad (6.37)$$

$$p_{1/2} = p_{L/R} (p^+ + p^-) \quad (6.38)$$

$$p^\pm = \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}) \quad (6.39)$$

จากนั้นเมื่อนำเอาเฉพาะสมการอนุรักษ์มวลจากสมการ (6.15) ถึง (6.20) มาประยุกต์ใช้กับฟลักซ์เชิงตัวเลขดังแสดงในสมการ (6.35) ก็สามารถเขียนพจน์ต่าง ๆ ของสมการ (6.19) และ (6.20) ได้ดังนี้

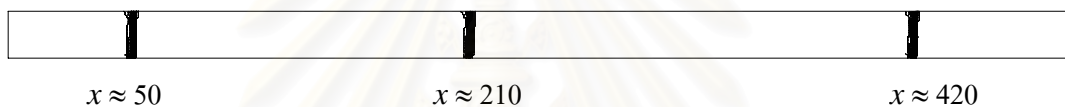
$$\dot{m}_{1/2} = \rho_L a_L M^+ + \rho_R a_R M^- \quad (6.40)$$

$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R)(a_L M^+ + a_R M^-) \quad (6.41)$$

$$D^{(\rho)}(U_L, U_R) = a_L M^+ - a_R M^- \quad (6.42)$$

$$D^{(p)}(U_L, U_R) = 0 \quad (6.43)$$

และได้ทำการทดสอบวิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ของแวนเรียร์ กับปัญหาทดสอบของเควิร์กอีกครั้ง ดังในรูปที่ 6.25 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นของผลลัพท์ที่ได้ ซึ่งพบว่าไม่ปรากฏปรากฏการณ์ไปงนูนเช่นเดียวกับวิธี HLLC เนื่องจากสมการ (6.43) แสดงให้เห็นว่า $D^{(p)}(U_L, U_R) = 0$ ดังนั้น จึงเป็นการพิสูจน์เชิงตัวเลขที่สามารถเน้นย้ำถึงความถูกต้องของข้อสังเกตลิวตั้งที่กล่าวมาแล้วอีกครั้ง



รูปที่ 6.25 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาทดสอบของเควิร์กจากวิธีการแบ่งแยกเวกเตอร์ฟลักซ์ของแวนเรียร์

บทที่ 7

ตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดที่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง

บทที่ 7 จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดที่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสถานะคงตัวและไม่คงตัว โดยจะทำการประยุกต์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ ซึ่งการตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีที่ได้ถูกนำเสนอในบทที่ผ่านมา จะกระทำด้วยการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้กับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง เช่น การเกิดคลื่นช็อกในท่อ (shock tube) หรือการไหลผ่านระนาบยกระดัด เป็นต้น จากนั้นจึงนำกระบวนการดังกล่าวมาแก้ปัญหาอื่น ๆ ที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้น จึงได้มีการประยุกต์วิธีการเพิ่มความถูกต้องแม่นยำของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ด้วยการแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับที่สอง (second order spatial and temporal discretization) [47,48,59-61] และเพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มมีเสถียรภาพในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนด้วยความถูกต้องแม่นยำของการแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับที่สอง จึงจำเป็นต้องนำเอาตัวจำกัดขอบเขต (limiter) [62,63] มาประยุกต์ใช้สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

7.1 กระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

กระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ สามารถอธิบายในของแผนผังแสดงการไหลของขั้นตอน (flow-chart) ดังในรูปที่ 7.1 [34] ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. ขั้นตอนเริ่มต้น เราต้องเลือกว่าจะเข้าสู่กระบวนการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ หรือกระบวนการสร้างตาข่ายเริ่มต้น (initial mesh) โดยถ้าหากเป็นกระบวนการสร้างตาข่ายเริ่มต้น ก็ทำการอ่านจุดต่อทั้งหมดที่อยู่บนเส้นขอบเขตของโดเมน แต่ถ้าหากเป็นกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ก็ทำการอ่านจุดต่อทั้งหมดของตาข่ายเบื้องหลัง (background mesh) ซึ่งเป็นตาข่ายที่ได้จากการคำนวณในครั้งที่ผ่านมา จากนั้นจึงสร้างจุดต่อทั้งหมดที่อยู่บนเส้นขอบเขตของโดเมนใหม่อีกครั้ง
2. เมื่อสร้างจุดต่อทั้งหมดที่อยู่บนเส้นขอบเขตของโดเมนเสร็จแล้ว ก็เข้าสู่กระบวนการสร้างสามเหลี่ยมเดลอนเนด้วยอัลกอริทึมที่ 1 (*Delaunay Triangulation*)
3. ลบทิ้งสามเหลี่ยมทั้งหมดที่อยู่ภายนอกโดเมน โดยสามเหลี่ยมทั้งหมดที่อยู่ภายนอกโดเมน หมายถึง สามเหลี่ยมที่มีจุดต่อใดจุดต่อหนึ่งเป็นจุดต่อของสามเหลี่ยมเริ่มต้นล้อมรอบจุด

ทั้งหมดของเซต P (ดูความหมายของสามเหลี่ยมเริ่มต้น ได้จากบทที่ 3) หรือเป็นสามเหลี่ยมที่อยู่ภายในรูของโดเมน ซึ่งมีวิธีการทดสอบสามเหลี่ยมดังกล่าวอยู่หลายวิธีด้วยกัน แต่วิธีที่ง่ายและสะดวกในการเขียนโปรแกรม และถูกนำมาประยุกต์ใช้ในงานวิจัยนี้ เป็นวิธีการตรวจสอบเครื่องหมายของเวกเตอร์ผลคูณไขว้ (vector cross product) ของด้านร่วมของสามเหลี่ยม โดยถ้าหากมีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงว่าสามเหลี่ยมดังกล่าวอยู่นอกโดเมน เป็นต้น

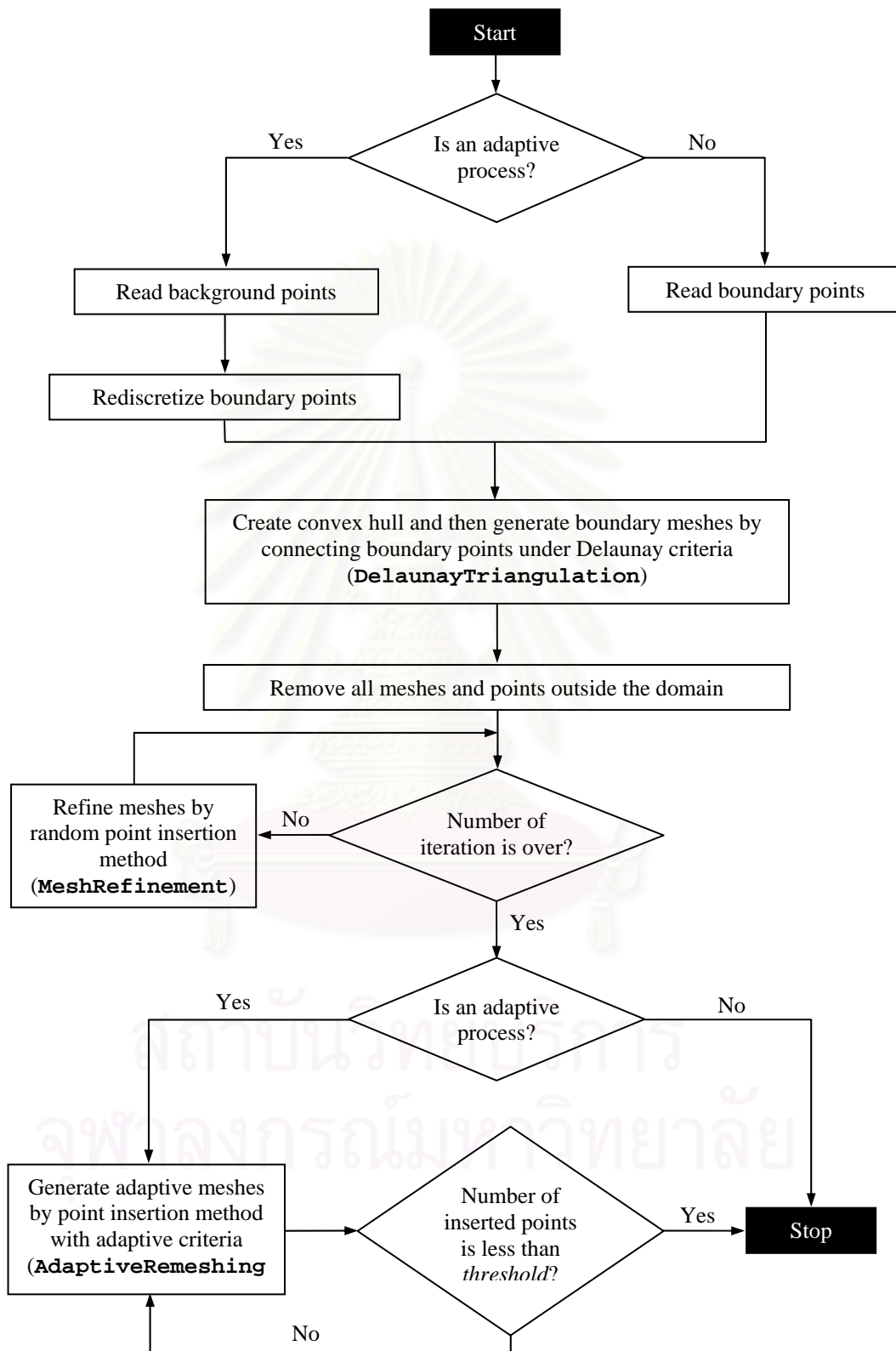
4. ทำการสร้างจุดต่อภายในโดเมนด้วยอัลกอริทึมที่ 2 (*MeshRefinement*) เนื่องจากขั้นตอนที่ 4 เป็นกระบวนการที่ต้องวนซ้ำเพื่อให้ได้จำนวนจุดต่อภายในโดเมนที่มากเพียงพอ เนื่องจากเป็นกระบวนการที่ต้องวนซ้ำ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกำหนดเกณฑ์การตัดสินใจเพื่อจบการทำงาน สำหรับในงานวิจัยนี้ใช้กำหนดเกณฑ์การตัดสินใจภายใต้ 2 เงื่อนไข ดังนี้

4.1. จบการทำงานเมื่อจำนวนครั้งของการวนซ้ำ (iteration) เท่ากับจำนวนครั้งที่กำหนด

4.2. จบการทำงานเมื่อจำนวนจุดต่อที่เพิ่มขึ้นมาใหม่ เมื่อเปรียบเทียบกับจำนวนจุดต่อทั้งหมดในครั้งก่อน มีจำนวนน้อยกว่าค่าที่กำหนด (threshold)

5. ขั้นตอนต่อจากนี้ไปเป็นขั้นตอนสำหรับกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้เท่านั้น ดังนั้นถ้าหากเป็นกระบวนการสร้างตาข่ายเริ่มต้นก็สามารถหยุดการทำงานได้ทันที แต่ถ้าหากเป็นกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ก็ให้ทำการสร้างสามเหลี่ยมเพิ่มเติมด้วยอัลกอริทึมที่ 4 (*AdaptiveRemeshing*) และเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 4 เนื่องจากเป็นกระบวนการที่ต้องวนซ้ำเพื่อให้ได้จำนวนจุดต่อภายในโดเมนที่มากเพียงพอ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องกำหนดเกณฑ์การตัดสินใจเพื่อจบการทำงาน สำหรับในงานวิจัยนี้ใช้กำหนดเกณฑ์การตัดสินใจภายใต้ 2 เงื่อนไข ดังที่ได้อธิบายในขั้นตอนที่ 4.1 และ 4.2 ข้างต้น นอกจากนี้ยังสามารถใช้คุณภาพของสามเหลี่ยมดังที่ได้แสดงในสมการ (3.17) มาใช้ในการตัดสินใจเพื่อจบการทำงานได้อีกด้วย

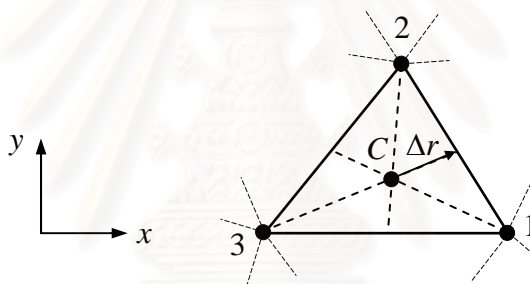
สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะคงตัว วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้จะถูกประยุกต์ใช้ประมาณ 3-6 ครั้ง ก็สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องในระดับที่สามารถยอมรับได้ แต่สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะไม่คงตัว ในช่วงเวลาแรกสุดก็ให้ดำเนินการเช่นเดียวกับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลในสภาวะคงตัว เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เริ่มต้นที่มีความถูกต้องมากเสียก่อน จากนั้นจึงดำเนินการแก้ปัญหาการไหลและวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ควบคู่กันไป



รูปที่ 7.1 แผนผังแสดงการไหลของขั้นตอน สำหรับกระบวนการสร้างตาข่ายเริ่มต้น หรือการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้

7.2 การขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับสอง

การแก้ปัญหาการไหลของระบบสมการออยเลอร์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับหนึ่ง ถึงแม้ว่าจะให้ผลลัพธ์ที่สามารถยอมรับได้ในระดับหนึ่ง แต่มักจะไม่ค่อยเป็นที่ยอมรับสำหรับการแก้ปัญหาในทางปฏิบัติ เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้มีโอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนได้สูงมาก [64] ดังนั้น จึงจำเป็นต้องมีการขยายผลเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำทั้งด้านการแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับสองหรือสูงกว่า สำหรับการขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่อันดับสองที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นการประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor' series expansion) มาใช้กับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม [59,60] โดยอาศัยแนวคิดของการฉาย (projection) ผลลัพธ์ซึ่งมีค่าคงที่สำหรับแต่ละปริมาตรควบคุม และค่าดังกล่าวได้ถูกจัดเก็บเอาไว้ที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุม มายังด้านร่วมของปริมาตรควบคุม



รูปที่ 7.2 การขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่อันดับสองสำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม

สมมติให้ด้าน 1-2 เป็นด้านร่วมของปริมาตรควบคุม L และ R และต้องการแก้ระบบสมการ (5.8) สำหรับด้านร่วมดังกล่าว ดังนั้นการขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่อันดับสองจึงต้องประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์เข้ากับด้านดังกล่าว เช่น รูปที่ 7.2 แสดงแนวคิดดังกล่าวสำหรับด้าน 1-2 ของปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมทั่วไป

$$\mathbf{q}_{f_{1-2}} = \mathbf{q}_C + \frac{\Psi_C}{3} \left[\frac{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{2} - \mathbf{q}_3 \right] \quad (7.1)$$

โดยที่ $\mathbf{q}_{f_{1-2}}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้น (primitive variables vector) ที่ถูกฉายไปยังด้าน 1-2

$$\mathbf{q} = [\rho \quad u \quad v \quad p]^T \quad (7.2)$$

ส่วน q_c หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้นที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของ ปริมาตรควบคุม และ $q_n, n=1,2,3$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้นที่ตำแหน่งจุดต่อทั้งสาม ของปริมาตรควบคุม สำหรับการคำนวณปริมาณเวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้นที่ตำแหน่งจุดต่อทั้ง สามของปริมาตรควบคุม จะใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักแบบกลับส่วนระยะทาง (inverse-distance weighting) ทั้งนี้เพื่อให้ค่าที่ได้มีความถูกต้อง [59] ดังนี้

$$q_n = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{q_{c,i}}{|\vec{r}_i|}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{|\vec{r}_i|}} \quad (7.3)$$

โดยที่ $q_{c,i}$ หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้นที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของ ปริมาตรควบคุมรอบ ๆ จุดต่อที่ n ส่วน $|\vec{r}_i|$ หมายถึง ระยะทางจากตำแหน่งจุดศูนย์กลางไปยังจุดต่อ ที่ n และ N หมายถึง จำนวนปริมาตรควบคุมรอบ ๆ จุดต่อที่ n

จากการศึกษาของแวนเรียร์ [65,66] พบว่าการขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่อันดับสอง มักจะก่อให้เกิดปัญหาการละเมิดอนุรักษ์ปริมาณการไหลภายในปริมาตรควบคุม ซึ่งส่งผลให้ สมการ (5.4) ไม่เป็นจริง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการปรับปรุงกระบวนการขยายผลสู่การแบ่งพื้นที่ อันดับสอง โดยทั่วไปมักใช้วิธีการประยุกต์ตัวจำกัดขอบเขต Ψ_c (limiter) เข้าด้วยกัน โดยจากการ ทดสอบตัวจำกัดขอบเขตที่เสนอโดยนักวิจัยหลาย ๆ ท่าน [62,67-69] พบว่าตัวจำกัดขอบเขตที่ นำเสนอโดย Vankatakrishnan [62] ให้ผลลัพธ์ที่มีเสถียรภาพสูงกว่าวิธีอื่น ๆ จึงเลือกใช้ตัวจำกัด ขอบเขตดังกล่าวในการทดสอบตัวอย่างที่ปรากฏในบทนี้ โดยที่ตัวจำกัดขอบเขตของ Vankatakrishnan ได้ถูกกำหนดดังนี้

$$\Psi_c = \min_{i=1,2,3} \begin{cases} \phi\left(\frac{\Delta_{+,max}}{\Delta_-}\right) & , \Delta_- \geq 0 \\ \phi\left(\frac{\Delta_{+,min}}{\Delta_-}\right) & , \Delta_- < 0 \\ 1 & , \Delta_- = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

สัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่ปรากฏในสมการ (7.4) ได้ถูกนิยามดังต่อไปนี้

$$\Delta = q_c - q_i \quad (7.5)$$

$$\Delta_{+,max} = q_{max} - q_i \quad (7.6)$$

$$\Delta_{+,min} = q_{min} - q_i \quad (7.6)$$

และ q_{max} และ q_{min} หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรเบื้องต้นที่มีค่ามากที่สุดและมีค่าน้อยที่สุดตามลำดับ และฟังก์ชัน ϕ เป็นที่ถูกเสนอโดย Van Albada [63] ดังนี้

$$\phi(y) = \frac{y^2 + 2y + \varepsilon^2}{y^2 + y + 2 + \varepsilon^2} \quad (7.7)$$

โดยที่ ε^2 หมายถึง

$$\varepsilon^2 = (Kh)^3 \quad (7.8)$$

โดยที่ h หมายถึง ขนาดของปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม และค่าคงที่ K หมายถึง ค่าคงที่ใด ๆ สำหรับงานวิจัยนี้เลือกใช้ค่าคงที่เท่ากับ 0.5 อย่างไรก็ตามการเลือกค่าคงที่ K จะขึ้นกับพฤติกรรมของผลลัพธ์ของปัญหา และไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัวในการเลือกค่าที่เหมาะสมที่ดีสำหรับทุก ๆ กรณี แต่จากการทดสอบกับปัญหาจำนวนมาก พบว่าสำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม ค่าคงที่ K ควรจะอยู่ในช่วง 0.5 ถึง 5

สำหรับการขยายผลสู่การแบ่งเวลาอันดับสอง ได้เลือกใช้วิธีคำนวณช่วงเวลาความแม่นยำอันดับสองของรุงเง-คุดตา (second order accurate Runge-Kutta time stepping method) [61] ซึ่งแต่ละช่วงเวลาต้องทำการคำนวณสองรอบ โดยรอบแรกจะทำการคำนวณที่ครึ่งของช่วงเวลา Δt และรอบที่สองสำหรับช่วงเวลา Δt ดังนี้

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 F_n^* \cdot \bar{n}_j \quad (7.9)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[U_i^0 + U_i^* - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 F_n^* \cdot \bar{n}_j \right]$$

โดย Δt หมายถึง ช่วงเวลาการคำนวณสำหรับการวนซ้ำแต่ละครั้ง สำหรับปัญหาการไหลในภาวะคงตัวสามารถที่จะลดเวลาในการคำนวณได้ด้วยการเลือกใช้ช่วงเวลาท้องถิ่น (local time step) สำหรับแต่ละปริมาตรควบคุม [51] แต่วิธีดังกล่าวไม่สามารถใช้ได้กับปัญหาการไหลในภาวะไม่คงตัว เพราะการคำนวณปัญหาการไหลในภาวะไม่คงตัว มีความจำเป็นต้องให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องทุก ๆ ช่วงเวลา จึงเป็นเหตุผลให้โดยทั่วไปการคำนวณปัญหาการไหลในภาวะไม่คงตัวมักใช้เวลามากกว่าการคำนวณปัญหาการไหลในภาวะคงตัว

7.3 การตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำ

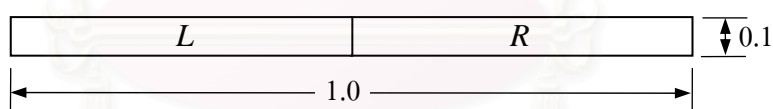
ก่อนที่จะนำกระบวนการแก้ปัญหาคาร์ไหลแบบไร้ความหนืดมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงที่มีความซับซ้อน ในหัวข้อนี้จะทำการตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการแก้ปัญหานั้นที่นำเสนอกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำ (exact solution) ซึ่งมีทั้งปัญหาในหนึ่งมิติและสองมิติ แต่สำหรับในงานวิจัยนี้จะทำการทดสอบปัญหาในหนึ่งมิติกับโดเมนสองมิติทั้งหมดดังต่อไปนี้

7.3.1 ปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod

ปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod (Sod shock tube) เป็นปัญหาในหนึ่งมิติ [44] โดยจะทำการทดสอบปัญหากับโดเมนสองมิติขนาด 1.0×0.1 และถูกแบ่งออกเป็น 401×41 จุดต่อในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ดังในรูปที่ 7.3 โดยทั้งสองข้างของท่อช็อกจะถูกบรรจุด้วยก๊าซที่มีสถานะของไหลแตกต่างกัน ซึ่งสถานะของไหลเริ่มต้นสำหรับทั้งสองข้างของท่อช็อกได้ถูกกำหนดดังในสมการ (7.10) และ (7.11) ตามลำดับ

$$[\rho \quad u \quad v \quad p]_L = [1.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 1.0] \quad (7.10)$$

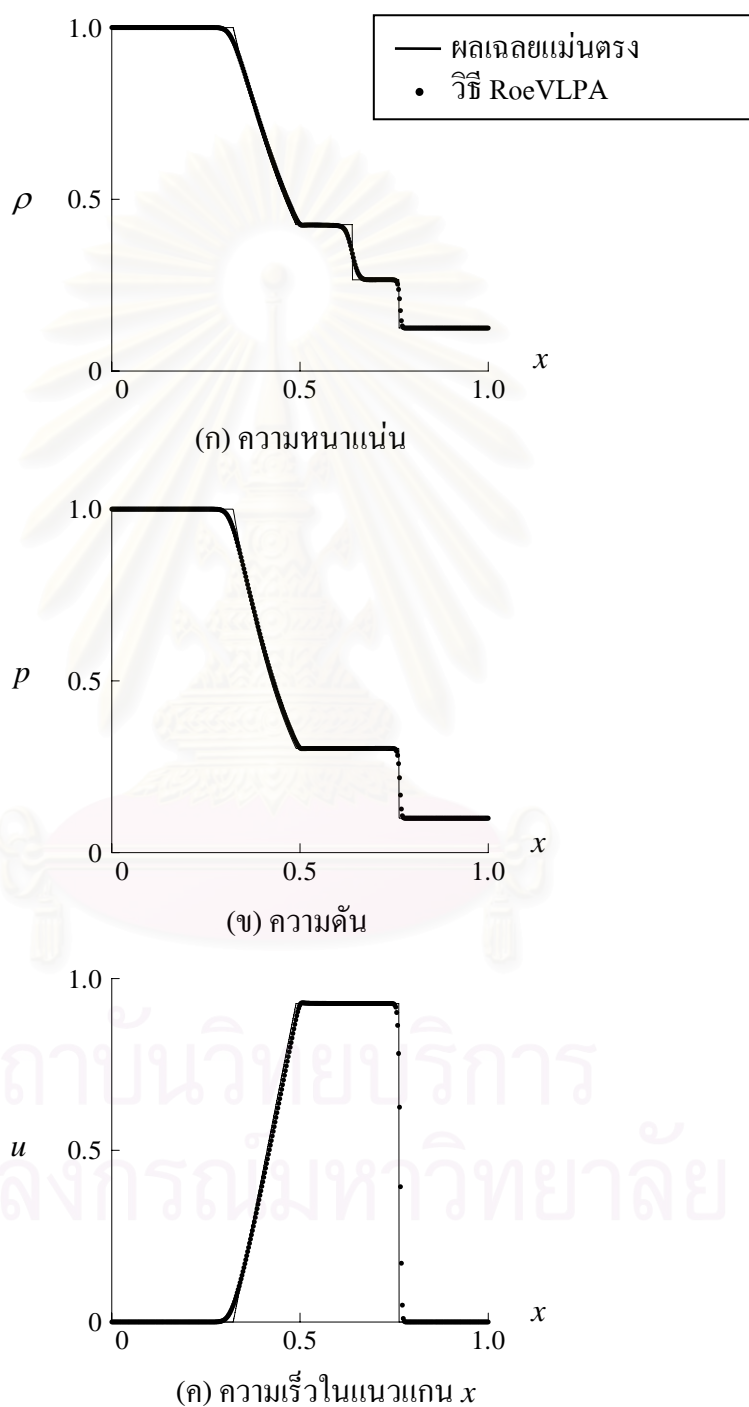
$$[\rho \quad u \quad v \quad p]_R = [0.125 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.1] \quad (7.11)$$



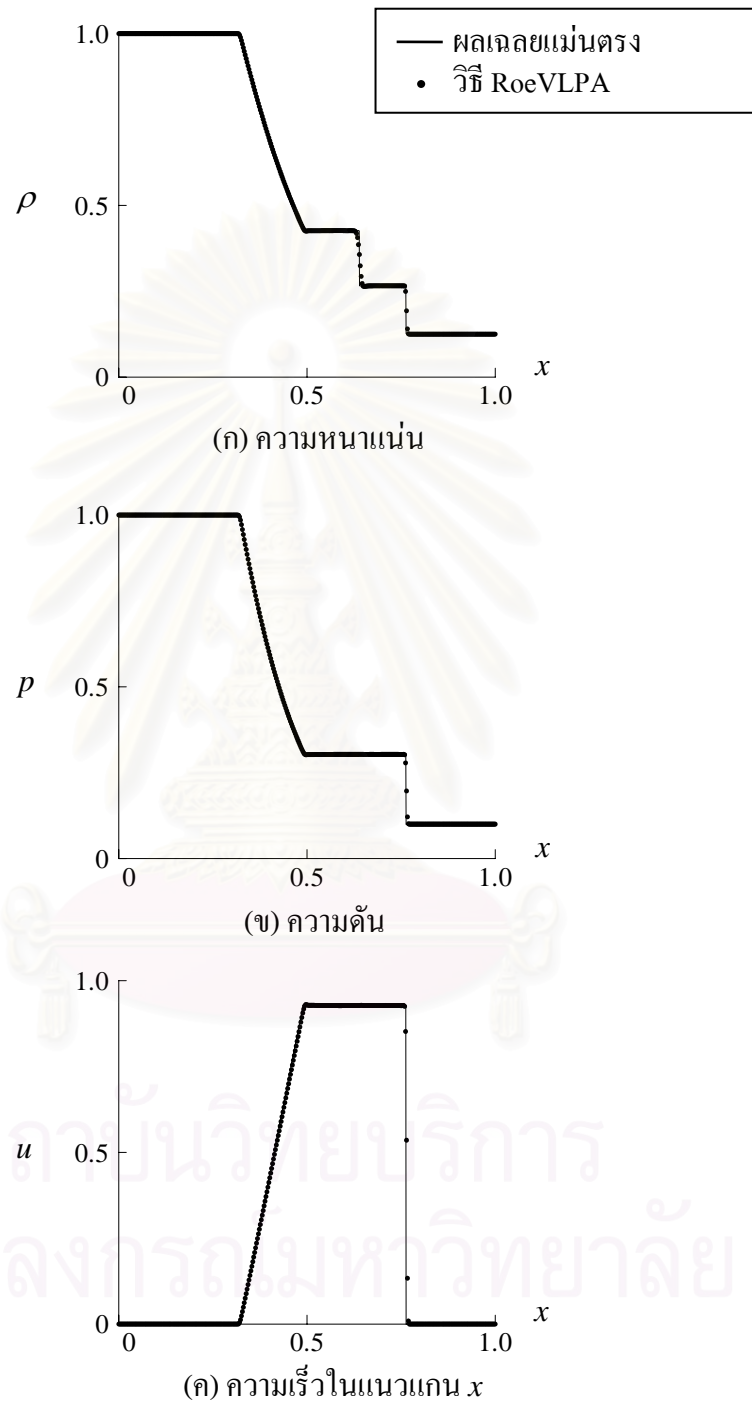
รูปที่ 7.3 ปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod

การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลั๊กซ์ของโรว์สำหรับปัญหาคาร์ไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสถานะไม่คงตัว ได้ถูกทดสอบทั้งในระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งและสอง โดยรูปที่ 7.4 และ 7.5 แสดงเส้นกราฟของผลลัพธ์ของค่าความหนาแน่น ค่าความดันและความเร็ว u ตลอดแนวกึ่งกลางของท่อช็อกที่ได้จากทั้งสองกรณีเป็นเวลา 0.15 ในระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งและสองตามลำดับ [47,48] เมื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำ มากกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง โดยเฉพาะบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน เช่น เส้นช็อก ผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง และด้านหน้าของคลื่นขยาย เป็นต้น โดยเฉพาะผลลัพธ์ในบริเวณผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องจะปรากฏความแตกต่างระหว่างความแม่นยำที่

ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งและสองอย่างชัดเจน ดังนั้นปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod จึงมักถูกนำมาใช้ทดสอบความแม่นยำของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขบ่อยครั้ง



รูปที่ 7.4 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVLP ระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งของปัญหาคลื่นช็อกในท่อของ Sod



รูปที่ 7.5 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำและวิธี RoeVLPA ระดับความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลิ้นช็อกในท่อของ Sod

7.3.2 ปัญหาคลื่นกระจายแบบสมมาตร

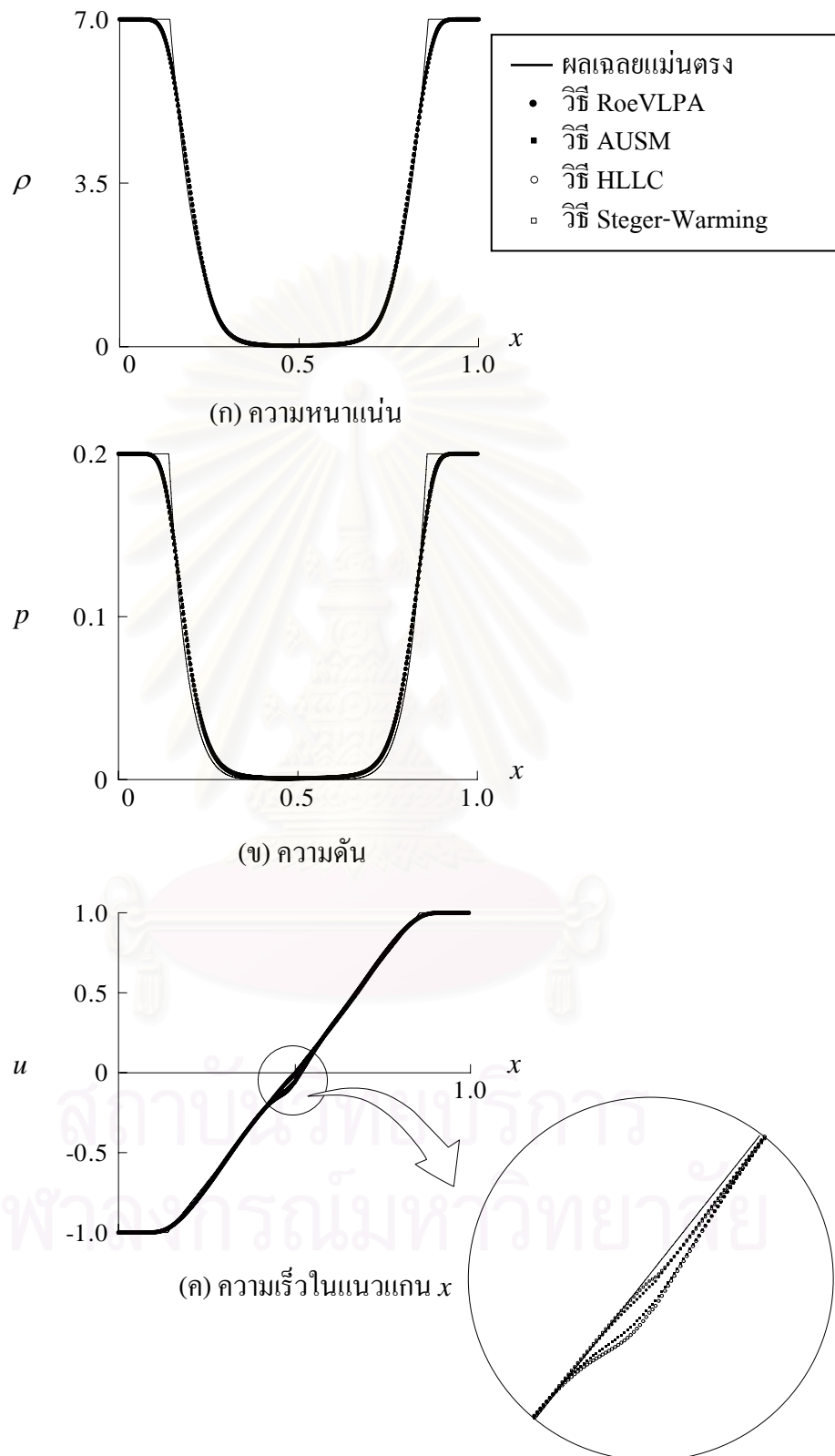
ปัญหาคลื่นกระจายแบบสมมาตรเป็นอีกหนึ่งปัญหาคลื่นช็อกในท่อในหนึ่งมิติ โดยจะทำการทดสอบปัญหากับโดเมนสองมิติดังในรูปที่ 7.3 ข้างต้น โดยทั้งสองข้างของท่อช็อกจะถูกบรรจุด้วยก๊าซที่มีสถานะของไหลแตกต่างกัน ซึ่งสถานะของไหลเริ่มต้นสำหรับทั้งสองข้างของท่อช็อกได้ถูกกำหนดดังในสมการ (7.12) และ (7.13) ตามลำดับ ซึ่งสถานะของไหลเริ่มต้นนี้จะก่อให้เกิดสภาวะการตรงบริเวณกึ่งกลางของโดเมน [52] ซึ่งความเร็วของของไหลที่ทำให้เกิดสภาวะการเรียกว่า ความเร็วหลุดพ้น (escape speed) [41]

$$[\rho \quad u \quad v \quad p]_L = [7.0 \quad -1.0 \quad 0.0 \quad 0.2] \quad (7.12)$$

