บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้มีหลักการในการพิจารณเชิงทดลอง 2 รูปแบบคือ

1. การทดลองโดยใช้หลักการคำนวณเชิงตัวเลข
2. การทดลองโดยใช้หลักการจำลองข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้หลักการจำลองข้อมูลเป็นวิธีการหลัก โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อทำการเปรียบเทียบความยาววิ่งโดยเฉลี่ย(ARL) ของแต่ละแผนภูมิควบคุม เมื่อกำหนดสถานการณ์ให้กระบวนการผลิตมีการเปลี่ยนแปลงในค่าเฉลี่ย ในแต่ละกรณีที่เปลี่ยนไปตามสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา เมื่อได้ค่าประมาณมาแล้วจะทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างความยาววิ่งโดยเฉลี่ยประชากรของ 2 แผนภูมิควบคุมแบบจับคู่แล้ว ถ้าแผนภูมิควบคุมชนิดใดให้ค่าประมาณ ARL น้อยที่สุด แสดงว่าแผนภูมิควบคุมนั้นมีประสิทธิภาพมากที่สุด

สำหรับการทดลองโดยใช้หลักการคำนวณเชิงตัวเลขในการวิจัยครั้งนี้ มีจุดประสงค์ คือ

1) เพื่อใช้ในการกำหนดระดับนัยสำคัญรวม $(\alpha_{\text{overall}})$ ที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา
2) สำหรับการตรวจสอบความเหมาะสมเชิงสถิติของตัวแบบจำลอง เมื่อมีการกำหนดจำนวนการทำซ้ำที่แน่นอน

3.1 การวางแผนการทดลอง

สำหรับกรณีการวิจัยโดยใช้หลักการจำลองข้อมูล ในงานวิจัยนี้วิธีที่ใช้ในการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย ที่นำมาเปรียบเทียบกัน จะศึกษาภายใต้ตัวแบบอนุกรมเวลากรณีค่าเฉลี่ยคงที่ โดยมีตัวแบบ (2.2) ดังนี้

$$\underset{\sim}{X}_t = \underset{\sim}{\mu}_0 + \underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \quad ; \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่อ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\mu}_0 = [\mu_{01} \quad \mu_{02}]^T = [0 \quad 0]^T$

เวกเตอร์ระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\gamma} = [\delta_1\sigma_1 \quad \delta_2\sigma_2]^T = [\delta_1 \quad \delta_2]$

เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนในการสุ่ม $\underset{\sim}{\varepsilon_t} = \left[\varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{2t}\right]^T$

โดยที่ $\underset{\sim}{\varepsilon_t} \sim N_2\left(\underset{\sim}{0}, R\right)$; $R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

3.2 ขั้นตอนของการวิจัย

1. กำหนดค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (ρ) ระหว่างตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) ระดับการเปลี่ยนแปลงของค่าเฉลี่ย $(\delta\sigma)$ และ พารามิเตอร์ต่างๆ ตามสถานการณ์ที่กำหนดขึ้น

2. ข้อมูลที่นำมาวิจัยนี้ จะพิจารณา 2 ตัวแปรคือ ตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติทวิคูณปกติ

สำหรับ กรณีวิจัยโดยใช้หลักการจำลองข้อมูล สามารถสร้างข้อมูลของตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 ภายใต้ตัวแบบ (2.1)

3. คำนวณค่า $\alpha_{overall}$ เมื่อค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (ρ) ระหว่างตัวแปรสุ่ม X_1 กับ X_2 มีการเปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ที่กำหนด

ในการวิจัยครั้งนี้จะยึดขอบเขต 3σ แผนภูมิควบคุมเชิงเดี่ยว $\bar{X}$ เป็นตัวหลักในการหา $\alpha_{overall}$ ของแผนภูมิควบคุม Hotelling และ แผนภูมิควบคุมเชิงพหุ Shewhart $\bar{X}$

โดยที่ ขอบเขตควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุมเชิงเดี่ยว $\bar{X}$ (Univariate $\bar{X}$ - chart) คือ

$$UCL(\bar{X}) = \mu_0 + 3\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{และ}$$

$$LCL(\bar{X}) = \mu_0 - 3\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

กำหนดค่า $\alpha_{overall}$ ทั้งแผนภูมิควบคุมทั้ง 3 แบบให้มีค่าเท่ากัน เพื่อทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุม ตามค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (ρ) ระหว่างตัวแปรสุ่ม X_1 กับ X_2 ที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ที่กำหนด

