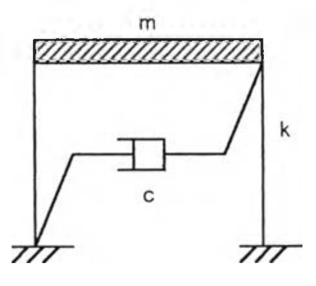
บทที่ 3
ทฤษฎีการวิเคราะห์เชิงพลวัต

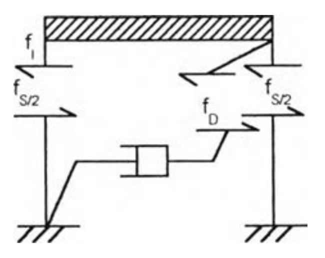
บทที่ 2 ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์เชิงสถิตของโครงสร้างในกรณีที่แรงกระทำมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลา ส่วนกรณีที่แรงมีการเปลี่ยนแปลงกับเวลา เช่น แรงแผ่นดินไหว และแรงลมจะทำให้เกิดแรงภายในเพิ่มขึ้นนอกจากแรงเนื่องจากสติฟเนสของโครงสร้าง ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์เชิงพลวัตจะมีขั้นตอนดังกล่าวในบทนี้

สมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง

การวิเคราะห์เชิงพลวัตของโครงสร้างจะมีแรงภายใน 3 แรง ได้แก่ แรงเฉื่อย (Inertia force, f_I), แรงสติฟเนส (Stiffness force, f_S)และแรงหน่วง (Damping force, f_D) แสดงดังรูปที่ 5.1 เป็นโครงสร้างระดับขั้นความเสรีเดียว โครงสร้างมีมวล m,สติฟเนส k และค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง c



รูปที่ 3.1 โครงสร้างระดับขั้นความเสรีเดียว



รูปที่ 3.2 แรงภายในของโครงสร้างรับแรงแผ่นดินไหว

จากรูปที่ 3.2 สามารถเขียนสมการสมดุลของแรงได้

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \tag{3.1}$$

โดยที่

$p(t)$ เป็นแรงภายนอกเปลี่ยนแปลงกับเวลา

โปรแกรมที่พัฒนาพิจารณาโครงสร้างอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (Linear elastic) ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างสติฟเนสกับการกระจัดเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's Law) คือ

$$f_S = ku \tag{3.2}$$

แทนค่าแรงในสมการ 3.1สมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างได้

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \tag{3.3}$$

โดยที่

$\ddot{u}$, $\dot{u}$ และ u คือความเร่ง, ความเร็ว และการกระจัดของโครงสร้างตามลำดับ

ในกรณีแรงพลวัตเป็นแรงแผ่นดินไหวกระทำที่ฐานของโครงสร้าง กำหนดให้ u_t คือการกระจัดทั้งหมด (สัมบูรณ์) ของโครงสร้าง, u_g เป็นการกระจัดของผิวดิน และ u เป็นการกระจัดของโครงสร้างสัมพัทธ์ของโครงสร้างกับพื้นดิน เขียนการกระจัดสัมบูรณ์ได้

$$u_t(t) = u(t) + u_g(t) \tag{3.4}$$

จากสมการ 3.4 สมการการเคลื่อนที่ภายใต้แรงแผ่นดินไหวเขียนได้ว่า

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g \tag{3.5}$$

3.1 โครงสร้างที่ไม่มีความหน่วง (Undamped System)

