บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในบทนี้ กล่าวถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงความเสียหาย สำหรับข้อมูลที่ถูกตัดปลายทางซ้ายและขวา ซึ่งมี 3 วิธี ดังนี้

1. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method)
2. วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)
3. วิธีไค-สแควร์ต่ำสุด (Minimum Chi-Square Method)

ฟังก์ชันการแจกแจงความเสียหายที่ใช้ในการวิจัยมี 2 แบบ คือ การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution) และการแจกแจงลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution) และกำหนดข้อมูลความเสียหายเป็นแบบกลุ่ม

การแจกแจงที่ใช้ในการวิจัย

กำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังนี้

Y	คือ	ตัวแปรสุ่มของความเสียหายที่มีการบันทึก
X	คือ	ตัวแปรสุ่มของความเสียหายที่เกิดขึ้นจริง
$F_Y(x)$	คือ	ฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของ Y
$F_X(x)$	คือ	ฟังก์ชันความหนาแน่นสะสมของ X
$f_Y(x)$	คือ	ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Y
$f_X(x)$	คือ	ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X
$(c_{i-1}, c_i]$	คือ	ช่วงความเสียหาย $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$
f_i	คือ	จำนวนกรมธรรม์ในกลุ่มชั้นที่ i

การแจกแจงความน่าจะเป็น

1. การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution) ฟังก์ชันความหนาแน่น และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมอยู่ในรูปแบบ

$$f_X(x) = \begin{cases} c\tau x^{\tau-1}e^{-cx^{\tau}} & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-cx^{\tau}} & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; x \leq 0 \end{cases}$$

โดยที่ τ เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (Shape parameter) , $\tau > 0$

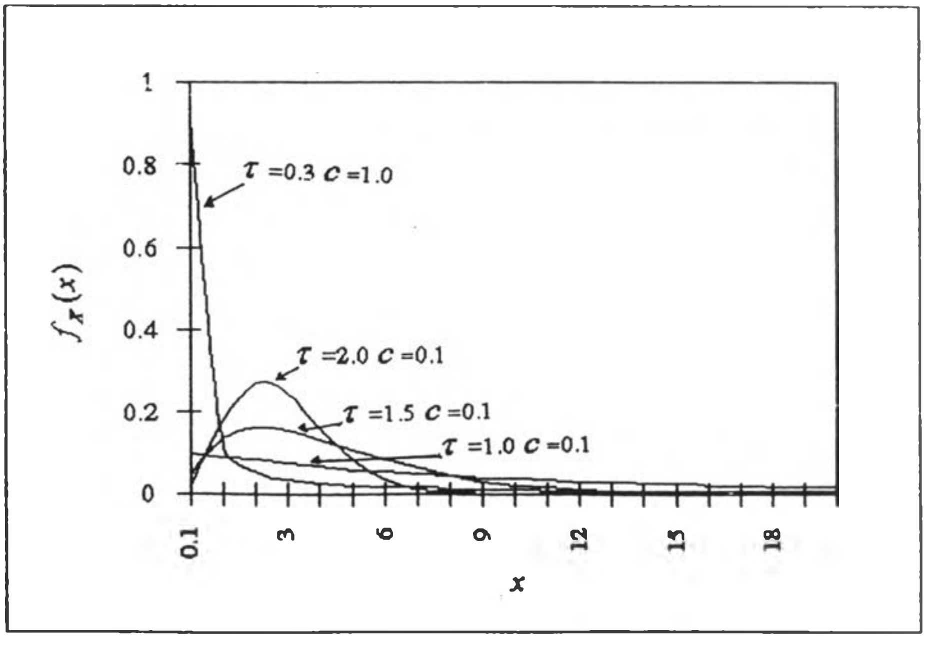
c เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (Scale parameter) , $c > 0$

โมเมนต์ที่ n

$$E\left[X^n\right] = \frac{\Gamma(1+\frac{n}{\tau})}{c^{(n/\tau)}}$$

$$E[X] = E[X]$$

$$V[X] = E[X^2]-(E[X])^2$$



รูปภาพ 2.1 ฟังก์ชันการแจกแจงไวบูลล์

2. **การแจกแจงลอกนอร์มอล** (Lognormal Distribution) **ฟังก์ชันความหนาแน่น และ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมอยู่ในรูปแบบ**