ดังนั้นขอบเขตควบคุมแผนภูมิควบคุมเชิงเดี่ยว $\bar{X}$ ทั้ง 2 ตัวแปร (X_1, X_2) คือ

$$UCL(\bar{X}_1) = \mu_{01} + \left(3\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{และ} \quad LCL(\bar{X}_2) = \mu_{01} - \left(3\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$UCL(\bar{X}_2) = \mu_{02} + \left(3\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{และ} \quad LCL(\bar{X}_2) = \mu_{02} - \left(3\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right)$$

จากขอบเขต 3σ ซึ่งจะได้ระดับนัยสำคัญของตัวแปรสุ่ม X_i

$$\alpha_i = P\left(\left(\bar{X}_i < LCL_{\bar{X}_i}\right) \cup \left(\bar{X}_i > UCL_{\bar{X}_i}\right)\right) \quad ; \quad i = 1,2$$

ซึ่ง α_i คือ ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X_i ที่แผนภูมิควบคุมตรวจพบการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการผลิตแต่ความจริงแล้วกระบวนการผลิตไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงไป

$$\alpha_1 = 1 - P\left(LCL_{\bar{X}_1} \le \bar{X}_1 \le UCL_{\bar{X}_1}\right)$$

$$\alpha_2 = 1 - P\left(LCL_{\bar{X}_2} \le \bar{X}_2 \le UCL_{\bar{X}_2}\right)$$

$$\alpha_{overall} = 1 - P\left\{\left(LCL_{\bar{X}_1} \le \bar{X}_1 \le UCL_{\bar{X}_1}\right) \cap \left(LCL_{\bar{X}_2} \le \bar{X}_2 \le UCL_{\bar{X}_2}\right)\right\}$$

ทำการแปลงเวกเตอร์สุ่ม $\underset{\sim}{X} \sim N_2\left(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma\right)$ ให้มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

$$\frac{\bar{X}_1 - \mu_{11}}{\sigma_1/\sqrt{n}} = Z_1 \sim N(0,1) \quad \text{และ}$$

$$\frac{\bar{X}_2 - \mu_{12}}{\sigma_2/\sqrt{n}} = Z_2 \sim N(0,1)$$

เขียนอยู่ในรูปเวกเตอร์สุ่ม $\underset{\sim}{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\underset{\sim}{0}, R\right)$

เมื่อ R เมทริกซ์สหสัมพันธ์ $R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น จะได้ว่า $\alpha_{overall} = 1 - P\left((-3 < Z_1 < 3) \cap (-3 < Z_2 < 3)\right)$

$$\alpha_{overall} = 1 - \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2$$

เมื่อฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปร Z_1 และ Z_2

$$f(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(Z_1^2-2\rho Z_1Z_2+Z_2^2\right)\right\}$$

ใช้หลักการของ Simpson[1] ในการประมาณค่าเทอม $\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} f(z_1,z_2)dz_1dz_2$

ดังนั้นจะได้ค่าประมาณของ $\alpha_{overall}$ สำหรับทำการทดสอบแผนภูมิควบคุมทั้ง 3 แบบ เมื่อกำหนดค่า $\alpha_{overall}$ ตามค่า ρ ในสถานการณ์ที่ต้องการศึกษา

4. คำนวณหาขอบเขตควบคุมจากพารามิเตอร์ที่กำหนดให้ โดยสมมติว่าทราบค่าพารามิเตอร์ของแผนภูมิควบคุมทั้ง 3 แบบ เมื่อยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงระดับของค่าเฉลี่ยในกระบวนการผลิต โดยกำหนดขอบเขตสำหรับแต่ละแผนภูมิควบคุม มีดังนี้

(1) แผนภูมิควบคุมเชิงเดี่ยว $\bar{X}$ (Univariate $\bar{X}$ - chart)

ขอบเขตควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุมเชิงเดี่ยว $\bar{X}$ คือ

$$UCL=\mu_{0i}+3\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{และ} \quad LCL=\mu_{0i}-3\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}\right) \quad ; \quad i=1,2$$

(2) แผนภูมิควบคุม Hotelling

ขอบเขตควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุม Hotelling คือ

$$UCL=\chi^2_{2,\alpha_{overall}} \quad \text{และ} \quad LCL\approx 0$$

(3) แผนภูมิควบคุมเชิงพหุ Shewhart $\bar{X}$ (Multivariate $\bar{X}$ - chart)

ขอบเขตควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุมเชิงพหุ Shewhart $\bar{X}$ คือ

$$UCL=z_{\alpha_i/2} \qquad \text{และ} \quad LCL=-z_{\alpha_i/2}$$

---

[1] การประมาณอินทิเกรต 2 ชั้นด้วยหลักการ Simpson แสดงในภาคผนวก ก.

5. การหาค่าความยาววิ่งโดยเฉลี่ย (ARL)

ในขั้นตอนนี้จะนำขอบเขตควบคุมของแต่ละแผนภูมิควบคุมมาใช้ในการเปรียบเทียบกับตัวสถิติทดสอบแต่ละตัวและในแต่สถานการณ์ที่ต้องการศึกษา เพื่อหาค่า ARL โดยที่ 2 หลักการในการวิจัยมีขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

5.1 กรณีวิจัยโดยหลักการเชิงตัวเลข

ค่า ARL ของแผนภูมิควบคุมทั้ง 3 แบบ คำนวณหาได้จาก

$$\text{ARL} = \frac{1}{1-\beta_{\text{overall}}}$$

ซึ่ง $\beta_{\text{overall}}\left(P\left(\text{Type II error}\right)\right)$ คือ ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 ที่แผนภูมิควบคุมไม่สามารถตรวจพบการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการผลิตได้เมื่อกระบวนการผลิตเกิดการเปลี่ยนแปลง

(1) แผนภูมิควบคุมเชิงเดี่ยว $\bar{X}$ (Univariate $\bar{X}$ - chart)

คำนวณหา $\beta_{\text{overall}}\left(P\left(\text{Type II error}\right)\right)$ ได้จาก

$$\beta_{\text{overall}} = P\left\{\left(\frac{LCL_{\bar{X}_1}-\mu_{11}}{\sigma_1/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X}_1-\mu_{11}}{\sigma_1/\sqrt{n}} \le \frac{UCL_{\bar{X}_1}-\mu_{11}}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right) \cap \left(\frac{LCL_{\bar{X}_2}-\mu_{12}}{\sigma_2/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X}_2-\mu_{12}}{\sigma_2/\sqrt{n}} \le \frac{LCL_{\bar{X}_2}-\mu_{12}}{\sigma_2/\sqrt{n}}\right)\right\}$$

เนื่องจาก $\frac{\bar{X}_1-\mu_{11}}{\sigma_1/\sqrt{n}} = Z_1 \sim N(0,1)$ และ $\frac{\bar{X}_2-\mu_{12}}{\sigma_2/\sqrt{n}} = Z_2 \sim N(0,1)$

ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมเป็นดังนี้

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(Z_1^2 - 2\rho Z_1 Z_2 + Z_2^2\right)\right\}$$

ดังสามารถคำนวณหาในรูปแบบ $\beta_{\text{overall}} = \int_{L_1}^{U_1}\int_{L_2}^{U_2} f(z_1,z_2)\,dz_1 dz_2$

คำนวณหาค่า

ขีดจำกัดบนของการอินทิเกรตของ Z_1 คือ $U_1 = \dfrac{UCL(\bar{X}_1) - (\mu_{11})}{\sigma_1/\sqrt{n}}$

ขีดจำกัดล่างของการอินทิเกรตของ Z_1 คือ $L_1 = \dfrac{LCL(\bar{X}_1) - (\mu_{11})}{\sigma_1/\sqrt{n}}$

ขีดจำกัดบนของการอินทิเกรตของ Z_2 คือ $U_2 = \dfrac{UCL(\bar{X}_2) - (\mu_{12})}{\sigma_2/\sqrt{n}}$