สมการการกระจัดของระบบโครงสร้างที่ไม่มีแรงกระทำและไม่มีความหน่วง เขียนได้ดังนี้

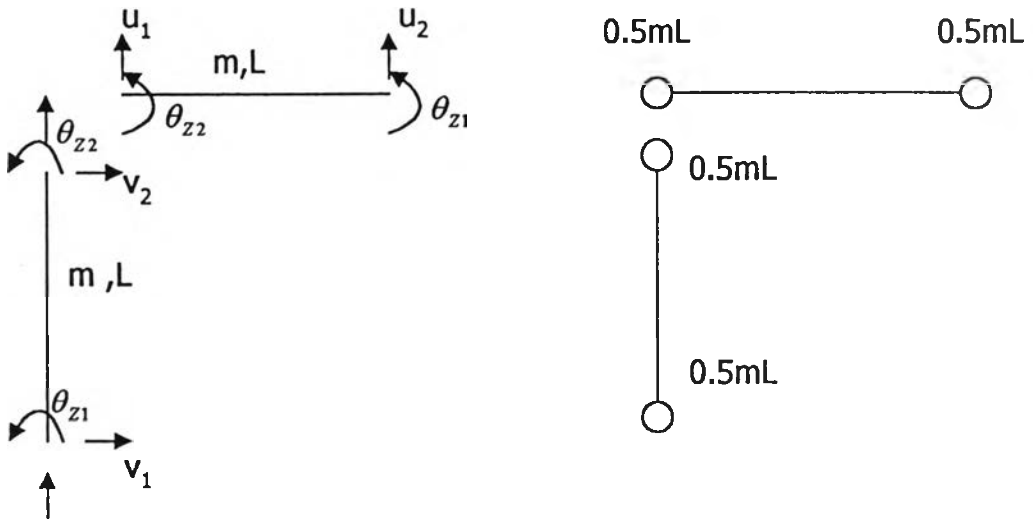
$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (3.6)$$

3.1.1 การสังเคราะห์เมตริกซ์ของมวล (Mass Matrix)

ระบบพลวัตเมื่อโครงสร้างมีการสั่นไหวทำให้มวลเคลื่อนที่ด้วยความเร่งต้านทานแรงที่กระทำซึ่งเรียกว่าแรงเฉื่อย (Inertia force) ซึ่งการสร้างสมการการเคลื่อนที่จึงรวมแรงเฉื่อยด้วยดังสมการ 3.5 ดังนั้นในการวิเคราะห์เชิงพลวัตจึงต้องสร้างเมตริกซ์ของมวลของโครงสร้างเพื่อใช้ในการวิเคราะห์เชิงพลวัต

การวิเคราะห์ทางพลวัตของโครงข้อแข็ง วิธีรวบมวล (Lumped Mass) เป็นวิธีหนึ่งที่เหมาะสม เมื่อคิดมวลของส่วนที่ไม่ใช่โครงสร้างด้วย เช่น พื้นและผนัง ซึ่งข้อดีของวิธีรวบมวลคือช่วยลดการคำนวณในการวิเคราะห์ทางพลวัต เนื่องจากเมตริกซ์มวลของวิธีรวบมวลจะมีค่าเฉพาะในแนวทแยงของเมตริกซ์มวล

วิธีรวบมวลมีสมมติฐานคือกำหนดให้มวลของชิ้นส่วนรวบที่จุดต่อของชิ้นส่วน และไม่คิดผลแรงเฉื่อยเนื่องจากการหมุน เมตริกซ์ของมวลของคานและเสารูปที่ 3.3 แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3.3 ระดับขั้นความเสรีและการรวบมวลของคานและเสา

ดังนั้นเมตริกซ์ของคานที่มีมวลกระจายคงที่ m และมีความยาวเท่ากับ L จะมีเมตริกซ์ของมวลเป็น

$$m_e = \frac{mL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ \theta_{z2} \end{matrix} \tag{3.7}$$

ในกรณีของเสาที่มีมวลกระจายคงที่ m และมีความยาวเท่ากับ L มีเมตริกซ์ของมวลเป็น

$$m_e = \frac{mL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{matrix} \tag{3.8}$$

การสร้างเมตริกซ์ของมวลในระบบแกนพิกัดทั่วไป โดยนำเมตริกซ์ของมวลของชิ้นส่วนมารวมกัน ซึ่งตำแหน่งระดับขั้นความเสรีเมตริกซ์ของมวลชิ้นส่วนที่นำมารวมจะต้องอยู่ตรงตำแหน่งระดับขั้นความเสรีเดียวกันกับเมตริกซ์ของมวลในระบบแกนพิกัดทั่วไปเช่นเดียวกับการรวมเมตริกซ์สติฟเนส

3.1.2 การหาความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหว

ในการคำนวณหาความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้างในแต่ละโหมด จากสมการที่ (3.6) สมมติการสั่นโดยเสรี (Free Vibration)เป็น แบบฮาร์โมนิค

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \theta) \tag{3.9}$$

โดยที่

$\hat{u}$ คือ รูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้าง (Mode Shape)