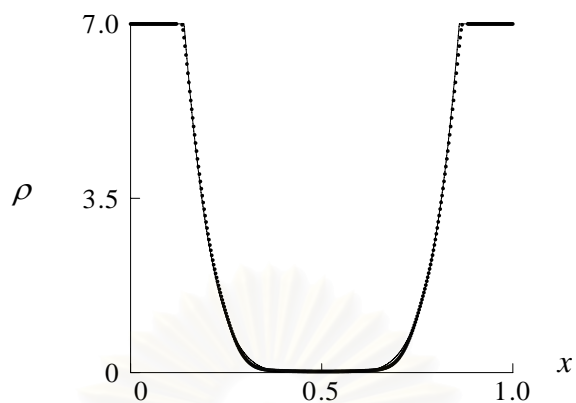
$$[\rho \quad u \quad v \quad p]_R = [7.0 \quad 1.0 \quad 0.0 \quad 0.2] \quad (7.13)$$

การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลัซซ์ของโรว์ สำหรับปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว ได้ถูกทดสอบทั้งในระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งและสอง โดยรูปที่ 7.6 และ 7.7 แสดงเส้นกราฟของผลลัพธ์ในระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งและสองตามลำดับ ของค่าความหนาแน่น ค่าความดันและความเร็ว u ตลอดแนวกึ่งกลางของท่อช็อกที่ได้จากทั้งสองกรณีเป็นเวลา 0.3 [33,34] และเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ผ่านมา ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองใกล้เคียงกับผลลัพธ์แม่นยำมากกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง โดยเฉพาะบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลัน ซึ่งในกรณีนี้หมายถึงด้านหน้าและด้านหลังของคลื่นขยายเป็นต้น

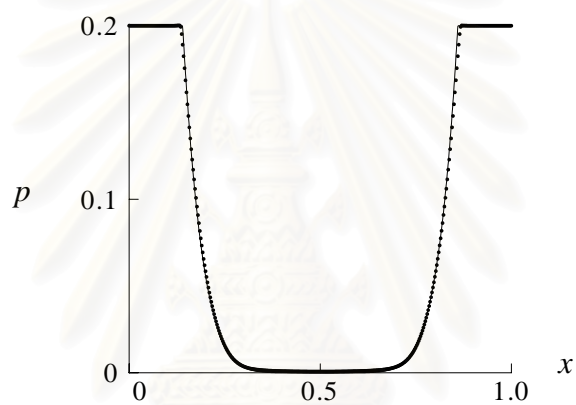
เนื่องจากปัญหานี้ได้ก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่อยู่ในสถานะสภาวะการตรง ดังนั้น จึงเป็นปัญหาที่นิยมใช้ในการทดสอบความแข็งแกร่ง (robustness) ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยภาพขยายในรูปที่ 7.6 ได้แสดงการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ เช่น วิธี AUSM [3] วิธี HLLC [70] และวิธีของ Steger-Warming [71] พบว่า เทคนิคการแก้ไขวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลัซซ์ของโรว์ (RoeVLPA) ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้มีความถูกต้องใกล้เคียงกับวิธีของ Steger-Warming และมีความถูกต้องมากกว่าวิธี AUSM และ HLLC ตรงบริเวณที่เกิดสภาวะการตรง ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่าปริมาณการกระจายเชิงตัวเลข (numerical dissipation) ที่เกิดขึ้นภายในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างมากสำหรับความมีเสถียรภาพของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหากการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูง



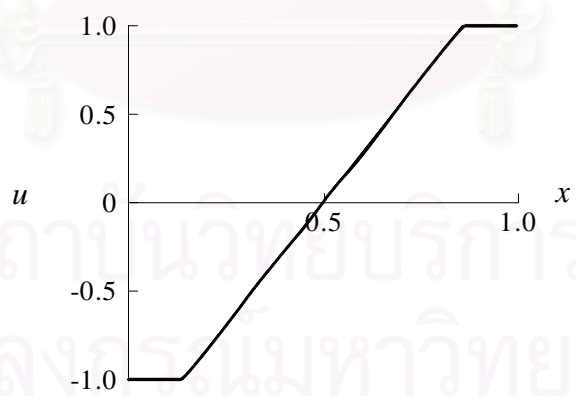
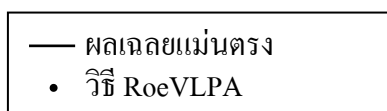
รูปที่ 7.6 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งของปัญหาคลื่นกระจายแบบสมมาตร



(ก) ความหนาแน่น



(ข) ความดัน

(ค) ความเร็วในแนวแกน x 

รูปที่ 7.7 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVLPA ระดับความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นกระจายแบบสมมาตร

7.3.3 ปัญหาคลื่นช็อกตั้งฉากหยุดนิ่ง

ปัญหาคลื่นช็อกตั้งฉากหยุดนิ่ง (stationary normal shock) ปัญหาอีกหนึ่งปัญหาคลื่นช็อกในท่อในหนึ่งมิติ โดยจะทำการทดสอบปัญหากับโดเมนสองมิติดังในรูปที่ 7.3 ข้างต้น โดยทั้งสองข้างของท่อช็อกจะถูกบรรจุด้วยก๊าซที่มีสถานะของไหลแตกต่างกัน ซึ่งสถานะของไหลเริ่มต้นสำหรับทั้งสองข้างของท่อช็อกได้ถูกกำหนดดังในสมการ (7.14) และ (7.15) ตามลำดับ เพื่อก่อให้เกิดคลื่นช็อกตั้งฉากหมายเลข 3 หยุดนิ่งภายในท่อช็อก [48]

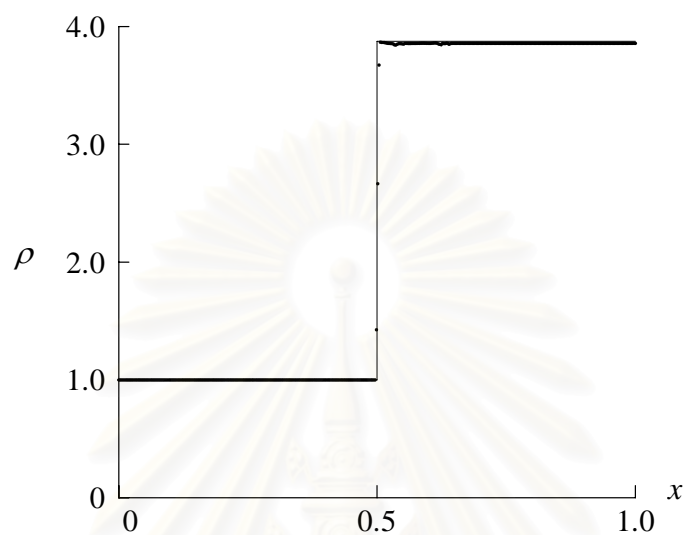
$$[\rho \quad u \quad v \quad p]_L = [1.0 \quad 3.0 \quad 0.0 \quad 0.714] \quad (7.14)$$

$$[\rho \quad u \quad v \quad p]_R = [3.875 \quad 0.778 \quad 0.0 \quad 7.381] \quad (7.15)$$

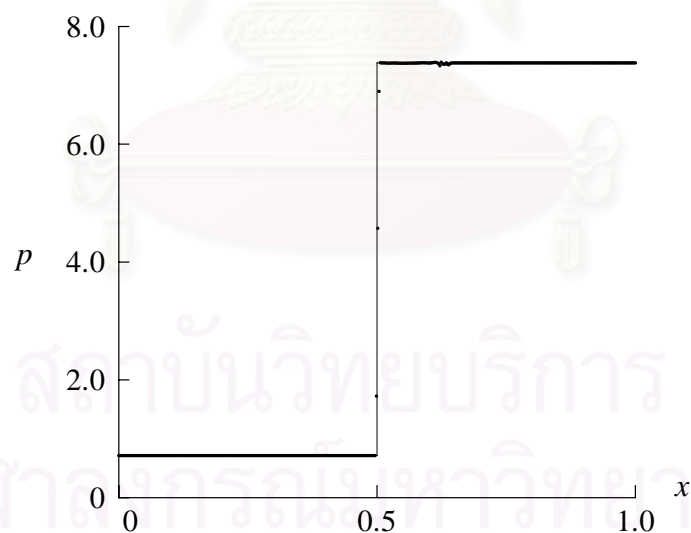
สำหรับปัญหานี้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ สำหรับปัญหาการไหลแบบมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะไม่คงตัว จะถูกทดสอบเฉพาะในระดับความแม่นยำอันดับสองเท่านั้น เพราะจากสองตัวอย่างข้างต้นได้แสดงให้เห็นแล้วว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง มีความถูกต้องแม่นยำมากกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง โดยรูปที่ 7.8 แสดงเส้นกราฟของผลลัพธ์ในระดับความแม่นยำอันดับสอง ของค่าความหนาแน่น และค่าความดันเมื่อการคำนวณผ่านพื้นที่ 500 ครั้งการทำซ้ำ (iteration) [48] ซึ่งจะเห็นได้ว่าสำหรับกรณีตัวอย่างนี้วิธี RoeVLPa ในระดับความแม่นยำอันดับสอง สามารถจับคลื่นช็อกได้ภายใน 5 จุดต่อ (4 ปริมาตรควบคุม) ซึ่งนับว่าเป็นผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงสำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม เพราะโดยปกติการใช้ปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม มักทำให้เกิดปริมาณการกระจายเชิงตัวเลขมากกว่าการใช้ปริมาตรควบคุมสี่เหลี่ยมมุมฉาก เนื่องจากไม่สามารถสร้างปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมที่สามารถวางขนานกับเส้นช็อกได้พอดี

ถ้าหากพิจารณาจากเส้นกราฟของค่าความดันในรูปที่ 7.8 จะเห็นว่าผลลัพธ์การคำนวณที่ได้ตรงบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อกมีการสั่น (oscillation) ซึ่งกรณีเช่นนี้เป็นอีกปัญหาของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ที่ยังไม่สามารถแก้ไขได้อย่างเป็นรูปธรรมที่ชัดเจน ถึงแม้ว่าการสั่นจะเกิดขึ้นเฉพาะบริเวณแคบ ๆ ด้านหลังของเส้นช็อกก็ตาม แต่อาจส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ในส่วนอื่น ๆ ได้เช่นกัน ซึ่งผลกระทบของการสั่นของผลลัพธ์การคำนวณดังกล่าวจะปรากฏชัดเจนเมื่อนำวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ไปใช้แก้ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง โดยเฉพาะผลกระทบต่อผลลัพธ์ในพื้นที่ขอบชั้นของการไหล (boundary

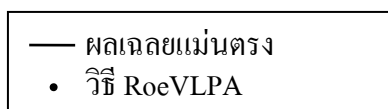
layer) ดังนั้น จึงเป็นอีกหนึ่งปัญหาที่เหมาะสมในการนำมาใช้ทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข



(ก) ความหนาแน่น



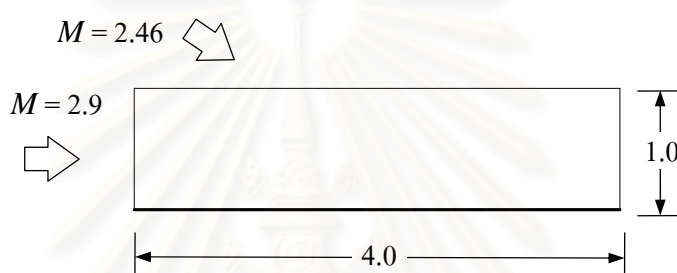
(ข) ความดัน



รูปที่ 7.8 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVLPA ระดับความแม่นยำอันดับสองของปัญหาค่ลิ้นช็อกตั้งฉากหุคหนึ่ง

7.3.4 ปัญหาคลื่นช็อกเอียงสะท้อนกับผนัง

ปัญหาคลื่นช็อกเอียงสะท้อนกับผนัง (oblique shock reflection at a wall) เป็นปัญหาในสองมิติที่ซับซ้อนกว่าปัญหาคลื่นช็อกในท่อในหนึ่งมิติที่ผ่านมา แต่เป็นปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง [72] จึงเหมาะที่จะนำมาใช้ตรวจสอบความถูกต้องของระบบเชิงตัวเลขในสองมิติ โดยกำหนดให้มีของไหลความเร็วเหนือเสียงไหลผ่านโดเมนขนาด 4×1 มาจากด้านซ้ายมือด้วยค่าหมายเลขแมค 2.9 และขณะเดียวกันมีของไหลความเร็วเหนือเสียงไหลผ่านโดเมนด้านบนทำมุม 29° ด้วยค่าหมายเลขแมค 2.46 ดังแสดงในรูปที่ 7.9

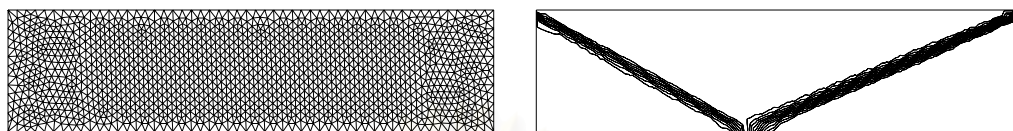


รูปที่ 7.9 ปัญหาคลื่นช็อกเอียงสะท้อนกับผนัง

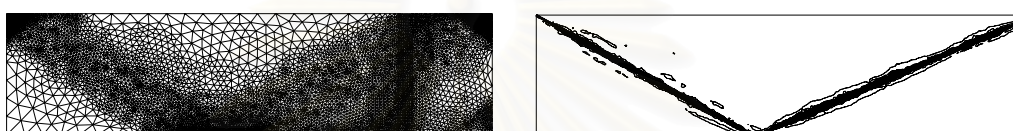
รูปที่ 7.10 แสดงตาข่ายภายหลังการปรับตัวแต่ละครั้งและเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นที่สัมพันธ์กัน โดยเป็นการคำนวณในระดับความแม่นยำอันดับสอง จะเห็นได้ว่าวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ที่น่าเสนอสามารถที่จะจับคลื่นช็อกได้อย่างถูกต้อง ด้วยการวางสามเหลี่ยมขนาดเล็กรอบ ๆ บริเวณคลื่นช็อก และขณะเดียวกันวางสามเหลี่ยมขนาดใหญ่กว่าในบริเวณอื่น ๆ และดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 อัลกอริทึมที่ 3 มีข้อเสียที่สำคัญเนื่องจากไม่สามารถกำหนดสามเหลี่ยมขนาดเล็กที่ใกล้เคียงกัน สำหรับบริเวณที่มีคลื่นช็อกมากกว่าหนึ่งและมีความแข็งแรงไม่เท่ากัน และเมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมที่ 4 ดังในรูปที่ 7.10(จ) และจากอัลกอริทึมที่ 3 ดังในรูปที่ 3.12 จะเห็นว่าภาพเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นในรูปที่ 7.10(จ) มีขนาดบางกว่าและคมชัดกว่าในรูปที่ 3.12 ซึ่งสามารถแสดงศักยภาพของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ที่น่าเสนอได้เป็นอย่างดี

ส่วนรูปที่ 7.11 แสดงเส้นกราฟของค่าความหนาแน่นและความดันที่ตำแหน่ง $x \in [1,4], y = 0.5$ ซึ่งจะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูงมาก โดยที่สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และวิธี RoeVLPA ในระดับความแม่นยำอันดับสอง สามารถจับคลื่นช็อกตกกระทบได้ภายใน 3 จุดต่อ (2 ปริมาตรควบคุม) และจับคลื่นช็อกสะท้อนได้ภายใน 2 จุดต่อ (1 ปริมาตรควบคุม) ซึ่งนับว่า

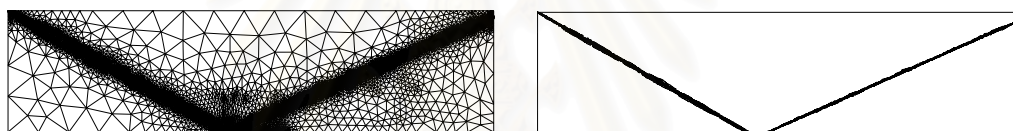
เป็นผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำสูงมากสำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ปริมาตรควบคุมสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบข้างต้น ปริมาตรควบคุมสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้จะมีประสิทธิภาพที่ดีกว่า



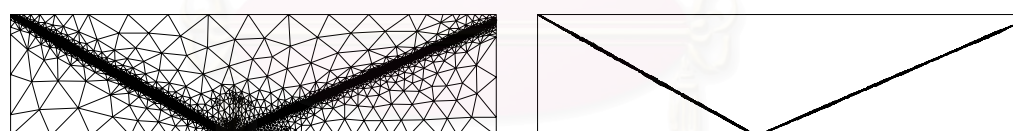
(ก) ตาข่ายเริ่มต้นและเส้นชั้นความหนาแน่น



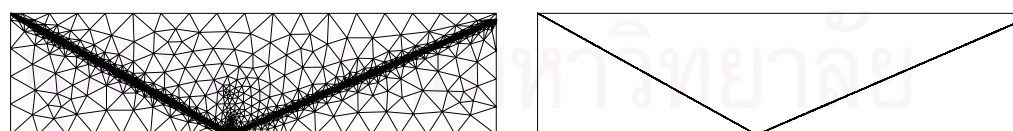
(ข) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นความหนาแน่น



(ค) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นความหนาแน่น

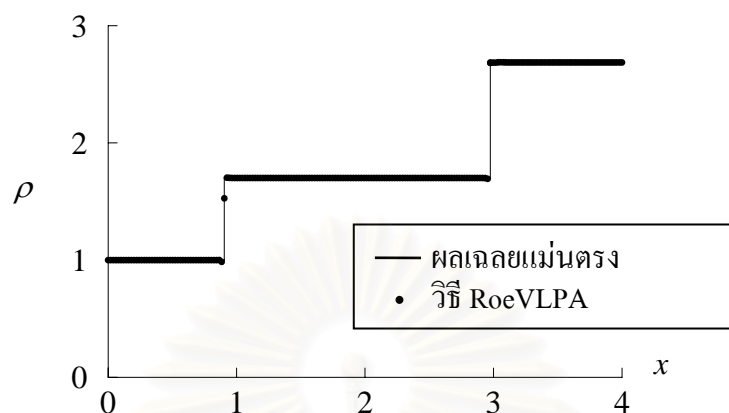


(ง) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 3 และเส้นชั้นความหนาแน่น

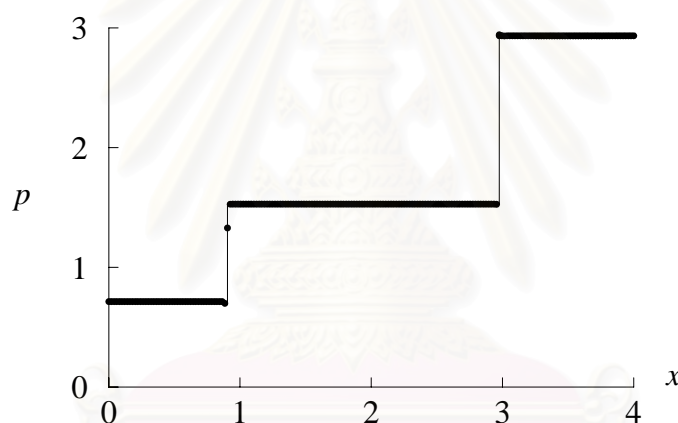


(จ) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งที่ 4 และเส้นชั้นความหนาแน่น

รูปที่ 7.10 ตาข่ายแบบปรับตัวได้และเส้นชั้นความหนาแน่นคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองของปัญหาคลื่นช็อกเอียงสะท้อนกับผนัง



(ก) ความหนาแน่น



(ข) ความดัน

รูปที่ 7.11 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงและวิธี RoeVLPA ระดับความแม่นยำ
อันดับสองของปัญหาคลื่นช็อกเอียงสะท้อนกับผนัง

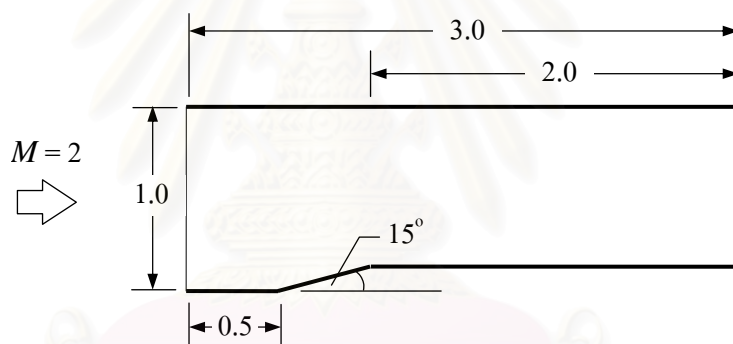
7.4 การประยุกต์กับปัญหาที่มีความซับซ้อน

สำหรับปัญหาตัวอย่างที่นำมาใช้ในการทดสอบเสถียรภาพ และประสิทธิภาพของกระบวนการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และวิธี RoeVLPA ที่ถูกนำเสนอในงานวิจัยนี้ เป็นปัญหาในสองมิติที่มีความซับซ้อนมากกว่าปัญหาในหัวข้อที่แล้ว และมักก่อให้เกิดปรากฏการณ์ของการไหลที่มีความซับซ้อน ดังนั้นในการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ อาจต้องอาศัยการเปรียบเทียบกับผลการทดลอง (ในกรณีที่มีผลการทดลอง) และในบางกรณีอาจใช้วิธีการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีอื่นที่แตกต่างออกไป หรือเปรียบเทียบกับ

ผลลัพธ์ที่ถูกนำเสนอโดยนักวิจัยท่านอื่น ๆ โดยปัญหาที่นำมาทดสอบประกอบด้วยปัญหาการไหล ทั้งในสถานะคงตัวและสถานะไม่คงตัว บนปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยมแบบมีระเบียบและแบบไร้ระเบียบและมีการปรับตัวได้

7.4.1 ปัญหาการไหลหมายเลขมัก 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15°

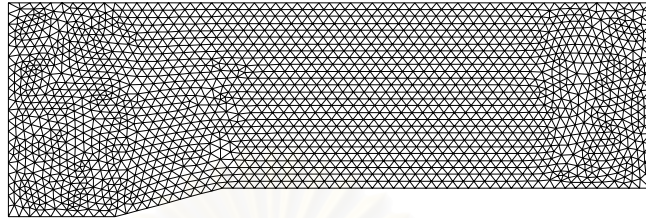
ปัญหาการไหลหมายเลขมัก 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15° (Mach 2 flow in a 15° channel) [47] เป็นปัญหาที่กำหนดค่าให้ของไหลความเร็วเหนือเสียง 2 เท่า วิ่งผ่านภายในพื้นที่ของช่องแคบทำมุม 15° จากซ้ายมาขวามือดังปรากฏในรูปที่ 7.12 โดยจะก่อให้เกิดคลื่นช็อกและคลื่นขยายไปพร้อมกัน โดยคลื่นช็อกตกกระทบกับผนังด้านบนของช่องแคบได้ก่อให้เกิดปรากฏการณ์การสะท้อนของมัก (Mach Reflection) [72] และนอกจากนี้ยังเป็นปัญหาที่แสดงให้เห็นปรากฏการณ์การตกกระทบซึ่งกันและกันระหว่างคลื่นช็อกสะท้อนและคลื่นขยาย



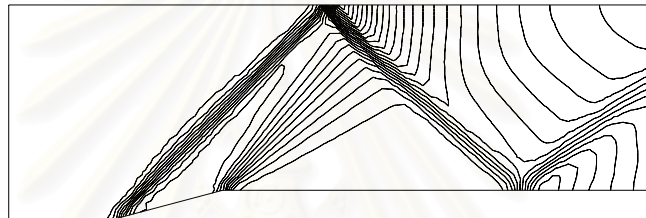
รูปที่ 7.12 ปัญหาการไหลหมายเลขมัก 2 ผ่านช่องแคบทำมุม 15°

รูปที่ 7.13 และ 7.14 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งบนตาข่ายเริ่มต้นและตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายตามลำดับ เมื่อสังเกตจากลักษณะของเส้นชั้นของความหนาแน่น ความดัน และหมายเลขมัก สามารถเห็นความแตกต่างของความคมชัดของคลื่นช็อกอย่างชัดเจน ดังนั้นวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้จึงมีความสำคัญสำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบอัดตัวที่ความเร็วสูง เพราะการวางปริมาตรควบคุมขนาดเล็กลงในบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่องได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม นอกจากช่วยให้เกิดการประหยัดจำนวนปริมาตรควบคุมที่ต้องใช้ในการคำนวณเพื่อให้ได้ความคมชัดของคลื่นช็อกเท่า ๆ กันแล้ว ยังช่วยให้การคำนวณมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น แต่อย่างไรก็ตามดังที่เคยกล่าวมาแล้วข้างต้น การคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง ถึงแม้ว่าการประยุกต์ใช้วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความคมชัดมากขึ้น แต่อาจจะไม่ได้ช่วยเพิ่มความถูกต้องของผลลัพธ์ ดังนั้น

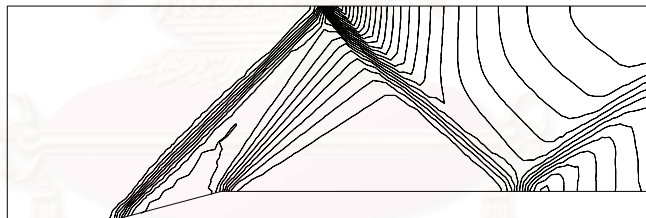
จึงควรที่จะทำการทดสอบปัญหาเดียวกันนี้กับการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองอีกครั้ง เพื่อให้มั่นใจได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องอย่างแท้จริง



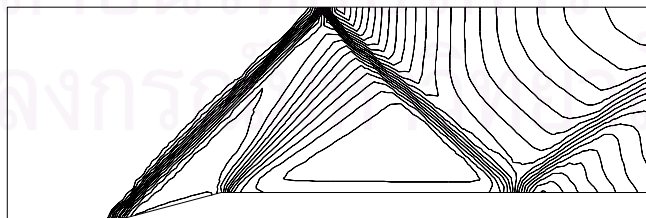
(ก) ตาข่ายเริ่มต้น



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่น

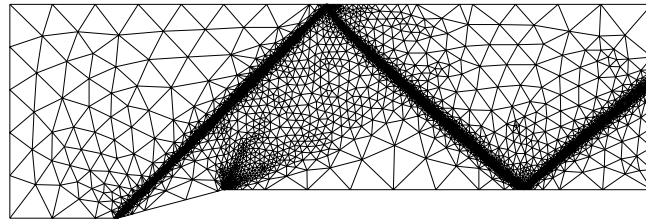


(ค) เส้นชั้นความดัน

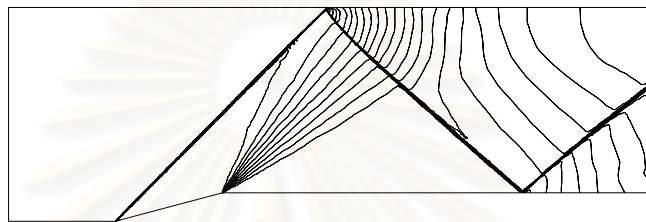


(ง) เส้นชั้นหมายเลขมัด

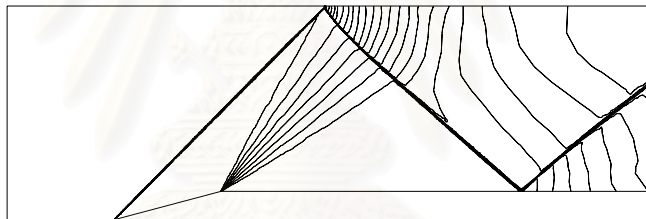
รูปที่ 7.13 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัด 2 ผ่านช่องแคบ ทำมุม 15° บนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง



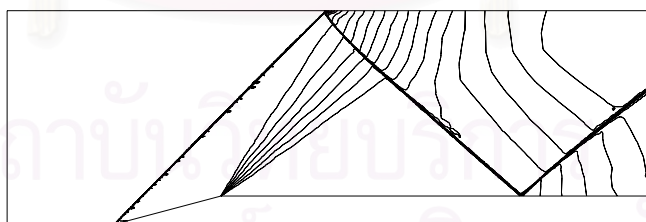
(ก) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้าย



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่น



(ค) เส้นชั้นความดัน

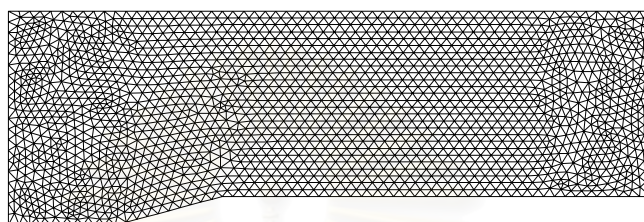


(ง) เส้นชั้นหมายเลขมัค

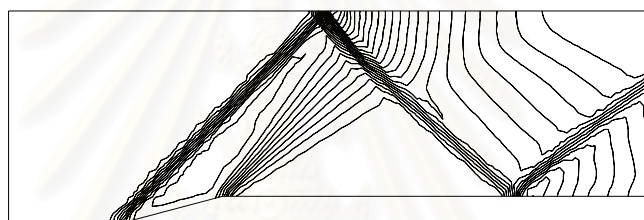
รูปที่ 7.14 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 2 ผ่านช่องแคบ
ทำมุม 15° บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยความแม่นยำอันดับหนึ่ง

รูปที่ 7.15 และ 7.16 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยความแม่นยำอันดับสองบนตาข่ายเริ่มต้นและตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบระหว่างรูปที่ 7.14 และ 7.16 จะเห็นว่าผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยความแม่นยำอันดับสองแสดงให้เห็นถึง

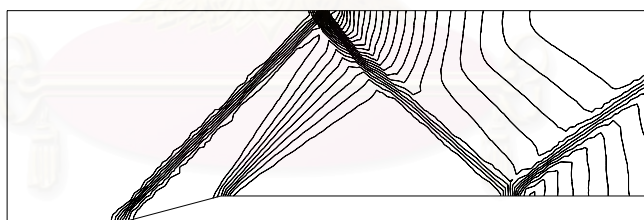
ปรากฏการณ์การสะท้อนของมัลล์ ซึ่งจากการคำนวณพบว่าปรากฏการณ์การสะท้อนของมัลล์จะปรากฏเมื่อมุมยกกระดิ่งเกินกว่า 12.9° และในกรณีนี้มุมยกกระดิ่งเท่ากับ 15° แสดงว่าผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองมีความถูกต้องมากกว่าที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง



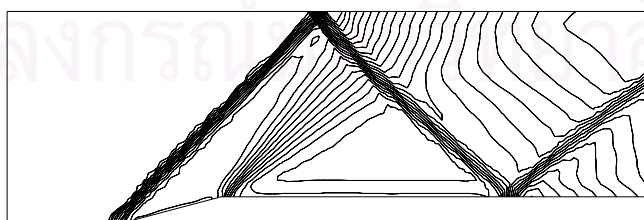
(ก) ตาข่ายเริ่มต้น



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่น

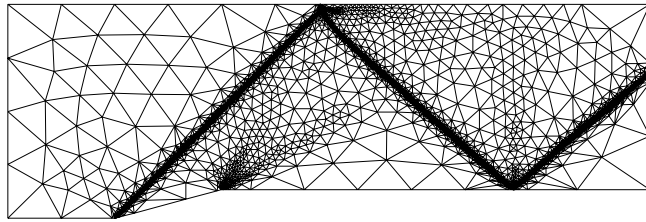


(ค) เส้นชั้นความชัน

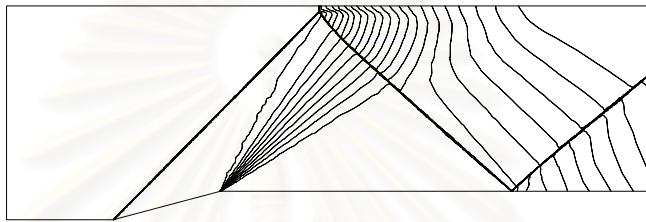


(ง) เส้นชั้นหมายเลขมัลล์

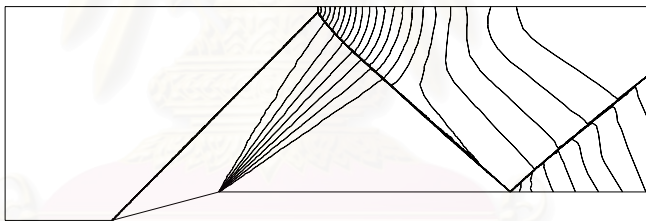
รูปที่ 7.15 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัลล์ 2 ผ่านช่องแคบ
ทำมุม 15° บนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง



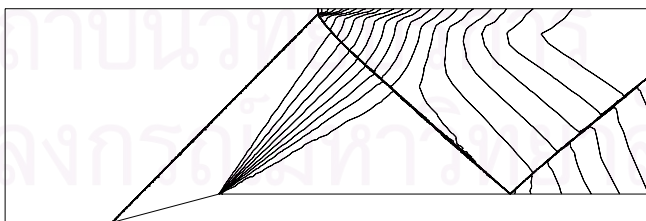
(ก) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้าย



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่น



(ค) เส้นชั้นความดัน

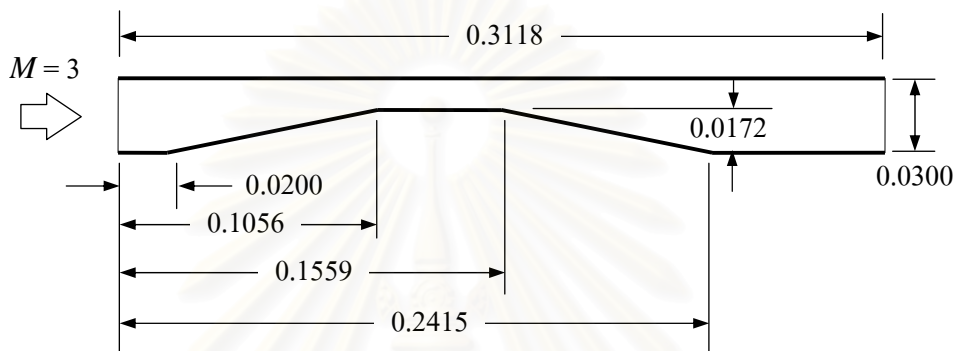


(ง) เส้นชั้นหมายเลขม็อค

รูปที่ 7.16 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขม็อค 2 ผ่านช่องแคบ
ทำมุม 15° บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยความแม่นยำอันดับสอง

7.4.2 ปัญหาการไหลหมายเลขมัก 3 ผ่านช่องคู่เข้าและคู่ออก

ปัญหาการไหลหมายเลขมัก 3 ผ่านช่องคู่เข้าและคู่ออก (Mach 3 flow in a divergent-convergent channel) [48] เป็นปัญหาที่กำหนดให้ของไหลความเร็วเหนือเสียง 3 เท่า วิ่งผ่านภายในพื้นที่ของช่องแคบคู่เข้าและคู่ออกจากซ้ายมาขวามือดังปรากฏในรูปที่ 7.17 โดยจะก่อให้เกิดคลื่นช็อกและคลื่นขยายที่ซับซ้อนไปพร้อม ๆ กัน



รูปที่ 7.17 ปัญหาการไหลหมายเลขมัก 3 ผ่านช่องคู่เข้าและคู่ออก

รูปที่ 7.18 และ 7.19 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งบนตาข่ายเริ่มต้นและตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายตามลำดับ เมื่อสังเกตจากลักษณะของเส้นชั้นของความหนาแน่น ความดัน และหมายเลขมัก สามารถเห็นความแตกต่างของความคมชัดของคลื่นช็อกอย่างชัดเจน โดยเฉพาะอย่างยิ่งคลื่นช็อกสะท้อนจากขอบล่างด้านปลายของช่องคู่ออก ซึ่งเป็นคลื่นช็อกที่มีพลังงานต่ำกว่าคลื่นช็อกสะท้อนจากขอบล่างด้านต้นของช่องคู่เข้า ถ้าหากปริมาตรควบคุมมีขนาดไม่เล็กเพียงพอก็จะไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่สามารถแสดงคลื่นช็อกสะท้อนจากขอบล่างด้านปลายของช่องคู่ออกได้อย่างชัดเจน เช่นเดียวกับคลื่นสะท้อนจากขอบบนด้านปลายของช่องคู่ออกอันเป็นผลเนื่องมาจากการตกกระทบกับผนังด้านบนของคลื่นขยายที่เกิดจากขอบล่างด้านต้นของช่องคู่ออก ดังนั้นจึงเป็นอีกตัวอย่างที่ยืนยันถึงความสำคัญของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้สำหรับการแก้ปัญหาการไหลแบบอัดตัวที่ความเร็วสูง แต่อย่างไรก็ตามดังที่เคยกล่าวมาแล้วข้างต้น เมื่อพิจารณาจากตาข่ายหลังปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายดังที่แสดงในรูปที่ 7.19(ก) จะเห็นว่าสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตามแนวคลื่นช็อกสะท้อนจากขอบล่างด้านปลายของช่องคู่ออก มีขนาดโตขึ้นตามทิศทางการไหลของของไหลแทนที่จะมีขนาดเล็กอย่างสม่ำเสมอตลอดแนวของคลื่นช็อกสะท้อนดังกล่าว ซึ่งส่งผลให้ความคมชัดของแนวคลื่นช็อกสะท้อนลดน้อยลงเช่นกัน ทั้งนี้เนื่องจากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่งให้ผลลัพธ์ที่มีการกระจายเชิง

ตัวเลขสูงเกินไป และสามารถพิสูจน์ได้โดยการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองดังแสดงในรูปที่ 7.20 และ 7.21



รูปที่ 7.18 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัด 3 ผ่านช่องคู่เข้าและคู่ออกบนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง

รูปที่ 7.20 และ 7.21 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองบนตาข่ายเริ่มต้นและตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้ายตามลำดับ เมื่อเปรียบเทียบเส้นชั้นของผลลัพธ์ดังที่แสดงในรูปที่ 7.18 และ 7.19 จะเห็นได้ว่าเส้นชั้นของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองมีความคมชัดมากกว่า โดยเฉพาะคลื่นช็อกสะท้อนจากขอบล่างด้านปลายของช่องคู่ออก โดยปรากฏเป็นเส้นตรงที่มีความบางและคมชัดมากกว่าที่ปรากฏในรูปที่ 7.19 ซึ่งสอดคล้องกับการที่สามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ตามแนวคลื่นช็อกสะท้อนจากขอบล่างด้านปลายของช่องคู่ออก มีขนาดเล็กก่อนข้างสม่ำเสมอตลอดแนวของคลื่นช็อกสะท้อนดังกล่าว แสดงให้เห็นว่าวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และวิธี RoeVLPa ที่นำเสนอสามารถที่จะนำมาประยุกต์ใช้งานร่วมกัน สำหรับแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสถานะคงตัวได้เป็นอย่างดี ส่วนการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสถานะไม่คงตัวจะได้กล่าวถึงในเนื้อหาส่วนถัดไป



(ก) ภาพถ่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้าย



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่น



(ค) เส้นชั้นความดัน



(ง) เส้นชั้นหมายเลขมัค

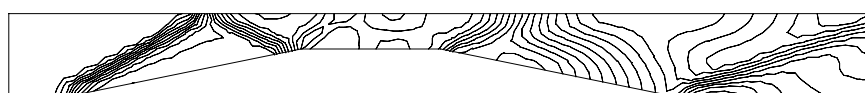
รูปที่ 7.19 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 3 ผ่านช่องคู่เข้าและ
คู่ออกบนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่น

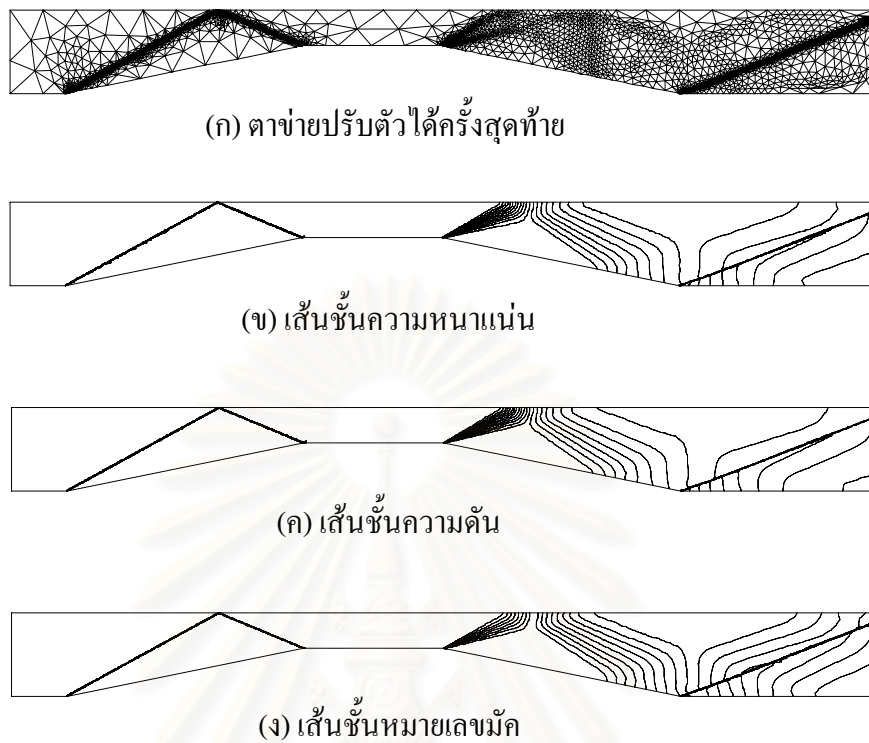


(ค) เส้นชั้นความดัน



(ง) เส้นชั้นหมายเลขมัค

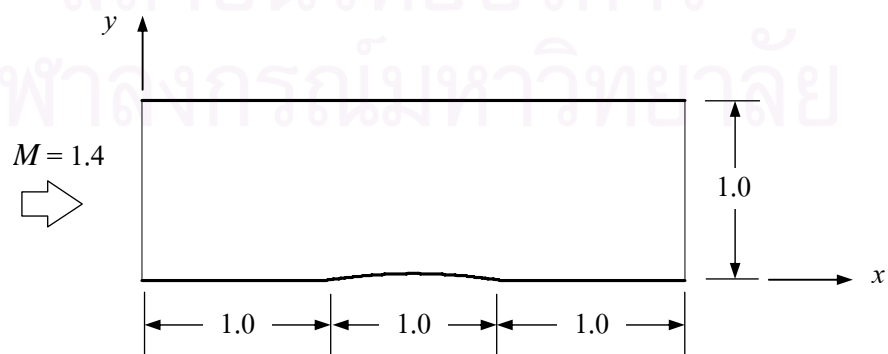
รูปที่ 7.20 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 3 ผ่านช่องคู่เข้าและ
คู่ออกบนตาข่ายเริ่มต้นด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง



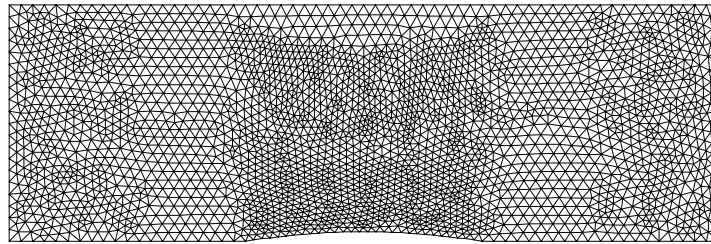
รูปที่ 7.21 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัค 3 ผ่านช่องคู่เข้าและคู่ออกบนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง

7.4.3 ปัญหาการไหลหมายเลขมัค 1.4 ผ่านผนังนูน 4%

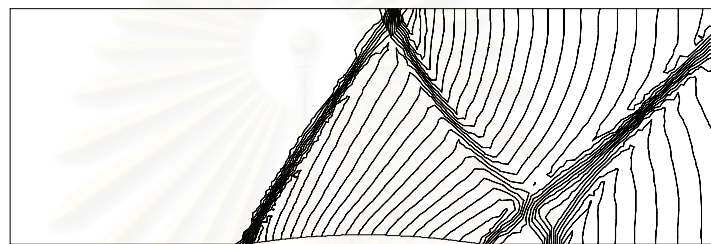
ปัญหาการไหลหมายเลขมัค 1.4 ผ่านผนังนูน 4% (Mach 1.4 flow past a 4% bump) [34,73] เป็นปัญหาที่กำหนดให้ของไหลความเร็วเหนือเสียง 1.4 เท่า วิ่งผ่านผนังนูน 4% ดังปรากฏในรูปที่ 7.22 โดยจะก่อให้เกิดการชนกันของคลื่นช็อกและที่ซับซ้อน



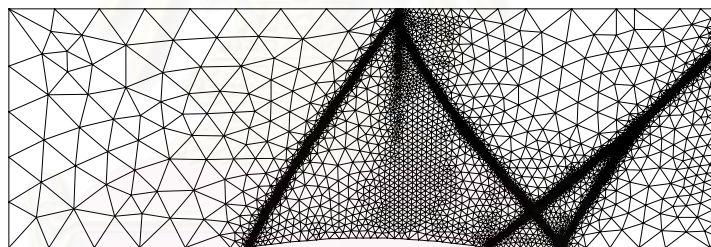
รูปที่ 7.22 ปัญหาการไหลหมายเลขมัค 1.4 ผ่านผนังนูน 4%



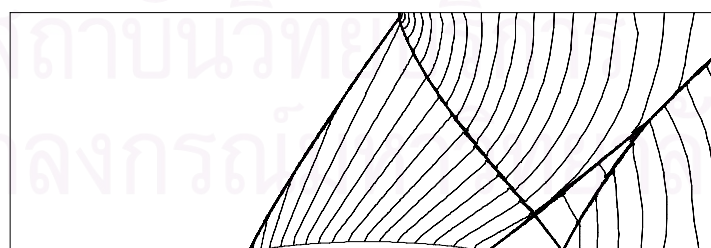
(ก) ตาข่ายเริ่มต้น



(ข) เส้นชั้นความหนาแน่นได้จากตาข่ายเริ่มต้น



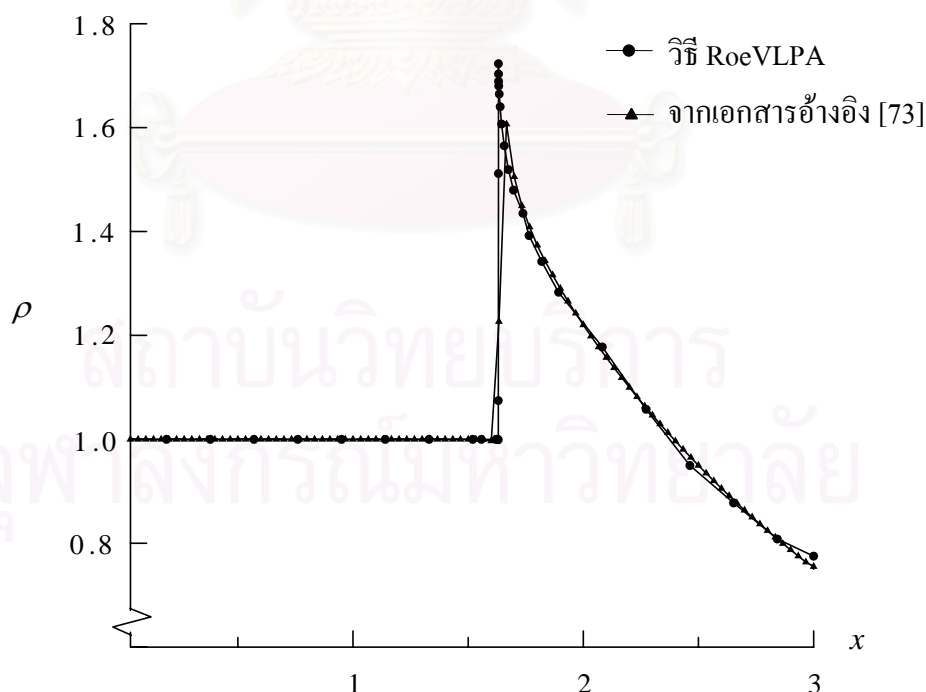
(ค) ตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้าย



(ง) เส้นชั้นความหนาแน่นได้จากตาข่ายปรับตัวได้ครั้งสุดท้าย

รูปที่ 7.23 ผลลัพธ์การคำนวณปัญหาการไหลหมายเลขมัก 1.4 ผ่านผนังนูน 4% บนตาข่ายปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง

จากตัวอย่างที่ผ่าน ๆ มาข้างต้นได้แสดงให้เห็นถึงข้อดีของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง ดังนั้น การแก้ปัญหาตัวอย่างนับแต่นี้เป็นต้นไปจะนำเสนอเฉพาะผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองเท่านั้น โดยรูปที่ 7.23 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระดับความแม่นยำอันดับสองบนตาข่ายเริ่มต้นและตาข่ายภายหลังการปรับตัวครั้งสุดท้าย เนื่องจากลักษณะของเส้นชั้นของความหนาแน่นและความดันของปัญหานี้มีลักษณะคล้ายคลึงกันมาก จึงเลือกที่จะนำเสนอเฉพาะเส้นชั้นของความหนาแน่นเท่านั้น และเมื่อสังเกตจากลักษณะของเส้นชั้นของความหนาแน่น สามารถเห็นได้ว่าลักษณะของคลื่นช็อกที่ปรากฏไม่ว่าจะเป็นคลื่นช็อกตกกระทบ คลื่นช็อกสะท้อน การสะท้อนของมัค หรือการมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างคลื่นช็อกมีความคมชัดและชัดเจนมาก และเป็นอีกหนึ่งตัวอย่างที่ยืนยันถึงความสำคัญของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้สำหรับการแก้ปัญหาคาร์ไหลแบบอัดตัวที่ความเร็วสูง และเพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ รูปที่ 7.24 แสดงเส้นกราฟของความหนาแน่นตลอดแนวนอนของโดเมน ($x \in [0,3], y = 1.0$) เปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากเอกสารอ้างอิง [73] ซึ่งเป็นคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บนเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้มีความใกล้เคียงกันมาก แต่เส้นช็อกที่ได้จากวิธี RoeVLPA มีความคมชัดและถูกต้องมากกว่า



รูปที่ 7.24 การเปรียบเทียบค่าความหนาแน่นตลอดแนวนอนของปัญหาการไหล
หมายเลขมัค 1.4 ผ่านผนังนูน 4% กับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

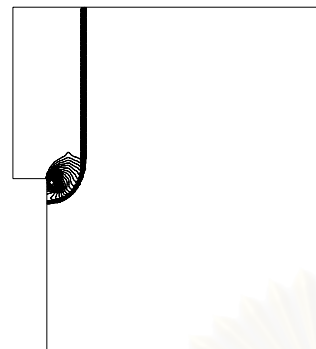
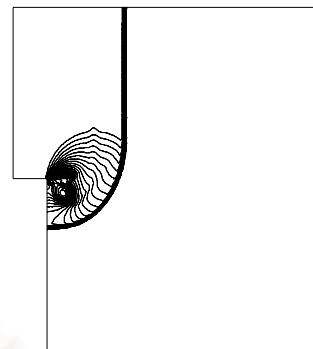
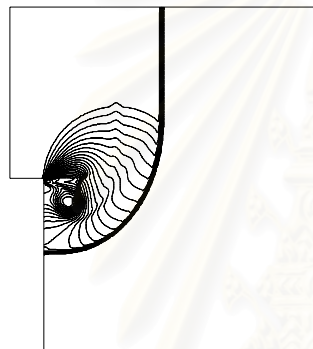
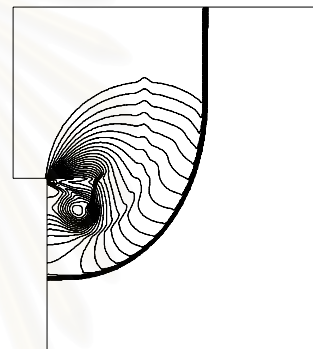
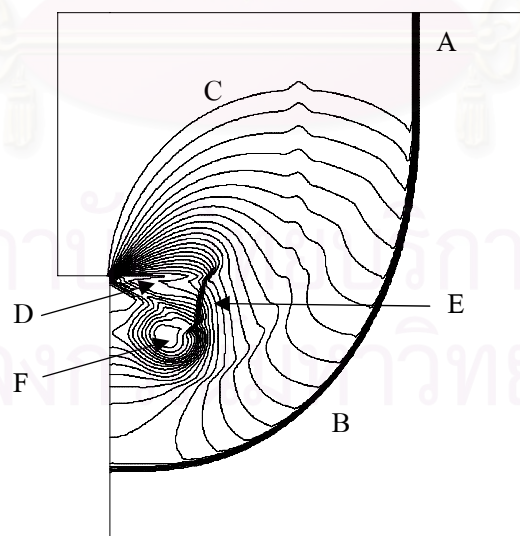
7.4.4 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°

ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90° (Diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner) [47,48,74] เป็นปัญหาที่เหมือนกับที่ได้อธิบายในหัวข้อ 6.1.2 และใช้โดเมนเดียวกับที่ปรากฏในรูปที่ 6.4 โดยกำหนดให้คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) หมายเลข 2 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือ และเมื่อคลื่นช็อกตั้งฉากเคลื่อนที่ผ่านมุมหักลงด้านล่าง 90 องศา ก็จะเกิดการกระจายของคลื่นช็อกตั้งฉากตรงมุมหัก โดยเกิดการเปลี่ยนรูปของคลื่นช็อกตั้งฉาก ซึ่งก่อให้เกิดคลื่นช็อก คลื่นขยาย ผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องและการหมุนตัวของเส้นสตรีม (streamline) จนเกิดปรากฏการณ์วอร์เท็กซ์ (vortex)

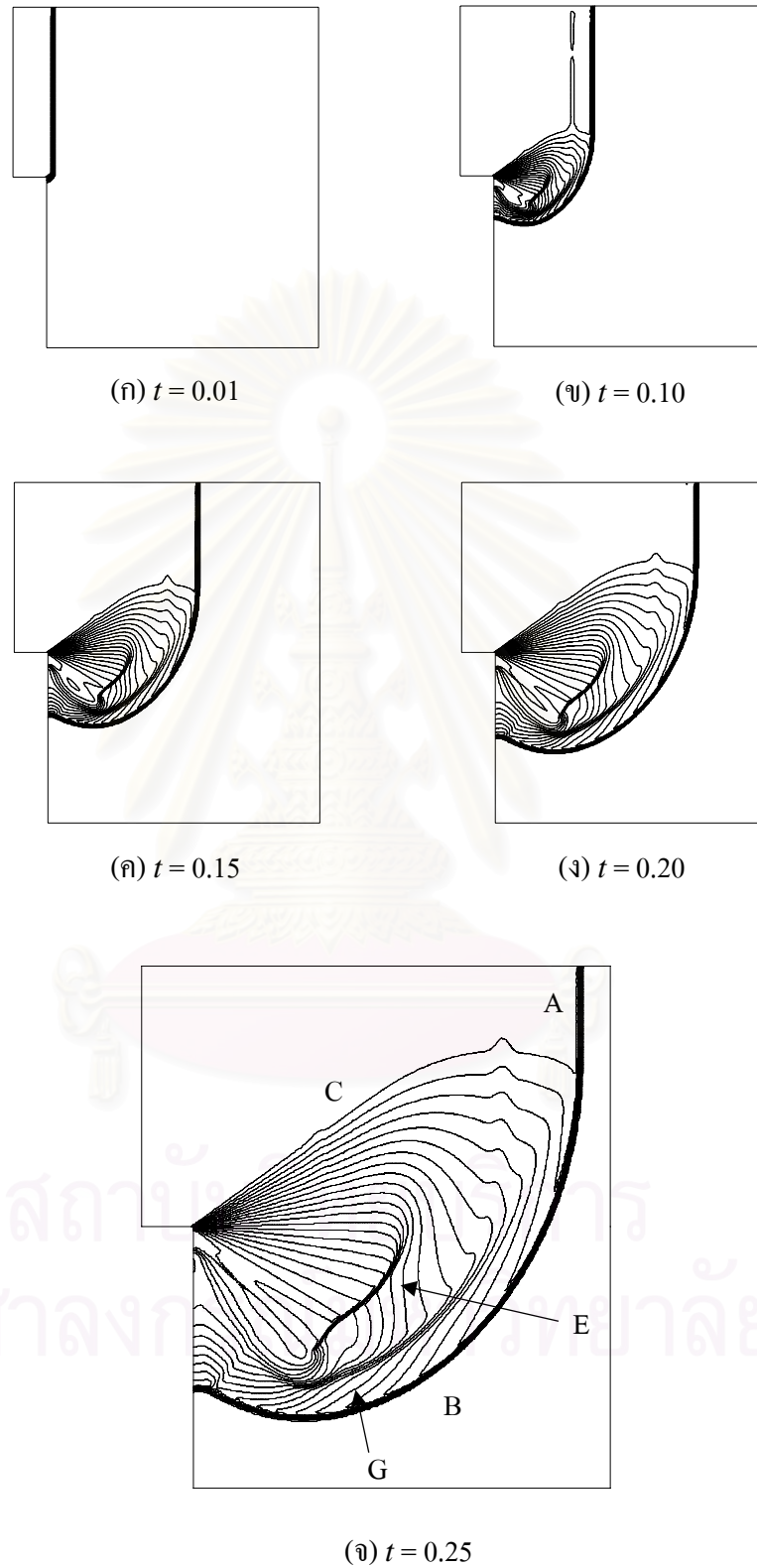
รูปที่ 7.25 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณที่เวลาต่าง ๆ กัน โดยเมื่อพิจารณาจากภาพที่ 7.25(จ) ซึ่งแสดงผลลัพธ์ที่เวลา 0.5 จะเห็นว่า คลื่นช็อกตกกระทบ (A) ยังคงรูปในส่วนบนของโดเมนและเคลื่อนที่มาทางด้านขวา ส่วนด้านล่างของคลื่นช็อกตกกระทบได้เปลี่ยนรูปเป็นคลื่นช็อกกระจาย (diffracted shock, B) และขณะเดียวกันสถานะการไหลที่เคลื่อนที่สู่ทิศต้นน้ำก็ปรากฏเป็นคลื่นขยายสะท้อนกลับ (reflected expansion wave, C) ซึ่งการขยายตัวของคลื่นขยายสะท้อนกลับได้ก่อให้เกิดเส้นสตรีมแยกออกมา (separation streamline, D) และคลื่นช็อกด้านหลัง (rearward-facing shock wave, E) เป็นส่วนที่เกิดขึ้นเพื่อให้เกิดความเชื่อมต่อระหว่างคลื่นขยายและคลื่นช็อกกระจาย และเส้นสตรีมได้เกิดการม้วนตัวเป็นวอร์เท็กซ์ (vortex, F) โดยถ้าหากหมายเลขของคลื่นช็อกตกกระทบสูงเพียงพอ ปรากฏการณ์วอร์เท็กซ์ก็จะไม่ปรากฏให้เห็นอย่างชัดเจนอีกต่อไป

7.4.5 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 5.09 ผ่านมุม 90°

ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 5.09 ผ่านมุม 90° (Diffraction of a Mach 5.09 shock over a 90° corner) [47,48,74] เป็นปัญหาล้ายกับที่อธิบายในหัวข้อ 7.45 แต่กำหนดคลื่นช็อกตั้งฉากหมายเลข 5.09 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือ รูปที่ 7.26 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณที่เวลาต่าง ๆ กัน โดยเมื่อพิจารณาจากภาพที่ 7.26(จ) ซึ่งแสดงผลลัพธ์ที่เวลา 0.25 จะเห็นว่าปรากฏการณ์วอร์เท็กซ์ไม่ปรากฏอย่างชัดเจนเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหาที่แล้ว แต่ปรากฏการณ์ของผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่องหรือสามารถเรียกอีกชื่อว่าแผ่นวอร์เท็กซ์ (contact surface/vortex sheet, G) ปรากฏขึ้นอย่างชัดเจนบริเวณด้านหลังของคลื่นช็อกกระจาย (B) เพื่อแยกส่วนของการไหลเนื่องจากคลื่นช็อกกระจาย (B) ออกจากคลื่นช็อกตกกระทบ (A)

(ก) $t = 0.1$ (ข) $t = 0.2$ (ค) $t = 0.3$ (ง) $t = 0.4$ (จ) $t = 0.5$

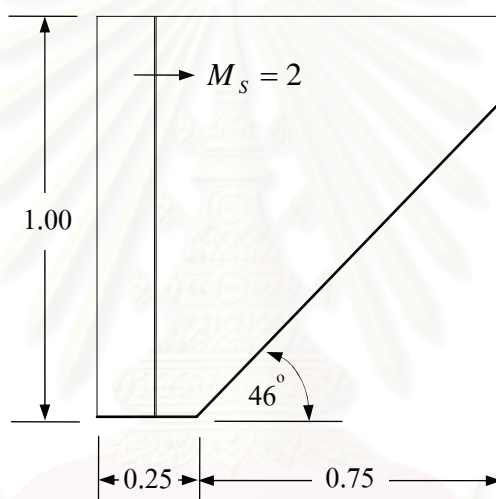
รูปที่ 7.25 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาคลื่นซ็อกหมายเลข 2 ผ่านมุม 90°
บนตาข่ายแบบมีระเบียบด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง



รูปที่ 7.26 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมัก 5.09 ผ่านมุม 90°
บนตาข่ายแบบมีระเบียบด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง

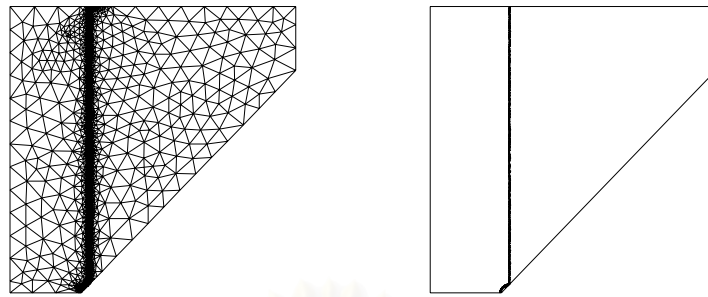
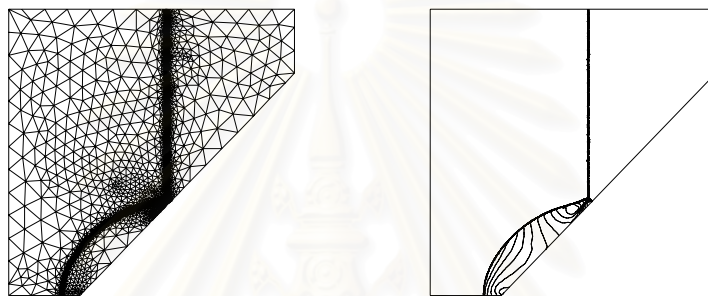
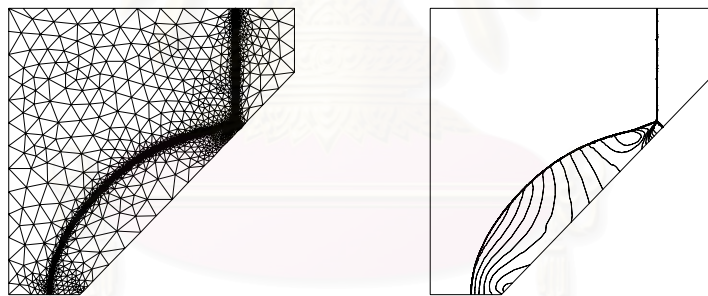
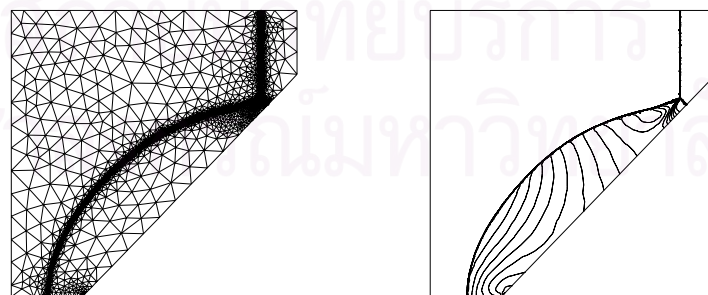
7.4.6 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 2 สะท้อนบนผนังกระดัด

ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 2 สะท้อนบนผนังกระดัด (Mach 2 shock reflection over a wedge) [47,75] เป็นปัญหาที่กำหนดให้คลื่นช็อกตั้งฉาก (normal shock) หมายเลข 2 เคลื่อนที่จากด้านซ้ายมายังด้านขวามือดังแสดงในรูปที่ 7.27 สำหรับปัญหานี้จะถูกใช้ในการทดสอบประสิทธิภาพของวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนและเกิดปรากฏการณ์คลื่นช็อกที่มีพฤติกรรมแตกต่างกันมาก [54] และถ้าหากวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาไม่มีประสิทธิภาพ ก็จะไม่สามารถจับคลื่นช็อกต่าง ๆ ของปัญหาได้อย่างถูกต้อง