ขีดจำกัดล่างของการอินทิเกรตของ Z_2 คือ $L_2 = \dfrac{LCL(\bar{X}_2) - (\mu_{12})}{\sigma_2/\sqrt{n}}$

สามารถคำนวณหาค่าอำนาจการทดสอบ (Power of test) ได้ดังนี้

$$1-\beta_{overall} = 1 - \int_{L_1}^{U_1}\int_{L_2}^{U_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(Z_1^2 - 2\rho Z_1 Z_2 + Z_2^2\right)\right] dz_1 dz_2$$

ดังนั้น ค่าประมาณ $\quad ARL = \dfrac{1}{1-\beta_{overall}}$

(2) แผนภูมิควบคุม Hotelling

คำนวณหา $\beta_{overall}$ $(P(\text{Type II error}))$ ได้จาก

$$\beta_{overall} = P(\chi^2_{(2,\lambda)} \le \chi^2_{(2,\alpha_{overall})})$$

$$= \int_0^{\chi^2(2,\alpha_{overall})} \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{((1/2)\lambda)^j}{j!}\right)\cdot\left(\frac{1}{2^{(1+j)}\Gamma(1+j)}\right)y^j \exp\left(-\frac{y}{2}\right)\right)dy$$

โดยคำนวณหา $\beta_{overall}$ ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB 7

เมื่อพารามิเตอร์เบี่ยงเบนไปจากศูนย์กลาง (λ) คือ

$$\lambda = n\left(\underset{\sim}{\mu_0} - \underset{\sim}{\mu_1}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\underset{\sim}{\mu_0} - \underset{\sim}{\mu_1}\right) = n(\delta_1\sigma_1 \quad \delta_2\sigma_2)^T\Sigma^{-1}(\delta_1\sigma_1 \quad \delta_2\sigma_2)$$

โดยที่ $d = \sqrt{\left(\underset{\sim}{\mu_0} - \underset{\sim}{\mu_1}\right)^T \Sigma^{-1} \left(\underset{\sim}{\mu_0} - \underset{\sim}{\mu_1}\right)}$ ดังนั้น $\lambda = nd^2$

เมื่อ d คือ ระยะทาง Mahalanobis เป็นระยะทางแบบสถิติที่ใช้ในการวัดการเปลี่ยนแปลงค่าเฉลี่ยของกระบวนการผลิตในแผนภูมิควบคุมคุณภาพเชิงพหุ

สามารถคำนวณหาค่าอำนาจการทดสอบ (Power of test) ได้ดังนี้

$$1-\beta_{overall} = 1 - \int_0^{\chi^2_{(2,\alpha_{overall})}} \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{((1/2)\lambda)^j}{j!} \right) \cdot \left(\frac{1}{2^{(1+j)}\Gamma(1+j)} \right) y^j \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \right) dy$$

ดังนั้น ค่าประมาณ $ARL = \frac{1}{1-\beta_{overall}}$

(3) แผนภูมิควบคุมเชิงพหุ Shewhart $\overline{X}$ (Multivariate $\overline{X}$ - chart)

เมื่อกำหนดค่า ρ จะทราบค่า $\alpha_{overall}$ และทราบค่าคงที่ a และ b ซึ่งหาได้จาก

กำหนดให้ $\rho = \sin 2\theta$ ดังนั้นจะทราบค่า $\theta = \frac{\sin^{-1}\rho}{2}$

นั่นคือ จะได้ค่าคงที่ $a = \frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$ และ $b = -\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$

สามารถคำนวณค่า α_i โดยที่ $\alpha_i = 1 - \sqrt{(1-\alpha_{overall})}$

หาค่าวิกฤต $z_{\frac{\alpha_i}{2}} = c$

ดังนั้น ขอบเขตวิกฤต $\begin{bmatrix} -c \\ -c \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} MS_1 \\ MS_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ $\underset{\sim}{m} = [MS_1 \quad MS_2]^T$ โดยที่ ตัวสถิติ MS_1 และ MS_2 เป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้น เวกเตอร์ตัวสถิติ $\underset{\sim}{m} \sim N_2\left(\left(a\left(\frac{\delta_1}{\sqrt{n}}\right)+b\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{n}}\right)\right), a^2+b^2+2\rho ab\right)$ ทำการแปลงเวกเตอร์ตัวสถิติ $\underset{\sim}{m}$ ให้เป็นมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน นั่นคือ

$$\frac{MS_1-\left(a\left(\delta_1/\sqrt{n}\right)+b\left(\delta_2/\sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}} = Z_1 \sim N(0,1) \quad \text{และ}$$

$$\frac{MS_2-\left(b\left(\delta_1/\sqrt{n}\right)+a\left(\delta_2/\sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}} = Z_2 \sim N(0,1)$$

