# บทที่ 2

# สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้ กล่าวถึงวิธีการปรับแก้ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิต ซึ่งมี 3 วิธี คือ วิธีการปรับแก้แบบวิทแทคเกอร์ (Whittaker Graduation) วิธีการปรับแก้แบบเบส์เซียน (Bayesian Graduation) และวิธีการปรับแก้แบบอินครีสซิงเบส์เซียน (Increasing Bayesian Graduation) ซึ่งทั้ง 3 วิธีดังกล่าวนี้ จะศึกษาเพื่อการปรับแก้ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะเสียชีวิต ($q'_x$) ที่ประมาณด้วยวิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) โดยจะศึกษาภายใต้การแจกแจงของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต (Future Life Time, T) แจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) และการแจกแจงของระยะเวลาการถอนตัว (Withdrawal Time, W) 2 รูปแบบ คือการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) และการแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution) โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. <u>วิธีการประมาณ $q_x$ แบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด</u>

วิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีการประมาณ $q_x$ วิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับข้อมูลการประกันชีวิตแบบไม่สมบูรณ์ ซึ่งวิธีการนี้จะใช้ได้เมื่อตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงแบบมีพารามิเตอร์

กำหนดให้

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อคนที่ } i \text{ เสียชีวิตในช่วง } (x, x+1] \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อคนที่ } i \text{ ถอนตัวออกจากช่วง } (x,x+1] \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

m เป็นจำนวนคน (ขนาดตัวอย่าง) ที่เริ่มต้นอายุ x ปี

d เป็นจำนวนคนที่เสียชีวิตในช่วง (x,x+1)

$t_i$ เป็นระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่จนกระทั่งออกจากกลุ่มของคนที่ i ซึ่งมีอายุเริ่มต้นเป็น x ปี สาเหตุการออกจากกลุ่ม คือ การเสียชีวิต การถอนตัวออกจากช่วง หรือการมีชีวิตอยู่ ณ สิ้นช่วงเวลาศึกษา

${}_{t_i}p_x'^{(d)}$ เป็นความน่าจะเป็นที่คนอายุ x จะมีชีวิตอยู่ต่อไปอีกอย่างน้อย $t_i$ ปี

${}_{t_i}p_x'^{(w)}$ เป็นความน่าจะเป็นที่คนอายุ x จะยังคงอยู่ในช่วงที่ศึกษาอีกอย่างน้อย $t_i$ ปี

$\mu_{x+t_i}^{(d)}$ เป็นพลังของมรณะ

$\mu_{x+t_i}^{(w)}$ เป็นพลังของการถอนตัว

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function, L) คือ

$$L = \prod_{i=1}^{m} {}_{t_i}p_x'^{(d)} \cdot {}_{t_i}p_x'^{(w)} . (\mu_{x+t_i}^{(d)})^{\delta_i} . (\mu_{x+t_i}^{(w)})^{\gamma_i} \tag{2.1}$$

กำหนดให้การเสียชีวิต และการถอนตัวเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน ดังนั้นการประมาณค่าความน่าจะเป็นที่คนอายุ x จะเสียชีวิตภายใน 1 ปีข้างหน้า คือ ในช่วง (x,x+1] เทอม ${}_{t_i}p_x'^{(w)} . (\mu_{x+t_i}^{(w)})^{\gamma_i}$ จะเป็นค่าคงที่ ดังนั้น สมการ (2.1) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$L = \prod_{i=1}^{m} {}_{t_i}p_x'^{(d)} . (\mu_{x+t_i}^{(d)})^{\delta_i} \tag{2.2}$$

ภายใต้ข้อสมมติ เมื่อพลังของมรณะมีค่าคงที่ (Constant Force of Mortality Assumption) กำหนดให้ $\mu_{x+t_i}^{(d)} = \mu_x^{(d)}$ จะได้ว่า

$$L = \left(\mu_x^{(d)}\right)^d \prod_{i=1}^{m} e^{-\mu_x^{(d)} t_i} \tag{2.3}$$

จากสมการ (2.3) หาอนุพันธ์ $\dfrac{d \ln L}{d\mu_x^{(d)}} = 0$ จะได้ว่า

$$\mu_x'^{(d)} = \frac{d}{\sum_{i=1}^{m} t_i} \qquad (2.4)$$

และ เราสามารถหาค่าประมาณ $q_x$ ได้ดังนี้

$$q_x' = 1 - \exp(-\mu_x'^{(d)}) \qquad (2.5)$$

2. <u>วิธีการปรับแก้แบบวิทแทคเกอร์</u>[1]