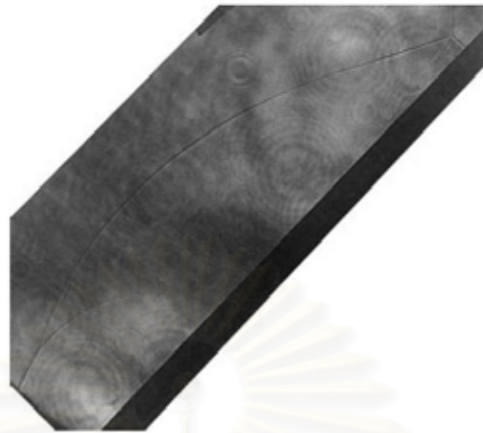


รูปที่ 7.27 ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 2 สะท้อนบนผนังกระดัด

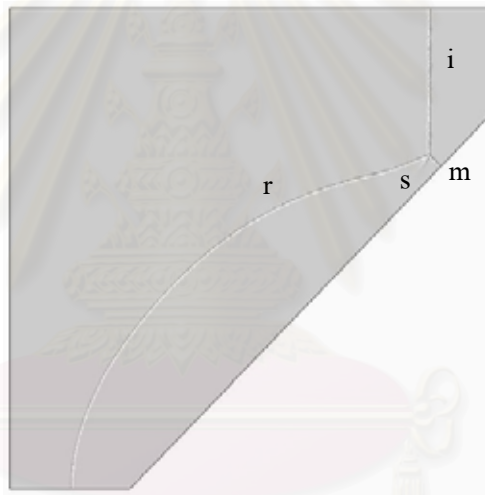
รูปที่ 7.28 แสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นที่ได้จากการคำนวณที่เวลาต่าง ๆ กัน โดยเมื่อพิจารณาจากภาพที่ 7.28(ง) ซึ่งแสดงผลลัพธ์ที่เวลา $t = 0.017$ จะเห็นว่าคลื่นช็อกตกกระทบ (incident shock, i) ปรากฏเป็นเส้นตรงในแนวตั้งอย่างชัดเจนและไม่ปรากฏการแตกกระจายของเส้นช็อกตรงบริเวณด้านบนของโดเมน ขณะเดียวกันก้านมัก (Mach stem, m) ก็ปรากฏเป็นเส้นตรงในแนวตั้งฉากกับพื้นระนาบกระดัดอย่างชัดเจน และไม่ปรากฏปรากฏการณ์โป่งนูนให้เห็น ส่วนคลื่นช็อกสะท้อนกลับ (reflected shock, r) ก็ปรากฏเป็นเส้นโค้งที่ชัดเจนเช่นกัน ส่วนเส้นสตรีมแบ่งพื้นที่การไหล (slipstream, s) อาจจะไม่สามารถแสดงได้อย่างชัดเจนด้วยเส้นชั้นของความหนาแน่น แต่จะปรากฏอย่างเด่นชัดเมื่อใช้เทคนิคการแสดงผลภาพ Shadowgraph ดังแสดงในรูปที่ 7.29 ซึ่งเห็นได้ว่าลักษณะของผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกับผลลัพธ์จากการทดลองที่ปรากฏในเอกสารอ้างอิง [75]

(ก) $t = 0.0010$ (ข) $t = 0.0045$ (ค) $t = 0.0150$ (ง) $t = 0.0170$

รูปที่ 7.28 เส้นชั้นความหนาแน่นของปัญหาคลื่นช็อกหมายเลขมค 2 สะท้อนบนผนังระดับ
บนตาข่ายแบบปรับตัวได้ด้วยระดับความแม่นยำอันดับสอง



(ก) ผลการทดลอง [75]



(ข) วิธี RoeVLPA

รูปที่ 7.29 การเปรียบเทียบรูป shadowgraph จากการทดลองและการคำนวณของ
ปัญหาคลื่นช็อกหมายเลข 2 สะท้อนบนผนังยกระดับ ที่เวลา $t = 0.017$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 8

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์สำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม และการประมาณปริมาณฟลักซ์ด้วยวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ พร้อมกับการประยุกต์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้โดยอัตโนมัติดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านมา ๆ มาสามารถสรุปประเด็นสำคัญ ตลอดจนปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยในอนาคตดังต่อไปนี้

8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ทำการศึกษาเรื่องการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดมีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว โดยการประยุกต์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาที่ทำการศึกษา ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์สำหรับการแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม และการประมาณปริมาณฟลักซ์ที่ได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ จะใช้วิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ (Roe's flux-difference splitting scheme) ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ความแม่นยำสูงโดยเฉพาะความแม่นยำของผลลัพธ์ในบริเวณที่เกิดผิวสัมผัสไม่ต่อเนื่อง ส่วนการคำนวณหาช่วงเวลา (time step) ที่เหมาะสม สำหรับการแก้ระบบสมการออยเลอร์ในสองมิติเชิงตัวเลขด้วยวิธีแบบชัดแจ้ง (explicit method) อย่างมีประสิทธิภาพ ได้ประยุกต์จากวิธีที่นำเสนอโดยลินเดอร์และโรว์ (Linde and Roe) และเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง การแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับสอง (second order spatial and temporal discretization) ภายใต้แนวคิดของการฉายสถานะของการไหลจากจุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมไปยังด้านร่วมของปริมาตรควบคุม จึงถูกนำมาประยุกต์ใช้สำหรับปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม พร้อมกันนั้นเพื่อให้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มมีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนด้วยความถูกต้องแม่นยำของการแบ่งพื้นที่และเวลาอันดับสอง จึงจำเป็นต้องนำเอาตัวจำกัดขอบเขต (limiter) ที่นำเสนอโดย Vankatakrisnan มาประยุกต์ใช้ด้วยกัน

วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เป็นการปรับปรุงประสิทธิภาพจากงานก่อนหน้าของผู้วิจัย [21] ด้วยการปรับปรุงอัลกอริทึม *Adaptive Remeshing* (อัลกอริทึมที่ 4) เสียใหม่ พร้อม ๆ กับการนำเสนอฟังก์ชันการปรับขนาด (scaling function) เพื่อใช้

ในการแก้ไขข้อบกพร่องของตัวชี้วัดขนาดความผิดพลาดชนิดอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง สำหรับปัญหาที่สามารถให้ผลลัพธ์ที่เกิดความไม่ต่อเนื่องภายในโดเมน เช่น คลื่นช็อก เป็นต้น และจากการทดสอบกับฟังก์ชันกำหนดขนาดเอลิเมนต์ต่าง ๆ พบว่าวิธีที่นำเสนอสามารถกำหนดขนาดสามเหลี่ยมได้อย่างถูกต้อง และสามารถวางตำแหน่งของสามเหลี่ยมขนาดเล็กได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้สามเหลี่ยมที่ได้ยังคงเป็นสามเหลี่ยมที่มีคุณภาพสูง เพราะมีความใกล้เคียงกับสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งจะส่งผลดีต่อผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

วิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ถึงแม้ว่าจะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ แต่ก็ยังมีข้อเสียอยู่หลายประการ โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อเสียด้านความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข ดังที่ได้แสดงในบทที่ 6 ที่ผ่านมา สามารถสรุปได้ว่าความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขของวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่มหลัก ๆ คือ กลุ่มแรกเป็นความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติหรือผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขเอนโทรปีของแเล็กซ์ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 โดยสามารถก่อให้เกิดความเป็นไปได้ใน 2 กรณี กรณีแรกเกิดคลื่นช็อกขยาย (expansion shock) หรือกรณีที่สองกระบวนการแก้ปัญหาลู่ออก (diverge) และทำให้สถานะของการไหล เช่น ค่าความหนาแน่นหรือค่าความดันน้อยกว่าศูนย์ เป็นต้น ส่วนกลุ่มที่สองเป็นความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขในแง่ที่ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติแต่ยังคงเป็นไปตามเงื่อนไขเอนโทรปีของแเล็กซ์ เช่น การเกิดปรากฏการณ์โป่งนูน (carbuncle phenomena) เป็นต้น จากนั้นตัวอย่างปัญหาที่สามารถก่อให้เกิดความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลขทั้งสองกลุ่ม ได้ถูกนำมาทดสอบกับวิธี RoeVL, RosSA และ RoePA ซึ่งเป็นวิธีที่ถูกลำเสนอโดยนักวิจัยในอดีตสำหรับใช้แก้ไขปัญหาดังกล่าว และจากการทดสอบพบว่าแต่ละวิธีที่กล่าวถึงไม่สามารถที่จะแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นกับทุก ๆ กรณีที่นำมาทดสอบ ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้นำเสนอวิธี RoeVLPa ซึ่งจากการทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ พบว่าสามารถแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นกับทุก ๆ กรณีที่นำมาทดสอบ

เมื่อทำการวิเคราะห์ถึงที่มาของปัญหาโดยอาศัยแนวคิดของหลิว (Liou) ที่ได้ตั้งข้อสังเกตไว้ว่า ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดก็ตามที่ให้ผลลัพธ์ในสมการอนุพันธ์มวล $D^{(p)}(U_L, U_R) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ M เมื่อทำการคำนวณที่เวลามากขึ้นไป ความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข เช่น ปรากฏการณ์โป่งนูน สามารถที่จะเกิดขึ้นมาได้ ในทางกลับกันถ้าหากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใดก็ตามที่ให้ผลลัพธ์ในสมการอนุพันธ์มวล $D^{(p)}(U_L, U_R) = 0$ สำหรับทุก ๆ M ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถที่จะมีเสถียรภาพมากพอที่จะไม่ก่อให้เกิดความไร้เสถียรภาพเชิงตัวเลข พบว่าวิธี RoeVLPa ที่ได้นำเสนอสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์ตามแนวคิดของหลิวเป็นอย่างดี และสอดคล้องกับผลการทดสอบเชิงตัวเลขกับปัญหาต่าง ๆ ดังที่นำเสนอในบทที่ 6

สุดท้ายจึงทำการทดสอบความถูกต้องและความมีเสถียรภาพ ของกระบวนการที่นำเสนอโดยการผสมผสานการประยุกต์วิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้โดยอัตโนมัติเข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซนเตอร์ สำหรับการแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมรูปทรงสามเหลี่ยม และการประมาณปริมาณฟลักซ์ด้วยวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบไร้ความหนืดที่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูงในสภาวะคงตัวและไม่คงตัว พบว่า หลาย ๆ ปัญหาได้ให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำ และสำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนและไม่มีการเฉลยแม่นยำ วิธีที่นำเสนอก็สามารถให้ผลลัพธ์ที่ค่อนข้างแม่นยำเมื่อเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง

8.2 ปัญหาที่พบ

สำหรับปัญหาที่พบในขณะดำเนินการวิจัย สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเด็น ดังนี้ ประเด็นแรก เป็นปัญหาเกี่ยวกับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้ ถึงแม้ว่าวิธีที่นำเสนอจะให้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจ และสามารถประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาก็เป็นข้อดี แต่ก็ยังมีจุดอ่อนในหลายประเด็น เช่น การที่ไม่สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์บางตัว เช่น h_{\min} , h_{\max} , χ_{\min} หรือ χ_{\max} เป็นต้น ได้อย่างอัตโนมัติ จึงส่งผลให้การใช้งานอาจจะประสบกับความยุ่งยากสำหรับผู้ใช้งานที่ขาดประสบการณ์ หรือการที่จำเป็นต้องทำการสร้างสามเหลี่ยมแบบปรับตัวได้หลาย ๆ ครั้ง เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและสามารถแสดงผลได้อย่างคมชัด ซึ่งความจำเป็นดังกล่าวทำให้ต้องเสียเวลาพอสมควรกับการแก้ปัญหานั้นในแต่ละครั้ง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อนำมาใช้แก้ปัญหาการไหลในสภาวะไม่คงตัว และถ้าหากปัญหามีขนาดใหญ่อาจจะต้องใช้เวลาในการประมวลผลค่อนข้างมากทีเดียว

ประเด็นที่สอง เป็นปัญหาเกี่ยวกับการแก้ไขความไร้เสถียรภาพของวิธีการแบ่งแยกผลต่างฟลักซ์ของโรว์ ถึงแม้ว่าวิธี RoeVLPA ที่นำเสนอจะสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวที่นำเสนอโดยนักวิจัยท่านอื่น ๆ ได้ทั้งหมดและสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานกับปัญหาที่มีความซับซ้อนจำนวนมากก็ตาม แต่ในทางทฤษฎีถึงแม้เราจะสามารถพิสูจน์การเพิ่มปริมาณการกระจาย (dissipation) ที่กำหนดให้กับวิธี RoeVLPA เป็นการกระทำที่ถูกต้อง แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้อย่างชัดเจนว่าปริมาณการกระจาย (dissipation) ที่กำหนดให้กับวิธี RoeVLPA นั้นเป็นปริมาณที่เหมาะสมหรือไม่ ดังนั้น จึงไม่อาจสรุปได้อย่างสมบูรณ์แบบว่าวิธี RoeVLPA สามารถใช้ได้ผลกับทุก ๆ กรณีของการไหล

ดังนั้น ข้อจำกัดที่พบใน 2 ประเด็นข้างต้น จึงควรที่จะได้รับการวิจัยเพิ่มเติม เพื่อก่อให้เกิดความสมบูรณ์แบบกับระเบียบวิธีที่น่าเสนอ และให้สามารถมั่นใจได้ว่ากระบวนการแก้ปัญหาดังกล่าวสามารถประยุกต์ใช้ได้ผลกับทุก ๆ กรณีของการไหลอย่างมีเสถียรภาพ

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 8.2 ข้อจำกัดที่พบใน 2 ประเด็นข้างต้น ยังคงเป็นประเด็นที่น่าสนใจและควรที่จะได้รับการวิจัยเพิ่มเติม นอกจากนี้ถ้าหากกลับไปพิจารณาจากรูปที่ 7.8 ของปัญหาในหัวข้อ 7.3.3 สามารถสังเกตได้ว่าการสั้นของผลลัพท์ที่ได้จากการคำนวณเกิดขึ้นเฉพาะบริเวณแคบ ๆ ด้านหลังของเส้นซ็อก แสดงว่าวิธี RoeVSPA ที่นำเสนอไม่สามารถแก้ไขปัญหาการสั้นของผลลัพท์ ซึ่งผลกระทบของการสั้นของผลลัพท์การคำนวณดังกล่าวจะปรากฏชัดเจนเมื่อนำวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ไปใช้แก้ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง โดยเฉพาะผลกระทบต่อผลลัพท์ในพื้นที่ขอบชั้นของการไหล ดังนั้น จึงเป็นอีกประเด็นที่น่าสนใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อต้องการนำวิธีการแบ่งแยกผลต่างพลักซ์ของโรว์ไปใช้แก้ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่มีการอัดตัวที่ความเร็วสูง ซึ่งเป็นปัญหาที่มีความใกล้เคียงกับพฤติกรรมการไหลของของไหลในธรรมชาติมากกว่าปัญหาการไหลแบบไม่หนืด

รายการอ้างอิง

1. von Neumann, J. and Richtmyer, R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. Journal of Applied Physics 21 (1950) : 232-257.
2. Hirsch, C. Numerical computational of internal and external flows Vol 1: Fundamentals of numerical discretization. New York : John Wiley & Sons, 1990.
3. Liou, M. S. and Steffen, C. J. A new flux splitting scheme. Journal of Computational Physics 107 (1993) : 23-39.
4. Roe, P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. Journal of Computational Physics 43 (1981) : 357-372.
5. van Leer, B. Flux-vector splitting for the Euler equations. ICASE Technical Report 82-30. Langley : NASA Langley Research Center, 1982.
6. Perry, K. M. and Imlay, S. T. Blunt-body flow simulations. AIAA paper 88-2904, 1988.
7. Einfeldt, B., Munz, C. D., Roe, P. L. and Sjogreen, B. On Godunov-type methods near low densities. Journal of Computational Physics 92 (1991) : 273-295.
8. Quirk, J. J. A contribution to the great Riemann solver debate. International Journal for Numerical Methods in Fluids 18 (1994) : 555-574.
9. Van Leer, B., Lee, W. T. and Powell, K. G. Sonic-point capturing. AIAA Paper-89-1945-CP, 1989.
10. Lin, H. C. Dissipation additions to flux-difference splitting. Journal of Computational Physics 117 (1995) : 20-27.
11. Gressier, J. and Moschetta, J. M. Robustness versus accuracy in shock-wave computations. International Journal for Numerical Methods in Fluids 33 (2000) : 313-332.
12. Roe, P. L., Nishikawa, H., Ismail, F. and Scalabrin, L. On carbuncles and other excrescences. AIAA paper 2005-4872, 2005.
13. Bowyer, A. Computing Dirichlet tessellations. The Computer Journal 24 (1981) : 162-166.
14. Watson, D. F. Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. The Computer Journal 24 (1981) : 167-172.
15. Weatherill, N. P. Delaunay triangulation in computational fluid dynamics. Computers and Mathematics with Application 24 (1992) : 129-150.
16. Karamete, B. K., Tokdemir, T. and Ger, M. Unstructured grid generation and a simple triangulation algorithm for arbitrary 2-D geometries using object oriented

- programming. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40 (1997) : 251-268.
17. Frey, W. H. and Field, D. A. Mesh relaxation: A new technique for improving triangulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 31 (1991) : 1121-1133.
18. Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. and Zienkiewicz, O. C. Adaptive remeshing for compressible flow computations. Journal of Computational Physics 72 (1987) : 449-466.
19. Probert, J., Hassan, O., Peraire, J. and Morgan, K. An adaptive finite element method for transient compressible flows. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32 (1991) : 1145-1159.
20. Kumar, K. S. V., Babu, K. V. R., Seetharamu, K. N., Sundararajan, T. and Narayana, P. A. A generalized Delaunay triangulation algorithm with adaptive grid size control. Communications in Numerical Methods in Engineering 13 (1997) : 941-948.
21. สุทธิศักดิ์ พงษ์ชนาพานิช. การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลไม่คงตัวความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และไร้ความหนืดในสองมิติด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทบริหารธุรกิจ สาขาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.
22. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics 49 (1983) : 357-393.
23. Xu, K. and Li, Z. Dissipation mechanisms in Godunov-type schemes. International Journal for Numerical Methods in Fluids 37 (2001) : 1-22.
24. Dumbser, M., Moschetta, J. M. and Gressier, J. A matrix stability analysis of the carbuncle phenomenon. Journal of Computational Physics 197 (2004) : 647-670.
25. Preparata, F. P. and Shamos, M. I. Computational geometry: An introduction. New York : Springer-Verlag, 1985.
26. Thompson, J. F., Soni, B. K. and Weatherill, N. P. Handbook of grid generation. Boca Raton : CRC Press LLC, 1999.
27. Edelsbrunner, H. Triangulations and meshes in computational geometry. Acta Numerica (2000) : 133-213.

28. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Evaluation of combined Delaunay triangulation and remeshing for finite element analysis of conductive heat transfer. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering 27 (2004) : 319-339.
29. Lawson, C.L. Software for C^1 surface interpolation: Mathematical software III. Edited by J.R. Rice. New York : Academic Press, 1977.
30. Sloan, S. W. A fast algorithm for generating constrained Delaunay triangulations. Computers and Structures 47 (1993) : 441-450.
31. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Adaptive Delaunay triangulation with object-oriented programming for crack propagation analysis. Finite Element in Analysis and Design 40 (2004) : 1753-1771.
32. Dechaumphai, P. and Morgan, K. Transient thermal-structural analysis using adaptive unstructured remeshing and mesh movement: Thermal Structures and Materials for High-Speed Flight. Washington D. C. : AIAA, 1992.
33. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Two-dimensional adaptive mesh generation algorithm and its application with higher-order compressible flow solver. KSME International Journal 18 (2004) : 2190-2204.
34. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Mixed entropy flux method for Roe's flux-difference splitting scheme with automatic mesh adaptation. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering 28 (2004) : 531-550.
35. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. Journal of Algorithm 18 (1995) : 548-585.
36. Borouchaki, H., George, P. L. and Mohammadi, B. Delaunay mesh generation governed by metric specifications: part II Application. Finite Elements in Analysis and Design 25 (1997) : 85-109.
37. Sanders R., Morano E. and Druguet, M. C. Multidimensional dissipation for upwind schemes: Stability and applications to gas dynamics. Journal of Computational Physics 145 (1998) : 511-537.
38. Pandolfi, M. and D'Ambrosio, D. Numerical instabilities in upwind methods: Analysis and cures for the "Carbuncle" phenomenon. Journal of Computational Physics 166 (2001) : 271-301.

39. Lax, P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Communications on Pure and Applied Mathematics 7 (1954) : 159-193.
40. Lax, P. D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Communications on Pure and Applied Mathematics 10 (1957) : 537-566.
41. Courant, R. and Friedrichs, K. O. Supersonic flow and shock waves. New York : Interscience, 1948.
42. John, F. Partial differential equations. 4th edition. New York : Springer-Verlag, 1982.
43. Smoller, J. Shock waves and reaction-diffusion equations. 2nd edition. New York : Springer-Verlag, 1994.
44. Sod, G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics 27 (1978) : 1-31.
45. Hirsch, C. Numerical computational of internal and external flows Vol 2: Computational methods for inviscid and viscous flows. New York : John Wiley & Sons, 1990.
46. Medvidova, M. L. Numerical modeling in computational fluid dynamics. Hamburg : Technical University Hamburg-Harburg, 2003.
47. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Flux-difference splitting scheme with modified multidimensional dissipation on unstructured meshes. Journal of the Chinese Institute of Engineers 27 (2004) : 981-992.
48. Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P. Modified multidimensional dissipation scheme on unstructured meshes for high-speed compressible flow analysis. International Journal of Computational Fluid Dynamics 18 (2004) : 631-640.
49. Godunov, S. K. A Finite-difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. Matematicheskii Sbornik 47 (1959) : 271-306.
50. Courant, R., Friedrichs, K. O. and Lewy, H. On the partial difference equations of mathematical physics. IBM Journal 11 (1967) : 215-234.
51. Vijayan P. and Kallinderis, Y. A 3D finite-volume scheme for the Euler equations on adaptive tetrahedral grids. Journal of Computational Physics 113 (1994) : 249-267.
52. Linde, T. and Roe, P. L. Robust Euler codes. AIAA Paper-97-2098, 1997.

53. Woodward P. and Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. Journal of Computational Physics 54 (1984) : 115-173.
54. Ben-Dor, G. and Takayama K. The phenomena of shock wave reflection - a review of unsolved problems and future research needs. Shock Waves 2 (1992) : 211-223.
55. Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S. High-speed compressible flow solutions by adaptive cell-centered upwinding algorithm with modified H -correction entropy fix. Advances in Engineering Software 34 (2003) : 533-538.
56. Liou, M. S. Mass flux schemes and connection to shock instability. Journal of Computational Physics 160 (2000) : 623-648.
57. Einfeldt, B. On Godunov-type methods for gas dynamics. SIAM Journal on Numerical Analysis 25 (1988) : 294-318.
58. Hanel, D. and Schwane, R. An implicit flux-vector scheme for the computation of viscous hypersonic flows. AIAA Paper-89-0274, 1989.
59. Frink, N. T. and Pirzadeh, S. Z. Tetrahedral finite-volume solutions to the Navier-Stokes equations on complex configurations. NASA/TM-1998-208961, 1998.
60. Frink, N. T., Parikh, P. and Pirzadeh, S. A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes. AIAA Paper-91-0102, 1991.
61. Shu, C. W. and Osher, S. Efficient implementation of Essentially Non-Oscillatory shock-capturing schemes. Journal of Computational Physics 77, (1988) : 439-471.
62. Vekatakrishnan, V. Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters. Journal of Computational Physics 118 (1995) : 120-130.
63. Van Albada, G. D., Van Leer, B. and Roberts, W. W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. Astronomy and Astrophysics 108 (1982) : 76-84.
64. Roache, P. J. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. Annual Review Fluid Mechanics 29 (1997) : 123-160.
65. Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. Journal of Computational Physics 14 (1974) : 361-370.
66. Van Leer, B. Towards the ultimate conservation difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method. Journal of Computational Physics 32 (1979) : 101-136.

67. Barth, T. J. and Jespersen, S. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA paper 89-0366, 1989.
68. Lottati, I. and Eidelman, S. A second-order Godunov scheme on a spatial adapted triangular grid. Applied Numerical Mathematics 14 (1994) : 353-365.
69. Jawahar, P. and Kamath, H. A high-resolution procedure for Euler and Navier-Stokes computations on unstructured grids. Journal of Computational Physics 164 (2000) : 165-203.
70. Toro, E. F., Spruce, M. and Speares, W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. Shock Waves 4 (1994) : 25-34.
71. Steger, J. L. and Warming, R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with applications to finite difference methods. Journal of Computational Physics 40 (1981) : 263-293.
72. Anderson, J. D. Computational fluid dynamics: The basics with applications. New York : McGraw-Hill, 1995.
73. Hendriana, D. and Bathe, K. J. On a parabolic quadrilateral finite element for compressible flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 186 (2000) : 1-22.
74. Hillier, R. Computation of shock wave diffraction at a ninety degrees convex edge. Shock Waves 1 (1991) : 89-98.
75. Takayama, K. and Jiang, Z. Shock wave reflection over wedges: A benchmark test for CFD and experiments. Shock Waves 7 (1997) : 191-203.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

บทความ High-speed compressible flow solutions by adaptive cell-centered upwinding algorithm with modified H -correction entropy fix

Advances in Engineering Software 34 (2003) 533–538

ADVANCES IN
ENGINEERING
SOFTWARE

www.elsevier.com/locate/advengsoft

High-speed compressible flow solutions by adaptive cell-centered upwinding algorithm with modified H -correction entropy fix

P. Dechaumphai*, S. Phongthanapanich

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand

Abstract

Adaptive Delaunay triangulation is combined with the cell-centered upwinding algorithm to analyze high-speed compressible flow problems. The H -correction entropy fix is modified and included in the upwinding algorithm for unstructured triangular meshes to improve the computed shock wave resolution. The solution accuracy is further improved by coupling an error estimation procedure to a remeshing algorithm. Efficiency of the combined procedure is evaluated by analyzing supersonic shocks and shock propagation behaviors for both the steady and unsteady high-speed compressible flows.

© 2003 Published by Elsevier Ltd.

Keywords: Compressible flow; Cell-centered upwinding; Entropy fix; Carbuncle phenomenon

1. Introduction

High-speed compressible flows normally involve complex flow phenomena, such as shock waves, flow expansions, and shock-shock interactions [1]. The cell-centered upwinding algorithm based on the Roe's flux averaging [2] is widely used for solutions due to its efficiency for providing solution accuracy with less computational effort. The algorithm, however, may produce unrealistic results near shock waves especially for flow at high mach numbers. One of such results is referred as the carbuncle phenomenon [3] that arises due to the use of one-dimensional upwinding numerical flux for multidimensional problems. The algorithm may, in addition, introduce an excessive numerical dissipation to other regions where it is particularly harmful, such as in the boundary layer. To avoid this effect, the H -correction entropy fix has been introduced and applied to the cell-centered upwinding algorithm for structured rectangular meshes [4]. In this paper, the H -correction entropy fix is modified for unstructured triangular meshes arbitrarily generated from the adaptive Delaunay triangulation technique. The Delaunay triangulation [5,6] is used to construct triangular meshes for arbitrary two-dimensional geometries. The mesh refinement introduced by Weatherill and Hassan [7], and presented as Object Oriented

Programming by Karamete et al. [8], are used to generate nodes inside the domain. To improve the analysis solution accuracy, an adaptive remeshing procedure with the second derivative type error indicator [9] is also implemented into the Delaunay triangulation. The efficiency of the combined procedure is evaluated by analyzing a series of both steady and unsteady high-speed compressible flows.

2. Numerical technique

The finite volume formulation of two-dimensional Euler equations for high-speed compressible flows of an element with domain Ω may be written in the form,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \tilde{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \tilde{F} \cdot n dS = \int_{\Omega} \tilde{J} d\Omega, \quad (1)$$

where Ω is a control volume. \tilde{U} is the vector of conservative variables, \tilde{F} is the vector of the convective fluxes, and \tilde{J} is the source term vector. The Roe's approximate Riemann solver is implemented in the framework of the cell-centered scheme. The numerical flux, passing through a shared side of the two adjacent left and right elements, is given by

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{2} [(F_{nL} + F_{nR}) - R|A|R^{-1}(U_R - U_L)], \quad (2)$$

where R is the right eigenvectors matrix, and $|A|$ is the diagonal matrix of the eigenvalues $|\lambda|$.

* Corresponding author. Tel/fax: +66-2-218-6621.

E-mail address: fmepec@eng.chula.ac.th (P. Dechaumphai).

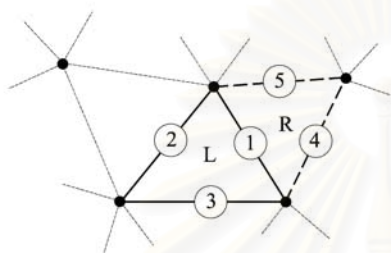


Fig. 1. Cell interfaces of a typical unstructured triangular mesh.

The Roe's approximate Riemann solver is one of the most successful approaches for capturing shock waves with high solution accuracy. However, according to the study of Quirk [3], some unrealistic results have been found in certain problems such as the carbuncle phenomenon. Such phenomenon refers to a protuberant shock profile appears in the computation of blunt-body problems, and a planar moving shock in a duct where a centerline grid is perturbed (odd–even decoupling). To cure these problems, the *H*-correction entropy fix proposed in Ref. [4] for structured rectangular meshes is modified for unstructured triangular meshes. For the triangular cell interfaces as shown in Fig. 1, the proposed *H*-correction entropy fix is

$$\eta^H = \frac{1}{2} \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5), \tag{3}$$

where η_i , $i = 1-5$ are determined from

$$\eta_i = \frac{1}{2} \max_i (|\lambda_{iR} - \lambda_{iL}|). \tag{4}$$

Then the acoustic eigenvalues $|\hat{\lambda}|$ are modified according to Ref. [10] yielding the $|\hat{\lambda}|^*$ such that

$$|\hat{\lambda}|^* = \max(|\hat{\lambda}|, \eta^H). \tag{5}$$

To evaluate the ability of the modified *H*-correction entropy fix as described above for triangular meshes, the problem of a mach 8 flow past a blunt body is used. Fig. 2(a) shows the computational domain with a uniform triangular mesh that consists of 15 nodes in radial direction and 140 nodes in tangential direction. The density contours of spurious solution obtained from the original Roe's scheme with the carbuncle phenomenon is shown in Fig. 2(b). The carbuncle-free solution using the modified *H*-correction entropy fix based on the equations as described above is shown in Fig. 2(c).

The second problem is a mach 6 moving shock along odd–even grid perturbation of a straight duct. The computational domain consists of a uniform triangular mesh with 801 nodes along the axial direction of the duct and 21 nodes in the transverse direction. The nodes along the centerline is perturbed in the transverse direction with magnitude of $\pm 10^{-6}$ [3]. Fig. 3(a)–(d) show density contours of the normal shock obtained from the original Roe's scheme at various positions. The figures show the deteriorate shock shape after $x \approx 50$, and then the numerical instability becomes progressively worse until the shock breaks down. The same problem is repeated using of the Roe's scheme with the modified *H*-correction entropy fix. The predicted density contours at the same positions are shown in Fig. 3(e)–(h). The figures show accurate shock resolution as it propagates through the duct.

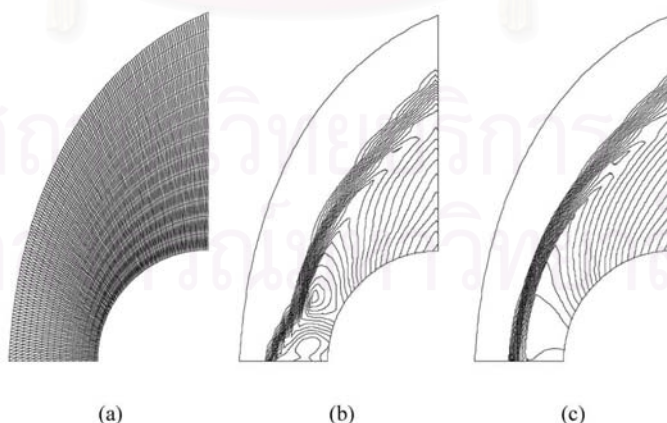


Fig. 2. A mach 8 inviscid flow past a blunt body: (a) computational domain; (b) density contours (Roe's scheme); and (c) density contours (Roe's scheme with modified *H*-correction entropy fix).

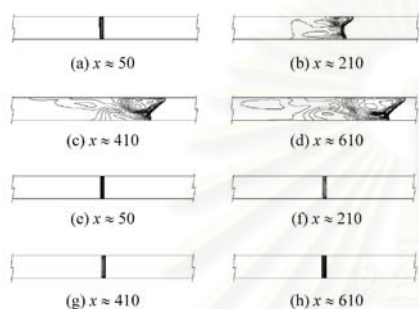


Fig. 3. A mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation: (a)–(d) density contours (Roe's scheme); and (e)–(h) density contours (Roe's scheme with modified H -correction entropy fix).

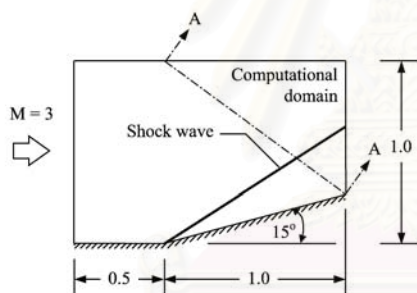
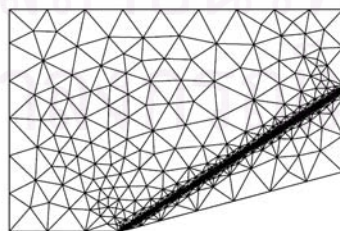


Fig. 4. Problem statement of a mach 3 flow past a 15 degrees wedge.