โดยที่ Z_1 และ Z_2 เป็นอิสระต่อกัน

คำนวณหา $\beta_{overall}$ $(P(\text{Type II error}))$ ได้จาก

$$\beta_{overall} = \left(\int_{L_1}^{U_1} f(z_1)dz_1\right).\left(\int_{L_2}^{U_2} f(z_2)dz_2\right)$$

คำนวณหาค่า

ขีดจำกัดล่างของการอินทิเกรต Z_1 คือ $L_1 = \dfrac{-c-\left(a\left(\delta_1\sqrt{n}\right)+b\left(\delta_2\sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\rho}}$

ขีดจำกัดบนของการอินทิเกรต Z_1 คือ $U_1 = \dfrac{c-\left(a\left(\delta_1\sqrt{n}\right)+b\left(\delta_2\sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\rho}}$

ขีดจำกัดล่างของการอินทิเกรต Z_2 คือ $L_2 = \dfrac{-c-\left(b\left(\delta_1\sqrt{n}\right)+a\left(\delta_2\sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\rho}}$

ขีดจำกัดบนของการอินทิเกรต Z_2 คือ $U_2 = \dfrac{c-\left(b\left(\delta_1\sqrt{n}\right)+a\left(\delta_2\sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\rho}}$

คำนวณหาอำนาจการทดสอบ (Power of test) มีค่าเท่ากับ $1\text{-}\beta_{overall}$

$$1\text{-}\beta_{overall} = 1\text{-}\left(\int_{L_1}^{U_1} f(z_1)dz_1\right).\left(\int_{L_2}^{U_2} f(z_2)dz_2\right)$$

ดังนั้น ค่าประมาณ $ARL = \dfrac{1}{1-\beta_{overall}}$

5.2 กรณีวิจัยโดยใช้หลักการจำลองข้อมูล โดยมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จำลองค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มของตัวแปรสุ่ม X_i ณ เวลา t (ε_{it}) ; i=1,2 กำหนดให้มีการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ ε_{1t} และ ε_{2t} มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนมีคงที่ เท่ากับ 1
ดังนั้น จะได้ว่า $\varepsilon_{1t} \sim N(0,1)$ และ $\varepsilon_{2t} \sim N(0,1)$ กำหนดให้ ε_{1t} กับ ε_{2t} มีความสัมพันธ์กันตามค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $(\rho(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}))$ ที่ต้องการศึกษา กล่าวคือ $(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})$ มีการแจกแจงแบบทวิคูณปกติ [1] หรือ $(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t}) \sim N_2\left(\underset{\sim}{0}, R\right)$

ขั้นที่ 2 กำหนดค่าพารามิเตอร์ ค่าเฉลี่ยของประชากร (μ_{0i}) ; i =1,2

ขั้นที่ 3 กำหนดพารามิเตอร์ δ_i เป็นค่าคงที่ ซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงจาก μ_{0i} ไป เป็น $\mu_{1i} = \mu_{0i} + \delta_i\sigma_i$; i =1,2 และ ขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10 ในแต่ละชุดตัวอย่าง

ขั้นที่ 4 จำลองข้อมูลตัวแปรสุ่ม 2 ตัว ที่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันให้มีลักษณะภายใต้ตัวแบบ (2.2)

$$\underset{\sim}{X}_t = \underset{\sim}{\mu}_0 + \underset{\sim}{\gamma} + \underset{\sim}{\varepsilon}_t \quad ; \quad t = 1,2,3,\ldots$$