การปรับแก้โดยวิธีนี้เป็นการนำหลักพื้นฐานของการปรับ คือ ความราบเรียบ (Smooth) และความพอดี (Fit) มารวมเข้าด้วยกัน โดยอาศัยหลักการถ่วงน้ำหนัก และการหาค่าผลต่างของค่าปรับที่ระดับต่าง ๆ และจากนั้นใช้วิธีการแก้สมการเพื่อหาค่าต่ำสุด ซึ่งวิธีการปรับนี้คิดค้นโดย อี ที วิทแทคเกอร์ (E T Whittaker) โดยมีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้ค่าอายุ x ในช่วงที่ศึกษา แทนด้วย 1, 2, .........., n ทั้งนี้เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ ดังนั้น สามารถเขียนสมการพื้นฐานได้ดังนี้

$$M = F + hS = \sum_{x=1}^{n} w_x\left(q_x'' - q_x'\right)^2 + h\sum_{x=1}^{n-z}\left(\Delta^z q_x''\right)^2 \qquad (2.6)$$

โดยที่ z เป็นค่าแสดงดีกรีของโพลีโนเมียล ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะศึกษาที่ z = 1, 2, 3 และ 4

$w_x$ เป็นค่าถ่วงน้ำหนัก

$$w_x = \frac{n_x}{q_x'\left(1 - q_x'\right)}$$

h เป็นค่าเฉลี่ยของ $w_x$

$$h = \left(\sum_{x=1}^{n} w_x\right) / n$$

จากสมการ (2.6) หาค่า $q_x''$ ได้โดยการแก้สมการหาค่าต่ำสุด ดังนี้

---

[1] Dick London "Graduation : The Revision of Estimate" Winsted, Connecticut : ACTEX Publications, 1985, p 53

กำหนด

$q' = [\, q'_1 \; q'_2 \; \ldots \; q'_n \,]'$ เป็นเวกเตอร์ของค่าประมาณเบื้องต้น

$q'' = [\, q''_1 \; q''_2 \; \ldots \; q''_n \,]'$ เป็นเวกเตอร์ของค่าประมาณที่ปรับแก้แล้ว

$w$ เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมขนาด nxn ซึ่งสมาชิกในแนวทแยงมุมคือค่า $w_1$, $w_2, \ldots, w_n$

$k_z$ เป็นเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ทวินามลำดับ z ขนาด (n-z) x n

จากสมการ (2.6) เขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการของเมตริกซ์และเวกเตอร์ ได้ดังนี้

$$(q''-q')' \; w \, (q''-q') h (k_z q'')' \; k_z q'' = (q''-q')' \; w \, (q''-q') + h \, k_z'(q'')' \; k_z q'' \qquad (2.7)$$

จากคุณสมบัติของเมตริกซ์ที่ว่า $y'y$ จะได้ผลลัพท์เป็นผลบวกกำลังสองของสมาชิกของเวกเตอร์ $y$ ดังนั้น สมการ (2.7) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$(\, w + h k_z' k_z \,) \, q'' = w q' \qquad (2.8)$$

จากสมการ (2.8) เราสามารถหาค่า $q''_x$ ได้โดยการแก้สมการเมตริกซ์ด้วยวิธีแฟคเตอร์ไรเซชัน (Factorization Method)

3. วิธีการปรับแก้แบบเบส์เซียน[2]

วิธีการปรับแก้แบบเบส์เซียนเป็นวิธีที่ค่อนข้างใหม่เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการปรับแก้แบบค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนัก หรือวิธีการปรับแก้แบบวิทแทคเกอร์ วิธีการปรับแก้แบบเบส์เซียนที่จะกล่าวถึงนี้ พัฒนาขึ้นโดยไคเมดอฟและโจนส์ (Kimeidorf and Jones) จึงอาจเรียกวิธีการปรับแก้แบบนี้ว่าวิธีของไคเมดอฟ-โจนส์ (Kimeldorf - Jones Method) ซึ่งการปรับแก้โดยวิธีนี้นอกจากอาศัยข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างที่นำมาศึกษาแล้ว ยังอาศัยข้อมูลหรือประสบการณ์ในอดีตมาใช้ด้วย ซึ่งจากข้อมูลหรือประสบการณ์ในอดีตจะทำให้ได้การแจกแจงก่อนการทดลอง (Prior Distribution) และจากการแจกแจงก่อนการทดลองและข้อมูลจาก