3. Algorithm evaluation

To further evaluate the capability of the combined adaptive Delaunay triangulation and the cell-centered upwinding algorithm with the modified H -correction



(a)



(b)

Fig. 5. A mach 3 flow past a 15° wedge: (a) adaptive mesh; and (b) density contours.

entropy fix, four simulations of both the steady and unsteady compressible flows are used. The two examples of steady flow and two examples of transient flow are: (1) a mach 3 flow past a 15 degrees wedge, (2) a mach 15.3 flow past a cylinder, (3) a shock wave propagation in a tube, and (4) a shock wave propagation from underwater explosion.

3.1. Mach 3 flow past a 15 degrees wedge

The problem statement of a mach 3 steady-state compressible flow past a 15 degrees wedge is presented in Fig. 4. The adaptive mesh consisting of 11,847 elements and the corresponding density contours of the problem are shown in Fig. 5(a) and (b), respectively. Fig. 6(a) and (b) shows the predicted density and mach number solutions of the adaptive mesh along the section A–A as compared to the exact solutions.

3.2. Mach 15.3 flow past a cylinder

The problem statement of a steady-state mach 15.3 flow past a cylinder is described in Fig. 7. Fig. 8 shows the adaptive mesh consisting of 36,986 elements, as well as the resulting density, pressure and mach number contours. With this mesh, good flow resolution quality including very sharp bow shock is obtained from the combined procedure as shown in Fig. 8(b)–(d).

3.3. Shock wave propagation in a tube

The first transient flow test case used for evaluation the efficiency of the adaptive cell-centered upwinding algorithm with the modified H -correction entropy fix is the unsteady shock wave propagation in a tube. The two regions of the tube are separated by a diaphragm at the middle of the tube [1]. The pressure ratio across the diaphragm is initially prescribed as 10. Fig. 9 shows the predicted normalized density, pressure and velocity distributions at time $t = 2$ ms compared to the exact solution. Fig. 9(d) shows the adaptive

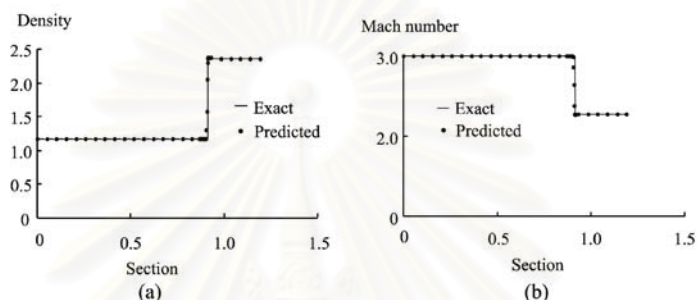


Fig. 6. Exact and predicted solutions along section A-A for a mach 3 flow past a 15 degrees wedge: (a) density distributions; and (b) mach number distributions.

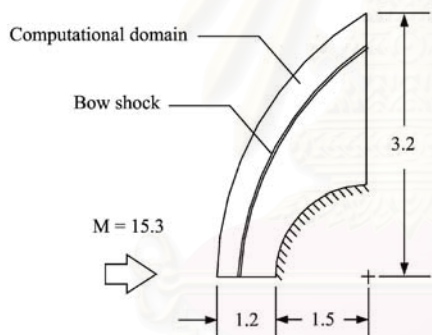


Fig. 7. Problem statement of a mach 5.3 flow past a cylinder.

mesh which consists of 40,179 triangles, as well as resulting density and pressure contours.

3.4. Shock wave propagation from underwater explosion

To further evaluate the efficiency of the algorithm, the shock wave propagation from an underwater explosion is investigated. The stiffened gas equation of state for compressible medium is given by Ref. [11]

$$pe = \frac{p + \gamma p_\infty}{\gamma - 1}, \tag{6}$$

where γ is a constant and p_∞ is a pressure-like constant. For water, $\gamma = 5.5$ and $p_\infty = 492$ MPa. Fig. 10 shows the problem statement describing the dimensions of the computational domain in meters and the shock wave phenomenon generated from the initial pressure of 12 GPa

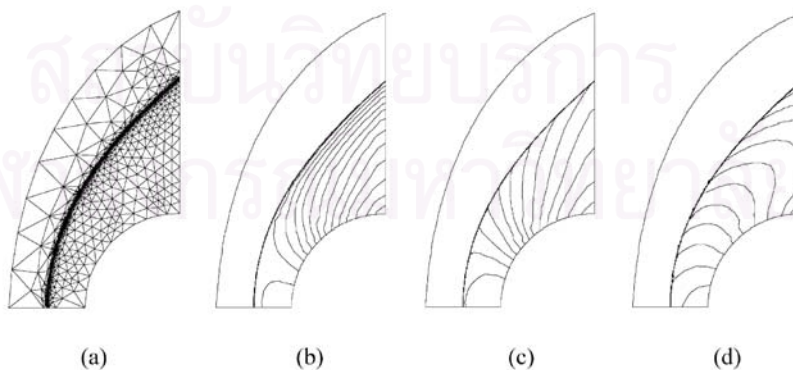


Fig. 8. A mach 15.3 flow past a cylinder: (a) adaptive mesh; (b) density contours; (c) pressure contours; and (d) mach number contours.

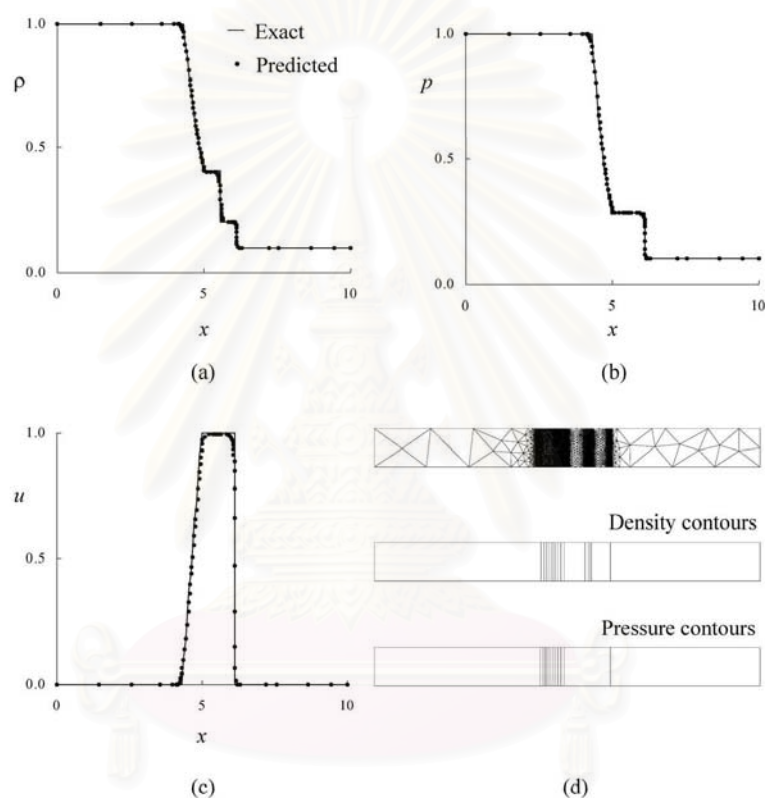


Fig. 9. Comparisons of exact solutions with the predicted numerical solutions at time $t = 2$ ms for shock wave propagation in a tube: (a) normalized density; (b) normalized pressure; (c) normalized velocity; and (d) adaptive mesh, density and pressure contours.

at the center of explosion. Fig. 11 shows series of the transient adaptive meshes and the corresponding predicted pressure contours at different times as the half-circular shock propagates from the center of explosion.

Small elements are generated to capture the half-circular shock wave accurately, while larger elements are generated in other regions to minimize the total number of unknowns and the computational time.

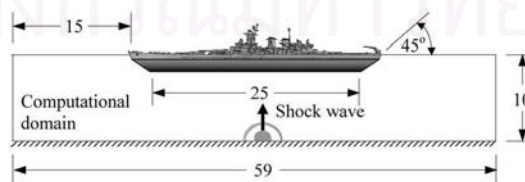


Fig. 10. Problem statement of a shock wave propagation from an underwater explosion.

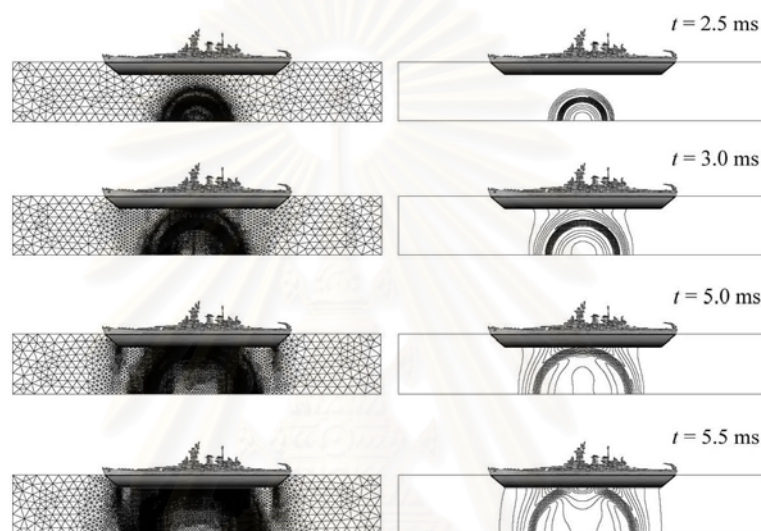


Fig. 11. Transient adaptive meshes and the predicted pressure contours for a shock wave propagation from an underwater explosion.

4. Conclusion

Adaptive Delaunay triangulation was combined with the cell-centered upwinding algorithm for solving high-speed compressible flows. The H -correction entropy fix was modified for using with the unstructured triangular meshes. The method was evaluated using the problems of a mach 8 flow past a blunt body and a mach 6 moving shock along odd–even grid perturbation in a duct. The results show that the method can eliminate the unrealistic carbuncle phenomenon and provide accurate shock resolution. The combined procedure was then further evaluated for the two steady-state flow examples of a mach 3 flow past a wedge and a mach 15.3 flow past a blunt body; and another two transient flow examples of the shock wave propagations in a tube and from an underwater explosion. These examples show that the adaptive cell-centered upwinding algorithm with the modified H -correction entropy fix can provide high solution accuracy with reduced computational effort for high-speed compressible flow problems.

Acknowledgements

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) and the Royal Thai Navy for supporting this research work.

References

- [1] Anderson JD. Modern compressible flow with historical perspective, 2nd ed. New York: McGraw-Hill; 1990.
- [2] Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J Comput Phys* 1981;43:357–72.
- [3] Quirk JJ. A contribution to the great Riemann solver debate. *Int J Numer Meth Fluids* 1994;18:555–74.
- [4] Sanders R, Morano E, Draguet MC. Multidimensional dissipation for upwind schemes: stability and applications to gas dynamics. *J Comput Phys* 1998;145:511–37.
- [5] Watson DF. Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with application to voronoi polytopes. *Compos J* 1981;24:167–72.
- [6] Sloan SW. A fast algorithm for generating constrained Delaunay triangulations. *Compos Struct* 1993;47:441–50.
- [7] Weatherill NP, Hassan O. Efficient three-dimension Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints. *Int J Numer Meth Engng* 1994;37:2005–39.
- [8] Karamete BK, Tokdemir T, Ger M. Unstructured grid generation and a simple triangulation algorithm for arbitrary 2D geometries using object oriented programming. *Int J Numer Meth Engng* 1997;40:251–68.
- [9] Dechaumphai P, Morgan K. Transient thermal-structural analysis using adaptive unstructured remeshing and mesh movement. *Thermal structures and materials for high-speed flight*. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 1992.
- [10] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J Comput Phys* 1983;49:357–93.
- [11] Shiyue KM. An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems. *J Comput Phys* 1998;142:208–42.

บทความ Modified multidimensional dissipation scheme on unstructured meshes for high-speed compressible flow analysis

International Journal of Computational Fluid Dynamics, December 2004 Vol. 18 (8), pp. 631-640



Modified Multidimensional Dissipation Scheme on Unstructured Meshes for High-speed Compressible Flow Analysis

S. PHONGTHANAPANICH and P. DECHAUMPHAI*

Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand

A Roe's flux-difference splitting scheme, combining with the entropy fix method according to Van Leer *et al.*, and the *H*-correction entropy fix method by Pandolfi and D'Ambrosio, is proposed. The presented scheme eliminates unphysical flow behaviors such as a spurious bump of the carbuncle phenomenon that occurs on the bow shock from flow over a blunt body, and the expansion shock generated from flow over a forward facing step. The proposed scheme is further extended to obtain high-order spatial and temporal solution accuracy. The scheme is, in addition, combined with an adaptive meshing technique that generates unstructured triangular meshes to resemble the flow phenomena for reducing computational effort. The entire procedure is evaluated by solving several benchmarks as well as complex steady-state and transient high-speed compressible flow problems.

Keywords: Shock instabilities; Carbuncle phenomenon; Roe's FDS; Entropy fix; *H*-correction

INTRODUCTION

High-speed compressible flows normally involve complex flow phenomena, such as strong shock waves, shock-shock interactions and shear layers. Various numerical inviscid flux formulations have been proposed to solve an approximate Riemann problem. Among these formulations, the flux-difference splitting scheme by Roe (1981) is widely used due to its accuracy, quality and mathematical clarity. However, the scheme may sometimes lead to unphysical flow solutions in certain problems, the carbuncle phenomenon (Perry and Inlay, 1988) with a spurious bump in the bow shock from flow over a blunt body. The scheme could not provide accurate solutions for the complex impinging shock phenomenon yielding kinked Mach stem (Quirk, 1994) generated from a moving shock over a ramp. In the odd-even decoupling problem, an unrealistic perturbation may grow with the planar shock as it moves along the duct. To improve the solution accuracy of these problems, Quirk (1994) pointed out that the original Roe's scheme should be modified in the vicinity of strong shock.

The main objective of this paper is to propose and evaluate a modified Roe's scheme with adaptive unstructured meshes for two-dimensional high-speed compressible flow analysis. The entropy fix method by Van Leer *et al.* (1989) and the multidimensional dissipation

technique of Pandolfi and D'Ambrosio (2001) are modified for unstructured triangular meshes and implemented into the original Roe's scheme.

The presentation in this paper starts with the describing of some well-known problems, which exhibit the numerical shock instability from the Roe's scheme in the second section. The entropy fix methods of Van Leer *et al.* (1989); Sanders *et al.* (1998); Pandolfi and D'Ambrosio (2001) are examined to investigate their capabilities as well as the solution accuracy. The modified Roe's scheme with a mixed entropy fix method is then proposed in the third section. The presented scheme is further extended to high-order solution accuracy and then evaluated by several benchmark test cases in the fourth section. Finally, the scheme with adaptive unstructured meshes is applied for solving both the steady-state and transient high-speed compressible flow problems to demonstrate its performance.

NUMERICAL SHOCK INSTABILITY

Some certain problems for which the Roe's scheme may not provide correct solutions for the compressible Euler computation are presented in this section. Unphysical numerical solutions may arise from the implementation of the one-dimensional upwinding numerical flux

*Corresponding author. Tel./Fax: +66-2-218-6621. E-mail: fnepd@eng.chula.ac.th

function onto the multidimensional formulation. To avoid such solutions, three entropy fix methods (Van Leer *et al.*, 1989; Sanders *et al.*, 1998; Pandolfi and D'Ambrosio, 2001) have been recently suggested because of their simplicity and convenient code implementation. These entropy fix methods are presented herein and their performances are determined by test cases. All solutions in this section use the Roe's scheme with the first-order accuracy on structured triangular meshes.

Roe's Flux-difference Splitting Scheme with Dissipation

The governing differential equations of the Euler equations for the two-dimensional inviscid flow are given by,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

where \mathbf{U} is the vector of conservation variables, and \mathbf{E} and \mathbf{G} are the vectors of the convection fluxes in the x and y directions, respectively. The perfect gas equation of state is in the form,

$$p = \rho e(\gamma - 1) \quad (2)$$

where p is the pressure, ρ is the density, e is the internal energy and γ is the specific heat ratio.

By integrating Eq. (1) over a control volume, Ω , and applying the divergence theorem to the resulting flux integral,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (3)$$

where \mathbf{F} is the numerical flux vector and $\hat{\mathbf{n}}$ is the unit normal vector of the cell boundary. The numerical flux vector at the cell interface between the left cell L and the right cell R according to Roe's scheme (1981) is,

$$\mathbf{F}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{nL} + \mathbf{F}_{nR}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \alpha_k |\lambda_k| \mathbf{r}_k \quad (4)$$

where α_k is the wave strength of the k -th wave, λ_k is the eigenvalue and \mathbf{r}_k is the corresponding right eigenvector. The eigenvalues in the above Eq. (4) are,

$$\lambda_k = \begin{bmatrix} V_n - a \\ V_n \\ V_n \\ V_n \\ V_n + a \end{bmatrix} \quad (5)$$

where V_n is the normal velocity and a is the speed of sound at the cell interface.

The original Roe's scheme previously described has been found to produce unphysical solutions such as the expansion shock from a flow over a step, and the carbuncle phenomenon of a flow over a blunt body. To avoid such unphysical solutions, the entropy fix methods (Harten, 1983; Van Leer *et al.*, 1989; Lin, 1995; Sanders *et al.*, 1998; Pandolfi and D'Ambrosio, 2001; Dechaumphai and Phongthanapanich, 2003) have been proposed and investigated. The three versions of the entropy fix methods by Van Leer *et al.*, Pandolfi and D'Ambrosio and Sanders *et al.*, are first evaluated for structured meshes herein. These methods are then extended to unstructured meshes and presented later in this paper.

The Van Leer's entropy fix method (RoeVL) is designed to correct the unphysical expansion shock. The one-dimensional entropy fix was developed by replacing the characteristic speeds of the acoustic waves (for $k = 1$ and 4) with,

$$|\lambda_k|^* = \begin{cases} |\lambda_k|, & |\lambda_k| \geq 2\eta^{VL} \\ \frac{|\lambda_k|^2}{4\eta^{VL}} + \eta^{VL}, & |\lambda_k| < 2\eta^{VL} \end{cases} \quad (6)$$

where

$$\eta^{VL} = \max(\lambda_R - \lambda_L, 0) \quad (7)$$

Sanders *et al.* introduced an idea of a multidimensional dissipation, the so-called H -correction entropy fix method. The method has shown to eliminate the unrealistic carbuncle phenomenon of the flow over a blunt body in the structured uniform mesh as shown in Fig. 1(a). The advantages of the method are the simplicity in the implementation into the existing scheme and the parameter-free characteristics. For the two triangular cells shown in Fig. 1(b), the H -correction entropy fix according to Sanders *et al.* (RoeSA) has been modified as described by Dechaumphai and Phongthanapanich (2003) to,

$$\eta^{SA} = \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (8)$$

where η_i , $i = 1, \dots, 5$ is given as,

$$\eta_i = \frac{1}{2} \max(|\lambda_{iR} - \lambda_{iL}|) \quad (9)$$

Pandolfi and D'Ambrosio proposed another version of the H -correction entropy fix by excluding η_1 from Eq. (8)



FIGURE 1 Cell interfaces of (a) structured uniform mesh and (b) unstructured triangular mesh.

to avoid an erroneous injection of artificial viscosity, and is applicable only to the entropy and shear waves (for $k = 2$ and 3). The modified H -correction entropy fix by Pandolfi *et al.* (RoePA) is,

$$\eta^{PA} = \max(\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (10)$$

where η_i , $i = 2, \dots, 5$ is given in Eq. (9).

The above three methods have been evaluated using five test cases involving expansion shocks, the kinked Mach stem, the carbuncle phenomenon and the odd-even decoupling as presented in the following sections.

The Expansion Shocks

To illustrate an unphysical expansion shock, a Mach 3 flow over a forward facing step (Woodward and Colella, 1984) is investigated. The density contours computed from the RoePA, RoeSA and RoeVL are shown in Fig. 2(a)–(c), respectively. The figures show that the RoePA produces an unphysical expansion shock on top of the facing step corner, whereas both the RoeSA and RoeVL provide realistic solutions.

Another expansion shock problem used to evaluate the numerical instability is the diffraction of a Mach 2 shock moving over a 90° corner. Figure 3 shows the computed density contours obtained from the RoeVL. On the other hand, both the RoePA and RoeSA could not provide proper solutions due to negative internal energy that occurs during the computation in the vicinity of the turning corner.

The Kinked Mach Stem

The kinked Mach stem generated from a shock moving over a ramp is another test case used to highlight the performance of these three methods. Figure 4(a)–(c),

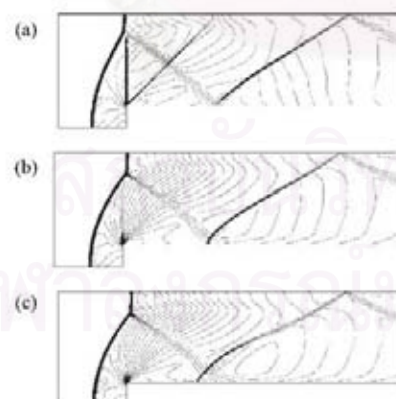


FIGURE 2 Mach 3 flow over a forward facing step: (a) RoePA, (b) RoeSA and (c) RoeVL.

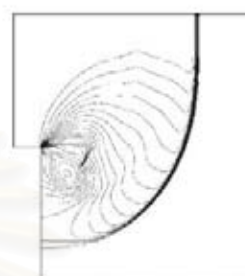


FIGURE 3 Diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner (RoeVL).

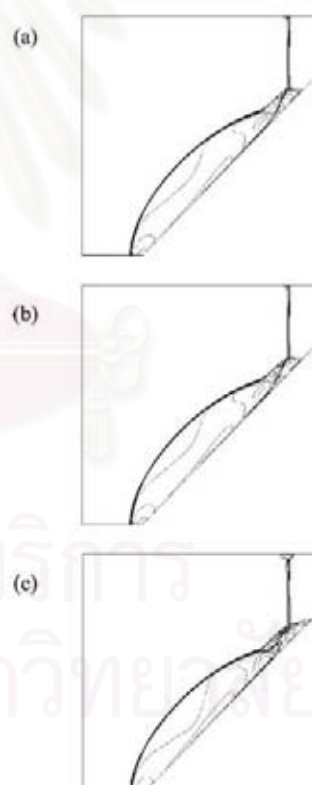


FIGURE 4 A kinked Mach stem from a Mach 5 shock moving over a 46° ramp: (a) RoePA, (b) RoeSA and (c) RoeVL.

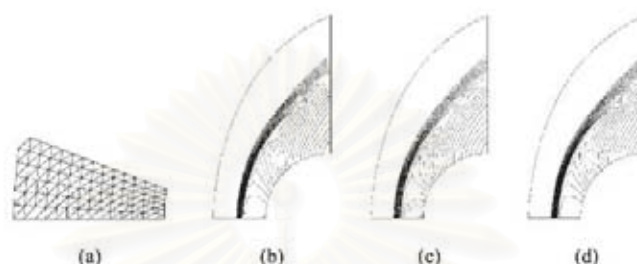


FIGURE 5 Mach 15 flow over a blunt body (first mesh): (a) enlarged view of the mesh, (b) RoePA, (c) RoeSA and (d) RoeVL.

respectively, shows the density contours obtained from the RoePA, RoeSA and RoeVL for a Mach 5 normal shock moving over a 46° ramp. Both the RoePA and RoeSA provide reasonable accurate solutions such that the kinked Mach stem is recovered with the slightly broken-down incident shock. The RoeVL, however, yields the broken-down incident shock with severely kinked Mach stem. Such solution may be caused by insufficient dissipation that cannot counteract the transverse perturbation (Quirk, 1994; Gressier and Moschetta, 2000).

The Carbuncle Phenomenon

The carbuncle phenomenon (Perry and Inlay, 1988) refers to a spurious bump on the bow shock near the flow centerline ahead the blunt body. The phenomenon is highly grid-dependent (Pandolfi and D'Ambrosio, 2001), but does not require a large number of grid points to appear (Gressier and Moschetta, 2000). To demonstrate this grid-dependent phenomenon, the schemes RoePA, RoeSA and RoeVL are employed with three meshes of different element aspect ratios for each scheme. An enlarged view of the elements near the flow centerline of the first mesh and the corresponding density contours are shown in Fig. 5(a)–(d). The carbuncle phenomenon does not appear in any scheme with the use of this relatively crude mesh. The second mesh has more elements which are refined in the circumferential direction as shown in

Fig. 6(a). The RoePA provides realistic flow behavior while the RoeSA and RoeVL exhibit small bump on the bow shock as shown in Fig. 6(b)–(d). The carbuncle phenomenon can be clearly seen in a more refined mesh with higher element aspect ratio as shown in Fig. 7(a). While the RoePA still provides reasonable flow solutions, the carbuncle phenomena are easily observed in the RoeSA and RoeVL as shown in Fig. 7(b)–(d).

The Quirk's Test (Odd-Even Decoupling)

The last test case is a Mach 6 moving shock along the odd-even grid perturbation in a straight duct (Quirk, 1994). The computational domain consists of a uniform triangular mesh with 800 and 20 equal intervals, respectively, along the axial and the transverse directions of the duct. The grids along the duct centerline are perturbed in the transverse direction with a magnitude of $\pm 10^{-6}$. Both the RoePA and RoeSA can provide accurate shock resolutions whereas the RoeVL suffers from the numerical instabilities as depicted in Fig. 8(a)–(c), respectively. As explained by Gressier and Moschetta (2000), the exact capture of contact discontinuity and strict stability cannot be simultaneously satisfied in any upwind scheme. The solution suggests that additional dissipation injection to the entropy and shear waves is thus needed to stabilize the Roe's scheme as done by RoePA and RoeSA.

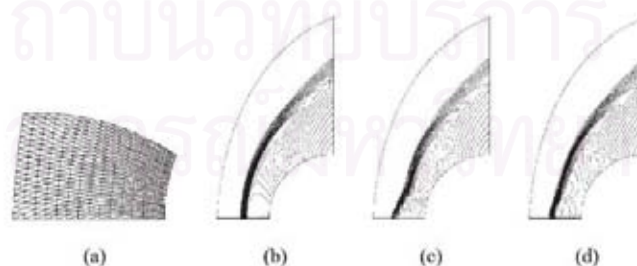


FIGURE 6 Mach 15 flow over a blunt body (second mesh): (a) enlarged view of the mesh, (b) RoePA, (c) RoeSA and (d) RoeVL.

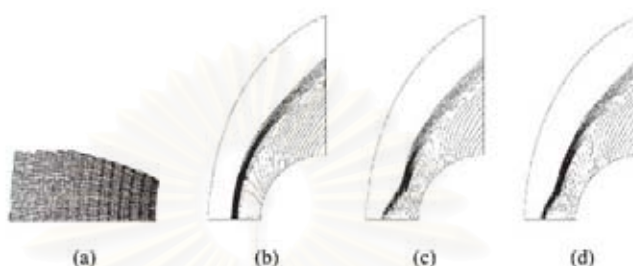


FIGURE 7 Mach 15 flow over a blunt body (third mesh): (a) enlarged view of the mesh, (b) RoePA, (c) RoeSA and (d) RoeVL.

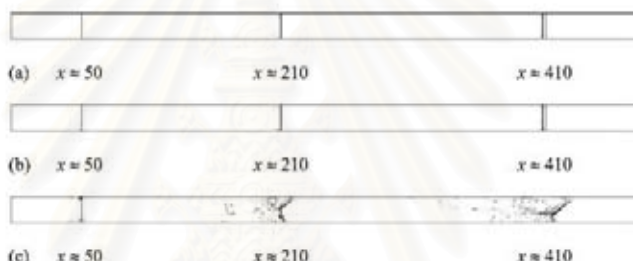


FIGURE 8 Mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation: (a) RoePA, (b) RoeSA and (c) RoeVL.

MIXED ENTROPY FIX METHOD FOR ROE'S SCHEME

The flow behaviors obtained from the test cases in the "Numerical shock instability" section using the RoeVL, RoeSA and RoePA schemes which were modified to avoid the numerical shock instability have been studied. The flow over a forward facing step and the diffraction of a shock over 90° corner problems show that RoeVL can perform very well for flows with expansion shock that contain sonic points. Meanwhile, the RoePA is suitable to correct the numerical instability from insufficient dissipation injected to the entropy and shear waves as demonstrated by the kinked Mach stem, the flow over the blunt body, and the moving shock along the odd-even grid perturbation problems. Thus, this paper proposes a mixed entropy fix method (RoeVLPA) that combines the entropy fix method of Van Leer and the modified multidimensional dissipation method by Pandolfi, the modified *H*-correction, together by replacing the original eigenvalues as follows,

$$|\lambda_k| = \begin{cases} |\lambda_{1,4}|, & |\lambda_{1,4}| \geq 2\eta^{VL} \\ \frac{|\lambda_{1,4}|^2}{4\eta^{VL}} + \eta^{VL}, & |\lambda_{1,4}| < 2\eta^{VL} \\ \max(|\lambda_{2,3}|, \eta^{PA}) \end{cases} \quad (11)$$

where η^{VL} and η^{PA} are defined in Eqs. (7) and (10), respectively.

The mixed entropy fix method (RoeVLPA) is equivalent to the RoeVL in handling the acoustic waves (for $k = 1$ and 4) and the RoePA for entropy and shear waves (for $k = 2$ and 3). The efficiency of the mixed entropy fix method is re-evaluated by solving the five test cases presented in Figs. (2)–(8).

For the Mach 3 flows past over a forward facing step, the mixed entropy fix method (RoeVLPA) eliminates the unrealistic expansion shock as shown in the computed density contours in Fig. 9. Figure 10 shows the computed density contours for the diffraction of a Mach 2 shock moving over a 90° corner. Figure 11 depicts the computed density contours of a shock moving over a ramp and clearly shows the recovered kinked Mach stem and the preserved incident shock. The computed density



FIGURE 9 The Mach 3 flow over a forward facing step (RoeVLPA).

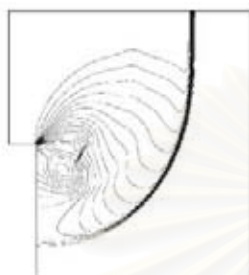


FIGURE 10 The diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner (RoeVLPA).

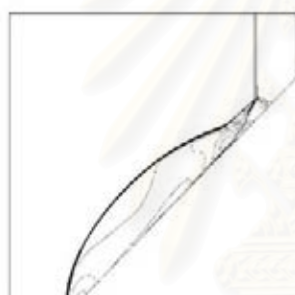


FIGURE 11 The kinked Mach stem from a Mach 5 shock moving over a 46° ramp (RoeVLPA).

contours of the Mach 15 flow over a blunt body for the three meshes with different element aspect ratios are shown in Fig. 12 without the unphysical carbuncle phenomenon. Finally, for the test case of the Mach 6

moving shock along the odd-even grid perturbation in which the RoeVL yields unstable shock solution, the proposed RoeVLPA can capture the shock accurately without perturbation growth with time as shown in Fig. 13.

HIGH-ORDER EXTENSION AND APPLICATION ON UNSTRUCTURED TRIANGULAR MESHES

High-order Reconstruction and Limiter

Solution accuracy from the first-order formulation described in the preceding sections can be improved by implementing a high-order formulation for both the space and time. A high-order spatial discretization is achieved by applying the Taylor's series expansion to the cell-centered solution for each cell face (Frink *et al.*, 1991). For instance, the solutions at the midpoint of an element edge between nodes 1 and 2, shown in Fig. 14, can be reconstructed from,

$$q_{1,2} = q_c + \frac{\psi_c}{3} \left[\frac{(q_1 + q_2) - q_3}{2} - q_3 \right] \quad (12)$$

where $q = [\rho \ u \ v \ p]^T$ consists the primitive variables of the density, the velocity components and the pressure, respectively; q_c is the solution at the element centroid; $q_n, n = 1, 2, 3$ are the solutions at nodes. In this paper, the inverse-distance weighting from the centroid to the nodes that preserves the principle of positivity (Frink and Pirzadeh, 1998) is used,

$$q_n = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{q_{ci}}{|r_i|}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{|r_i|}} \quad (13)$$

where $q_{c,i}$ are the surrounding cell-centered values of node n , $|r_i|$ is the distance from the centroid to the node n , and N is the number of the surrounding cells.

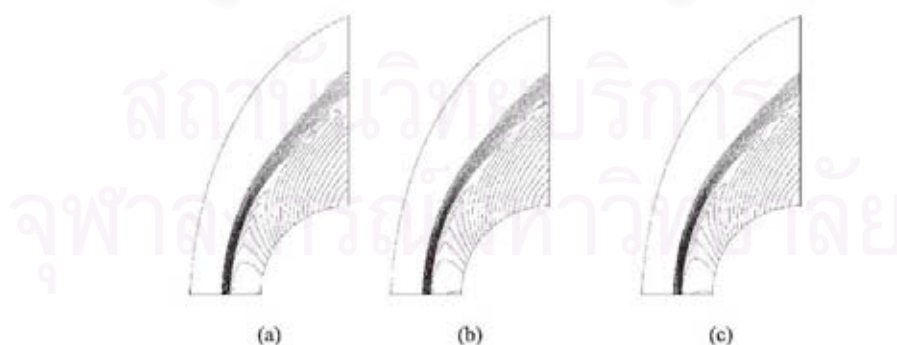


FIGURE 12 The Mach 15 flow over a blunt body (RoeVLPA): (a) first grid, (b) second grid and (c) third grid.