ดังนั้นความเร่งของการสั่นโดยเสรี(Free Vibration) คือ

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2\hat{u}\sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 u(t) \tag{3.10}$$

แทนค่ากลับเข้าในสมการที่ (3.6) จะได้

$$(-\omega^2 m + k)\hat{u}\sin(\omega t + \theta) = 0 \tag{3.11}$$

เทอม $\hat{u}\sin(\omega t + \theta)$ ค่าต้องไม่เท่ากับศูนย์ ถ้าหากมีค่าเท่ากับศูนย์หมายถึงระบบไม่มีการกระจัด ดังนั้นเทอม $(-\omega^2 m + k) = 0$ จึงเขียนจัดรูปสมการใหม่ ซึ่งเป็นสมการปัญหาความถี่ธรรมชาติ (Eigenvalue Problem)

$$[k - \omega^2 m]\ \hat{u} = 0 \tag{3.12}$$

ในการแก้ปัญหานี้มักใช้วิธีทางตัวเลข เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้าง โดยทั่วไปมีอยู่หลายวิธีซึ่งสามารถแบ่งเป็น 3 กลุ่ม คือ

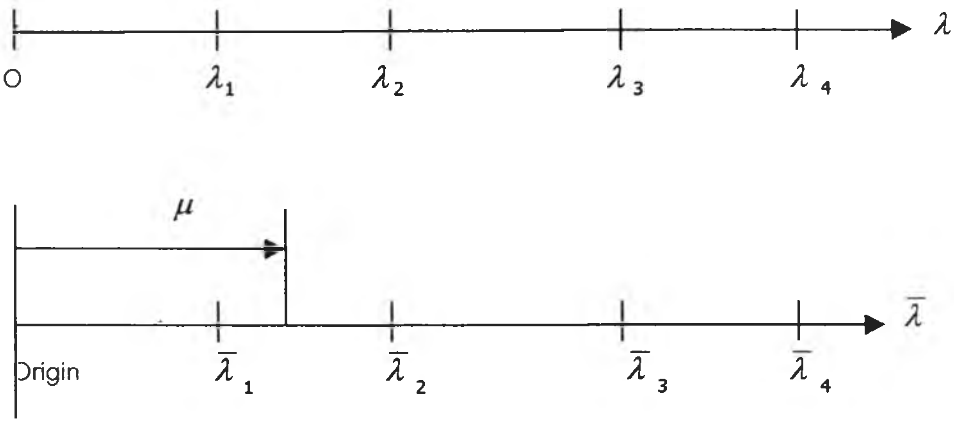
1. วิธีกระทำซ้ำเวกเตอร์ (Vector Iteration) คือ วิธีการกระทำซ้ำตรง (Direct Iteration Method)และ การกระทำซ้ำผกผัน (Inverse Iteration)

2. วิธีแปลงเมตริกซ์ (Matrix Transformation) คือการแปลง $k\phi = \omega^2 m\phi$ เพื่อให้อยู่ในรูปมาตราฐาน $A\phi = \lambda\phi$ ซึ่งมีหลายวิธีในการแปลง เช่น Householder 's Method , และQR Method

3.วิธีหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) คือการหารากคำตอบของพหุนามจาก $\det|k - \lambda m|$

3.1.3 การกระทำซ้ำผกผันพร้อมด้วยค่าข้าม (Inverse Iteration with Shift)

ในการพัฒนาโปรแกรมวิเคราะห์มวลหน่วงปรับค่าด้วย MATLAB มีฟังก์ชันหาค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้าง โดยใช้วิธีการกระทำซ้ำผกผันด้วยค่าข้าม หาความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวเพียงบางโหมด ซึ่งในการแก้ปัญหาค่าเจาะจง (Eigenvalue Problem) ของปัญหาพลวัต โครงสร้างมีเมตริกซ์มวลของโครงสร้างมีค่าเฉพาะแนวทแยงของเมตริกซ์ และต้องการความถี่ธรรมชาติและค่ารูปแบบการสั่นไหวในโหมดต่ำๆเพียงบางโหมด ซึ่งวิธีกระทำซ้ำผกผันมีประสิทธิภาพในการคำนวณหาความถี่ธรรมชาติและค่ารูปแบบการสั่นไหวโหมดต่ำ โดยฟังก์ชันจะประมาณค่าความถี่ของโครงสร้างจากวิธี QR ก่อนจะใช้วิธีการกระทำซ้ำผกผันด้วยค่าข้าม



รูปที่ 3.4 สเปกตรัมความถี่ธรรมชาติ

จากรูปที่ 3.4 แสดงสเปกตรัมของความถี่สมมติให้ค่าข้าม (μ) จากจุดเริ่มต้น และกำหนดให้ค่าความถี่ใดๆ ($\bar{\lambda}$) มีค่าดังนี้

$$\bar{\lambda} = \lambda - \mu \tag{3.13}$$

แทนค่า $\bar{\lambda}$ ในสมการ 3.12ได้

$$[k - \mu m]\phi = \bar{\lambda} m \phi_n \tag{3.14}$$

หรือ

$$\bar{k}\phi = \bar{\lambda} m \phi_n \tag{3.15}$$

ในการคำนวณสมมติค่ารูปแบบการสั่นไหวเริ่มต้นคือ $\phi_1^{(0)}$ และ $\omega^2 = 1$ ดังนั้นเทอมขวามือจะเขียนได้ใหม่คือ

$$W_1^{(0)} = m\phi_1^{(0)} \tag{3.16}$$

การหาค่ารูปแบบการสั่นไหวใหม่ โดยแทนค่าสมการที่ 3.16 ในสมการ 3.15

$$k\phi_1^{(1)} = W_1^{(0)} \tag{3.17}$$

ซึ่งในการแก้สมการที่ 3.17 ค่าเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างจะแปลงให้อยู่ในรูป LU เพื่อสะดวกในการหาแก้สมการ

$$k = LdL \equiv LU \tag{3.18}$$

โดยที่ L เรียกว่าเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

$U = dL^T$ เรียกว่าเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน

แทนค่าเมตริกซ์สติฟเนสในสมการ 3.18 ได้

$$LU\phi_1^{(1)} = W_1^{(0)} \tag{3.19}$$

หลังจากแก้สมการ 3.19 จะได้ค่ารูปแบบการสั่นไหวของการคำนวณรอบที่หนึ่ง และหาความถี่ธรรมชาติจาก

$$\lambda^{(1)} = \frac{\phi_1^{(1)^T} k \phi_1^{(1)}}{\phi_1^{(1)^T} m \phi_1^{(1)}} \tag{3.20}$$

หลังจากได้ความถี่ธรรมชาติ ตรวจสอบมีค่าเปรียบเทียบกับค่าเดิม โดยเปรียบเทียบกับค่าระดับความถูกต้องที่ยอมรับได้

$$\frac{\left|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right|}{\lambda^{(1)}} \leq \text{tolerance} \tag{3.21}$$

ถ้าผลอยู่น้อยกว่าค่าที่ยอมให้ ค่าความถี่ธรรมชาติจะทำให้การปรับขนาด (normalize) ด้วยการหารด้วยมวลโหมดที่หนึ่ง

$$\phi_1^{(1)} = \frac{\phi_1^{(1)}}{\left(\phi_1^{(1)^T} m \phi_1^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.22}$$

แต่หากมีค่ามากกว่าก็จะกลับกระทำซ้ำครั้งต่อไป โดยแทนค่าเวกเตอร์ในสมการที่ (3.17) ใหม่จนกว่าค่าในสมการที่ (3.21) มีค่าระดับความถูกต้องอยู่ในระดับที่ยอมรับได้

3.2 โครงสร้างที่มีความหน่วง (Damped System)

สมการการกระจัดโครงสร้างที่มีความหน่วง ภายใต้แรงแรงพลวัตกระทำต่อโครงสร้างเขียนได้ดังนี้

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \tag{3.23}$$

3.2.1 การสร้างเมตริกซ์ความหน่วง (Damping Matrix)

ในการสร้างเมตริกซ์ความหน่วงของโครงสร้างเป็นการยากที่จะคำนวณหาจากขนาดและคุณสมบัติของชิ้นส่วน โดยตรงวิธีที่สะดวกและให้ความถูกต้องคือการจำลองเมตริกซ์ความหน่วงจากข้อมูลค่าความหน่วงของโครงสร้างที่ได้จากการตรวจวัดคุณสมบัติของโครงสร้างจริง โดยจะทำการวัดค่าในรูปของอัตราส่วนการสลายพลังงานของโหมด (Modal damping ratio)

จากหลักการวิเคราะห์โหมดสมมติให้เมตริกซ์ความหน่วงมีคุณสมบัติ Orthogonality ซึ่งการคำนวณค่าเมตริกซ์ความหน่วงของโหมด (Modal Damping Matrix) , C จากค่าอัตราความหน่วงในแต่ละโหมดที่กำหนดให้ดังแสดง

$$C = \phi^T c \phi = 2\begin{bmatrix} \xi_1\omega_1 M_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \xi_2\omega_2 M_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

โดยที่

C คือเมตริกซ์ความหน่วงของโหมด
ϕ_i คือรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้างโหมดที่ i
ξ_i คืออัตราส่วนความหน่วงโหมดที่ i
ω_i คือค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างโหมดที่ i
M_i คือมวลโหมดที่ i ของโครงสร้าง

และสามารถหาค่าเมตริกซ์ความหน่วง c ด้วยการคูณด้านหน้าและด้านหลังเมตริกซ์ความหน่วงของโหมด , C ด้วย ϕ ซึ่งจะได้ว่า

$$c = \left[\phi^T\right]^{-1} C \, \phi^{-1} \tag{3.25}$$

3.2.2 การวิเคราะห์โหมด (Modal Analysis)

จากสมการที่ 3.23 การแก้ปัญหาเพื่อหาการตอบสนองของระบบโครงสร้างโดยวิธีการวิเคราะห์โหมด ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

สมมุติการกระจัดของโครงสร้างเนื่องจากโหมดที่ n , u_n อยู่ในรูปผลคูณของรูปแบบการสั่นไหวโหมดที่ n , ϕ_n ของโครงสร้างคูณกับขนาดการกระจัดของพิกัด

$$u_n = \phi_n y_n \tag{3.26}$$

ดังนั้นการกระจัดทั้งหมด (Total Displacement) คือผลรวมของการกระจัดทุกโหมด

$$u = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \ldots\ldots + \phi_n y_n \tag{3.27}$$

หรือเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\{u\} = [\phi]\{y\}$$

จากสมการ 3.27 $\ddot{u} = \phi\ddot{y}$ และ $\dot{u}$ อยู่ในรูปเช่นเดียวกัน แทนค่าลงในสมการที่ 3.23 ได้

$$m\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\ddot{y}(t) + c\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\dot{y}(t) + k\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\dot{y}(t) = p(t) \tag{3.28}$$

คูณด้านหน้าสมการที่ 3.28 ด้วย ϕ_n^T ได้

$$\phi_n^T m\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\ddot{y}(t) + \phi_n^T c\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,\dot{y}(t) + \phi_n^T k\sum_{i=1}^{N}\phi_i\,y(t) = \phi_n^T p(t) \tag{3.29}$$

เนื่องจากทั้งมวลและสติฟเนสมีคุณสมบัติ Orthogonality และสมมุติเมตริกซ์ความหน่วงมีคุณสมบัติ Orthogonality

$$\phi_n{}^T m \phi_m \quad = 0 \tag{3.30a}$$

$$\phi_n{}^T k \phi_m \quad = 0 \tag{3.30b}$$

$$\phi_n{}^T c \phi_m \quad = 0 \tag{3.30c}$$

เมื่อ $n \neq m$ ดังนั้น เขียนสมการที่ 3.29 ใหม่ได้

$$M_n\ \ddot{y}(t) + C_n \dot{y}(t) + K_n\ y(t) = P_n(t) \tag{3.31}$$

โดยที่

$$M_n = \phi_n{}^T m \phi_n$$

$$K_n = \phi_n{}^T k \phi_n$$

$$C_n = \phi_n{}^T c \phi_n$$

$$P_n(t) = \phi_n{}^T p(t)$$

สมการที่ 3.31 หารด้วยเมตริกซ์มวลสามัญ สมการการกระจัดอยู่ในฟอร์มใหม่ได้

$$\ddot{y}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n(t) + \omega_n\ y_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \tag{3.32}$$

โดยที่

$$\xi_n = \frac{C_n}{2\omega_n M_n}$$

ξ_n คือ อัตราส่วนการหน่วงโหมดที่ n

หลักจากแยก (Uncouple) สมการของการกระจัดในแต่ละโหมดด้วยวิธีวิเคราะห์โหมด การหาการตอบสนองของสมการมักจะใช้วิธีทางเชิงเลข (Numerical) ในการหาการตอบสนองดังนี้

1. Explicit คือ การหาคำตอบเวลา i+1 จากเงื่อนไขสมดุลย์พลวัตที่เวลา i เช่น วิธีค่าผลต่างสืบเนื่อง (Central Difference Method)แต่วิธีนี้มีเงื่อนไขของสเถียรภาพ (Conditionally Stable) คือ เมื่อช่วงเวลา (Time Step) เกินค่าช่วงเวลาวิกฤติ จะเกิดความผิดพลาดในการคำนวณ ซึ่งการกำหนดค่าช่วงเวลาวิกฤติขึ้นอยู่กับความถี่สูงสุดของโครงสร้าง

2. Implicit คือ การหาคำตอบที่เวลา i+1 จากเงื่อนไขสมดุลย์พลวัตที่เวลา i+1 เช่นวิธี Average Acceleration Method , Linear Acceleration Method ซึ่งวิธีนี้ไม่มี เงื่อนไขของสเถียรภาพ (Unconditionally Stable)

3. สถานะปริภูมิเวกเตอร์ (State Space Vector)

3.2.3 สถานะปริภูมิเวกเตอร์ (State Space Vector)

สถานะปริภูมิเวกเตอร์ คือวิธีการหาการตอบสนองของระบบโครงสร้างหลายระดับชั้นความเสรี (MDOF) โดยลดรูปสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเป็นอันดับที่หนึ่ง จากสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างเชิงเส้นที่มีความหน่วง และมีแรงพลวัต, $P(t)$ กระทำต่อโครงสร้าง

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = P(t) \tag{3.33}$$

สมมุติให้ $x = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$

และคูณสมการที่ 3.33 ด้วย M^{-1} จะได้

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -M^{-1}Ky - M^{-1}C\dot{y} + M^{-1}P(t) \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

หรือ

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} P(t)$$

ซึ่งสามารถจัดในรูปสมการอันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BP(t) \tag{3.35}$$

โดยที่ A เรียกว่า เมตริกซ์สถานะ (State Matrix)คือ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

และเรียกว่า

$$x(t) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{(2n*1)}$$

ปริภูมิเวกเตอร์ (_State Vector) โดยที่

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{(2n*1)}$$

เป็นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์คงที่

การหาผลการตอบสนองด้วยวิธีการแปลง (Response by the Transition Method)

การหาคำตอบของสมการอันดับที่หนึ่งสมการที่ 3.35 **ด้วยวิธีการแปลงลาปลาซ** (Laplace Tranform) จะได้

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+BP(s) \tag{3.36}$$

โดยที่ $X(s)\equiv L[x(t)]$

$$P(s)\equiv L[P(t)]$$

สมการที่ 3.41 สามารถเขียนในรูปแบบใหม่ได้

$$X(s)=[sI-A]^{-1}X(0)+[sI-A]^{-1}BP(s) \tag{3.37}$$

ในการหาผลการตอบสนองเทอมของเวลาสามารถแปลงกลับสมการที่ 3.37 โดยวิธีการแปลงผกผันลาปลาซ (Inverse Laplace Tranform)

$$L^{-1}[sI-A]^{-1}=e^{At} \tag{3.38}$$

ดังนั้น การตอบสนองในเทอมของเวลาจะได้

$$x(t)=[e^{At}x(0)]+\int_0^t e^{(t-\tau)A}BP(\tau)d\tau \tag{3.39}$$

โดยที่ e^{At} คำนวณจาก

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1} \tag{3.40}$$

เมื่อ **T** คือเมตริกซ์ค่าเจาะจงเฉพาะ (Eigenvector matrix)