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] & ; \quad x>0 \\ 0 & ; \quad x\le 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) & ; \; x\le 0 \\ 0 & ; \; x\le 0 \end{cases}$$

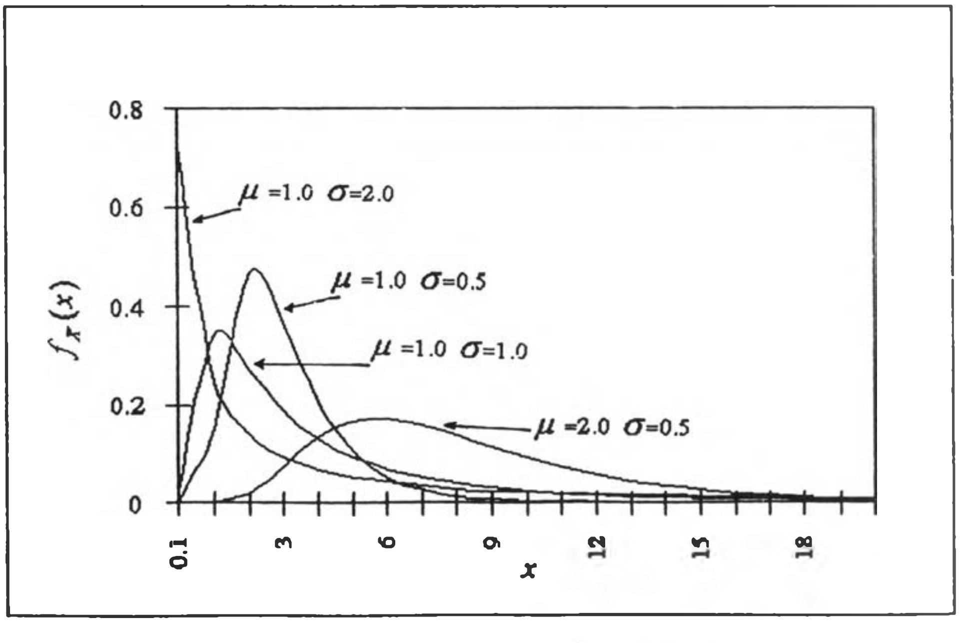
โดยที่ σ **เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง** (Shape parameter) , $\sigma > 0$

μ **เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล** (Scale parameter) , $-\infty < \mu < \infty$

โมเมนต์ที่ n $\quad E\left[X^n\right] = \exp\left(n\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2\right)$

$$E[X] = E[X]$$

$$V[X] = E[X^2]-(E[X])^2$$



รูปภาพ 2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงลอกนอร์มอล

ฟังก์ชันความเสียหายที่มีลักษณะเป็นแบบกลุ่มข้อมูลถูกตัดปลายทางซ้ายและขวา มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

กำหนด $Y = X$ สำหรับ $d < X \le w$

ถ้า $X > w$ ค่า $Y = w$

ฟังก์ชันการแจกแจงที่มีเงื่อนไข (Conditional distribution function) เป็น

$$F_Y(x) = P(X \le x \;/\; d < X \le w)$$

$$= \frac{F_X(x) - F_X(d)}{F_X(w) - F_X(d)}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นที่มีเงื่อนไข (Conditional density function)

$$f_Y(x / d < x \le w) = \frac{f_X(x)}{F_X(w) - F_X(d)}$$

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ที่มีข้อมูลแบบกลุ่มสามารถเขียนได้ดังนี้

$$L = \prod_{i=1}^{k} \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} f_Y(y;\theta)\, dy \right]^{f_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left[F_Y(c_i;\theta) - F_Y(c_{i-1};\theta) \right]^{f_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left[\frac{F_X(c_i) - F_X(c_{i-1})}{F_X(w) - F_X(d)} \right]^{f_i}$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln \left[\frac{F_X(c_i) - F_X(c_{i-1})}{F_X(w) - F_X(d)} \right]$$

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิจัย

1. **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด**

วิธีการหาตัวประมาณของพารามิเตอร์วิธีนี้มีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้น (Theory of Linear Estimation) เป็นวิธีที่คิดโดย คาร์ล เฟรดริก เกาส์ (Karl Friedrich Gauss 1777-1855) และอังเดร แอนดรีวิช มาร์คอฟ (Andrei Andreevich Markov 1856-1922)

วิธีการหาตัวประมาณของพารามิเตอร์แบบกำลังสองต่ำสุด มีหลักเกณฑ์คือ ทำให้ผลบวกของกำลังที่สองของผลต่างระหว่างค่าที่สังเกตได้ กับค่าคาดหวังของตัวแปรมีค่าต่ำสุด มีสมการดังนี้

กำหนดให้ μ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงของ X

$$\frac{\partial SS}{\partial \mu} = 0 \quad \text{เพื่อแก้สมการหาค่า} \quad \mu$$

โดยที่ $$SS = \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - E(X_i) \right]^2$$

ถ้า $X_i = \mu + e_i$ โดยที่ e_i คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (error) ของ X_i วิธีนี้ก็คือ การหาตัวประมาณของ μ ที่ทำให้ผลบวกของกำลังที่สองของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด นั่นคือเราจะเลือก μ ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ มีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะน้อยได้[1]

สำหรับข้อมูลแบบกลุ่มที่ใช้กับฟังก์ชันความเสียหายมีฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเป็นดังนี้

$$SS = \sum_{i=1}^{k} \left\{ n\left[F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) \right] - f_i \right\}^2$$

โดยที่

$$F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) = \frac{F_X(c_i) - F_X(c_{i-1})}{F_X(w) - F_X(d)}$$

f_i คือ จำนวนกรมธรรม์ที่สังเกตได้ในชั้นที่ i

(1) การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution)

$$F_X(x) = 1 - e^{-cx^{\tau}} \quad ; \quad c > 0 \, , \, \tau > 0$$

$$SS = \sum_{i=1}^{k} \left\{ n\left[F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) \right] - f_i \right\}^2$$

---

[1] ประชุม สุวัตถี ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์ กรุงเทพมหานคร, 2527.

หาอนุพันธ์บางส่วนของ SS เทียบกับ c และ τ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 เพื่อแก้สมการหาค่า $\hat{c}$ และ $\hat{\tau}$ ของ c และ τ ตามลำดับ

$$\frac{\partial SS}{\partial c} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial SS}{\partial \tau} = 0$$

โดยกำหนดให้

$$Z_i = F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) = \frac{e^{-cc_{i-1}^{\tau}} - e^{-cc_i^{\tau}}}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial SS}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{k} (nZ - f_i)\,\frac{\partial Z_i}{\partial c}$$

$$\frac{\partial SS}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{k} (nZ - f_i)\,\frac{\partial Z_i}{\partial c}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial c} = \frac{\left[c_i^{\tau} e^{-cc_{i-1}^{\tau}} - c_i^{\tau} e^{-cc_{i-1}^{\tau}}\right] - Z_i\left[w^{\tau} e^{-cw^{\tau}} - d^{\tau} e^{-cd^{\tau}}\right]}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial c} = \frac{c}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}\left[\begin{array}{l}\left(c_i^{\tau} e^{-cc_i} \ln c_i - c_{i-1}^{\tau} e^{-cc_{i-1}} \ln c_{i-1}\right) \\ -Z_i\left(w^{\tau} e^{-cw^{\tau}} \ln w - d^{\tau} e^{-cd^{\tau}} \ln d\right)\end{array}\right]$$

(2) **การแจกแจงลอกนอร์มอล** (Lognormal Distribution)

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad -\infty < \mu < \infty \text{ , } \sigma > 0$$

$$SS = \sum_{i=1}^{k} \left\{ n\left[F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1})\right] - f_i \right\}^2$$

หาอนุพันธ์บางส่วนของ SS เทียบกับ μ และ σ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 เพื่อแก้สมการหาค่า $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ของ μ และ σ ตามลำดับ

$$\frac{\partial SS}{\partial \mu} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial SS}{\partial \sigma} = 0$$

กำหนดให้

$$Z_i = F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) = \frac{\Phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial SS}{\partial \mu} = 2 \sum_{i=1}^{k} (nZ_i - f_i) \frac{\partial Z_i}{\partial \mu}$$

$$\frac{\partial SS}{\partial \sigma} = 2 \sum_{i=1}^{k} (nZ_i - f_i) \frac{\partial Z_i}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = \frac{\left\{\phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} - Z_i\left\{\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right)\right\}}{\sigma\left\{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right\}}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \sigma} = \frac{\begin{bmatrix} \left\{(\ln c_{i-1} - \mu)\, \phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) - (\ln c_i - \mu)\, \phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \\ -Z_i\left\{(\ln d - \mu)\, \phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) - (\ln w - \mu)\, \phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \end{bmatrix}}{\sigma^2\left\{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right\}}$$

2. วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดนี้ ผู้ที่ค้นพบคนแรกชื่อ Garss C.F. (1821) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ต่อมานักสถิติชาวอังกฤษชื่อ R.A Fisher, (1922) ได้ปรับปรุงวิธีการและตรวจสอบคุณสมบัติต่างๆ วิธีการนี้จะใช้ได้เมื่อตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงแบบมีพารามิเตอร์ (Parametric Distribution) [2]

สำหรับข้อมูลที่ถูกตัดปลายทางซ้ายและขวาแบบกลุ่ม จะมีฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นดังนี้

$$L = \prod_{i=1}^{k} \left[F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) \right]^{f_i}$$

---

[2] ธีระพร วีระถาวร, ดร. <u>การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง : โครงสร้างและความหมาย</u>. (พิทักษ์การพิมพ์ ; 2531) หน้า 99

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} f_i \ln \left[F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) \right]$$

ประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ได้โดยการหาอนุพันธ์บางส่วน (Partial Derivatives) ของลอกของภาวะน่าจะเป็น เทียบกับ θ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 จะได้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \qquad \text{เมื่อ } \theta_i \text{ เป็นพารามิเตอร์ตัวที่ } i$$

$$f_i = n \left[F_n(c_i) - F_n(c_{i-1}) \right]$$

$$F_n(c_i) - F_n(c_{i-1}) = \frac{F_X(c_i) - F_X(c_{i-1})}{F_X(w) - F_X(d)}$$

(1) การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution)

$$F_X(x) = 1 - e^{-cx^{\tau}} \quad ; \quad c > 0 \; , \; \tau > 0$$

$$\ln L = \sum_{i-1}^{k} f_i \ln \left[\frac{e^{-cc_{i-1}^{\tau}} - e^{-cc_i^{\tau}}}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}} \right]$$

หาอนุพันธ์บางส่วนของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เทียบกับ c และ τ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 เพื่อแก้สมการหาค่า $\hat{c}$ และ $\hat{\tau}$ ของ c และ τ ตามลำดับ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \tau} = 0$$

จะได้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = \sum_{i=1}^{k} f_i \left[\left\{ \frac{c_i^{\tau} e^{-cc_i^{\tau}} - c_{i-1}^{\tau} e^{-cc_{i-1}^{\tau}}}{e^{-cc_{i-1}^{\tau}} - e^{-cc_i^{\tau}}} \right\} - \left\{ \frac{w^{\tau} e^{-cw^{\tau}} - d^{\tau} e^{-cd^{\tau}}}{e^{-cd\tau} - e^{-cw^{\tau}}} \right\} \right]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{k} f_i(c)\left[\left\{\frac{c_i^{\tau} e^{-cc_i^{\tau}} \ln c_i - c_{i-1}^{\tau} e^{-cc_{i-1}^{\tau}} \ln c_{i-1}}{e^{-cc_{i-1}^{\tau}} - e^{-cc_i^{\tau}}}\right\} - \left\{\frac{w^{\tau} e^{-cw^{\tau}} \ln w - d^{\tau} e^{-cd^{\tau}} \ln d}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}\right\}\right]$$

(2) การแจกแจงลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad -\infty < \mu < \infty \; , \; \sigma > 0$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} f_i \ \ln\left[\frac{\Phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)}\right]$$

หาอนุพันธ์บางส่วนของลอกฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เทียบกับ μ และ σ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 เพื่อแก้สมการหาค่า $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ของ μ และ σ ตามลำดับ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$$