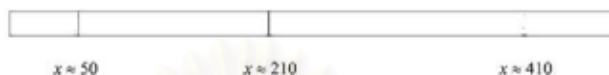


FIGURE 13 The Mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation (RoeVLPFA).

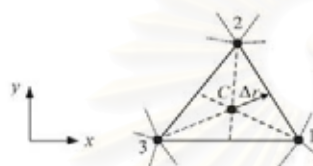


FIGURE 14 Linear reconstruction on a typical triangular element.

The Ψ_C , in Eq. (12), represents the limiter, preventing spurious oscillation that may occur in the region of high gradients. In this study, Venkatakrishnan's (1995) limiter function is selected,

$$\Psi_C = \min_{j=1,2,3} \begin{cases} \phi\left(\frac{\Delta_{+,min}}{\Delta_{-}}\right), & \Delta_{-} \geq 0 \\ \phi\left(\frac{\Delta_{-,min}}{\Delta_{+}}\right), & \Delta_{-} < 0 \\ 1, & \Delta_{-} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

where $\Delta_{-} = \mathbf{q}_c - \mathbf{q}_i$, $\Delta_{+,max} = \mathbf{q}_{max} - \mathbf{q}_i$ and $\Delta_{+,min} = \mathbf{q}_{min} - \mathbf{q}_i$. The \mathbf{q}_{max} and \mathbf{q}_{min} are, respectively, the maximum and minimum values of all distance-one neighboring cells. The function ϕ is similar

to the Van Albada limiter (Van Albada *et al.*, 1982), which is expressed in the form,

$$\phi(y) = \frac{y^2 + 2y}{y^2 + y + 2}. \quad (15)$$

Second-order Temporal Discretization

The second-order temporal accuracy is achieved by implementing the second-order accurate Runge-Kutta time stepping method (Shu and Osher, 1988),

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^* &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}^n \cdot \mathbf{n}_j \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^* - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{n}_j \right] \end{aligned} \quad (16)$$

where Δt is the time step. Local element time steps are used for steady-state analysis, while the minimum global time step based on spectral radii (Vijayan and Kallinderis, 1994) is used for the unsteady analysis to reduce the computation effort.

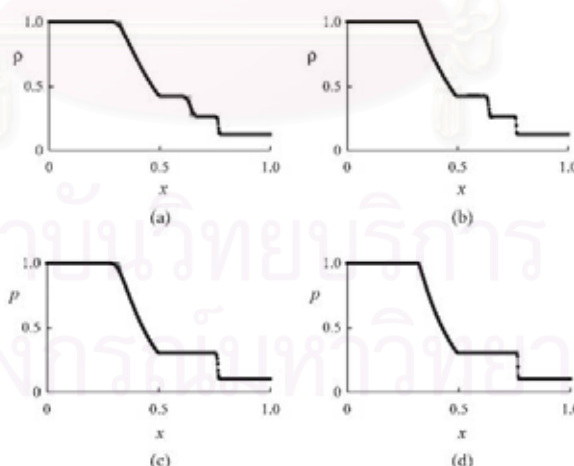


FIGURE 15 Comparative predicted and exact solutions at time $t = 0.15$ for Sod shock tube (RoeVLPFA): (a), (b) $\theta(1)$ and $\theta(2)$ density distributions; (c), (d) $\theta(1)$ and $\theta(2)$ pressure distributions.

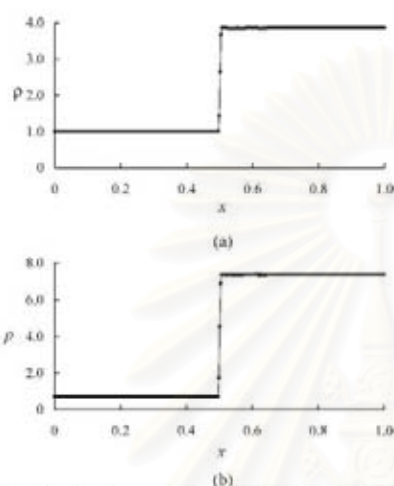


FIGURE 16 Computed solutions of the stationary normal shock at 500 iterations ($\delta(2)$ -RoeVLPA): (a) density distribution and (b) pressure distribution.

Numerical Evaluation

The high-order extension of the Roe's scheme with the mixed entropy fix method, RoeVLPA, presented in the preceding section is evaluated by solving several problems. The modified scheme is also combined with an adaptive meshing technique that generates unstructured triangular meshes for more complex problems. These selected test cases are: (1) Sod shock tube, (2) Stationary normal shock, (3) Diffraction of Mach 5.09 shock over a 90° corner and (4) Mach 3 flow in a convergent-divergent channel.

Sod Shock Tube

The one-dimensional shock tube test case, the so called Sod shock tube (Sod, 1978), is solved by using

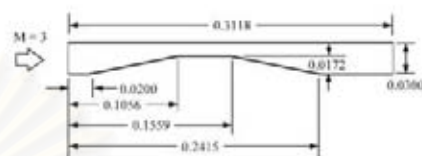


FIGURE 18 Problem statement of a Mach 3 flow in a convergent-divergent channel.

a two-dimensional domain. The initial conditions of the fluids on the left and right sides are given by $(\rho, u, p)_L = (1.0, 0.0, 1.0)$ and $(\rho, u, p)_R = (0.125, 0.0, 0.1)$. The 1.0×0.1 computational domain is discretized with uniform triangular elements into 400 and 40 equal intervals in the x and y directions, respectively. Figure 15(a)–(d) shows the predicted density and pressure distributions along the tube length and is compared with the exact solutions at time $t = 0.15$. The figure shows that the high-order extension of Roe's scheme with the entropy fix RoeVLPA provides more accurate solutions than the first-order solutions.

Stationary Normal Shock

The normal shock of Mach 3 (Kim *et al.*, 2001) is used as another test case for the proposed high-order accurate RoeVLPA. The initial conditions are given by $(\rho, u, p)_L = (1.0, 3.0, 0.714)$ and $(\rho, u, p)_R = (3.857, 0.778, 7.381)$. After computation with 500 iterations with the Courant number of 0.5, the high-order accurate RoeVLPA predicts the density and pressure distributions as shown in Fig. 16. The figure shows that the normal shock is captured by approximately three intermediate points.

Diffraction of Mach 5.09 Shock Moving over a 90° Corner

This test case is taken from Quirk (1994) as Mach 5.09 normal shock is moving from left to right. Figure 17(a),(b) shows the computed density contours at

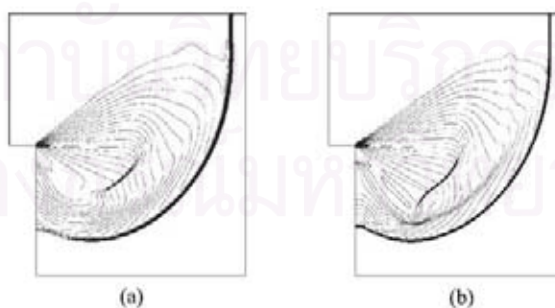


FIGURE 17 Density contours of a diffraction of Mach 5.09 shock over a 90° corner at time $t = 0.25$: (a) $\delta(1)$ -RoeVLPA and (b) $\delta(2)$ -RoeVLPA.

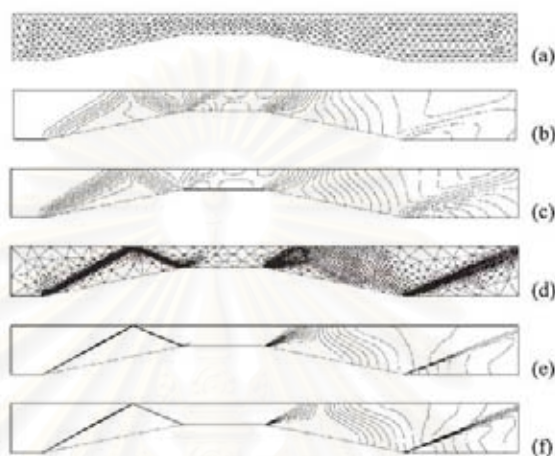


FIGURE 19 Mach 3 flow in a convergent-divergent channel ($\mathcal{O}(1)$ -RoeVLPA): (a) initial mesh; (d) third adaptive mesh; (b), (c) density contours; (e), (f) Mach contours.

time $t = 0.25$ from the first-order and high-order accurate RoeVLPA, respectively. The high-order accurate RoeVLPA can better capture detailed flow field, including higher shock resolution and sharper contact surface behavior.

Mach 3 Flow in a Convergent-Divergent Channel

Both the first and high-order RoeVLPA are further evaluated for adaptive unstructured meshes using a problem with more complex flow phenomena. Figure 18

shows the problem statement of a Mach 3 flow in a convergent-divergent channel, which results in complex flow behavior involving incident and reflecting shocks with expansion waves. The first-order RoeVLPA is combined with the adaptive mesh generation technique for capturing detailed flow behavior as presented in Fig. 19(a)–(f). The entire procedure is then repeated with the use of the high-order RoeVLPA. The adaptive meshes and their corresponding solutions are shown in Fig. 20(a)–(f). This figure highlights the use

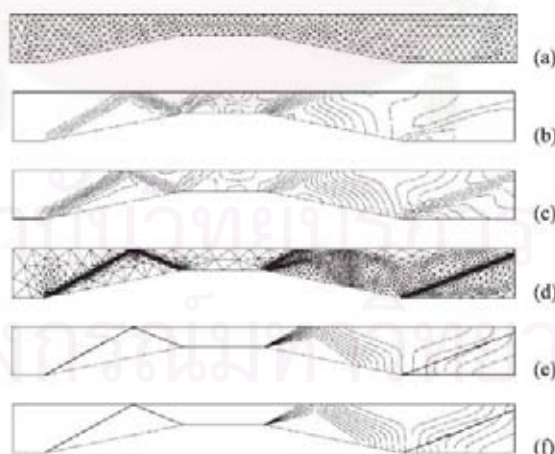


FIGURE 20 Mach 3 flow in a convergent-divergent channel ($\mathcal{O}(2)$ -RoeVLPA): (a) initial mesh; (d) third adaptive mesh; (b), (c) density contours; (e), (f) Mach contours.

of the high-order accurate scheme on adaptive meshes to effectively obtain detailed flow solutions.

CONCLUSION

A mixed entropy fix method is proposed to improve numerical stability of the Roe's flux-difference splitting scheme. The method combines the modified entropy fixes by Van Leer *et al.* and Pandolfi and D'Ambrosio, together. The method was then evaluated by several well-known test cases and found to eliminate unphysical solutions that may arise from the use of the original Roe's scheme. These unphysical solutions include the carbuncle phenomenon on the bow shock of the flow over a blunt body, and the expansion shock generated from the flow over a forward facing step, etc. To further improve solution accuracy, the high-order spatial and second-order Runge-Kutta temporal discretization were also implemented. The method was also combined with an adaptive mesh generation technique to demonstrate its applicability for arbitrary unstructured meshes. The entire process was found to provide more accurate solutions for both the steady-state and transient flow test cases.

Acknowledgements

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund for supporting this research work.

References

- Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S. (2003) "High-speed compressible flow solutions by adaptive cell-centered upwinding algorithm with modified H -correction entropy fix", *Adv. Eng. Software*, **32**, 533–538.
- Frink, N.T. and Pirzadeh, S.Z. (1998). "Tetrahedral finite-volume solutions to the Navier-Stokes equations on complex configurations", *NASA/TM 1998 208961*.
- Frink, N.T., Parikh, P. and Pirzadeh, S. (1991). "A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes," *AIAA Paper-91-0102*, AIAA, 29th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada.
- Gressier, J. and Moschetta, J.M. (2000) "Robustness versus accuracy in shock-wave computations", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **33**, 313–332.
- Harten, A. (1983) "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *J. Comp. Phys.*, **49**, 357–393.
- Kim, K.H., Kim, C. and Rho, O.H. (2001) "Methods for the accurate computations of hypersonic flows", *J. Comp. Phys.*, **174**, 38–80.
- Lin, H.C. (1995) "Dissipation additions to flux-difference splitting", *J. Comp. Phys.*, **117**, 20–27.
- Pandolfi, M. and D'Ambrosio, D. (2001) "Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the "carbuncle" phenomenon", *J. Comp. Phys.*, **166**, 271–301.
- Perry, K.M. and Inlay, S.T. (1988) "Blunt-body flow simulations", *AIAA Paper-88-2904*, 24th AIAA, SAE, ASME and ASEE Joint Propulsion Conference, Boston, MA.
- Quirk, J.J. (1994) "A contribution to the Great Riemann Solver Debate", *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **18**, 555–574.
- Roe, P.L. (1981) "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes", *J. Comp. Phys.*, **43**, 357–372.
- Sanders, R., Morano, E. and Draguet, M.C. (1998) "Multidimensional dissipation for upwind schemes: stability and applications to gas dynamics", *J. Comp. Phys.*, **145**, 511–537.
- Shu, C.W. and Osher, S. (1988) "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes", *J. Comp. Phys.*, **77**, 439–471.
- Sod, G.A. (1978) "A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws", *J. Comp. Phys.*, **27**, 1–31.
- Van Albeda, G.D., Van Leer, B. and Roberts, W.W. (1982) "A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics", *Astron. Astrophys.*, **108**, 76–84.
- Van Leer, B., Lee, W.T. and Powell, K.G. (1989) "Sonic-point capturing", *AIAA Paper-89-1945-CP*, AIAA, 9th Computational Fluid Dynamics Conference, Buffalo, NY.
- Venkatakrisnan, V. (1995) "Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters", *J. Comp. Phys.*, **118**, 120–130.
- Vijayan, P. and Kallinderis, Y. (1994) "A 3D finite-volume scheme for the Euler equations on adaptive tetrahedral grids", *J. Comp. Phys.*, **113**, 249–267.
- Woodward, P. and Colella, P. (1984) "The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks", *J. Comp. Phys.*, **54**, 115–173.

ภาคผนวก ค

**บทความ Two-dimensional adaptive mesh generation algorithm and its
application with higher-order compressible flow solver**

KSME International Journal, Vol. 18, No. 12, pp. 2190~2203, 2004

**Two-Dimensional Adaptive Mesh Generation Algorithm and its
Application with Higher-Order Compressible Flow Solver**

Sutthisak Phongthanapanich, Pramote Dechaumphai*
*Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University,
Bangkok 10330, Thailand*

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

The Separate Volume of KSME International Journal

Two-Dimensional Adaptive Mesh Generation Algorithm and its Application with Higher-Order Compressible Flow Solver

Sutthisak Phongthanapanich, Pramote Dechaumphai*

Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University,
Bangkok 10330, Thailand

A combined procedure for two-dimensional Delaunay mesh generation algorithm and an adaptive remeshing technique with higher-order compressible flow solver is presented. A pseudo-code procedure is described for the adaptive remeshing technique. The flux-difference splitting scheme with a modified multidimensional dissipation for high-speed compressible flow analysis on unstructured meshes is proposed. The scheme eliminates nonphysical flow solutions such as the spurious bump of the carbuncle phenomenon observed from the bow shock of the flow over a blunt body and the oscillation in the odd-even grid perturbation in a straight duct for the Quirk's odd-even decoupling test. The proposed scheme is further extended to achieve higher-order spatial and temporal solution accuracy. The performance of the combined procedure is evaluated on unstructured triangular meshes by solving several steady-state and transient high-speed compressible flow problems.

Key Words: Adaptive Mesh, Delaunay Triangulation, Carbuncle Phenomenon, H -correction Entropy Fix

1. Introduction

Spatial discretization of a given domain is a prerequisite for solutions with finite-element or finite-volume method of a partial differential equations system that represents the physical model of the problem. Generally, triangulation process starts from the generation of the point list; the points are subsequently connected into triangular elements. The points connection step is often performed by constructing the Delaunay triangulation (Bowyer, 1981; Watson, 1981) of the point set to guarantee triangles which are as well-shaped as possible for the given points. Since the Delaunay triangulation in itself does not include procedures for creating points in-

side the domain, points are generated independently by an automatic point creation algorithm (Marchant and Weatherill, 1993; Karamete et al., 1997).

To enhance the solution accuracy of the numerical analysis and to improve the computed solution, mesh adaptation is needed. An adaptive remeshing technique is incorporated with an appropriated error indicator to dictate a close correlation between the size of elements and the behavior of the corresponding computed solution. The technique is implemented to capture the fast variation of the solution with a reasonable number of elements. The process of the adaptive meshing is to first generate an initial mesh for the domain. The mesh is used to compute the corresponding solution by the finite-element or finite-volume method. Then the regions where adaptation is vital are determined by an error indicator, and new adapted mesh for the solution is entirely generated. The same process is repeated until the specified convergence criterion is met. The efficiency of the overall

* Corresponding Author.

E-mail: fmepec@eng.chula.ac.th

Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand. (Manuscript Received May 25, 2004; Revised September 23, 2004)

procedure is evaluated by calculating flows that include the supersonic shock waves and shock propagation behaviors.

High-speed compressible flows normally involve complex flow phenomena, such as strong shock waves and shock-shock interactions. Various numerical inviscid flux formulations have been proposed to solve an approximate Riemann problem (Roe, 1981; Steger and Warming, 1981; Liou et al., 1993; Toro et al., 1994; Kang et al., 2002; Kang et al., 2003). Among these formulations, the flux-difference splitting scheme by Roe (1981) is widely used due to its accuracy, quality and mathematical clarity. However, the scheme may sometimes lead to nonphysical flow solutions in certain problems, such as the carbuncle phenomenon (Perry and Imlay, 1988) with a spurious bump in the bow shock for flow over a blunt body. In the odd-even decoupling problem (Quirk, 1994), an unrealistic perturbation may grow with the planar shock as it moves along the duct. To improve the solution accuracy of these problems, Quirk pointed out that the original Roe's scheme should be modified or replaced by other schemes in the vicinity of strong shock. It has been known that the original Roe's scheme does not satisfy the entropy condition and may allow unrealistic expansion shock. Harten (1983) proposed an entropy fix formulation to replace the near zero small eigenvalues by some tolerances. The mathematical background of the Harten's entropy fix with the suggested tolerance values is given by Van Leer et al. (1989).

This paper proposed a mixed entropy fix method for the Roe's scheme on adaptive unstructured meshes for two-dimensional high-speed compressible flow analysis. The entropy fix method by Van Leer et al. and the multidimensional dissipation technique of Pandolfi and D'Ambrosio (2001) are modified for unstructured triangular meshes and implemented into the original Roe's scheme. The presented scheme is further extended to higher-order solution accuracy and then evaluated by several benchmark test cases.

The presentation in this paper starts at Section 2 describing an adaptive remeshing technique

with the implementation procedure in an object-oriented programming concept. Section 3 describes the Roe's flux-difference splitting scheme with some well-known problems that exhibit numerical shock instability. A Roe's scheme with a mixed entropy fix method is then proposed and examined for their capabilities. The presented scheme is further extended to higher-order solution accuracy and then evaluated by several benchmark test cases in Section 4. Finally, the performance of the scheme is evaluated on adaptive unstructured meshes for solving both the steady-state and transient high-speed compressible flow problems.

2. Delaunay Triangulation and Adaptation Technique

2.1 Mesh generation and adaptation

The mesh generation implemented in this paper follows the Delaunay triangulation (Bowyer, 1981; Watson, 1981). The algorithm itself does not provide the procedure for creating new points inside the domain. The automatic point creation procedure presented in this paper are derived from the algorithm suggested by Marchant and Weatherill (1993). The shape and size of elements or density of points inside the domain are controlled by two coefficients, the Alpha and the Beta coefficients. The main idea of the automatic point creation procedure is to search for the element that conforms to both the Alpha and Beta testing criteria and a new point placement at the centroid of that element. New elements can then be created by the Delaunay triangulation algorithm. The step-by-step explanation of these algorithms was presented in detail in Ref. (Phongthanapanich and Dechaumphai, 2004).

To capture fast variations of the solution, small elements are needed along that region in the domain. The proper element size h_i is computed by requiring that the error should be uniform for all elements (Dechaumphai and Morgan, 1992):

$$h_i^2 \lambda_i = h_{\text{min}}^2 \lambda_{\text{max}} = \text{constant} \quad (1)$$

where λ_i is the higher principal quantity of the element considered,

$$\lambda_i = \max \left(\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (2)$$

and ϕ is the selected solution indicator. In the above Eq. (1), λ_{\max} is the maximum principal quantity for all elements and h_{\min} is the minimum element size specified by users. The regions, which will be refined or coarsened by Adaptive-Remeshing algorithm below, are identified by a dimensionless error indicator using the pressure-switch coefficient (Probert et al., 1991). The indicator at node I is given by,

$$E_I = \frac{\sum_{j=1}^2 |\phi_I - \phi_j - \phi_K|}{\sum_{j=1}^2 (A^* + B^*)} \quad (3)$$

where J and K are the other two nodes of the triangle, e , $A^* = \max(|\phi_I - \phi_J|, \alpha(\phi_I + \phi_J))$ and $B^* = \max(|\phi_I - \phi_K|, \alpha(\phi_I + \phi_K))$. The value of α is used to identify the solution discontinuity or numerical oscillation. According to numerical experiment especially for the proposed scheme that will be explained later, the value of α is prescribed as 0.005 in this paper. This means $A^* = 0.005(\phi_I + \phi_J)$ and $B^* = 0.005(\phi_I + \phi_K)$ if ϕ_J and ϕ_K are oscillated within 1% of ϕ_I , respectively.

Practical experience found that this type of error indicator for the transient high-speed compressible flow problems, where regions such as shock or discontinuity have different strength, may cause inaccurate solution due to the inadequate refinement because the point spacing is scaled according to the maximum value of the second derivatives. In order to overcome this problem, an element size scaling function, which scales the point spacing of point p_i within the range of χ_{\min} and χ_{\max} , has been used:

$$\chi_i = \text{scaleRange} \left(\frac{h_{\max} - dp_i}{h_{\max} - h_{\min}}, 0, 1, \chi_{\min}, \chi_{\max} \right) \quad (4)$$

The coefficient χ_i controls the point insertion in the regions of high solution gradient and eliminates excessive distortion of the regularity of the triangulation. The value of χ_{\min} limits the number of points insertion in the high gradient region such as shock, while the value of upper limit χ_{\max} allows to insert more points into the

region with smaller solution gradient such as the tail of the expansion fan. When the adapted elements generated by this function are distorted in shape, the Alpha and Beta coefficients are incorporated to control the point density and the regularity of triangulation.

The proposed adaptive mesh regeneration is based on the concepts of the Delaunay triangulation and the mesh refinement. The new mesh is constructed using the information from the previous or background mesh, and it is composed of small elements in the regions with large changes of the solution gradients, and large elements in the remaining regions where the changes of the solution gradients are small. Detailed process of adaptive remeshing technique is described as follows.

Algorithm Adaptive Remeshing (P, T, P0, alpha, beta, h_min, h_max, X_min, X_max, threshold)

1. Let $P0, k=1, \dots, n$ be the set of points of the background mesh.
2. Let P be the set of points and T be the set of triangles.
3. Read next interior point p_i of the background mesh from $P0$.
4. If $h_i > h_{\max}$ then go to step 3.
5. Search triangle t_i in T which contains the point p_i . Then calculate the centroid of the triangle t_i and define it as point p_q , and compute the point distribution function of point p_q by Eq. (5).

$$dp_q = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |p_j - p_q| \quad (5)$$

where M is number of surrounding nodes to node q .

6. Compute the distance $d_m, m=1, 2, 3$ from point p_q to each of the three vertices of the triangle t_i .

7. Compute the Xi coefficient, χ_i , for point p_i by using Eq. (4), and the average distance, $s_i = (d_1 + d_2 + d_3)/3$.

8. Perform the Xi-Alpha test for point p_q . If $(\chi_i * \text{alpha} * h_i) > s_i$, then reject the point p_q and return to step 3.

9. Perform the Xi-Beta test for point p_q . If two out of three of $d_m < (\chi_i * h_{\min} / \text{beta})$ for any

$m=1, 2, 3$, then reject the point p_q and return to step 3.

10. Accept the point p_q for insertion by the Delaunay triangulation algorithm and add point p_q into P .

11. Repeat steps 3 to 10 until all points in P are considered.

12. Perform the Delaunay triangulation of the inserted points in P .

13. If number of accepted points greater than threshold, then go to step 3; otherwise stop the algorithm.

Since the proposed algorithm above does not guarantee the good mesh topology, the mesh relaxation (Frey, 1991) based on an edge-swapping technique is highly recommended for well-shaped mesh improvement. The objective of this method is to make the topology of elements closer to equilateral triangles by swapping edges to equalize the vertex degrees (number of edges linked to each point) toward the value of six. Finally, the Laplacian smoothing is applied to smooth the meshes.

2.2 Mesh generation implementation and algorithm evaluation

This section presents the main algorithm for combining together the mesh generation from the Delaunay triangulation, the mesh refinement procedure, and the adaptive remeshing technique. This main algorithm is demonstrated using the object-oriented programming concept that takes into account the advantages of the code encapsulation, inheritance, and polymorphism capabilities. The implementation of the main algorithm is summarized in the algorithm below.

Algorithm Main

($P, T, \alpha, \beta, \text{iteration}, H_{\min}, H_{\max}, XI_{\min}, XI_{\max}, \text{threshold}, \text{isadaptive}$)

Let BP be the collection of boundary point objects that stored in sequence of counter-clockwise direction for all outside boundaries and clockwise direction for all inside boundaries;

Let PO be the collection of background point objects;

Let P be the collection of point objects;
 Let T be the collection of mesh objects;
 Let α be the constant that controls shape of formed triangles;
 Let β be the constant that controls regularity of the triangulation;
 Let iteration be the number of loops to refine meshes;
 Let H_{\min} and H_{\max} be the minimum and maximum element size, respectively;
 Let XI_{\min} and XI_{\max} be the minimum and maximum scaling coefficients, respectively;
 Let threshold be the number of minimum increasing points for each iteration;
 Let isadaptive be the flag to generate background or adaptive meshes;

BP . Initialize;

PO . Initialize;

P . Initialize;

T . Initialize;

If (isadaptive) {

PO . ReadBackgroundNodes;

BP . RediscretizeBoundaryNodes;

};

Else {

BP . ReadBoundaryNodes;

};

BP . CreateConvexHull;

P . AddNode ($BP.p1, BP.p2, BP.p3, BP.p4$);

T . AddTriangle ($t1, BP.p1, BP.p2, BP.p3$);

T . AddTriangle ($t2, BP.p3, BP.p2, BP.p4$);

Do $p \leftarrow BP$. NextBoundaryNode {

 Call DelaunayTriangulation (P, T, p);

};

T . RemoveOutsideDomainTriangles;

Call MeshRefinement

($P, T, \alpha, \beta, \text{iteration}$);

If (isadaptive)

 Call AdaptiveRemeshing

($P, T, PO, \alpha, \beta, H_{\min}, H_{\max}, XI_{\min}, XI_{\max}, \text{threshold}$);

T . MeshRelaxation;

T . LaplaceSmoothing;

End;

To evaluate the performance of the adaptive remeshing technique with the Delaunay triangulation, the specification of element size, h_i , is given as an analytic function defined for two-dimensional domain. The adaptive mesh generation process starts from an initial mesh generated in the domain, then the values of the element sizes at all points are computed by the given function. The mesh generation coupled with the adaptive remeshing procedure is iterated until the resulting mesh becomes globally stable. The iteration process is terminated if the total node increment is fewer than the specified number. The three examples of adaptive mesh generation with the analytical function for specifying element sizes presented herein are: (1) adaptive meshes along the centerline of a rectangular domain, (2) adaptive meshes along the diagonal of a square domain, and (3) an alpha-shape adaptive meshes in a square domain.

Adaptive Meshes along Centerline of a Rectangular Domain: The first example presents an adaptive mesh generation in a 3.0×5.0 rectangular domain. The element sizes at points in the domain are given by the distribution function,

$$h(y) = 0.42 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad (6)$$

where y is the variable and the values of μ and

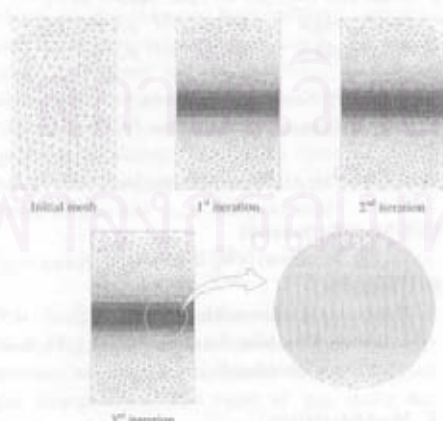


Fig. 1 Adaptive meshes along centerline of a rectangular domain

σ are constants equal to zero and one, respectively. Figure 1 shows the series of adaptive meshes generated by three iterations based on a coarse initial mesh. The value of mesh generation coefficients, α , β , χ_{min} , χ_{max} are 0.5, 0.6, 0.75, and 1.10, respectively. Due to the prescribed distribution function in Eq. (6), small element sizes are specified around the centerline of the domain. The figure shows that size similarity of the adaptive meshes is generated along the narrow band around the centerline of the domain. The value of χ_{min} limits the number of point insertion along the centerline of the domain, while the value of χ_{max} allows more nodes to be inserted into the other regions.

The specification of scale range and χ_{min} , χ_{max} have strong effects on the resulting meshes as shown in Fig. 1. Without the scale range, the mesh is composed of small elements concentrated around line a (see Fig. 2) with progressively larger elements outwards as $h_a < h_b$, h_c . Hence, a mesh consisting of relatively uniform elements in a wider centerline band of the domain may be generated. This mesh has better physical correlation with the behaviors of shocks. The scale range function sorts the nodal spacing values into prescribed intervals according to χ_{min} and χ_{max} . In each interval, the generated element sizes are relatively uniform.

Adaptive Meshes along a Diagonal of a Square Domain: The second example concerns with an adaptive mesh generation in a unit square domain. The element sizes are calculated by Eq. (7) where the constant α is set to 0.5 for this test case. Because this function generates both



Fig. 2 Distribution of element sizes along the y direction

negative and positive values, only the positive values of this function are used to determine the element size by scaling into the new range of 0.001 and 0.2:

$$h(x, y) = 2y(1-y) \left[\tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2x)}{\sqrt{2(1+\beta^2)}} + \frac{\alpha^2 \beta x(1-x)}{2(1+\beta^2)^2} \right] + 2x(1-x) \left[\tan^{-1} \beta - \frac{\alpha(1-2y)}{\sqrt{2(1+\beta^2)}} + \frac{\alpha^2 \beta y(1-y)}{2(1+\beta^2)^2} \right] \quad (7)$$

where $\beta = \alpha[(x+y)/\sqrt{2} - 0.8]$. Figure 3 shows the sequence of adaptive meshes generated by five iterations based on a coarse initial mesh. The value of mesh generation coefficients, α , β , χ_{min} , χ_{max} are 0.5, 0.6, 0.4, and 0.75, respectively. The combination of the values of χ_{min} and χ_{max} , narrows the band along the diagonal line with small elements.

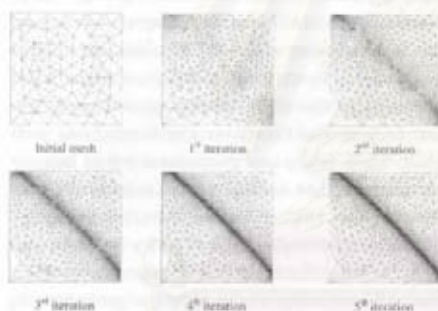


Fig. 3 Adaptive meshes along the diagonal of a square domain

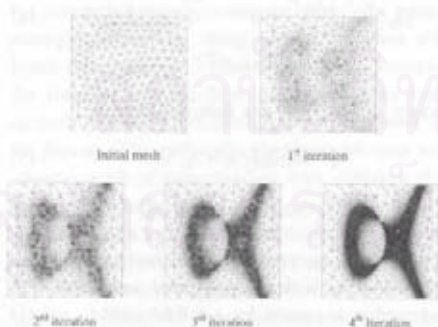


Fig. 4 An alpha-shape adaptive meshes in a square domain

An Alpha-Shape Adaptive Meshes in a Square Domain: The third example presents an alpha-shape adaptive mesh generation in a square domain. The alpha shape function (Borouchaki et al., 1997) is used to calculate element sizes in an 8×8 square domain:

$$h(x, y) = \begin{cases} \min(0.2(\lambda-1)^2 + 0.005, 1.0) & \text{if } \lambda \geq 1 \\ \min(0.2(\lambda-1)^2 + 0.01, 1.0) & \text{if } \lambda < 1 \end{cases} \quad (8)$$

where the value of parameter λ is determined from $x^2 - y^2 + 2 - 3\lambda x = 0$. Figure 4 shows the sequence of four adaptive meshes generated from a coarse initial mesh. The value of mesh generation coefficients, α , β , χ_{min} , χ_{max} are 0.5, 0.6, 0.5, and 0.85, respectively. The smaller elements are generated along the alpha-shape in the domain while larger elements are generated in the other regions.

For practical problems, the preferred values of α and β are 0.5 and 0.6, respectively (Karamete et al., 1997). In general, the acceptable ranges of these α and β values are 0.3–0.8, and 0.7–1.3, respectively. In addition, the values of 0.4 and 0.75 are chosen for χ_{min} and χ_{max} , respectively, for all high-speed compressible flow test cases presented later in this paper.

3. High-Speed Compressible Flow Solver

The performance of the Delaunay triangulation, the automatic point creation procedure, and the adaptive remeshing technique has been evaluated by applying to solve high-speed compressible flow problems. The Roe's flux-difference splitting method is widely used for compressible flow solutions due to its efficiency for providing solution accuracy. This section briefly explains the method and its flexibility for combining with adaptive unstructured meshes to further improve the solution accuracy.