ขั้นที่ 5 คำนวณค่าสถิติทดสอบของแต่ละแผนภูมิควบคุมและนับความยาววิ่ง (RL) เมื่อค่าเฉลี่ยของประชากร เกิดการเปลี่ยนแปลงจาก μ_{0i} เป็น μ_{1i} โดยที่ $\mu_{1i} = \mu_{0i} + \delta_i\sigma_i$ ทำการเปรียบเทียบกับขอบเขตควบคุมจนกว่าค่าสถิติจะมีค่ามากกว่าขอบเขตควบคุม

ดังนั้น จะได้ ค่าจำนวนความยาววิ่งในแต่ละแผนภูมิควบคุมเขียนแทนด้วย $RL_{Uni-\bar{X}}$, $RL_{Hotelling}$ และ $RL_{MS-\bar{X}}$ ตามลำดับ

และ ค่ากำลังสองของจำนวนความยาววิ่งแต่ละแผนภูมิควบคุมเขียนแทนด้วย $RL^2{}_{Uni-\bar{X}}$, $RL^2{}_{Hotelling}$ และ $RL^2{}_{MS-\bar{X}}$ ตามลำดับ

[1] หลักการการแจกแจงแบบทวิคูณปกติ แสดงในภาคผนวก ง.

คำนวณหาผลต่างของค่า RLแบบจับคู่ ระหว่าง 2 แผนภูมิควบคุม สามารถดำเนินการได้ 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $RL_{Uni-\bar{X}} - RL_{Hotelling} = d_1$ และคำนวณหาค่า d_1^2

กรณีที่ 2 $RL_{Uni-\bar{X}} - RL_{MS-\bar{X}} = d_2$ และคำนวณหาค่า d_2^2

กรณีที่ 3 $RL_{Hotelling} - RL_{MS-\bar{X}} = d_3$ และคำนวณหาค่า d_3^2

ขั้นที่ 6 ทำตามขั้นตอนที่ (4) - (5) ซ้ำ 10,000 รอบ แล้วคำนวณหาค่าต่างๆ ดังนี้

- ผลรวมของจำนวนความยาววิ่งทั้งหมด $\left(\sum_{j=1}^{10,000} RL_j\right)$ สำหรับตัวสถิติที่กำลังพิจารณา
- ผลรวมของผลต่าง RL ในแต่ละกรณีซึ่งได้แก่ $\sum_{j=1}^{10,000} d_{1j}$, $\sum_{j=1}^{10,000} d_{2j}$ และ $\sum_{j=1}^{10,000} d_{3j}$
- ผลรวมกำลังสองของผลต่าง RL ในแต่ละกรณีซึ่งได้แก่ $\sum_{j=1}^{10,000} d_{1j}^2$, $\sum_{j=1}^{10,000} d_{2j}^2$ และ $\sum_{j=1}^{10,000} d_{3j}^2$

ขั้นที่ 7 คำนวณหาค่าประมาณจำนวนความยาววิ่งโดยเฉลี่ย (ARL) ในแต่ละแผนภูมิควบคุม

$$ARL = \frac{\sum_{j=1}^{10,000} RL_j}{10,000}$$

6. ตรวจสอบความเหมาะสมเชิงสถิติสำหรับในกรณีที่วิจัยโดยใช้หลักการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคการหาค่าประมาณแบบช่วงของARL ประชากร (μ_{RL}) โดยเปรียบเทียบกับกรณีวิจัยโดยใช้หลักการคำนวณเชิงตัวเลข

ค่าประมาณแบบช่วงสำหรับ ARL ประชากร มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณหา

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{10,000} RL_j - \left(\sum_{j=1}^{10,000} RL\right)^2 \Big/ 10,000}{10,000-1}} \text{ และ หาค่า } S/\sqrt{10,000}$$

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับความเชื่อมั่น 95% หรือ ระดับนัยสำคัญ เท่ากับ 0.05

ดังนั้น ค่าวิกฤต คือ $Z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$

ขั้นที่ 3 นำค่าประมาณ ARL แต่ละแผนภูมิควบคุมมาคำนวณ

ขั้นที่4 ค่าประมาณแบบช่วงของ μ_{RL} ของแต่ละแผนภูมิควบคุมที่ระดับความเชื่อมั่น 95% คือ

$$ARL - 1.96\frac{S}{\sqrt{10,000}} < \mu_{RL} < ARL + 1.96\frac{S}{\sqrt{10,000}}$$

7. การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของความยาววิ่งโดยเฉลี่ยประชากร($\mu_{RL1} - \mu_{RL2}$) ระหว่าง 2 แผนภูมิควบคุมแบบจับคู่

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมจะเปรียบเทียบค่าประมาณ ARLที่แผนภูมิแต่ละแบบคำนวณได้

กำหนดให้

1) RL_{1j} และ RL_{2j} แทน ความยาววิ่งที่ชุดตัวอย่างที่ j ซึ่งได้จากการใช้แผนภูมิควบคุมแบบที่ 1และแบบที่ 2 ที่ได้จากการตรวจสอบตามลำดับ เมื่อ $j = 1,2,3,\ldots,10000$

2) μ_{RL1} และ μ_{RL2} แทน ความวิ่งโดยเฉลี่ยของประชากร ที่แผนภูมิควบคุมแบบที่ 1 และแบบที่ 2 ที่ได้จากการตรวจสอบตามลำดับ

ขั้นตอนดำเนินการต่างๆดังนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานเพื่อทำการทดสอบ

H_0 : ค่าความยาววิ่งโดยเฉลี่ยที่วัดได้จากแผนภูมิควบคุมแบบที่ 1 และแบบที่ 2 ไม่ต่างกัน
H_1 : ค่าความยาววิ่งโดยเฉลี่ยที่วัดได้จากแผนภูมิควบคุมแบบที่ 1 และ แบบที่ 2 ต่างกัน
หรือ สามารถเขียนในอีกรูปแบบดังนี้

$$H_0 : \mu_{RL1} - \mu_{RL2} = \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_{RL1} - \mu_{RL2} = \mu_d \neq 0$$

ขั้นที่ 2 กำหนดสถิติทดสอบ

เนื่องจากทดสอบโดยใช้ตัวอย่างชุดเดียวกันเพื่อวัดความแตกต่างของค่าประมาณความยาววิ่งโดยเฉลี่ย (ARL) ระหว่างแผนภูมิควบคุม 2 แบบ ซึ่ง ค่าความยาววิ่ง (RL) มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต เมื่อการสุ่มตัวอย่างจากแต่ละประชากรเป็นอิสระต่อกัน โดยที่ขนาดตัวอย่างในการทดสอบเท่ากับ 10,000 รอบ จากทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลางจะได้ ค่าประมาณ ARL_1 และ ARL_2 มีการแจกแจงโดยประมาณแบบปกติ ที่ทราบค่าความแปรปรวนจึงใช้ ตัวสถิติทดสอบคือ

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{S_d \big/ \sqrt{10,000}} \approx Z$$

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติทดสอบ

ให้ $\quad d_j = RL_{1j} - RL_{2j} \quad ; \quad j = 1,2,3,\ldots,10000$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{10,000} d_j}{10,000} \quad \text{และ} \quad S_d^2 = \frac{\sum_{j=1}^{10,000} d_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{10,000} d_j\right)^2 \Big/ 10,000}{10,000 - 1}$$

ซึ่ง $\sum_{j=1}^{10,000} d_j$ และ $\sum_{j=1}^{10,000} d_j^2$ นำมาจาก 5. ขั้นตอนที่ 6

ดังนั้น ค่าสถิติทดสอบ $Z = \dfrac{\bar{d} - 0}{S_d \big/ \sqrt{10,000}}$

ขั้นที่ 4 กำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

ดังนั้น จะได้ค่าวิกฤตคือ $z_{0.05} = 1.96$

ขั้นที่ 5 สร้างเขตปฏิเสธ จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ถ้า $|Z|>1.96$

ขั้นที่ 6 สรุปผลการทดสอบ

เนื่องจาก $|Z|>1.96$ สรุปได้ว่าปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ผลต่างค่าจำนวนความยาววิ่งโดยเฉลี่ยของประชากร (μ_{RL}) ระหว่าง 2 แผนภูมิควบคุมไม่ต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ดังนั้นค่าประมาณจำนวนความยาววิ่งโดยเฉลี่ย(ARL) ที่คำนวณได้จากแผนภูมิควบคุมแบบที่ 1 และ 2 ไม่ต่างกัน