จะได้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(\frac{1}{\sigma}\right)\left[\left\{\frac{\phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)}\right\} - \left\{\frac{\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)}\right\}\right]$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\left[\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\ln(c_{i-1} - \mu)\phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) - \ln(c_i - \mu)\phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)}\right\} \\ - \left\{\dfrac{\ln(d - \mu)\,\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) - \ln(w - \mu)\phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)}\right\}\end{array}\right]$$

3 วิธีไค-สแควร์ต่ำสุด

วิธีไค-สแควร์ต่ำสุด เป็นวิธีการประมาณที่ได้ถูกปรับเปลี่ยนจาก วิธีการประมาณแบบ non-linear weighted least squares

สมการการประมาณที่ได้คือ

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

โดยที่

$$O_i = n\left[F_n(c_i) - F_n(c_{i-1})\right]$$
$$E_i = n\left[F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1})\right]$$

$$F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) = \frac{F_X(c_i) - F_X(c_{i-1})}{F_X(w) - F_X(d)}$$

กำหนดให้

$$Z_i = \frac{F_X(c_i) - F_X(c_{i-1})}{F_X(w) - F_X(d)}$$

(1) การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull Distribution)

$$F_X(x) = 1 - e^{-cx^{\tau}} \quad ; \quad c > 0 \ , \ \tau > 0$$

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

หาอนุพันธ์บางส่วนของตัวสถิติไค-สแควร์ต่ำสุด เทียบกับ c และ τ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 เพื่อแก้สมการหาค่า $\hat{c}$ และ $\hat{\tau}$ ของ c และ τ ตามลำดับ

$$\frac{\partial Q}{\partial c} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau} = 0$$

กำหนดให้

$$Z_i = F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) = \frac{e^{-\alpha c_{i-1}^{\tau}} - e^{-\alpha c_i^{\tau}}}{e^{-\alpha d^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(-2n-\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\right)\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\frac{\partial Z_i}{\partial \tau}\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(-2n-\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\right)\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\frac{\partial Z_i}{\partial c}\right]$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial c} = \frac{\left[c_i^{\tau} e^{-c c_{i-1}^{\tau}} - c_i^{\tau} e^{-c c_{i-1}^{\tau}}\right] - Z_i\left[w^{\tau} e^{-cw^{\tau}} - d^{\tau} e^{-cd^{\tau}}\right]}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \tau} = \frac{c}{e^{-cd^{\tau}} - e^{-cw^{\tau}}}\left[\begin{array}{l}\left(c_i^{\tau} e^{-cc_i} \ln c_i - c_{i-1}^{\tau} e^{-cc_{i-1}} \ln c_{i-1}\right) \\ -Z_i\left(w^{\tau} e^{-cw^{\tau}} \ln w - d^{\tau} e^{-cd^{\tau}} \ln d\right)\end{array}\right]$$

(2) การแจกแจงลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \quad ; \quad -\infty < \mu < \infty \, , \, \sigma > 0$$

$$Q = \sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

หาอนุพันธ์บางส่วนของตัวสถิติไค-สแควร์ต่ำสุด เทียบกับ μ และ σ และให้อนุพันธ์บางส่วนเท่ากับ 0 เพื่อแก้สมการหาค่า $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}$ ของ μ และ σ ตามลำดับ

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = 0$$

กำหนดให้

$$Z_i = F_Y(c_i) - F_Y(c_{i-1}) = \frac{\Phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(-2n-\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\right)\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\frac{\partial Z_i}{\partial \mu}\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(-2n-\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\right)\left(\frac{O_i - nZ_i}{Z_i}\right)\frac{\partial Z_i}{\partial \sigma}\right]$$

โดยที่

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = \frac{\left\{\phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} - Z_i\left\{\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right)\right\}}{\sigma\left\{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right\}}$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \sigma} = \frac{\left[\begin{array}{l}\left\{(\ln c_{i-1} - \mu)\phi\left(\frac{\ln c_{i-1} - \mu}{\sigma}\right) - (\ln c_i - \mu)\phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \\ -Z_i\left\{(\ln d - \mu)\phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) - (\ln w - \mu)\phi\left(\frac{\ln c_i - \mu}{\sigma}\right)\right\}\end{array}\right]}{\sigma^2\left\{\Phi\left(\frac{\ln w - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right)\right\}}$$