Some certain problems for which the Roe's scheme may not provide correct solutions for the compressible Euler computation are presented in this section. Nonphysical numerical solutions may arise from the implementation of the one-dimensional upwinding numerical flux function

onto the multidimensional formulation. To avoid such solutions, a mixed entropy fix method that combines the entropy fix method of Van Leer et al. and the modified multidimensional dissipation method by Pandolfi and D'Ambrosio (2001) is proposed in this paper. Details of these entropy fix methods are presented herein and their performance are determined by test cases. All solutions in this section use the Roe's scheme with the first-order accuracy on structured triangular meshes.

3.1 Roe's flux-difference splitting scheme

The governing differential equations of the Euler equations for the two-dimensional inviscid flow are given by,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

where U is the vector of conservation variables, E and G are the vectors of the convection fluxes in x and y directions, respectively. The perfect gas equation of state is in the form,

$$p = \rho e (\gamma - 1) \quad (10)$$

where p is the pressure, ρ is the density, e is the internal energy, and γ is the specific heat ratio. By integrating Eq. (9) over a control volume, Ω , and applying the divergence theorem to the resulting flux integral,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (11)$$

where \mathbf{F} is the numerical flux vector and $\hat{\mathbf{n}}$ is the unit normal vector of the cell boundary. The numerical flux vector at the cell interface between the left cell L and the right cell R according to the Roe's scheme (1981) is,

$$F_n = \frac{1}{2} (F_{nl} + F_{nr}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \alpha_k |\lambda_k| r_k \quad (12)$$

where α_k is the wave strength of the k^{th} wave, λ_k is the eigenvalue, and r_k is the corresponding right eigenvector. The eigenvalues in the above Eq. (12) are,

$$\lambda_k = \begin{bmatrix} V_n - a \\ V_n \\ V_n \\ V_n + a \end{bmatrix} \quad (13)$$

where V_n is the normal velocity, and a is the speed of sound at the cell interface.

3.2 The mixed entropy fix method

The original Roe's scheme previously described has been found to produce unphysical solutions of the Euler equations in some certain problems. These include the expansion shock from a flow over a step, and the carbuncle phenomenon of a flow over a blunt body. To avoid such unphysical solutions, the entropy fix methods (Harten, 1983; Van Leer et al., 1989; Pandolfi and D'Ambrosio, 2001; Lin, 1995; Sanders et al., 1998; Dechaumphai and Phongthanapanich, 2003) have been proposed and investigated. By numerical experiment, the Van Leer et al.'s entropy fix method can perform very well for flows with expansion shocks that contain sonic points such as flows over a forward facing step. Meanwhile, the Pandolfi and D'Ambrosio version of the H -correction entropy fix is suitable to correct the numerical instability from insufficient dissipation injected to the entropy and shear waves such as the flow over the blunt body problem. Thus, this paper proposes a mixed entropy fix method that combines the entropy fix method of Van Leer et al. and the modified multidimensional dissipation method by Pandolfi and D'Ambrosio, the modified H -correction, together by replacing the original eigenvalues as follows,

$$|\lambda_k| = \begin{cases} |\lambda_{k,l}| & , |\lambda_{k,l}| \geq 2\eta^{VL} \\ \frac{|\lambda_{k,l}|^2}{4\eta^{VL}} + \eta^{VL} & , |\lambda_{k,l}| < 2\eta^{VL} \\ \max(|\lambda_{k,r}|, \eta^{RA}) & \end{cases} \quad (14)$$

where η^{VL} and η^{RA} are determined from,

$$\eta^{VL} = \max(\lambda_r - \lambda_l, 0) \quad (15)$$

$$\eta^{RA} = \max(\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (16)$$

The values η_i , $i=2$ to 5 as shown in Figures 5(a)-(b) for both the structured and unstructured meshes are given by $\eta_i = 0.5 \max(|\lambda_{lr} - \lambda_{le}|)$ where L and R denote the left and right elements, respectively.



Fig. 5 Cell interfaces of: (a) structured uniform mesh; (b) unstructured triangular mesh

This mixed entropy fix method is equivalent to the Van Leer et al.'s entropy fix method in handling the acoustic waves (for $k=1$ and 4) and the Pandolfi and D'Ambrosio version of the H -correction entropy fix for the entropy and shear waves (for $k=2$ and 3). The mixed entropy fix method has been evaluated in this paper using three test cases involving expansion shocks, the carbuncle phenomenon, and the odd-even decoupling. These test cases highlight the performance of the proposed entropy fix method on problems with different flow phenomena on structured triangular meshes.

The carbuncle phenomenon: An unrealistic flow solution, the so-called carbuncle phenomenon, of a steady-state flow over a blunt body from the original Roe's scheme was first reported by Perry and Inlay (1988). Such phenomenon refers to a spurious bump on the bow shock near the flow center line ahead of the blunt body. The phenomenon is highly grid-dependent (Pandolfi and D'Ambrosio, 2001), but does not require a large number of grid points to appear (Gressier and Moschetta, 2000). Figures 6(a)-(f) show the computed density contours from the mixed entropy fix method using meshes of three different element aspect ratios. The enlarged views of the elements near the flow center line of the first, second, and the third meshes are also shown in the figures. The carbuncle phenomenon does not appear in all of these meshes with different element aspect ratios.

The Quirk's test (odd-even decoupling): Another test case is a mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation in a straight duct (Quirk, 1994). The computational domain consists of a uniform triangular mesh with 800 and 20 equal intervals respectively along the axial

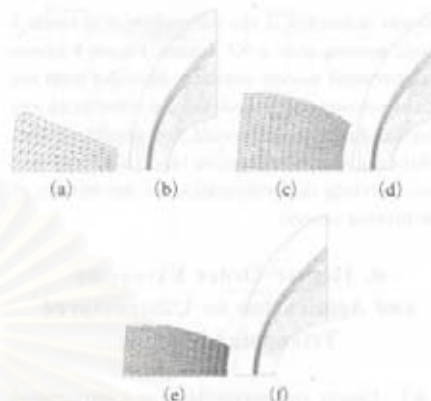


Fig. 6 Mach 15 flow over a blunt body, enlarged view of the mesh and computed density contours: (a)-(b) first mesh; (c)-(d) second mesh; and (e)-(f) third mesh

$x = 50$ $x = 200$ $x = 400$

Fig. 7 Mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation



Fig. 8 Diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner

and the transverse directions of the duct. The grids along the duct centerline are perturbed in the transverse direction with a magnitude of $\pm 10^{-6}$. Figure 7 shows the computed density contours of the normal shock at three locations along the duct by the mixed entropy fix method that provides accurate shock resolution.

Shock diffraction: The last test case, the expansion shock problem, used to evaluate the nu-

merical instability is the diffraction of a Mach 2 shock moving over a 90° corner. Figure 8 shows the computed density contours obtained from the mixed entropy fix method. On the other hand, the original Roe's scheme could not provide proper solution due to the negative internal energy that occurs during the computation in the vicinity of the turning corner.

4. Higher-Order Extension and Application on Unstructured Triangular Meshes

4.1 Linear reconstruction for unstructured triangular mesh and temporal discretization

Solution accuracy from the first-order formulation described in the preceding section can be improved by implementing a higher-order formulation for both space and time. A higher-order spatial discretization is achieved by applying the Taylor' series expansion to the cell-centered solution for each cell face (Frink, 1994). For instance, the solutions at the midpoint of an element edge between node 1 and 2 can be reconstructed from,

$$q_{1,2} = q_c + \frac{\Psi_c}{3} \left[\frac{(q_1 + q_2)}{2} - q_3 \right] \quad (17)$$

where $q = [\rho \ u \ v \ p]^T$ consists the primitive variables of the density, the velocity components, and the pressure, respectively; q_c is the solution at the element centroid; q_n , $n=1, 2, 3$ are the solutions at nodes. In this paper, the pseudo-Laplacian method proposed by Holmes and Connell (Holmes and Connell, 1989) is used to determine nodal quantities,

$$q_n = \frac{\sum_{i=1}^N (w_i q_{c,i})}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (18)$$

where $q_{c,i}$ are the surrounding cell-centered values of node n , w_i is the cell weights, and N is the number of the surrounding cells. The cell weights, w_i , may be differed significantly from unity for some severe distorted meshes as indicated in Ref.(Holmes and Connell, 1989), with suggestion for clipping all the weights in the

range of 0 to 2. In this paper, the clipping of weights is slightly different by modifying only the value of weights of boundary meshes. If any weight becomes negative, its absolute value is used for simplicity. Several examples presented below have shown that such modification performs well. The Ψ_c in Eq. (17) represents the limiter for preventing spurious oscillation that may occur in the region of high gradients. In this study, Vekatakrishnan's limiter function (Vekatakrishnan, 1995) is selected.

The second-order temporal accuracy is achieved by implementing the second-order accurate Runge-Kutta time stepping method (Shu and Osher, 1988). To reduce computational effort, the local element time steps are used for steady-state analysis, while the minimum global time step based on the idea in Ref.(Linde and Roe, 1997) is used for the transient analysis.

4.2 Numerical evaluation

The higher-order extension of the Roe's scheme with the proposed entropy fix method described in the preceding section is evaluated by solving several test cases. The modified scheme is also combined with the adaptive meshing technique that generates unstructured triangular meshes for more complex flow phenomena. The selected test cases are: (1) Symmetric rarefaction wave, (2) Oblique shock reflection at a wall, (3) Mach 2 flow in a 15° channel, and (4) Mach 2 shock reflection over a wedge.

Symmetric rarefaction wave: The initial conditions of the flow on the left and right sides of the tube are given by $(\rho, u, p)_l = (7.0, -1.0, 0.2)$ and $(\rho, u, p)_r = (7.0, 1.0, 0.2)$. Such initial conditions are chosen (Linde and Roe, 1997) to produce vacuum at the central region. The 1.0×0.1 computational domain is divided into 400 and 40 equal intervals in the x and y directions, respectively, using all triangular elements. Figures 9(a)-(c) show the first order accurate computed density, pressure and u -velocity distributions along the tube length at time $t=0.3$ which are compared with the Steger-Warming FVS-(Steger and Warming, 1981), AUSM (Liou and Steffen, 1993), HLLC (Toro et al., 1994),

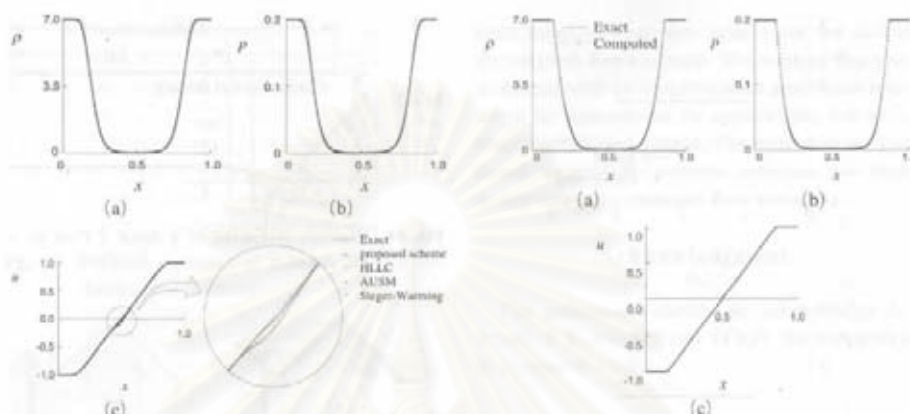


Fig. 9 Comparative exact and computed solutions at time $t=0.3$ for symmetric rarefaction wave problem $\theta(1)$: (a) density distributions; (b) pressure distributions; and (c) u -velocity distributions

and the exact solutions. The density and pressure distributions are nearly identical for the four schemes. But for the computed u -velocity, the AUSM and the HLLC schemes give less solution accuracy as compared to the Steger-Warming FVS and the proposed schemes in the vicinity of central region. This problem was repeated using the higher-order accurate scheme. Figures 10(a)–(c) show that such higher-order extension of Roe's scheme with the mixed entropy fix method can provide more accurate solution than its first-order solution.

Oblique shock reflection at a wall: The problem statement of an oblique shock reflection at a wall (Yee et al., 1985) on the domain 1.0×4.0 is presented in Fig. 11. The adaptive remeshing technique described in section 2.3 is used to generate adaptive unstructured triangular meshes. The procedure starts by creating a relatively uniform mesh as shown in Fig. 12(a). The fluid analysis is then performed to generate the corresponding solution such as the density contours as shown in Fig. 12(b). This flow solution is then used to generate an adaptive mesh to cluster small elements in the regions of high density gradients, and at the same time, to use larger

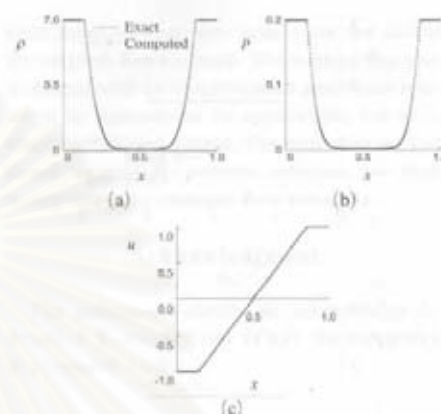


Fig. 10 Comparative exact and computed solutions at time $t=0.3$ for symmetric rarefaction wave problem $\theta(2)$: (a) density distributions; (b) pressure distributions; and (c) u -velocity distributions

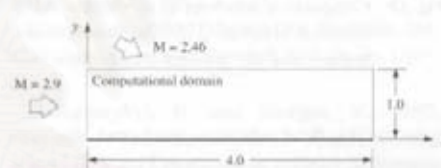
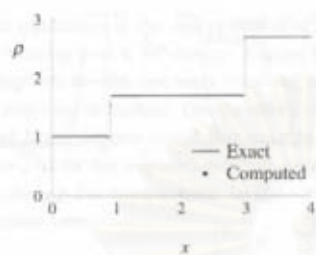


Fig. 11 Problem statement of an oblique shock reflection at a wall

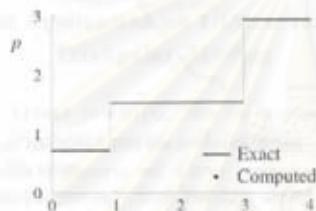


Fig. 12 An oblique shock reflection at a wall: (a)–(b) Initial mesh and the corresponding density contours; and (c)–(d) Third adaptive mesh and the corresponding density contours

elements on the other regions. The fluid analysis is then performed again to yield a more accurate solution. The entire process is repeated to



(a)



(b)

Fig. 13 Comparative solutions of an oblique shock reflection at a wall $\theta(2)$: (a) density distribution; and (b) pressure distribution

generate the third adaptive mesh and the corresponding solution as shown in Figs. 12(c)-(d). Figures 13(a)-(b) show comparative density and pressure distributions between the computed and exact solutions at $y=0.5$. The figures show the higher-order accurate scheme can capture abrupt change of the solutions across the shocks very well.

Mach 2 flow in a 15° channel: Both the first-order and higher-order Roe's schemes with the proposed entropy fix method are evaluated on unstructured meshes by using the problem of a Mach 2 flow in a 15° channel as presented in Fig. 14. The third adaptive mesh and its corresponding density contours computed by using the first-order scheme are shown in Figures 15(a)-(b), respectively. The analysis of Mach 2 flow in the 15° channel is repeated but with the use of the higher-order scheme. The third adaptive mesh, and its corresponding density contours are shown in Figs. 16(a)-(b). These figures highlight the capability of the higher-order

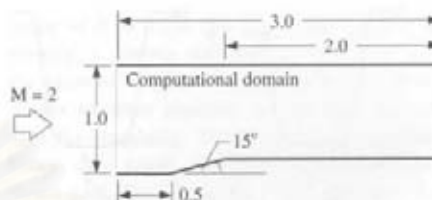


Fig. 14 Problem statement of a Mach 2 flow in a 15° channel



Fig. 15 Mach 2 flow in a 15° channel $\theta(1)$: (a) Third adaptive mesh; and (b) Density contours



Fig. 16 Mach 2 flow in a 15° channel $\theta(2)$: (a) Third adaptive mesh; and (b) Density contours

scheme for providing more detailed flow behavior, such as the stem generated from the shock impinging on the upper wall which could not be captured by the first-order scheme.

Mach 2 shock reflection over a wedge: The computational domain for a Mach 2 shock reflection over a wedge at 46 degrees (Takayama and Jiang, 1997) is illustrated in Figure 17. Figure 18 shows series of the transient adaptive meshes and the corresponding computed density contours at different time instants as the reflection shock starts to form over a wedge. The transient adaptive meshes consist of approximately 20,000 elements in early time before the normal shock reaches the wedge corner, and the number of elements are increased to approximately 28,000 at bottom right image of Fig. 18. The figures highlight the use of the higher-order accurate scheme on adaptive meshes to effectively obtain detailed flow solution.

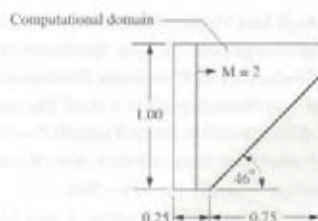


Fig. 17 Problem statement of a Mach 2 shock reflection over a wedge

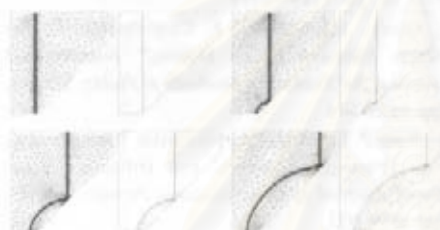


Fig. 18 Transient adaptive meshes and the computed density contours of a Mach 2 shock reflection over a wedge at four different stages of the computation $\theta(2)$

5. Conclusion

A two-dimensional adaptive Delaunay mesh generation algorithm and its application for high-speed compressible flow were presented. The adaptive remeshing technique was described in detail with the pseudo-code presented in object-oriented programming concept. To capture fast variations of the solution effectively, a new element size scaling function was introduced into the adaptive remeshing technique. The combined algorithm was evaluated by generating adaptive meshes for three examples with prescribed element size functions.

A mixed entropy fix method was proposed to improve numerical stability of the Roe's flux-difference splitting scheme for solving high-speed compressible flow problems. The method combines the entropy fixes by Van Leer et al. together with Pandolfi and D'Ambrosio. The method was then evaluated by several well-known test cases and it was found to eliminate unphysical

solutions that may arise from the use of the original Roe's scheme. The method was also combined with an adaptive mesh generation technique to demonstrate its applicability for arbitrary unstructured meshes. The entire process was found to provide accurate solutions for both steady-state and transient flow test cases.

Acknowledgment

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund (TRF) for supporting this research work.

References

- Borouchaki, H., George, P. L. and Mohammadi, B., 1997, "Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part II. Application," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 25, pp. 85–109.
- Bowyer, A., 1981, "Computing Dirichlet Tessellations," *Computer Journal*, Vol. 24, pp. 162–166.
- Dechaumphai, P. and Morgan, K., 1992, "Transient Thermal-Structural Analysis using Adaptive Unstructured Remeshing and Mesh Movement," *Thermal Structures and Materials for High-Speed Flight*, AIAA, Washington, D.C., pp. 205–228.
- Dechaumphai, P. and Phongthanapanich, S., 2003, "High-Speed Compressible Flow Solutions by Adaptive Cell-Centered Upwinding Algorithm with Modified H -correction Entropy Fix," *Advances in Engineering Software*, Vol. 32, pp. 533–538.
- Frey, W. H., 1991, "Mesh Relaxation: A New Technique for Improving Triangulations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, pp. 1121–1133.
- Frink, N. T., 1994, "Recent Progress toward a Three-dimensional Unstructured Navier-Stokes Flow Solver," 32th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, *AIAA Paper-94-0061*.
- Gressier, J. and Moschetta, J. M., 2000, "Robustness versus Accuracy in Shock-wave Computations," *International Journal for Numerical*

- Methods in Fluids*, Vol. 33, pp. 313–332.
- Harten, A., 1983, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357–393.
- Holmes, D. G. and Connell, S. D., 1989, "Solution of the 2D Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids," 9th Computational Fluid Dynamics Conference, Buffalo, New York, *AIAA Paper-89-1932-CP*.
- Kang, H. K., Tsutahara, M., Ro, K. D. and Lee, Y. H., 2002, "Numerical Simulation of Shock Wave Propagation using the Finite Difference Lattice Boltzmann Method," *KSME International Journal*, Vol. 16, pp. 1327–1335.
- Kang, H. K., Tsutahara, M., Ro, K. D. and Lee, Y. H., 2003, "Numerical Analysis of a Weak Shock Wave Propagating in a Medium using Lattice Boltzmann Method (LBM)," *KSME International Journal*, Vol. 17, pp. 2034–2041.
- Karamete, B. K., Tokdemir, T. and Ger, M., 1997, "Unstructured Grid Generation and a Simple Triangulation Algorithm for Arbitrary 2-D Geometries using Object Oriented Programming," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 251–268.
- Lin, H. C., 1995, "Dissipation Additions to Flux-Difference Splitting," *Journal of Computational Physics*, Vol. 117, pp. 20–27.
- Linde, T. and Roe, P. L., 1997, "Robust Euler Codes," *AIAA Paper-97-2098*, 13th Computational Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, CO.
- Liou, M. S. and Steffen, C. J., 1993, "A New Flux Splitting Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol. 170, pp. 23–39.
- Marchant, M. J. and Weatherill, N. P., 1993, "Adaptivity Techniques for Compressible Inviscid Flows," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 106, pp. 83–106.
- Pandolfi, M. and D'Ambrosio, D., 2001, "Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the 'Carbuncle' Phenomenon," *Journal of Computational Physics*, Vol. 166, pp. 271–301.
- Perry, K. M. and Imlay, S. T., 1988, "Blunt-body Flow Simulations," 24th AIAA/SAE/ASME/ASEE Joint Propulsion Conference, Boston, MA, *AIAA Paper-88-2904*.
- Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, P., 2004, "Evaluation of Combined Delaunay Triangulation and Remeshing for Finite Element Analysis of Conductive Heat Transfer," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, Vol. 27, pp. 319–340.
- Probert, J., Hassan, O., Peraire, J. and Morgan, K., 1991, "An Adaptive Finite Element Method for Transient Compressible Flows," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 1145–1159.
- Quirk, J. J., 1994, "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 18, pp. 555–574.
- Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357–372.
- Sanders, R., Morano, E. and Druguet, M. C., 1998, "Multidimensional Dissipation for Upwind Schemes: Stability and Applications to Gas Dynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol. 145, pp. 511–537.
- Shu, C. W. and Osher, S., 1988, "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-capturing Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, pp. 439–471.
- Steger, J. L. and Warming, R. F., 1981, "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Applications to Finite Difference Methods," *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, pp. 263–293.
- Takayama, K. and Jiang, Z., 1997, "Shock Wave Reflection over Wedges: a Benchmark Test for CFD and Experiments," *Shock Waves*, Vol. 7, pp. 191–203.
- Toro, E. F., Spruce, M. and Speares, W., 1994, "Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver," *Shock Waves*, Vol. 4, pp. 25–34.
- Van Leer, B., Lee, W. T. and Powell, K. G., 1989, "Sonic-Point Capturing," 9th Computational Fluid Dynamics Conference, Buffalo, New York, *AIAA Paper-89-1945-CP*.
- Vekatakrishnan, V., 1995, "Convergence to

Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters," *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, pp. 120~130.

Watson, D. F., 1981, "Computing the *n*-Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes," *Computer Journal*,

Vol. 24, pp. 167~172.

Yee, H. C., Warming, R. F. and Harten, A., 1985, "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-state Calculations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, pp. 327~360.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทความ Flux-difference splitting scheme with modified multidimensional dissipation on unstructured meshes

FLUX-DIFFERENCE SPLITTING SCHEME WITH MODIFIED MULTIDIMENSIONAL DISSIPATION ON UNSTRUCTURED MESHES

Sutthisak Phongthanapanich and Pramote Dechaumphai*

ABSTRACT

A flux-difference splitting scheme with a modified multidimensional dissipation for high-speed compressible flow analysis on unstructured meshes is presented. The scheme eliminates unphysical flow behaviors such as a spurious bump of the carbuncle phenomenon that occurs on the bow shock from flow over a blunt body, and the expansion shock generated from flow over a forward facing step. The switching function suggested by Quirk is implemented as a choice to detect the vicinity of strong shock. The proposed scheme is further extended to obtain higher-order spatial and temporal solution accuracy. The scheme is, in addition, combined with an adaptive meshing technique that generates unstructured triangular meshes to resemble the flow phenomena for reducing computational effort. The entire procedure is evaluated by solving several benchmarks as well as steady-state and transient high-speed compressible flow problems.

Key Words: shock instabilities, carbuncle phenomenon, Roe's FDS, entropy fix, *H*-correction.

1. INTRODUCTION

High-speed compressible flows normally involve complex flow phenomena, such as strong shock waves, shock-shock interactions and shear layers. Various numerical inviscid flux formulations have been proposed to solve an approximate Riemann problem. Among these formulations, the flux-difference splitting scheme by Roe (1981) is widely used due to its accuracy, quality and mathematical clarity. However, the scheme may sometimes lead to unphysical flow solutions in certain problems, such as the carbuncle phenomenon (Perry and Inlay, 1988) with a spurious bump in the bow shock from flow over a blunt body. The scheme may not provide an accurate solution for the complex impinging shock phenomenon yielding kinked mach stem (Quirk, 1994) generated from a moving shock over a ramp. In the odd-even decoupling problem, an unrealistic perturbation

may grow with the planar shock as it moves along the duct. To improve the solution accuracy of these problems, Quirk pointed out that the original Roe's scheme should be modified or replaced by other schemes in the vicinity of a strong shock.

It has been known, for some time, that Roe's original scheme does not satisfy the entropy condition and may allow unrealistic expansion shock. Harten (1983) proposed an entropy fix formulation to replace the near zero small eigenvalues by some tolerances. The mathematical background of Harten's entropy fix with the suggested tolerance values was given by Van Leer *et al.* (1989).

The main objectives of this paper are to propose and evaluate a modified Roe's scheme on adaptive unstructured meshes for two-dimensional high-speed compressible flow analysis. The entropy fix method by Van Leer *et al.* (1989) and the multidimensional dissipation technique given by Pandolfi and D'Ambrosio (2001) are modified for unstructured triangular meshes and implemented into Roe's original scheme. To prevent unnecessary dissipation injection in some cases, the switching function suggested by Quirk may be applied as a choice to detect the

*Corresponding author. (Tel: 66-2-2186621; Fax: 66-2-218-6621; Email: fmepec@eng.chula.ac.th)
The authors are with the Mechanical Engineering Department, Chulalongkorn University, Bangkok 10330, Thailand.

vicinity of a strong shock.

The presentation in this paper starts at Section II describing some well-known problems which exhibit numerical shock instability from Roe's scheme. The entropy fix methods of Van Leer *et al.* (1989), Sanders *et al.* (1998), and Pandolfi and D'Ambrosio (2001) are examined to investigate their capabilities, as well as solution accuracy. A modified Roe's scheme with a mixed entropy fix method is then proposed. The presented scheme is further extended to higher-order solution accuracy and then evaluated by several benchmark test cases in Section III. Finally, the performance of the scheme is evaluated on adaptive unstructured meshes for solving both steady-state and transient high-speed compressible flow problems.

II. NUMERICAL SHOCK INSTABILITY AND MIXED ENTROPY FIX METHOD FOR ROE'S SCHEME

Some problems in which Roe's scheme may not provide correct solutions for the compressible Euler computation are presented in this section. Unphysical numerical solutions may arise from the implementation of the one-dimensional upwinding numerical flux function onto the multidimensional formulation. To avoid such solutions, the three entropy fix methods (Van Leer *et al.*, 1989; Pandolfi and D'Ambrosio, 2001; Sanders *et al.*, 1998) have been recently suggested because of their simplicity and convenient code implementation. A mixed entropy fix method that combines the entropy fix method of Van Leer *et al.* (1989) and the modified multidimensional dissipation method by Pandolfi and D'Ambrosio (2001), is proposed in this paper. Details of these entropy fix methods are presented herein and their performance determined by test cases. All solutions in this section use the Roe's scheme with the first-order accuracy on unstructured triangular meshes.

1. Roe's Flux-Difference Splitting Scheme with Dissipation

The governing differential equations of the Euler equations for two-dimensional inviscid flow are given by,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

where U is the vector of conservation variables, E and G are the vectors of the convection fluxes in x - and y -directions, respectively. The perfect gas equation of state is in the form,

$$p = \rho a^2(\gamma - 1) \quad (2)$$

where p is the pressure, ρ is the density, e is the internal energy, and γ is the specific heat ratio.

By integrating Eq. (1) over a control volume, Ω , and applying the divergence theorem to the resulting flux integral,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\partial\Omega} F \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (3)$$

where F is the numerical flux vector and \bar{n} is the unit normal vector of the cell boundary. The numerical flux vector at the cell interface between the left cell L and the right cell R according to Roe's scheme (1981) is

$$F_n = \frac{1}{2}(F_{nL} + F_{nR}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \alpha_k |\lambda_k| r_k \quad (4)$$

where α_k is the wave strength of the k^{th} wave, λ_k is the eigenvalue, and r_k is the corresponding right eigenvector. The eigenvalues in the above Eq. (4) are

$$\lambda_k = \begin{bmatrix} V_n - a \\ V_n \\ V_n \\ V_n + a \end{bmatrix} \quad (5)$$

where V_n is the normal velocity, and a is the speed of sound at the cell interface.

Roe's original scheme, previously described, has been found to produce unphysical solutions of the Euler equations in certain problems. These include the expansion shock from a flow over a step, and the carbuncle phenomenon of a flow over a blunt body. To avoid such unphysical solutions, the entropy fix methods (Harten, 1983; Van Leer *et al.*, 1989; Lin, 1995; Sanders *et al.*, 1998; Pandolfi and D'Ambrosio, 2001) have been proposed and investigated. The performance of these three versions of entropy fix methods are first evaluated for structured meshes herein. These methods are then extended to unstructured meshes and presented in this paper later.

Van Leer's entropy fix method (RoeVL) is designed to correct unphysical expansion shock. The one-dimensional entropy fix was developed by replacing the characteristic speeds of the acoustic waves (for $k=1$ and 4) with

$$|\lambda_k|^* = \begin{cases} |\lambda_k|, & |\lambda_k| \geq 2\eta^{VL} \\ \frac{|\lambda_k|^2}{4\eta^{VL}} + \eta^{VL}, & |\lambda_k| < 2\eta^{VL} \end{cases} \quad (6)$$

where



Fig. 1 Cell interfaces of: (a) structured uniform mesh; (b) unstructured triangular mesh.

$$\eta^{1,2} = \max(\lambda_R - \lambda_L, 0) \quad (7)$$

Sanders *et al.* (1998) introduced an idea of multidimensional dissipation, the so-called H -correction entropy fix method. The method has been shown to eliminate the unrealistic carbuncle phenomenon of the flow over a blunt body by using the structured uniform mesh as shown in Fig. 1(a). The advantages of the method are the simplicity in the implementation into the existing scheme and the parameter-free characteristics. For the two triangular cells shown in Fig. 1(b), the H -correction entropy fix according to Sanders *et al.* (1998), (RoeSA) has been modified as described by Dechaumphai and Phongthanapanich (2003) to

$$\eta^{SA} = \max(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (8)$$

where η_i , $i=1$ to 5 are

$$\eta_i = \frac{1}{2} \max(|\lambda_{iR} - \lambda_{iL}|) \quad (9)$$

Pandolfi and D'Ambrosio (2001) proposed another version of the H -correction entropy fix by excluding the η_1 from Eq. (8) to avoid an erroneous injection of artificial viscosity, and this method is applicable only to entropy and shear waves (for $k=2$ and 3). The method was used by Druguet and Zeitoun (2003) to study shock wave reflections in supersonic steady flows. The modified H -correction entropy fix by Pandolfi and D'Ambrosio (2001), (RoePA) is

$$\eta^{PA} = \max(\eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) \quad (10)$$

where η_i , $i=2$ to 5 are given in Eq. (9).

It has been found that the above three methods, namely the RoeVL, RoeSA and RoePA, perform well on certain problems but may fail for others. For example, as presented later, the RoeVL can perform very well for flows with expansion shocks that contain sonic points such as the flow over a forward facing step. Meanwhile, the RoePA is suitable to correct the numerical instability from insufficient dissipation injected to the entropy and shear waves such as the kinked mach stem problem and the flow over the blunt

body problem. Thus, this paper proposes a mixed entropy fix method (RoeVLPA) that combines the entropy fix method of Van Leer *et al.* (1989) and the modified multidimensional dissipation method by Pandolfi and D'Ambrosio (2001), the modified H -correction, by replacing the original eigenvalues as follows

$$|\lambda_k| = \begin{cases} |\lambda_{1,4}|, & |\lambda_{1,4}| \geq 2\eta^{1,2} \\ \frac{|\lambda_{1,4}|^2}{4\eta^{1,2}} + \eta^{1,2}, & |\lambda_{1,4}| < 2\eta^{1,2} \\ \max(|\lambda_{2,3}|, \eta^{PA}) \end{cases} \quad (11)$$

where $\eta^{1,2}$ and η^{PA} are defined in Eqs. (7) and (10), respectively. This mixed entropy fix method (RoeVLPA) is equivalent to the RoeVL in handling acoustic waves (for $k=1$ and 4) and the RoePA for entropy and shear waves (for $k=2$ and 3).