---

[2] Dick London "Graduation : The Revision of Estimate" Winsted, Connecticut : ACTEX Publications, 1985, p 71

ตัวอย่างที่นำมาศึกษา สามารถหาการแจกแจงหลังการทดลอง (Posterior distribution) ได้ และสามารถหาค่าที่ปรับแก้แล้วได้จากการแจกแจงดังกล่าวนี้

กำหนด

1. ค่าอายุ x ในช่วงที่ศึกษา เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณให้ x = 1,2, .....,n

2. $Q_x$ เป็นตัวแปรสุ่มแทนความน่าจะเป็นที่คนอายุx จะเสียชีวิตภายใน 1 ปี

3. $Q = [\ Q_1\ Q_2\ ...\ Q_n\ ]'$ เป็นเวกเตอร์สุ่ม (Random Vector)

4. $q\ = [\ q_1\ q_2\ ...\ q_n\ ]'$ เป็นเวกเตอร์ค่าจริงของ $Q$

5. $Q'_x$ เป็นตัวแปรสุ่มแทนค่าประมาณความน่าจะเป็นที่คนอายุ x จะเสียชีวิตภายใน 1 ปี และกำหนดให้ $Q'_x$ เป็นอิสระกัน

6. $Q' = [\ Q'_1\ Q'_2\ ...\ Q'_n\ ]'$

7. $q' = [\ q'_1\ q'_2\ ...\ q'_n\ ]'$

โดยวิธีนี้กำหนดให้ $Q$ มีการแจกแจงแบบมัลตินอร์มัล (Mulitnormal Distribution) มีฟังก์ชั่นความหนาแน่นก่อนการทดลอง (Prior Density Function) ดังนี้

$$f(q) \ = \ k_1 \exp\left[-1/2\left(q-q^p\right)' A^{-1}\left(q-q^p\right)\right] \tag{2.9}$$

โดยที่ $k_1 \ = \ \left[(2\pi)^n |A|\ \right]^{-\frac{1}{2}}$

$q^p = [\ q_1^p\ q_2^p\ ...\ q_n^p]$ เป็นเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Vector) แสดงค่าประมาณที่ดีที่สุดของ $q$ กรณีที่ไม่มีข้อมูลจากการทดลอง ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ใช้ค่า $q^p$ จากตารางมรณะไทย 2529

A เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covarian Matrix) ขนาด n x n

$a_{ij} = p^2 r^{|i-j|}$ , $p > 0,\quad 0 \le r < 1$

เมื่อ $p^2$ เป็นความแปรปรวนของ $Q_i$ สำหรับทุกค่าของ i

$$p^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^p\left(1-q_i^p\right)}{m_i} \Big/ n$$

r เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง $Q_i$ และ $Q_j$ เมื่อ |i - j| = 1 ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะศึกษาที่ r = 0.6, 0.7, 0.8 และ 0.9

และ กำหนดให้ $a_{ij}$ = 0 สำหรับ j > i + 10 และ j < i - 10

กำหนดให้การแจกแจงที่มีเงื่อนไขของ $Q'$ เมื่อกำหนด $q$ มีการแจกแจงแบบมัลตินอร์มัล (Multinormal Distribution)

$$f(q'/q) = k_2 \exp\left[-\frac{1}{2}(q'-q)' B^{-1}(q'-q)\right] \qquad (2.10)$$

โดยที่ $k_2 = \left[(2\pi)^n |B|\right]^{-\frac{1}{2}}$

B เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix) เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมขนาด n x n ซึ่งสมาชิกในแนวทะแยงมุมเป็นความแปรปรวนของ $Q'_x$

$$b_{ii} = \frac{q_i^p(1-q_i^p)}{n_i}$$

จากสมการที่ (2.9) และ (2.10) สามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นหลังการทดลอง (Posterior Density Function) ได้ดังนี้

$$f(q/q') = k_4 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(q-q^p)' A^{-1}(q-q^p) + (q'-q)' B^{-1}(q'-q)\right]\right\} \qquad (2.11)$$

โดยที่ $k_4 = \frac{k_1 k_2}{k_3}$ เมื่อ $k_3 = f(q')$

จากสมการ (2.11) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(q/q') &= k_4 \exp\left\{-\frac{1}{2}[(q')A^{-1}q + q'^p A^{-1}q^p - q'^p A^{-1}q - (q')A^{-1}q^p \right. \\ &\quad \left. + (q')' B^{-1}(q') + (q)' B^{-1}(q) - (q)' B^{-1}(q') - (q')' B^{-1}q]\right\} \\ &= k_5 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(q)'(A^{-1}+B^{-1})q - (q)'(A^{-1}q^p + B^{-1}(q'))\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \left(q'^p A^{-1} + (q')' B^{-1}\right)q\right]\right\} \end{aligned}$$

เมื่อ $k_5 = k_4 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(q'^p A^{-1}q^p + (q')' B^{-1}(q')\right)\right]$

กำหนดให้ $V = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}(B^{-1}(q') + A^{-1}q^p)$

และ $C = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(q/q') &= k_5 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(q)' C^{-1}q - (q)' C^{-1}V - \left(q'^p A^{-1} + (q')' B^{-1}\right)q\right]\right\} \\ &= k_5 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(q)' C^{-1}q - (q)' C^{-1}V - V'C^{-1}q + V'C^{-1}V - V'C^{-1}V\right]\right\} \end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$f(q/q') = k_6 \exp\left[-\tfrac{1}{2}(q-V)'C^{-1}(q-V)\right] \tag{2.12}$$

เมื่อ $k_6 = k_5 \exp\left[-\tfrac{1}{2}V'C^{-1}V\right]$

จากสมการ (2.12) จะเห็นได้ว่า $f(q/q')$ แจกแจงแบบมัลตินอร์มัล (Multinormal Distribution) ที่มี $V$ เป็นเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และ $C$ เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม

ดังนั้น เราสามารถหาค่า $q''$ ได้ดังนี้

$$q'' = E[Q/q']$$

$$= \left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1}\left(B^{-1}(q') + A^{-1}q^{p}\right) \tag{2.13}$$

3. วิธีการปรับแก้แบบอินครีสซิ่งเบส์เซียน[3]

เป็นวิธีการปรับแก้ที่นำความรู้ที่ว่าเมื่ออายุประมาณ 30 ปีขึ้นไป อัตรามรณะของคนเราจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออายุเพิ่มขึ้นมาใช้พิจารณาในการปรับแก้ด้วย โดยการกำหนดข้อจำกัดขึ้นมา และการปรับแก้โดยวิธีนี้จะทำภายใต้สมมติฐานพลังของมรณะมีค่าคงที่ในช่วงอายุหนึ่งๆ และจะหาค่าที่ปรับของพลังมรณะ จากนั้นสามารถหาค่า $q''_x$ ได้จากค่าพลังของมรณะที่ปรับแล้ว

กำหนดช่วงอายุที่ศึกษา k ช่วง และจะศึกษาที่ค่าอายุ x,x+1,........,x+k-1

ภายใต้สมมติฐานพลังของมรณะ(Force of Mortality , $\mu(y)$) เป็นค่าคงที่ในหนึ่งช่วงอายุใดๆ ดังนั้นสำหรับ j = 1,2,..... ..,k จะได้ว่า

$$\mu(y) = \theta_j \qquad ,x+j-1 \le y \le x+j$$

กำหนด

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k) \in R_I$

เมื่อ $R_I = \{\theta, \theta_1 < \theta_2 \ldots\ldots < \theta_k\}$

$d_j$ = จำนวนคนที่เสียชีวิตระหว่างอายุ x+j-1 และ x+j

$e_j$ = ระยะเวลาที่อยู่ภายใต้การสังเกตุ (Exposure) ระหว่างอายุ x+j-1 และ x+j

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ( Likelihood Function,L ) ของ θ กำหนดโดย

$$L(\theta) \propto \prod_{j=1}^{k}\left(\theta_j^{d_j} e^{-e_j\theta_j}\right) \tag{2.14}$$

---

[3] Broffitt J.D. "Increasing and Increasing Convex Bayesian Graduation", TSA, XL, 1988, p 115-148

กำหนด

$$\theta_1 = \phi_1$$
$$\theta_2 = \phi_1 + \phi_2$$
$$\vdots \qquad (2.15)$$
$$\theta_K = \phi_1 + \phi_2 + \ldots\ldots + \phi_k$$

$a = (a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_k)$

$r = (r_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_k)$

$\phi = (\phi_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \phi_k)$

$g(\phi\ / a,r)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบแกมมา ซึ่งมี a, r เป็นพารามิเตอร์

ฟังก์ชันความหนาแน่นก่อนการทดลอง (Prior Density Function) ของ $\phi$ กำหนดโดย

$$\text{prior}(\phi) = g(\phi\ / a,r) \qquad (2.16)$$

จากสมการ (2.14) และ สมการ (2.16) สามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นหลังการทดลอง (Posterior Density Function) ได้ดังนี้

$$\text{post}(\phi) \propto \prod_{j=1}^{k} \left( \theta_j^{d_j} e^{-e_j \theta_j} \right) g(\phi\ / a,r)$$

$$\propto \prod_{j=1}^{k} \theta_j^{d_j} \phi_j^{a_j - 1} e^{-b_j \phi_j} \qquad , \phi_j > 0,\ j=1,\ldots\ldots,k \qquad (2.17)$$

เมื่อ $b_j = r_j + e_j + \ldots\ldots + e_k$

กำหนดให้ $\phi'' = (\phi_1'', \phi_2'', \ldots\ldots\ldots\ldots, \phi_k'')$

$\theta'' = (\theta_1'', \theta_2'' \ldots\ldots\ldots\ldots \theta_K'')$

จากสมการ (2.17) เราสามารถหาค่า $\phi''$ ได้จาก

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} \ln post(\phi) = 0 \qquad , j = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots k$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j}{\theta_j} + \frac{a_i - 1}{\phi_j} - b_j = 0 \quad ,i = 1,\ldots\ldots\ldots,k \qquad (2.18)$$

และใช้ขบวนการทำซ้ำ( Iteration Method ) จนกระทั่งความแตกต่างของค่า$\phi''$ ที่คำนวณได้ในรอบสุดท้ายกับรอบก่อนหน้านั้นมีค่าน้อยกว่า 0.01 หลังจากนั้นคำนวณหาค่า $\theta^{''}$ โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.15) และสามารถคำนวณหาค่าที่ปรับแก้ $q''_x$ ได้ดังนี้

$$q''_{x+j-1} = 1 - \exp(-\theta''_i) \qquad (2.19)$$

การหาค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนการทดลอง a และ r สามารถ หาได้ดังนี้

กำหนดให้

1. $\theta^p = (\theta_1^p,\ldots\ldots\ldots,\theta_k^p)$ เป็นค่าของ $\theta$ ก่อนการทดลอง
2. $\phi^p = (\phi_1^p, \ldots\ldots\ldots, \phi_k^p)$ เป็นค่าของ$\phi$ ก่อนการทดลองซึ่งกำหนดโดย
   $\theta_i^p = \phi_1^p + \ldots\ldots + \phi_j^p$
3. $v_i^p = \mathrm{Var}(\theta_i^p)$ และ $v^p = (v_1^p, \ldots\ldots\ldots, v_k^p)$
4. $v_i' = \mathrm{Var}(\theta_i^{*})$ ซึ่งคำนวณจาก
   $v_i' = \exp(\theta_i^{*} - 1) / e_i$
5. $\sum_{i=1}^{k} v_i^p = m\sum_{i=1}^{k} v_i' \qquad (2.20)$
6. ค่า $m$ ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจะศึกษาที่ $m$ = 1,5 และ 25
7. กำหนดให้ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \alpha \quad ,\alpha > 1$

กำหนดให้ $\phi^p$ เป็นค่าฐานนิยมก่อนการทดลองของ $\phi$ นั่นคือ

$$\phi_i^p = (\alpha - 1) / r_i$$

ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(\phi_i) = \frac{\alpha}{r_i^2} = (\phi_i^p)^2\alpha / (\alpha - 1)^2$$

สมการ (2.20) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\alpha /(\alpha - 1)^2 \sum_{i=1}^{k} h_i(\phi_i^p)^2 = m\sum_{i=1}^{k} v_i' \qquad (2.21)$$

เมื่อ $h_i$ = k - i + 1

จากการแก้สมการ (2.21) จะได้

$$\alpha = 1 + u + \sqrt{u(2 + u)} \qquad (2.22)$$

เมื่อ $u = \sum_{i=1}^{k} h_i (\phi_i^p)^2 / \left[ 2m \sum_{i=1}^{k} v_i' \right]$

และ $r_i = (\alpha - 1) / \phi_i^p \quad ,i = 1,........,k \qquad (2.23)$