Λ คือเมตริกซ์ค่าเจาะจง (Eigenvalue matrix) ของเมตริกซ์ **A**

Λ คือเมตริกซ์ค่าเจาะจง (Eigenvalue matrix) ของเมตริกซ์ A

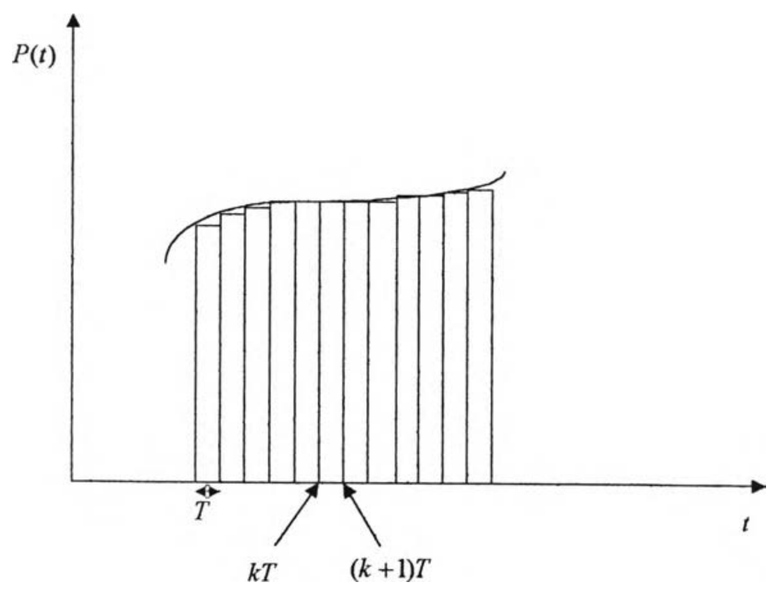
กำหนดให้

$$\phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)} \tag{3.41}$$

เรียกว่า เมตริกซ์แปลงสถานะ (StateTransition Matrix)

การหาคำการตอบสนองที่เวลาใดๆ จากการแก้สมการ 3.39 ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นของ $\phi(t,\tau)$ และสมการที่ 3.39 เขียนการตอบสนองที่เวลาใดๆ $x(t)$ ใหม่ อยู่ในรูปเมตริกซ์แปลงสถานะ ได้

$$x(t) = [\phi(t,\tau)x(\tau)] + \int_{\tau}^{t} \phi(t,\xi)BP(\xi)d\xi \tag{3.42}$$



รูปที่ 3.5 กราฟของแรงภายนอก

การแก้สมการหาการตอบสนองด้วยวิธีเชิงตัวเลขซึ่งมีสมมติฐานแรงภายนอก ($P(t)$) ที่กระทำระหว่างช่วงเวลามีค่าคงที่ (Zero Order Hold) แสดงดังรูปที่ 3.5

$$P(t) = P(k) = K, \qquad kT < t < (k+1)T \tag{3.43}$$

โดยที่

k คือค่าคงที่

T คือช่วงเวลาที่กำหนด

$P(k)$ คือขนาดของแรงภายนอกระหว่างช่างเวลา kT กับ $kT < t <$

$(k+1)T$

คำนวณหาการตอบสนองของสถานะเวกเตอร์ใช้สมการที่ 3.42 ที่เวลา $(k+1)T$ จากข้อมูลของเวลาที่ k

$$x(k+1)T = [\phi((k+1)T, kT)x(kT)] + \int_0^t \phi(\xi,0)BP(k)d\xi \tag{3.44}$$

สถานะเวกเตอร์ $\phi((k+1)T, kT)$ เขียนในอีกรูปหนึ่งคือ

$$\phi((k+1)T, kT) = e^{AT} \tag{3.45}$$

และพจน์ที่สองสามารถจัดในรูปใหม่ได้

$$\int_0^t \phi(\xi,0)P(k)d\xi = A^{-1}\left[e^{AT} - I\right]P(k) \tag{3.46}$$

ดังนั้นสมการที่ 3.44 เขียนใหม่ได้

$$x(k+1) = e^{AT}\{x(k)\} + A^{-1}\left|e^{AT} - I\right|BP(k) = \phi\{x(k)\} + \Gamma P(k) \tag{3.47}$$

จากสมการที่ 3.47 การคำนวณหาตอบสนองที่ตำแหน่งเวลาใดๆ สามารถเขียนในรูปความสัมพันธ์ได้

$$\begin{aligned} x(1) &= \phi x(0) + \Gamma P(0) \\ x(2) &= \phi x(1) + \Gamma P(1) \\ &\vdots \\ x(n+1) &= \phi x(n) + \Gamma P(n) \end{aligned} \tag{3.48}$$