The above four methods have been evaluated using five test cases involving expansion shocks, the kinked mach stem, the carbuncle phenomenon, and the odd-even decoupling as presented in the following sections. These test cases highlight the performance of the RoePA, RoeSA, RoeVL, and the proposed RoeVLPA on problems with different flow phenomena on structured triangular meshes.

2. The Expansion Shocks

Roe's original scheme may produce an unphysical expansion shock because it does not satisfy the entropy condition. To illustrate this phenomenon, a Mach 3 flow over a forward facing step (Woodward and Colella, 1984) is investigated. The density contours computed from the RoePA, RoeSA, RoeVL, and RoeVLPA are shown in Fig. 2(a)-(d), respectively. The figures show that the RoePA produces an unphysical expansion shock on top of the step corner, whereas the RoeSA, RoeVL, and RoeVLPA provide realistic solutions.

Another expansion shock problem used to evaluate numerical instability is the diffraction of a Mach 2 shock moving over a 90° corner. Figs. 3(a) and (b) show the computed density contours obtained from the RoeVL and RoeVLPA, respectively. On the other hand, neither RoePA nor RoeSA could provide a proper solution due to negative internal energy that occurs during the computation in the vicinity of the turning corner.

3. The Kinked Mach Stem

The kinked mach stem generated from a shock

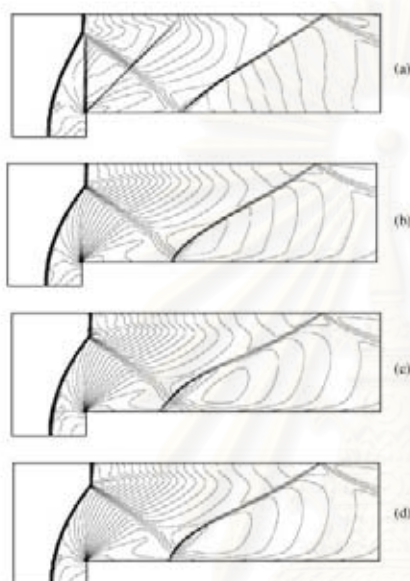


Fig. 2 Mach 3 flow over a forward facing step: (a) RoePA; (b) RoeSA; (c) RoeVL; and (d) RoeVLPA.



Fig. 3 Diffraction of a Mach 2 shock over a 90° corner: (a) RoeVL; and (b) RoeVLPA.

moving over a ramp is another test case used to highlight the performance of these four methods. Figs. 4(a)-(d) respectively show the density contours obtained from the RoePA, RoeSA, RoeVL, and RoeVLPA for a Mach 5 normal shock moving over a 46° ramp. The RoePA, RoeSA and RoeVLPA provide reasonably accurate solutions, such that the kinked mach stem is recovered with the slightly broken-down incident shock. The RoeVL, however, yields a broken-down incident shock with severely kinked mach stem. Such a solution may be caused by insufficient dissipation that cannot counteract the transverse perturbation (Quirk, 1994; Gressier and Moschetta, 2000).

4. The Carbuncle Phenomenon

An unrealistic flow solution, the so-called carbuncle phenomenon, of a steady-state flow over a blunt body from Roe's original scheme was first reported by Perry and Imlay (1988). Such a phenomenon refers to a spurious bump on the bow shock near the flow center line ahead of the blunt body. The phenomenon is highly grid-dependent (Pandolfi and D'Ambrosio, 2001), but does not require a large number of grid points to appear (Gressier and

Moschetta, 2000). To demonstrate this grid-dependent phenomenon, the RoePA, RoeSA, RoeVL, and RoeVLPA methods are employed with three meshes of different element aspect ratios. An enlarged view of the elements near the flow centerline of the first mesh and the corresponding density contours are shown in Figs. 5(a)-(e). The carbuncle phenomenon does not appear in any scheme with the use of this relatively crude mesh. The second mesh has more elements which are refined in the circumferential direction as shown in Fig. 6(a). The RoePA and RoeVLPA provide realistic flow behavior while the RoeSA and RoeVL exhibit small bumps on the bow shock as shown in Figs. 6(b)-(e). The carbuncle phenomenon can be clearly seen in a more refined mesh with higher element aspect ratio as shown in Fig. 7(a). While the RoePA and the proposed RoeVLPA still provide reasonable flow solutions, the carbuncle phenomena are easily observed in the RoeSA and RoeVL as shown in Figs. 7(b)-(c).

5. The Quirk's Test (Odd-Even Decoupling)

The last test case is a Mach 6 moving shock

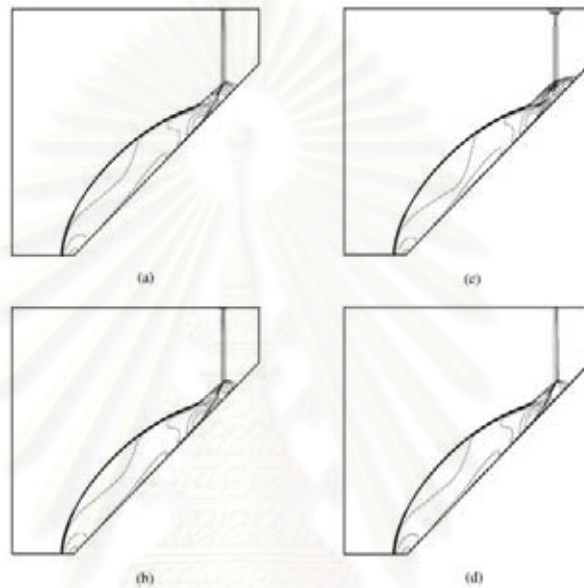


Fig. 4 A kinked mach stem from a Mach 5 shock moving over a 46° ramp: (a) RoePA; (b) RoeSA; (c) RoeVL; and (d) RoeVLPA.

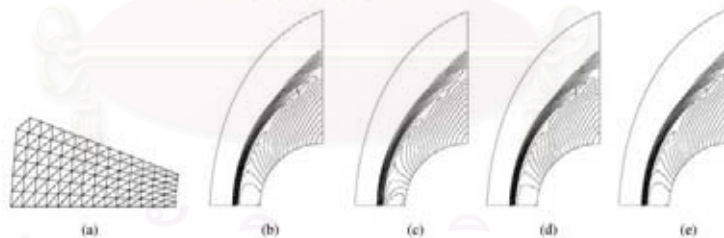


Fig. 5 Mach 15 flow over a blunt body (first mesh): (a) enlarged view of the mesh; (b) RoePA; (c) RoeSA; (d) RoeVL; and (e) RoeVLPA.

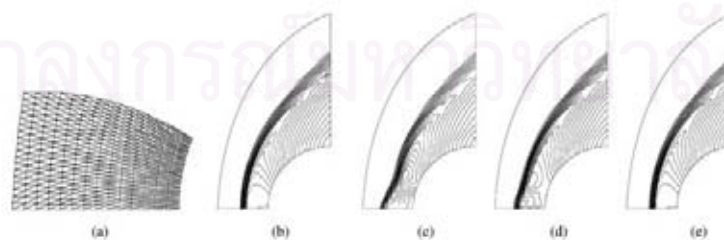


Fig. 6 Mach 15 flow over a blunt body (second mesh): (a) enlarged view of the mesh; (b) RoePA; (c) RoeSA; (d) RoeVL; and (e) RoeVLPA.

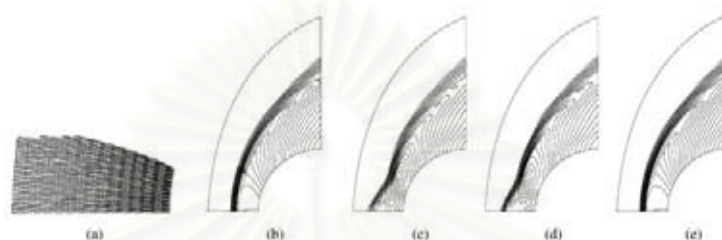


Fig. 7 Mach 15 flow over a blunt body (third mesh): (a) enlarged view of the mesh; (b) RoePA; (c) RoeSA; (d) RoeVL; and (e) RoeVLPA.

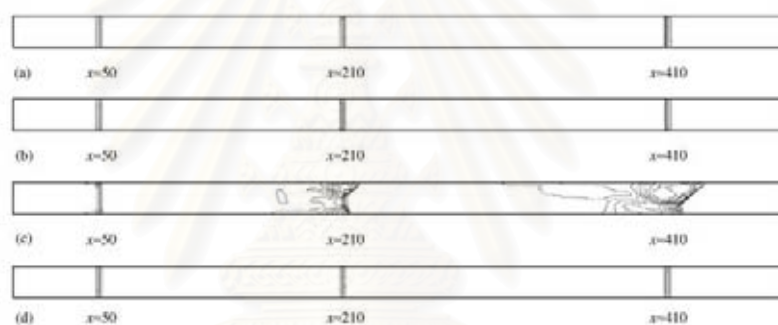


Fig. 8 Mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation: (a) RoePA; (b) RoeSA; (c) RoeVL; and (d) RoeVLPA.

along odd-even grid perturbation in a straight duct (Quirk, 1994). The computational domain consists of a uniform triangular mesh with 800 and 20 equal intervals respectively along the axial and the transverse directions of the duct. The grids along the duct centerline are perturbed in the transverse direction with magnitude of $\pm 10^{-6}$. Figs. 8(a)-(d) show the computed density contours of the normal shock at the three locations along the duct by the RoePA, RoeSA, RoeVL, and RoeVLPA, respectively. The RoePA, RoeSA, and RoeVLPA can provide accurate shock resolution whereas the RoeVL suffers from numerical instabilities. As explained by Gressier and Moschetta (2000), the exact capture of contact discontinuity and strict stability cannot be simultaneously satisfied in any upwind scheme. The solution suggests that additional dissipation injection to the entropy and shear waves is thus needed to stabilize Roe's scheme as done by RoePA, RoeSA, and RoeVLPA.

The results obtained from the above five test cases show that the proposed RoeVLPA method performs well to provide realistic flow solutions for all test cases.

6. Quirk's Pressure Switching Function

Roe's original flux-difference splitting scheme may not provide a stable solution in the vicinity of a strong shock. Quirk (1994) suggested that the scheme should be replaced by a more dissipative scheme such as the HLLC scheme (Einfeldt, 1988) in such a region. To detect the vicinity of a strong shock, Quirk proposed a pressure switching function,

$$\frac{|p_L - p_R|}{\min(p_L, p_R)} > \alpha \quad (12)$$

where α is a threshold parameter which is problem-dependent; p_L and p_R are the pressures of the left and right cells that act on the cell interface.

This pressure switching function has been examined as a condition for modifying the eigenvalues that correspond to the entropy and shear waves of the proposed RoeVLPA method. The test case of the Mach 6 moving shock along the odd-even grid perturbation in a straight duct is repeated with the use of the above switching function. Figs. 9(a)-(b) show density contours obtained from the RoeVLPA method with the pressure

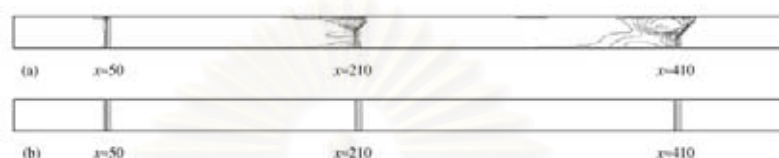


Fig. 9 A Mach 6 moving shock along odd-even grid perturbation (RoeVLPA and Quirk's switching function): (a) $\alpha=2$; and (b) $\alpha=1$.

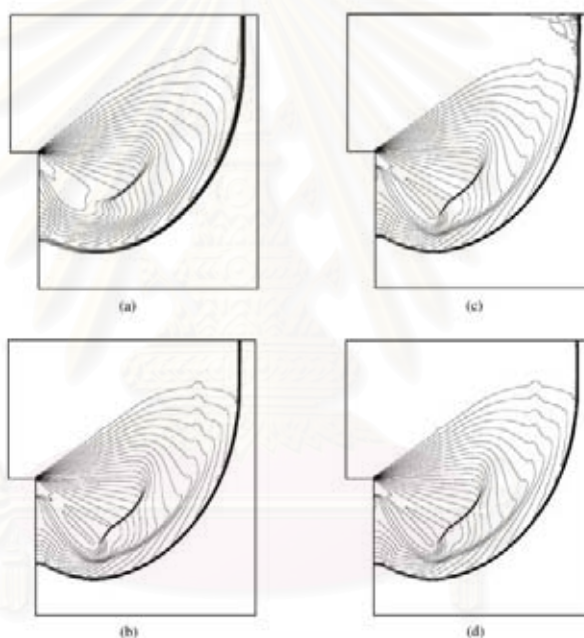


Fig. 10 Density contours of a diffraction of Mach 5.09 shock over a 90° corner at time $t=0.25$: (a) $\theta(1)$ -RoeVLPA; (b) $\theta(2)$ -RoeVLPA; (c) $\theta(2)$ -RoeVLPA with $\alpha=15$; and (d) $\theta(2)$ -RoeVLPA with $\alpha=1$.

switching function of $\alpha=2$ and 1, respectively. The figures clearly indicate that the quality of the shock resolution depends on the selected threshold values. This example, however, also shows that the suggested replacement of Roe's original scheme by a more dissipative scheme in the vicinity of strong shock can be avoided. The proposed RoeVLPA method may be used for the entire computational domain if the threshold parameter is selected properly. The Quirk's pressure switching function described in this section will be examined again for the problem of Mach 5.09 shock over a 90° corner as shown in Fig. 10. But for the rest of the problems presented in this paper, all computations are performed without activating this Quirk's pressure switching function.

III. HIGHER-ORDER EXTENSION AND APPLICATION ON UNSTRUCTURED TRIANGULAR MESHES

I. Linear Reconstruction and Limiter

Solution accuracy from the first-order formulation described in the preceding section can be improved using a higher-order formulation for both space and time. A higher-order spatial discretization is achieved by applying the Taylor's series expansion to the cell-centered solution for each cell face (Frink *et al.*, 1991). For instance, the solutions at the midpoint of an element edge between node 1 and 2 shown in Fig. 11, can be reconstructed from

$$q_{h,i} = q_C + \frac{\Psi_C}{2} \left[\frac{q_1 + q_2}{2} - q_3 \right] \quad (13)$$

where $q = [\rho \ u \ v \ p]^T$ consists of the primitive variables of the density, the velocity components, and the pressure, respectively; q_C is the solution at the element centroid; $q_n, n=1, 2, 3$ are the solutions at nodes. In this paper, the inverse-distance weighting from the centroid to the nodes that preserves the principle of positivity (Frink and Pirzadeh, 1998) is used

$$q_n = \frac{\sum_{i=1}^N q_{C,i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{|r_i|}} \quad (14)$$

where $q_{C,i}$ are the surrounding cell-centered values of node n , $|r_i|$ is the distance from the centroid to node n , and N is the number of the surrounding cells.

The Ψ_C in Eq. (13) represents the limiter for preventing spurious oscillation that may occur in the region of high gradients. In this study, Venkatakrishnan's limiter function (Venkatakrishnan, 1995) is selected,

$$\Psi_C = \min_{j=1,2,3} \begin{cases} \alpha \frac{\Delta_{-}}{\Delta_{+}^{max}}, & \Delta \geq 0 \\ \alpha \frac{\Delta_{-}}{\Delta_{-}^{min}}, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta = 0 \end{cases} \quad (15)$$

where $\Delta_{-} = q_C - q_n$, $\Delta_{+}^{max} = q_{max} - q_n$, and $\Delta_{-}^{min} = q_{min} - q_n$. The q_{max} and q_{min} are respectively the maximum and minimum values of all distance-one neighbouring cells. The function ϕ is similar to the Van Albada limiter (Van Albada et al., 1982) which is expressed in the form

$$\phi(\eta) = \frac{\eta^2 + 2\eta + \epsilon^2}{\eta^2 + \eta + 2 + \epsilon^2} \quad (16)$$

The value ϵ^2 is equal to $(Kh)^2$, where K is a constant of 5 in this paper and h is the average mesh size.

2. Second-Order Temporal Discretization

Second-order temporal accuracy is achieved by implementing the second-order accurate Runge-Kutta time stepping method (Shu and Osher, 1988)

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 F^* \cdot n_j$$

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} [U_i^n + U_i^* - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j=1}^3 F^* \cdot n_j] \quad (17)$$

where Δt is the time step. To reduce the computation effort, the local element time steps are used for steady-state analysis, while the minimum global time step based on spectral radii (Vijayan and Kallinderis, 1994) is used for transient analysis.

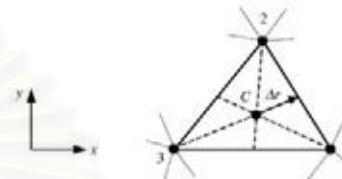


Fig. 11 Linear reconstruction on a typical triangular element

3. Numerical Evaluation

The higher-order extension of Roe's scheme with the proposed entropy fix method described in the preceding section is evaluated by solving several test cases. The modified scheme is also combined with an adaptive meshing technique that generates unstructured triangular meshes for more complex flow phenomena. The selected test cases are: (1) Sod shock tube, (2) Diffraction of Mach 5.09 shock over a 90° corner, (3) Oblique shock reflection at a wall, (4) Mach 2 flow in a 15° channel, and (5) Mach 2 shock reflection over a wedge.

(i) Sod Shock Tube

The one-dimensional shock tube test case, the so-called Sod shock tube (Sod, 1978), is solved by using a two-dimensional domain. The initial conditions of the fluids on the left and right sides are given by $(\rho, u, p)_L = (1.0, 0.0, 1.0)$ and $(\rho, u, p)_R = (0.125, 0.0, 0.1)$. The 1.0×0.1 computational domain is divided into 400 and 40 equal intervals in the x - and y -directions, respectively. The domain is discretized with uniform triangular elements. Figs. 12(a)-(f) show the computed density, pressure and u -velocity distributions along the tube length which are compared with the exact solutions at time $t=0.15$. The figures show that the higher-order extension of Roe's scheme with the entropy fix RoeVLPA method provides more accurate solutions than its first-order solutions.

(ii) Diffraction of Mach 5.09 Shock Moving over a 90° Corner

This test case is taken from Quirk (1994) as the Mach 5.09 normal shock moves from left to right. Figs. 10(a)-(b) show the computed density contours at time $t=0.25$ from the first-order and higher-order accurate RoeVLPA, respectively. The better detailed flow field, including higher shock resolution and sharper contact surface behavior, can be obtained using the higher-order accurate RoeVLPA. Figs. 10(c)-(d) show the computed density contours from the higher-order accurate RoeVLPA again using the Quirk's

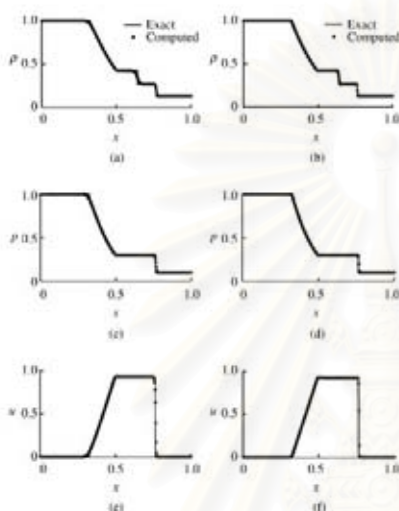


Fig. 12 Comparative computed and exact solutions at time $t=0.15$ for Sod shock tube (RoeVLPA): (a, b) $\rho(1)$ and $\rho(2)$ density distributions; (c, d) $\rho(1)$ and $\rho(2)$ pressure distributions; and (e, f) $\rho(1)$ and $\rho(2)$ u -velocity distributions.

pressure switching function with threshold parameters, α , of 15 and 1, respectively. High value of the parameter α prevents adequate dissipation required to suppress oscillation in the vicinity of the strong shock as can be seen on the upper right of Fig. 10(c). The spurious oscillation of the incident shock is eliminated by reducing the parameter α to 1 as shown in Fig. 10(d). The solution contour shown in this figure agrees very well with that obtained by Quirk (1994).

(iii) Oblique Shock Reflection at a Wall

The problem statement of an oblique shock reflection at a wall (Yee *et al.*, 1985) on the domain 1.0×4.0 is presented in Fig. 13. The adaptive remeshing technique described by Phongthanapanich and Dechaumphai (2002) is used to generate adaptive unstructured triangular meshes. The procedure starts by creating a relatively uniform mesh as shown in Fig. 14(a). The fluid analysis is then performed to generate the corresponding solution, such as the density contours, as shown in Fig. 14(b). This flow solution is then used to generate an adaptive mesh to cluster small elements in the regions of sharp changes of the density gradients, and at the same time, to use larger elements on the other regions. The fluid analysis is then performed again to yield a more accurate solution. The entire process is repeated to generate the third adaptive mesh

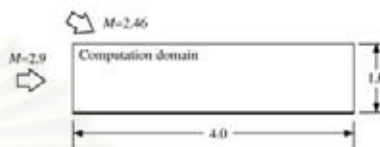


Fig. 13 Problem statement of an oblique shock reflection at a wall

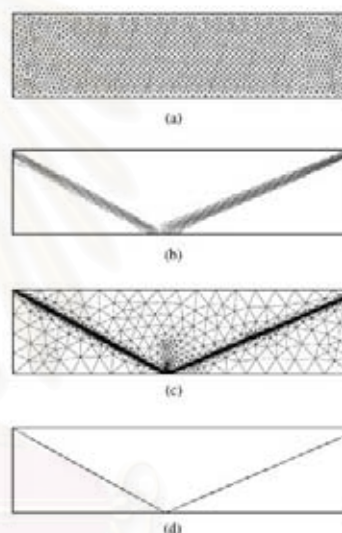


Fig. 14 An oblique shock reflection at a wall: (a)-(b) Initial mesh and the corresponding density contours; and (c)-(d) Third adaptive mesh and the corresponding density contours

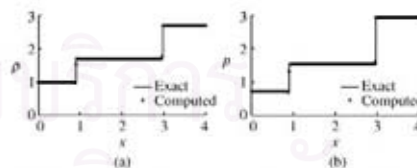


Fig. 15 Comparative solutions of an oblique shock reflection at a wall ($\rho(2)$ -RoeVLPA): (a) density distribution; and (b) pressure distribution.

and the corresponding solution as shown in Figs. 14(c)-(d). Figs. 15(a)-(b) show comparative density and pressure distributions between the computed and exact solutions at $y=0.5$. The figures show the higher-order accurate RoeVLPA can deal with abrupt change of solutions across shocks very well.

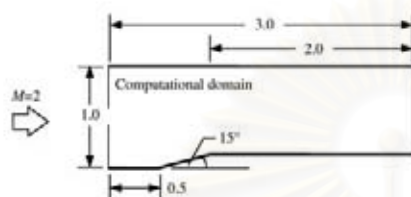
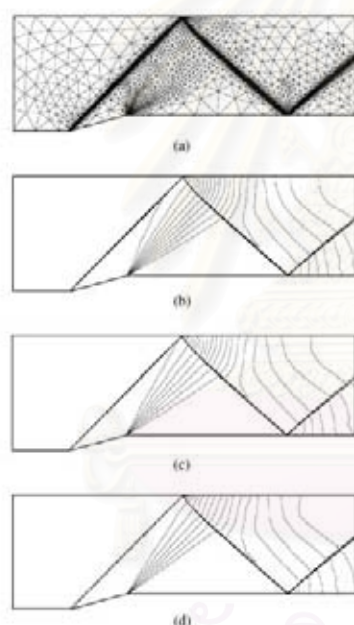


Fig. 16 Problem statement of a Mach 2 flow in a 15° channel

Fig. 17 Mach 2 flow in a 15° channel ($\theta 1$)-RoeVLPA: (a) Third adaptive mesh (b) Density contours; (c) Pressure contours; and (d) Mach contours.

(iv) Mach 2 Flow in a 15° Channel

Both the first-order and higher-order Roe's schemes with the proposed entropy fix RoeVLPA are evaluated on unstructured meshes by using the problem of a Mach 2 flow in a 15° channel as presented in Fig. 16. The third adaptive mesh and their corresponding flow solutions computed by using the first-order RoeVLPA such as the density, pressure, and Mach number are shown in Figs. 17(a)-(d), respectively. The analysis of Mach 2 flow in the 15°

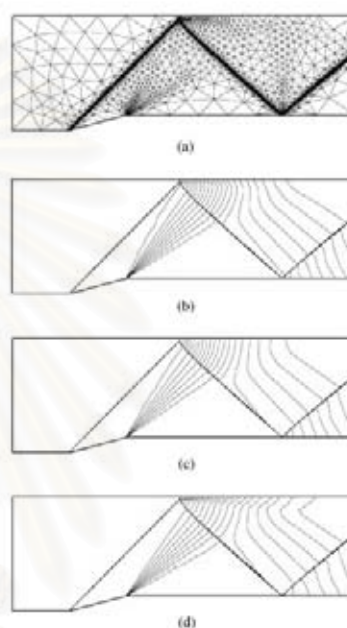
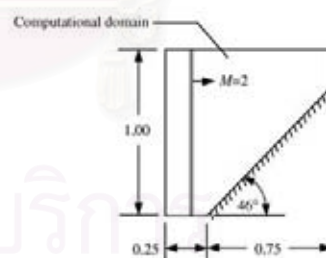
Fig. 18 Mach 2 flow in a 15° channel ($\theta 2$)-RoeVLPA: (a) Third adaptive mesh (b) Density contours; (c) Pressure contours; and (d) Mach contours.

Fig. 19 Problem statement of a Mach 2 shock reflection over a wedge

channel is repeated but with the higher-order RoeVLPA. The third adaptive mesh, and their corresponding solutions are shown in Figs. 18(a)-(d). These figures highlight the capability of the higher-order RoeVLPA to provide more detailed flow behavior, such as the stem generated from the shock impinging on the upper wall, which could not be captured by the first-order RoeVLPA.

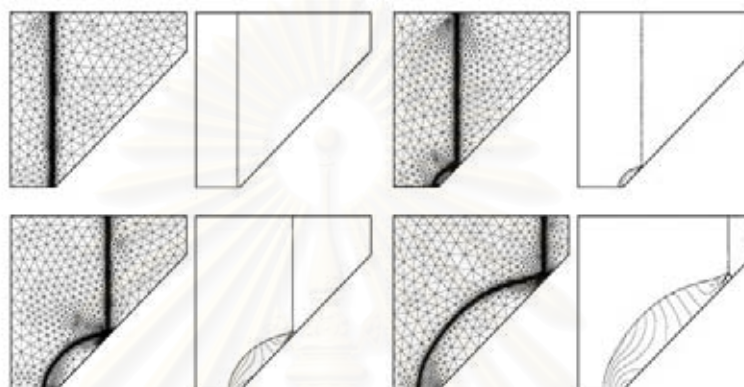


Fig. 20 Transient adaptive meshes and the computed density contours of a Mach 2 shock reflection over a wedge at four different stages of the computation (r(2)-RoeVLPa)

(v) Mach 2 Shock Reflection over a Wedge

The computational domain for a Mach 2 shock reflection over a wedge at 46 degrees (Takayama and Jiang, 1997) is illustrated in Fig. 19. Fig. 20 shows series of transient adaptive meshes and the corresponding computed density contours at different time steps, as the reflection shock starts to form over a wedge. The transient adaptive meshes consist of approximately 20,000 elements in early time before the normal shock reaches the wedge corner, and are increased to approximately 30,000 elements at the bottom right image of Fig. 20. The figures highlight the use of the higher-order accurate RoeVLPa on adaptive meshes to effectively obtain the detailed flow solution.

IV. CONCLUSIONS

A mixed entropy fix method is proposed to improve numerical stability of Roe's flux-difference splitting scheme. The method combines the modified entropy fixes proposed by Van Leer *et al.*, together with the Pandolfi and D'Ambrosio methods. The method was then evaluated by several well-known test cases and found to eliminate unphysical solutions that may arise from the use of Roe's original scheme. These unphysical solutions include the carbuncle phenomenon on the bow shock of the flow over a blunt body, and the expansion shock generated from the flow over a forward facing step. The switching function suggested by Quirk for identifying the region of the strong shock was investigated. Such a condition was combined with the proposed method in order to avoid the application of a more

dissipative scheme in such a region. This, thus, allows the use of the same entropy fix method for the entire flow domain. To further improve solution accuracy, higher-order spatial and second-order Runge-Kutta temporal discretization were also implemented. The method was also combined with an adaptive mesh generation technique to demonstrate its applicability for arbitrary unstructured meshes. The entire process was found to provide more accurate solutions for both the steady-state and transient flow test cases.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are pleased to acknowledge the Thailand Research Fund for supporting this research work.

NOMENCLATURE

a	speed of sound at the cell interface
e	internal energy
E, G	convection fluxes in x - and y -directions, respectively.
F	numerical flux vector
h	average mesh size
K	user-specified constant
\bar{n}	unit normal vector
p	pressure
q	vector of primitive variables
r_k	right eigenvector
U	vector of conservation variables
V_n	normal velocity
Ω	control volume
α	threshold parameter

α_k	wave strength of the k^{th} wave
λ_e	eigenvalue
Ψ_C	Vekatakrishnan's limiter function
ϕ	limiter function
η	numerical dissipation
γ	specific heat ratio
ρ	density

REFERENCES

- Dechaumphai, P., and Phongthanapanich, S., 2003, "High-Speed Compressible Flow Solutions by Adaptive Cell-Centered Upwinding Algorithm with Modified H -Correction Entropy Fix," *Advances in Engineering Software*, Vol. 34, No. 9, pp. 533-538.
- Druguët, M. C., and Zeitoun, D. E., 2003, "Influence of Numerical and Viscous Dissipation on Shock Wave Reflections in Supersonic Steady Flows," *Computers and Fluids*, Vol. 32, No. 4, pp. 515-533.
- Einfeldt, B., 1988, "On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 25, No. 2, pp. 294-318.
- Frink, N. T., Parikh, P., and Pirzadeh, S., 1991, "A Fast Upwind Solver for the Euler Equations on Three-Dimensional Unstructured Meshes," *Proceedings of the 29th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, AIAA Paper-91-0102.
- Frink, N. T., and Pirzadeh, S. Z., 1998, "Tetrahedral Finite-Volume Solutions to the Navier-Stokes Equations on Complex Configurations," *NASA/TM-1998-208961*.
- Gressier, J., and Moschetta, J. M., 2000, "Robustness Versus Accuracy in Shock-Wave Computations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 33, No. 3, pp. 313-332.
- Harten, A., 1983, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No. 3, pp. 357-393.
- Lin, H. C., 1995, "Dissipation Additions to Flux-Difference Splitting," *Journal of Computational Physics*, Vol. 117, No. 1, pp. 20-27.
- Pfundolf, M., and D'Ambrosio, D., 2001, "Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the "Carbuncle" Phenomenon," *Journal of Computational Physics*, Vol. 166, No. 2, pp. 271-301.
- Perry, K. M., and Imlay, S. T., 1988, "Blunt-Body Flow Simulations," *Proceedings of the 24th AIAA, SAE, ASME and ASEE Joint Propulsion Conference*, Boston, MA., USA, AIAA Paper-88-2904.
- Phongthanapanich, S., and Dechaumphai, P., 2002, "Underwater Explosion Simulation by Transient Adaptive Delaunay Triangulation Meshing Technique," *Royal Thai Navy Technical Report*, TR-3894, Bangkok.
- Quirk, J. J., 1994, "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 18, No. 6, pp. 555-574.
- Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, No. 2, pp. 357-372.
- Sanders, R., Morano, E., and Druguët, M. C., 1998, "Multidimensional Dissipation for Upwind Schemes: Stability and Applications to Gas Dynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol. 145, No. 2, pp. 511-537.
- Shu, C. W., and Osher, S., 1988, "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, No. 2, pp. 439-471.
- Sod, G. A., 1978, "A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, No. 1, pp. 1-31.
- Takayama, K., and Jiang, Z., 1997, "Shock Wave Reflection over Wedges: A Benchmark Test for CFD and Experiments," *Shock Waves*, Vol. 7, No. 4, pp. 191-203.
- Van Albada, G. D., Van Leer, B., and Roberts, W. W., 1982, "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics," *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 108, pp. 76-84.
- Van Leer, B., Lee, W. T., and Powell, K. G., 1989, "Sonic-Point Capturing," *Proceedings of the 9th Computational Fluid Dynamics Conference*, Buffalo, New York, USA, AIAA Paper-89-1945-CP.
- Venkatakrishnan, V., 1995, "Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters," *Journal of Computational Physics*, Vol. 118, No. 1, pp. 120-130.
- Vijayan, P., and Kallinderis, Y., 1994, "A 3D Finite-Volume Scheme for the Euler Equations on Adaptive Tetrahedral Grids," *Journal of Computational Physics*, Vol. 113, No. 2, pp. 249-267.
- Woodward, P., and Colella, P., 1984, "The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *Journal of Computational Physics*, Vol. 54, No. 1, pp. 115-173.
- Yee, H. C., Warming, R. F., and Harten, A., 1985, "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations," *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, No. 3, pp. 327-360.

Manuscript Received: Oct. 22, 2003

Revision Received: Feb. 26, 2004

and Accepted: Mar. 24, 2004

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช เกิดเมื่อวันที่ 5 มิถุนายน พุทธศักราช 2512 จังหวัดกระบี่ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต ภาควิชาเครื่องกล มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เมื่อปีการศึกษา 2532 สำเร็จการศึกษาระดับเศรษฐศาสตรบัณฑิต ภาควิชาเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช เมื่อปีการศึกษา 2544 สำเร็จการศึกษาระดับเศรษฐศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2542 และสำเร็จการศึกษาระดับวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2545



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย