

บทที่ 4

Cusum Chart ที่มีค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่

วิธีการควบคุมกระบวนการทางสถิติแบบดั้งเดิมนั้น จะติดตามกระบวนการผลิตโดยการเลือกข้อมูลตัวอย่างด้วยขนาดตัวอย่างที่เท่ากันในทุกครั้ง และใช้ช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่เท่ากันเช่นกัน แผนภูมิที่นิยมใช้งานได้แก่แผนภูมิการควบคุมชีวฮาร์ต ซึ่งได้มีการศึกษาเพิ่มเติมเพื่อปรับปรุงให้การใช้งานแผนภูมินั้นเกิดประสิทธิภาพยิ่งขึ้น Runger และ Pignatiello (1991) ได้เสนอบทความเรื่อง Adaptive Sampling for Process Control ซึ่งนำเสนอการสร้างแผนภูมิการควบคุมของชีวฮาร์ตเมื่อช่วงเวลาในการชักตัวอย่างขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง (subgroup's mean) ในปัจจุบันว่าใกล้เคียงกับค่าเป้าหมายหรือไม่ Costa (1994) เสนอบทความเรื่อง \bar{x} Charts with Variable Sample Size บทความนี้จะแสดงคุณสมบัติของ \bar{x} Chart เมื่อขนาดตัวอย่างขึ้นอยู่กับค่าตัวอย่างที่สังเกตได้ก่อนหน้านั้น Prabhu, Montgomery และ Runger (1994) เสนอบทความเรื่อง A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{x} Control Scheme เนื่องจาก \bar{x} Chart เดิมนั้นทำงานในลักษณะวนรอบคือต้องรอจนกว่าจะเกิดสภาวะออกนอกการควบคุมจึงจะทราบผลบนแผนภูมิ แต่สำหรับวิธีการนี้จะทำให้สามารถควบคุมกระบวนการแบบไปข้างหน้า ซึ่งจะทำได้โดยการเปลี่ยนพารามิเตอร์ของแผนภูมิการควบคุมคือจำนวนตัวอย่างและช่วงเวลาระหว่างการชักตัวอย่าง โดยเปลี่ยนเป็นค่าที่มากที่สุดและค่าน้อยที่สุดขึ้นอยู่กับสภาวะปัจจุบันของกระบวนการ

เนื่องจากแผนภูมิการควบคุมชีวฮาร์ตไม่ไวต่อกระบวนการที่เลื่อนไปจากค่าเป้าหมายไม่เกิน 2σ ดังนั้นจึงมีการเสนอแผนภูมิประเภทอื่นที่นำมาใช้ทดแทนแผนภูมิชีวฮาร์ตในกรณีนี้ได้ แผนภูมิที่จะนำมาพิจารณาในครั้งนี้คือแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม (Cumulative-sum Control Chart : CUSUM Chart) มีการนำเสนอบทความเกี่ยวกับแผนภูมินี้หลายบทความ เช่น Lucas (1982) นำเสนอเรื่อง Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes Annadi, Keats, Runger และ Montgomery (1995) นำเสนอเรื่อง An Adaptive Sample Size CUSUM Control Chart Reynolds, Amin และ Arnold (1990) นำเสนอเรื่อง CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals Marion และ Reynolds (1996) นำเสนอเรื่อง Variable-Sampling-Interval Control Charts with Sampling at Fixed Times เป็นต้น

Cusum Chart ที่มีค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่

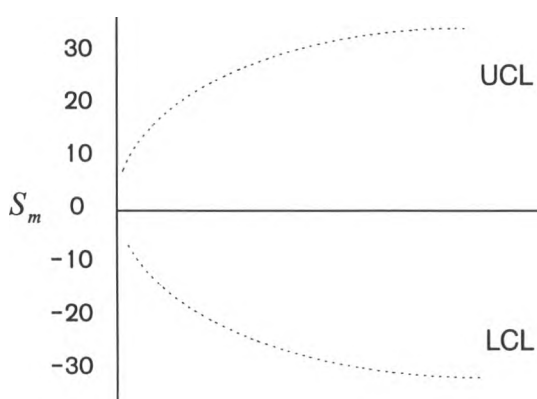
การพิจารณาปัญหาในครั้งนี้ ค่าสถิติความเบี่ยงเบนสะสม (cusum statistic) ที่นำมาพิจารณาเป็น sample mean ที่เป็นอิสระต่อกันและเรียงลำดับของตัวอย่างไปตามเวลา เพื่อให้รูปแบบของปัญหาย่อยต่อการศึกษาและใช้งาน จึงจัดรูปแบบได้ดังจะกล่าวต่อไปนี้

การจัดรูปแบบข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา

DeVor, Chang และ Sutherland (1992) กล่าวไว้ว่า สามารถสร้างแผนภูมิการควบคุมชีวฮาร์ตสำหรับค่าสถิติผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่คำนวณมาจาก sample means ที่เป็นอิสระต่อกันและเป็น time-ordered sequence ได้ ถ้ากระบวนการมีตัวแปรคุณภาพ (quality variable) เป็น X ซึ่งมีค่า mean = μ_x และมีค่าความเบี่ยงเบนเป็น σ_x ซึ่งการศึกษาในครั้งนี้จะระบุว่าค่าทั้งสองเป็นค่าที่ทราบได้จากข้อมูลในอดีต ดังนั้นสามารถหาค่าผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม (cusum) ของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง (sample means) จากค่า μ_x ได้คือ

$$S_m = \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \mu_x) \quad (1)$$

ซึ่งมีค่า mean = 0 และ variance (ความแปรปรวน) = $(m/n)(\sigma_x^2)$ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น n แผนภูมิควบคุม 3 sigma แสดงดังรูปที่ 4-1



รูปที่ 4-1 แสดงถึงแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมของ sample means

ซึ่งสามารถหาค่าขอบเขตการควบคุม 3 sigma ได้จาก

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \quad + 3\sigma_x \sqrt{\frac{m}{n}} \\ \text{LCL} &= \quad - 3\sigma_x \sqrt{\frac{m}{n}} \end{aligned} \quad (2)$$

ในการติดตามกระบวนการโดยพิจารณาลักษณะคุณภาพ X ซึ่งสมมติว่ามีการกระจายเป็นแบบปกติ ด้วยค่า process mean เป็น μ_0 และทราบค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ให้

$$Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_x}{\sigma / \sqrt{n(i)}} \quad (3)$$

เมื่อ \bar{X}_i เป็นค่า mean ของขนาดตัวอย่างย่อย i ซึ่งมีขนาดตัวอย่างเป็น $n(i)$ และพบว่า $Z_i \sim N(0,1)$

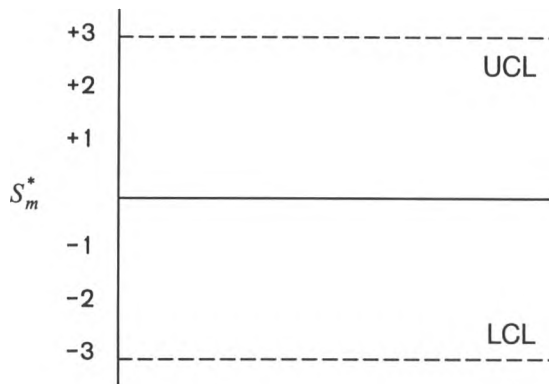
ถ้าค่า $\mu = \mu_0$ แสดงว่ากระบวนการอยู่ในค่าเป้าหมาย หรืออยู่ในการควบคุมของกระบวนการ ถ้าค่า process mean เลื่อนจากค่าเป้าหมาย μ_0 ไปสู่ค่าอื่น (ให้เป็น μ_1) จะบอกได้ว่ากระบวนการออกนอกค่าเป้าหมาย ถ้าจุดบนแผนภูมิการควบคุมตกอยู่ด้านหลังค่าขอบเขตการควบคุมเพียงหนึ่งจุดจะระบุได้ว่ากระบวนการนั้นออกนอกการควบคุมและจะต้องหยุดกระบวนการเพื่อหาสาเหตุที่แท้จริงและดำเนินการแก้ไข

ค่าการเลื่อนไปของ process mean เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ δ จะแสดงอยู่ในรูปหน่วยของค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการ (process standard deviation units) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของค่า target mean ที่เปลี่ยนไปต่อค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกระบวนการ ($\delta = (\mu_0 - \mu_1)/\sigma$)

ในการพิจารณาถ้าขนาดตัวอย่างที่ใช้มีค่าคงที่เป็น n สามารถจัดรูปแบบของค่าสถิติผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม (cusum) ให้อยู่ในรูปของค่ามาตรฐานเมื่อข้อมูลมีการกระจายแบบปกติ (Z) เพื่อจะได้นำค่านี้ไปพล็อตบนแผนภูมิความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขอบเขตการควบคุมเป็น ± 3 ที่แสดงในรูปที่ 4-2 ดังนั้น เมื่อพิจารณาค่าสถิติ cusum ในค่าความเบี่ยงเบนต่อหน่วยจะได้

$$S_m^* = \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{m/n}} \quad (4)$$

ซึ่งประมาณได้เป็นการกระจายปกติมีค่า mean = 0 และค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 หรือ $N(0,1)$ สำหรับขนาดตัวอย่างเป็น n สามารถแสดงภาพการควบคุมเมื่อค่าขอบเขตการควบคุม (control limit) เป็น 3 sigma ได้เป็น



รูปที่ 4-2 แสดงถึงแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมมาตรฐาน

แต่เนื่องจากการศึกษาในครั้งนี้ค่าขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษามีค่าไม่คงที่จึงไม่สามารถใช้สมการที่ (3) ได้ทันทีเนื่องจากค่า n ไม่คงที่ ดังนั้นสามารถหาค่าสถิติ cusum ที่มีขนาดตัวอย่าง n ไม่คงที่ได้จาก

$$S_m^* = \frac{\sum_{i=1}^m \left[\frac{(\bar{X}_i - \mu_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} \right]}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2}{n_a}\right)_1 + \left(\frac{\sigma_x^2}{n_a}\right)_2 + \left(\frac{\sigma_x^2}{n_a}\right)_3 + \dots + \left(\frac{\sigma_x^2}{n_a}\right)_m}}, a=1,2 \quad (5)$$

ซึ่งประมาณได้เป็นการกระจายปกติมีค่า mean = 0 และค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 หรือ $N(0,1)$ สำหรับขนาดตัวอย่างเป็น n ในข้อมูลที่ซึ่กตัวอย่างแต่ละครั้ง และสามารถหาค่าหนดจุดในแผนภูมิการควบคุมที่มีค่าขอบเขตการควบคุมสำหรับแผนภูมิเป็น ± 3

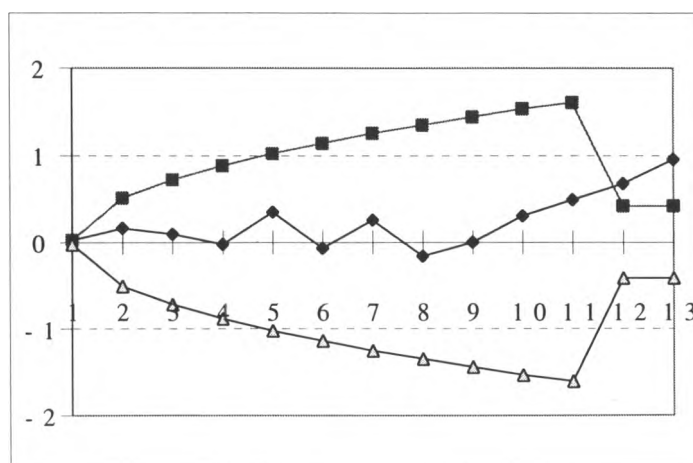
เพื่อทดสอบว่าการเปลี่ยนรูปของค่าสถิติเช่นนี้จะทำให้สามารถกำหนดจุดค่าสถิติที่พิจารณาอยู่บนแผนภูมิที่มีค่าขอบเขตการควบคุมเป็น ± 3 ได้จริงจึงทดสอบโดยใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน เขียนแผนภูมิที่มีขอบเขตการควบคุมที่ไม่ได้เปลี่ยนรูปของข้อมูลกับแผนภูมิที่เปลี่ยนรูปของข้อมูลให้เป็นค่ามาตรฐานเพื่อใช้กับค่าขอบเขตการควบคุมเป็น ± 3 ดังตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 1 แสดงข้อมูลตัวอย่างจากการสุ่ม 13 ชุด ซึ่งในแต่ละชุดได้จากขนาดตัวอย่างที่ไม่คงที่ คือ $n = 3$ และ 47 และข้อมูลชุดนี้มีค่า $\bar{X} = 5.7202$ และมีค่า $\sigma_x = 0.5068$ นำข้อมูลมาคำนวณตามสมการที่ (1) และ (5) เพื่อสร้างแผนภูมิได้ดังตารางที่ 1

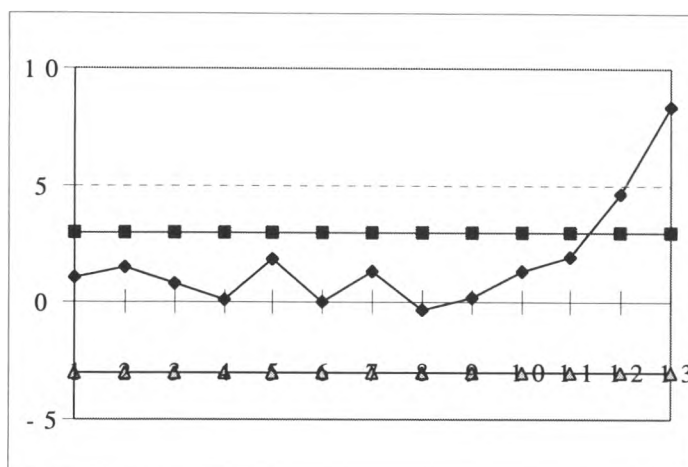
ตารางที่ 4-1 แสดงถึงการคำนวณค่าต่างๆตามสมการที่ (1)-(5)

t	n	\bar{X}	σ_t	S_m^*	UCL S_m^*	LCL S_m^*	S_m	UCL S_m	LCL S_m
1	47	5.7425	0.0739	1.10939	3	-3	0	0.032349	-0.03235
2	3	5.8696	0.3018	1.47858	3	-3	0.2	0.522724	-0.52272
3	3	5.6323	0.4204	0.78961	3	-3	0.1	0.728071	-0.72807
4	3	5.6028	0.5122	0.15478	3	-3	-0	0.887093	-0.88709
5	3	6.1085	0.5899	1.87227	3	-3	0.4	1.021655	-1.02166
6	3	5.3052	0.6584	0.02399	3	-3	-0.1	1.14045	-1.14045
7	3	6.0376	0.7205	1.30067	3	-3	0.3	1.247987	-1.24799
8	3	5.3052	0.7777	-0.3565	3	-3	-0.2	1.346966	-1.34697
9	3	5.8774	0.8309	0.24457	3	-3	-0	1.439154	-1.43915
10	3	6.0269	0.8809	1.35431	3	-3	0.3	1.525782	-1.52578
11	3	5.8992	0.9282	1.95439	3	-3	0.5	1.607749	-1.60775
12	47	5.9118	0.9312	4.63676	3	-3	0.7	0.407477	-0.40748
13	47	5.9879	0.9341	8.37633	3	-3	0.9	0.408759	-0.40876

จากตารางที่ 4-1 สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



รูปที่ 4-3 แสดงแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมเมื่อไม่เปลี่ยนรูปค่าสถิติ (S_m)



รูปที่ 4-4 แสดงแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมเมื่อเปลี่ยนรูปค่าสถิติ (S_m^*)

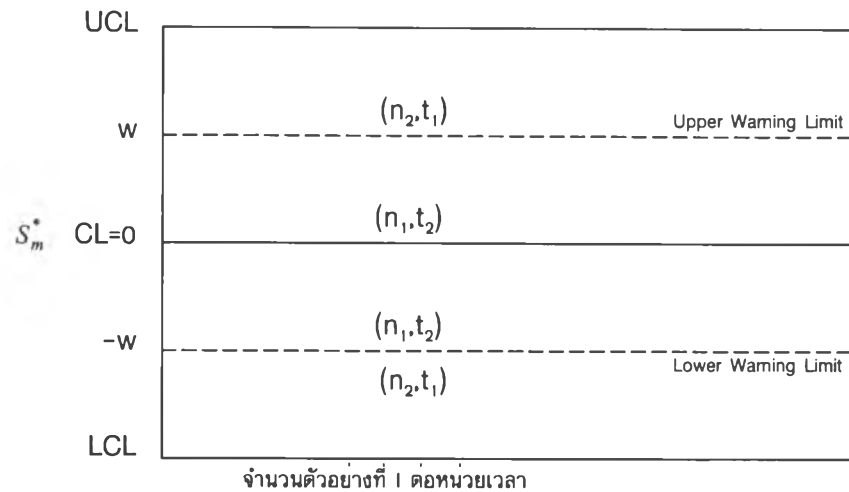
จากกราฟทั้ง 2 ภาพจะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนรูปข้อมูลสถิติเช่นนี้จะทำให้สามารถพิจารณาแผนภูมิได้เช่นเดียวกันกับการไม่เปลี่ยนรูปและทำให้ง่ายต่อการศึกษาเพื่อหาค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่ ดังจะกล่าวต่อไป

ความสัมพันธ์ของขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่าง

การศึกษาในครั้งนี้เป็นการศึกษาการควบคุมกระบวนการโดยการใช้ค่าสถิติผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม การติดตามผลซึ่งค่าดังกล่าวสามารถแสดงได้ตั้งสมการที่ 5 แสดงลงบนแผนภูมิควบคุมที่มีขอบเขตการควบคุมบน (Upper Control Limit : UCL) เป็น 3 และขอบเขตการควบคุมล่าง (Lower Control Limit : LCL) เป็น -3 สำหรับการชักตัวอย่างแบบดั้งเดิมมักจะกำหนดขนาดตัวอย่างที่แน่นอนเป็น n_0 และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่ t_0 ในการศึกษาครั้งนี้จะกำหนดค่าขนาดตัวอย่างออกเป็น 2 ค่าคือ n_1 และ n_2 และกำหนดช่วงเวลาในการชักตัวอย่างเป็น 2 ค่า เช่นเดียวกันคือ t_1 และ t_2 ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแสดงได้โดย

$$n_1 < n_0 < n_2 \text{ และ } t_1 < t_0 < t_2$$

ในการตัดสินใจว่าข้อมูลตัวที่ m จะใช้ค่าใดระหว่างค่า n_1 หรือ n_2 และ t_1 หรือ t_2 จะพิจารณาจากข้อมูลก่อนหน้านี้ ($m-1$) เป็นเกณฑ์ โดยแบ่งช่วงการพิจารณาบนแผนภูมิออกเป็น 3 ช่วงดังนี้



รูปที่ 4-5 แสดงช่วงการพิจารณาบนแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม

เมื่อ $w = \text{Warning Limit}$ และเพื่อให้ง่ายแก่การพิจารณากำหนดให้ $w = -w$ ถ้าข้อมูลตัวที่ $m-1$ อยู่ในช่วง $[LCL, -w]$ หรือ $[w, UCL]$ แสดงว่ากระบวนการมีแนวโน้มว่าจะอยู่นอกเหนือเขตควบคุม ดังนั้นข้อมูลตัวที่ m ควรจะชักตัวอย่างเร็วขึ้นและใช้ขนาดตัวอย่างที่มากขึ้น ในทางตรงกันข้าม ถ้าข้อมูลตัวที่ $m-1$ อยู่ในช่วง $[-w, w]$ แสดงว่ากระบวนการอยู่ในเขตควบคุมดังนั้นข้อมูลตัวที่ m สามารถที่จะชักตัวอย่างช้าลงและใช้ขนาดตัวอย่างที่น้อยลงได้ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

$$((n(m), t(m))) = \begin{cases} (n_2, t_1) & \text{เมื่อ } w < S_{m-1}^* < UCL \\ (n_1, t_2) & \text{เมื่อ } -w \leq S_{m-1}^* \leq w \\ (n_2, t_1) & \text{เมื่อ } LCL < S_{m-1}^* < -w \end{cases}$$

การใช้ขนาดตัวอย่างที่มาก และชักตัวอย่างบ่อยๆ จะทำให้สามารถหาสถานะของกระบวนการได้ดียิ่งขึ้น แต่การพิจารณาเลือกใช้ค่าขนาดตัวอย่างเท่าได้นั้น มีปัจจัยหลายประการที่ต้องนำมาพิจารณา เช่น ถ้าต้องการขนาดตัวอย่างมาก ควรพิจารณาความพร้อมของอุปกรณ์ในการตรวจวัดรวมถึงบุคลากรที่ดำเนินการวัดว่า สามารถดำเนินการวัดด้วยขนาดตัวอย่างที่มากได้หรือไม่ หรือถ้าต้องการช่วงเวลาในการชักตัวอย่างน้อยต้องพิจารณาชนิดของเครื่องจักรที่ใช้งานว่ามีขีดความสามารถเป็นเช่นไร รวมถึงความพร้อมของพนักงานด้วย

Prabhu Montgomery และ Runger (1994) เสนอบทความเรื่อง " A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{X} Control Scheme " ซึ่งวิธีการที่นำเสนอ นั้นสามารถใช้ได้กับแผนภูมิควบคุมที่มีค่าขอบเขตการควบคุมเป็น 3 sigma ดังนั้นจากการสมการที่

(3) เมื่อจัดข้อมูลค่าสถิติ cusum ให้อยู่ในรูปของ S_m^* ซึ่งประมาณได้เป็นการกระจายปกติ $N(0,1)$ แล้วสามารถใช้แนวความคิดที่นำเสนอในบทความดังกล่าวมาพิจารณาได้ดังนี้

เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบแผนภูมิควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่ กับแผนภูมิที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่ สิ่งหนึ่งที่ต้องทำให้ทั้งสองแผนภูมิเหมือนกันในสภาวะที่อยู่ภายใต้การควบคุม ซึ่งทำได้โดยการออกแบบแผนภูมิที่มีค่าเฉลี่ยของขนาดตัวอย่างที่มากและน้อยมีค่าเท่ากับขนาดตัวอย่างที่ใช้ในกรณีที่มีขนาดตัวอย่างคงที่ และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างก็เช่นกันคือมีช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่มากและน้อยมีค่าเท่ากับช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ใช้ในกรณีที่มีขนาดตัวอย่างคงที่ เพื่อให้มั่นใจได้ว่าอัตราการเกิดสัญญาณที่เตือนสภาวะออกนอกการควบคุมของแผนภูมิที่เปรียบเทียบกันทั้งสองจะเท่ากัน และสามารถระบุค่าเฉลี่ยของจำนวนตัวอย่างต่อหน่วยเวลาเมื่อกระบวนการอยู่ในสภาวะที่อยู่ภายใต้การควบคุม และจะกำหนดค่าขอบเขตการควบคุมไว้เป็นค่าที่แน่นอน

ในการศึกษาแผนภูมิ cusum ที่มีขนาดตัวอย่างไม่คงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่เพื่อเปรียบเทียบกับแผนภูมิ cusum ที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่คงที่ ดังที่กล่าวมาแล้วคือจะกำหนดข้อจำกัดให้ค่าเฉลี่ยของขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างเมื่อ $\mu = \mu_0$ เท่ากับค่าที่กำหนดในกรณีที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่คงที่นั่นคือ

$$E_0 [n(m)] = n_0 \quad (6)$$

และ

$$E_0 [t(m)] = t_0 \quad (7)$$

ทั้งนี้เพื่อให้มั่นใจได้ว่าสัญญาณเตือน (false alarm rate) ของแผนภูมิที่นำมาเปรียบเทียบทั้งสองนี้มีค่าเท่ากันและได้ระบุค่าเฉลี่ยจำนวนครั้งในการชักตัวอย่างต่อหน่วยเวลา (average of number of items sampled per unit time) เมื่อกระบวนการอยู่ในการควบคุม จากสมการที่ (6) สามารถเขียนได้เป็น

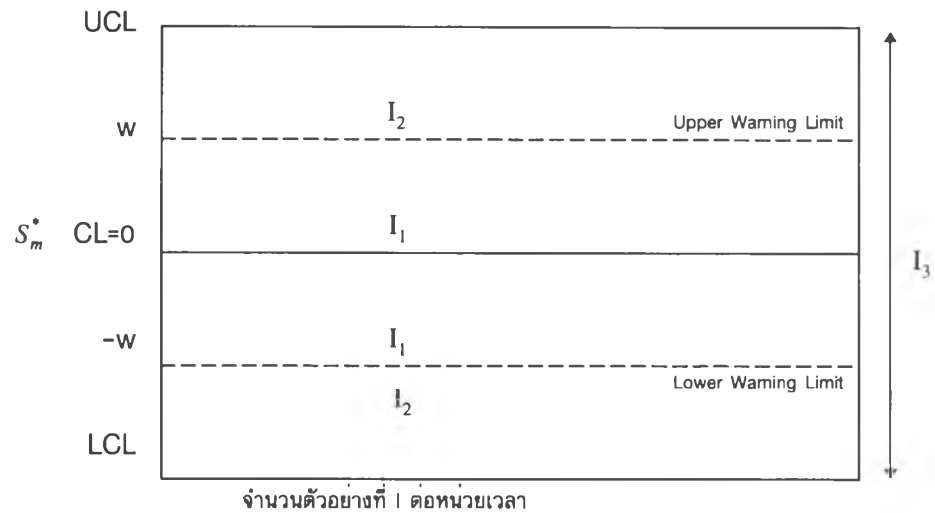
$$E_0 [n(m) \mid LCL < S_{m-1}^* < UCL; \delta = 0] = n_0 \quad (8)$$

กำหนดให้พื้นที่ภายในแผนภูมิการควบคุมทั้ง 3 พื้นที่แสดงด้วยค่า

$$I_1 = [-w, w]$$

$$I_2 = (LCL, -w) \cup (w, UCL)$$

$$I_3 = (LCL, UCL)$$



เมื่อ $S_{m-1}^* \sim N(0,1)$ สำหรับทุกค่า m เมื่อ ค่าการเลื่อนของกระบวนการ : $\delta = 0$ สามารถเขียนสมการที่ (8) ได้เป็น

$$\begin{aligned} n_0 &= E [n(m) \mid S \in I_3] \\ &= [n_1 \{ \Pr(S \in I_1) / \Pr(S \in I_3) \}] + [n_2 \{ \Pr(S \in I_2) / \Pr(S \in I_3) \}] \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$n_0 \Pr(S \in I_3) = [n_1 \Pr(S \in I_1)] + [n_2 \Pr(S \in I_2)] \quad (9)$$

เมื่อ

$$\Pr(S \in I_1) = 2\Phi(w) - 1 \quad (10)$$

$$\Pr(S \in I_2) = 2(\Phi(UCL) - \Phi(w)) \quad (11)$$

$$\Pr(S \in I_3) = 2\Phi(UCL) - 1 \quad (12)$$

Φ คือ ฟังก์ชันการกระจายแบบปกติมาตรฐานสะสม (standard normal cumulative function)

แทนค่าสมการที่ (10) (11) และ (12) ในสมการที่ (9) จะได้

$$\begin{aligned}
 n_0(2\Phi(UCL) - 1) &= [n_1(2\Phi(w) - 1)] + [n_2(2(\Phi(UCL) - \Phi(w)))] \\
 (2n_0\Phi(UCL)) - n_0 &= [2n_1(\Phi(w)) - n_1] + ((2n_2\Phi(UCL)) - (2n_2\Phi(w))) \\
 (2n_0\Phi(UCL)) - (2n_2\Phi(UCL)) &= [2(\Phi(w)(n_1 - n_2))] - n_1 + n_0 \\
 [2(\Phi(w)(n_1 - n_2))] - n_1 + n_0 &= 2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) \\
 \Phi(w) &= [2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) + n_1 - n_0] / [2(n_1 - n_2)] \\
 w &= \Phi^{-1} [2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) + n_1 - n_0] / [2(n_1 - n_2)] \quad (13)
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จากข้อจำกัดตั้งสมการที่ (7) สามารถหาค่าของ w ได้ในลักษณะเดียวกันคือ

$$w = \Phi^{-1} [2\Phi(UCL)(t_0 - t_1) + t_2 - t_0] / [2(t_2 - t_1)] \quad (14)$$

จากสมการที่ (13) และ (14) สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง n_1 , n_2 และ t_1 , t_2 ได้คือ

$$\begin{aligned}
 \Phi^{-1} [2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) + n_1 - n_0] / [2(n_1 - n_2)] &= \Phi^{-1} [2\Phi(UCL)(t_0 - t_1) + t_2 - t_0] / [2(t_2 - t_1)] \\
 [2\Phi(UCL)(n_0 - n_2) + n_1 - n_0] [(t_2 - t_1)] &= [2\Phi(UCL)(t_0 - t_1) + t_2 - t_0] [(n_1 - n_2)]
 \end{aligned}$$

จะได้

$$t_2 = \frac{t_0(n_1 - n_2) - [2(t_0 - t_1)(n_1 - n_2)\Phi(UCL)] - t_1[2(n_0 - n_2)\Phi(UCL) + (n_1 - n_0)]}{n_1 - n_2 - [2(n_0 - n_2)\Phi(UCL) + (n_1 - n_0)]} \quad (15)$$

การเปรียบเทียบแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม

ในการเปรียบเทียบแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม ที่มีขนาดตัวอย่างไม่คงที่ และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่ กับแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่คงที่สำหรับการศึกษาในครั้งนี้ จะใช้ค่า ATS (The average time to signal) ซึ่งแสดงเวลาเฉลี่ยในการควบคุมเพื่อป้องกันสภาวะที่กระบวนการออกนอกเป้าหมายจาก μ_0 ไปเป็น $\mu_0 + \delta\sigma$ เนื่องจาก assignable cause ถ้ากระบวนการนั้นอยู่ใกล้เป้าหมาย ค่าของ ATS ที่ได้จะมีค่ามากแสดงว่าต้องใช้เวลาานกว่ากระบวนการจะเกิดการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย ในทางตรงกันข้าม ถ้ากระบวนการมีแนวโน้มออกนอกเป้าหมาย ค่า ATS ที่ได้จะมีค่าน้อยแสดงว่าใช้เวลาเพียงไม่นานก็พบสภาวะที่กระบวนการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย อย่างไรก็ตามค่า ATS ที่น้อยจะจำเป็นเมื่อค่าของ process mean เลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย จะ

ต้องหาสถานะออกนอกการควบคุมได้เร็วที่สุดเพื่อทำการตรวจสอบและแก้ไขเพื่อจะไม่ให้เกิดการสูญเสียในสถานะที่กระบวนการออกนอกการควบคุม

ให้ ATS_δ เป็นค่าเฉลี่ยเวลาที่จะเกิดสัญญาณบอกสถานะที่กระบวนการเลื่อนจากค่าเป้าหมาย μ_0 ไปเป็น $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ สามารถใช้วิธี Markov chain เพื่อคำนวณหาค่าของ ATS_δ โดยระบุให้ข้อมูลที่นำมาพิจารณาใน 3 states คือ 1 2 และ 3 ปลอดภัยในพื้นที่ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{โซนที่ 1} &= [-w, w] \\ \text{โซนที่ 2} &= (LCL, -w) \cup (w, UCL) \\ \text{โซนที่ 3} &= (-\infty, LCL] \cup [UCL, \infty) \end{aligned}$$

state ที่ 3 เป็น absorbing state ดังนั้นถ้ากระบวนการอยู่ใน state นี้จะอยู่นอกสถานะควบคุมและหยุดอยู่ที่นี้ สามารถเขียน transition probability matrix ได้ดังนี้

$$P_\delta = \begin{bmatrix} p_{11}^\delta & p_{12}^\delta & p_{13}^\delta \\ p_{21}^\delta & p_{22}^\delta & p_{23}^\delta \\ p_{31}^\delta & p_{32}^\delta & p_{33}^\delta \end{bmatrix}$$

เมื่อ p_{jk}^δ เป็น transition probability ซึ่ง j เป็น โซนที่ตัวที่ m-1 อยู่มาก่อนและ k เป็นโซนที่อยู่ปัจจุบัน เมื่อค่าเฉลี่ยของกระบวนการได้เลื่อนไป $\delta\sigma$

ให้ Q เป็น probability transition matrix ซึ่งตัดสถานะที่เป็น absorbing state ออกดังนั้น จะได้

$$Q_\delta = \begin{bmatrix} p_{11}^\delta & p_{12}^\delta \\ p_{21}^\delta & p_{22}^\delta \end{bmatrix}$$

ค่าของ transition probability ใน matrix Q_δ สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} p_{11}^\delta &= \Pr [-w < S_{m-1}^* < w \mid n_1; \delta] \\ &= \Phi(w - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{12}^\delta &= \Pr [w < S_{m-1}^* < UCL \mid n_1; \delta] + \Pr [LCL < S_{m-1}^* < -w \mid n_1; \delta] \\ &= \Phi(UCL - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n_1}) + \Phi(-w - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(LCL - \delta\sqrt{n_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{21}^{\delta} &= \Pr [-w < S_{m-1}^* < w \mid n_2; \delta] \\ &= \Phi(w - \delta \sqrt{n_2}) - \Phi(-w - \delta \sqrt{n_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{22}^{\delta} &= \Pr [w < S_{m-1}^* < UCL \mid n_2; \delta] + \Pr [LCL < S_{m-1}^* < -w \mid n_2; \delta] \\ &= \Phi(UCL - \delta \sqrt{n_2}) - \Phi(w - \delta \sqrt{n_2}) + \Phi(-w - \delta \sqrt{n_2}) - \Phi(LCL - \delta \sqrt{n_2}) \end{aligned}$$

Brook และ Evans (1972) ใช้คุณสมบัติของมาร์คอฟในการหาค่า ARL ของแผนภูมิการควบคุม ซึ่งสามารถพิจารณาในทำนองเดียวกันได้คือ

$$ARL_{\delta} = b'(I - Q_{\delta})^{-1} \mathbf{1} \quad (16)$$

เมื่อ $b' = (b_1, b_2)$ เป็นเวกเตอร์ของ starting probability ซึ่ง $b_1 + b_2 = 1$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Identity matrix ขนาด } 2 \times 2$$

$$\mathbf{1} = \text{เวกเตอร์ขนาด } 2 \times 1 \text{ หน่วย}$$

แผนภูมิที่พิจารณาอยู่นี้จะพิจารณาช่วงเวลาในการชักตัวอย่างออกเป็น 2 ค่า พบว่า ค่าของ $b'(I - Q_{\delta})^{-1}$ แสดงถึงจำนวนเฉลี่ยของการเปลี่ยนสถานะก่อนที่แผนภูมิจะเกิด signal ดังนั้นค่าเฉลี่ยจำนวนของกลุ่มย่อย (The average number of subgroups) และช่วงของการชักตัวอย่างที่สอดคล้องกันจะกำหนดค่าของ ATS นั่นคือ

$$ATS_{\delta} = b'(I - Q_{\delta})^{-1} t \quad (17)$$

เมื่อ $t = (t_2, t_1)$ เป็นเวกเตอร์ของช่วงเวลาในการชักตัวอย่าง (sampling interval)

ค่าของ b_1 และ b_2 ที่เหมาะสมจะเป็นสัดส่วนของการใช้ค่า (n_1, t_2) ในโซนที่ 1 และ (n_2, t_1) ในโซนที่ 2 เมื่อกระบวนการดำเนินไปตามค่าเป้าหมายดังนั้นก็จะได้ว่า

$$b_1 = \frac{P_{11}^0}{P_{11}^0 + P_{12}^0} \quad (18)$$

และ

$$b_2 = \frac{P_{22}^0}{P_{21}^0 + P_{22}^0} \quad (19)$$

นั่นคือการเริ่มกระบวนการที่ใช้ค่า (n_1, t_2) และ (n_2, t_1) สำหรับกลุ่มย่อยแรกจะใช้ค่า b_1 และ b_2 ตามลำดับ จากข้อจำกัดตามสมการที่ (6) และ (7) ที่จำกัดค่าเฉลี่ยของขนาดตัวอย่างให้เป็น n_0 และค่าเฉลี่ยของช่วงเวลาการชักตัวอย่างเป็น t_0 เมื่อกระบวนการอยู่ในค่าเป้าหมาย ดังนั้นสามารถคำนวณหาค่าของ b_1 และ b_2 ได้จาก

$$b_1 n_1 + b_2 n_2 = n_0 \quad (20)$$

หรือ

$$b_1 t_2 + b_2 t_1 = t_0 \quad (21)$$

ดังนั้นสามารถหาค่าตัวแปรทั้งหมดจากสมการที่ (17) ได้ดังนี้

$$ATS_\delta = b'(I-Q_\delta)^{-1} t$$

$$b' = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}^0}{p_{11}^0 + p_{12}^0} & \frac{p_{22}^0}{p_{21}^0 + p_{22}^0} \end{bmatrix}$$

$$(I - Q_\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11}^\delta & p_{12}^\delta \\ p_{21}^\delta & p_{22}^\delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - p_{11}^\delta & -p_{12}^\delta \\ -p_{21}^\delta & 1 - p_{22}^\delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (I - Q_\delta)^{-1} &= \frac{1}{|I - Q_\delta|} (I - Q)^\dagger \\ &= \frac{1}{[(1 - p_{11}^\delta)(1 - p_{22}^\delta) - (-p_{21}^\delta)(-p_{12}^\delta)]} \begin{bmatrix} (-1)^2(1 - p_{22}^\delta) & (-1)^3(-p_{12}^\delta) \\ (-1)^3(-p_{21}^\delta) & (-1)^4(1 - p_{11}^\delta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$t = \begin{bmatrix} t_2 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

การหาขนาดตัวอย่างสำหรับแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่เหมาะสม

จากที่กล่าวมาแล้วว่า Traditional Cusum Control Chart ได้รับการพัฒนามาจากแนวความคิดของการทดสอบสมมติฐาน (Hypothesis testing) สมมติฐานทั้งสองคือ null hypothesis และ alternative hypothesis มีดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{null hypothesis} & H_0 : \mu = \mu_0 \\ \text{alternative hypothesis} & H_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0) \end{array} \quad (22)$$

เมื่อ μ คือ mean ของ X การตัดสินใจที่จะยอมรับหรือปฏิเสธ null hypothesis ขึ้นอยู่กับการทดสอบค่าสถิติที่คำนวณจากข้อมูลตัวอย่างที่ได้จากการสุ่ม เมื่อข้อมูลมาจากการสุ่ม การตัดสินใจที่เกิดขึ้นอาจมีความผิดพลาดเกิดขึ้น ซึ่งความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนี้มีสองประเภทคือ type I errors (α) และ type II errors (β) ซึ่งแสดงได้ดังตารางที่ 4-3

ตารางที่ 4-3 แสดงประเภทของความผิดพลาด

	H_0 is True	H_0 is False
Accept H_0	No error	type II errors (β)
Reject H_0	type I errors (α)	No error

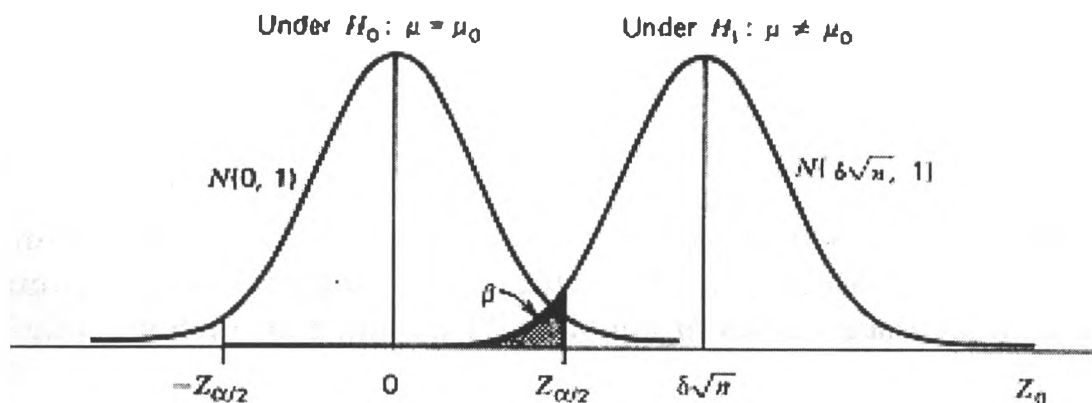
ซึ่งอธิบายได้ว่า ถ้าปฏิเสธ null hypothesis ทั้งๆที่เป็นจริงแล้ว จะเกิด type I errors (α) คือ ปฏิเสธของดี เพราะเข้าใจว่าเป็นของเสีย แต่ถ้ายอมรับ null hypothesis เมื่อเป็นเท็จ จะเกิด type II errors (β) คือ ยอมรับของเสียเพราะเข้าใจว่าเป็นของดี

โอกาสเกิดความผิดพลาดทั้งสองประเภทนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{ll} \alpha & = P(\text{type I errors}) = P(\text{reject } H_0 | H_0 \text{ is true}) \\ \beta & = P(\text{type II errors}) = P(\text{accept } H_0 | H_0 \text{ is false}) \end{array}$$

ค่าของ β มีความสัมพันธ์กับขนาดตัวอย่างคือ ถ้า β มีค่ามาก ขนาดตัวอย่างจะน้อย แต่ถ้า β มีค่าน้อย ขนาดตัวอย่างจะมาก รูปที่ 4-6 แสดงถึงการกระจายของข้อมูล Z_0 ที่เลื่อนจากค่าเป้าหมายไป ภายใต้สมมติฐาน H_0 และ H_1 สามารถเขียนการกระจายของค่าสถิติที่ทดสอบได้เป็น

$$Z_0 = N(\delta\sqrt{n}, 1), \quad \delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$$



รูปที่ 4-6 แสดงถึงการกระจายของ Z_0 ภายใต้สมมติฐาน H_0 และ H_1 เมื่อกระบวนการที่เลื่อนไปมีค่า mean = μ_1 และ $\delta = (\mu_1 - \mu_0)/\sigma$

Hines และ Montgomery (1990) ได้ระบุไว้ว่า ถ้า H_1 เป็นจริง จะเกิด type II error เมื่อ Z_0 อยู่ในช่วง $(-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2})$ ดังนั้นโอกาสเกิด type II error หรือ β คือโอกาสที่ Z_0 จะตกในช่วง $-Z_{\alpha/2}$ และ $Z_{\alpha/2}$ เมื่อ H_1 เป็นจริง (ส่วนที่แรเงาหรือพื้นที่ใต้กราฟ H_1 ในรูปที่ 4-6) สามารถเขียนได้เป็น

$$\beta = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}) \quad (23)$$

เมื่อ $\Phi(Z)$ คือ ฟังก์ชันการกระจายแบบปกติมาตรฐานสะสม (standard normal cumulative function) ของ Z

ถ้าค่าการเลื่อนของกระบวนการเป็นค่าบวก พบว่าค่าของ $\Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n})$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าของ β นั่นคือ $\Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}) \approx 0$ ดังนั้น สมการที่ (23) จะได้

$$\beta = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}) \quad (24)$$

$$\Phi^{-1}(\beta) = Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}$$

$$n = \left[\frac{(Z_{\alpha/2} - \Phi^{-1}(\beta))}{\delta} \right]^2 \quad (25)$$

เมื่อขนาดตัวอย่างคงที่ (n_0) สามารถหาค่าได้จากสมการที่ (25) โดยที่ค่าของ β เป็นค่าที่กำหนดได้

จากการพิจารณาในลักษณะเดียวกันสำหรับแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบน สุ่มที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ โอกาสที่จะเกิด type II error เมื่อ H_1 เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ Z_0 อยู่ในช่วง

$$\begin{aligned} (-Z_{\alpha/2}, -w) & \text{ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น } n_2 \text{ และ} \\ (-w, w) & \text{ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น } n_1 \text{ และ} \\ (w, Z_{\alpha/2}) & \text{ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น } n_2 \end{aligned}$$

ดังนั้นโอกาสเกิด type II error คือโอกาสที่ Z_0 จะตกในพื้นที่ดังกล่าว เมื่อ H_1 เป็นจริง (ส่วนที่แรเงาในรูปที่ 4-4) สามารถเขียนได้เป็น

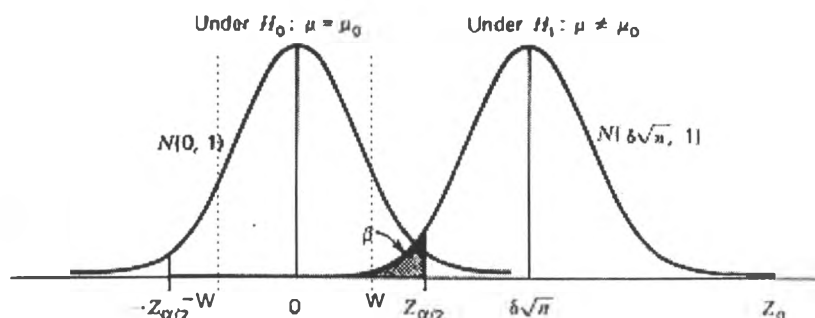
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad (26)$$

$$\text{เมื่อ } \beta_1 = \Phi(w - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_1}) \quad (27)$$

นั่นคือ β_1 เป็นโอกาสที่ค่าที่กำหนดจะตกอยู่ในช่วง $(-w, w)$ หรือพื้นที่ใต้กราฟ H_1 ในรูปที่ 4-7 ที่อยู่ในช่วง $(-w, w)$ และ

$$\beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n_2}) + \Phi(-w - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_2}) \quad (28)$$

นั่นคือ β_2 เป็นโอกาสที่ค่าที่กำหนดจะตกอยู่ในช่วง $(-Z_{\alpha/2}, -w)$ และ $(w, Z_{\alpha/2})$ หรือพื้นที่ใต้กราฟ H_1 ในรูปที่ 4-7 ที่อยู่ในช่วง $(-Z_{\alpha/2}, -w)$ และ $(w, Z_{\alpha/2})$



รูปที่ 4-7 แสดงถึงขอบเขตการควบคุม warning limit

จะเห็นว่า β คือผลรวมของพื้นที่ใต้กราฟ H_1 ทั้ง 3 ส่วนคือ พื้นที่ใต้กราฟในช่วง $(-Z_{\alpha/2}, -w)$ $(-w, w)$ และ $(w, Z_{\alpha/2})$

จากสมการที่ (20) สามารถเขียนความสัมพันธ์ของ n_1 และ n_2 ได้ว่า

$$n_2 = \frac{n_0 - b_1 n_1}{b_2} \quad (29)$$

ค่าของ n_0 สามารถหาได้จากสมการที่ (25) ค่าของ β เป็นค่าที่กำหนดได้ จากสมการที่ (29) แทนค่าในสมการที่ (28) ได้เป็น

$$\beta_2 = \phi\left(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{\frac{n_0 - b_1 n_1}{b_2}}\right) - \phi\left(w - \delta\sqrt{\frac{n_0 - b_1 n_1}{b_2}}\right) + \phi\left(-w - \delta\sqrt{\frac{n_0 - b_1 n_1}{b_2}}\right) - \phi\left(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{\frac{n_0 - b_1 n_1}{b_2}}\right) \quad (30)$$

ในการทดสอบว่าสมการที่ (26) (27) และ (28) เป็นจริง จะพิจารณาใน 3 กรณีคือ

1. กำหนดให้ค่า $n_0 = n_1 = n_2$ เมื่อแทนค่าใน 3 สมการจะได้ว่า

$$\beta_1 = \Phi(w - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_0})$$

$$\beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n_0}) + \Phi(-w - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0})$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0})$$

จะเห็นว่าค่าของ β จะมีค่าเท่ากับสมการดั้งเดิมคือสมการที่ (23) นั่นแสดงว่าสมการที่ (26) (27) และ (28) เป็นจริง

2. กำหนดให้ warning limit หรือ $\pm w$ มีค่าขยายไปเป็นค่าที่เท่ากับค่า control limit หรือ $\pm Z_{\alpha/2}$ และเนื่องจากความสัมพันธ์ของ n_0 n_1 และ n_2 เป็นไปตามสมการที่ (20) ซึ่งเกี่ยวข้องกับค่า b_1 และ b_2 ในสมการที่ (18) และ (19) ดังนั้นเมื่อแทนค่า w ด้วย $\pm Z_{\alpha/2}$ ดังกล่าวในสมการที่ (18) และ (19) จะได้ค่า $b_1 = 1$ และ $b_2 = 0$ เมื่อแทนค่าที่ได้ในสมการที่ (20) จะได้ว่า $(1)n_1 + (0)n_2 = n_0$ นั่นคือ $n_0 = n_1$ แทนค่าทั้งหมดคือแทน w ด้วย $\pm Z_{\alpha/2}$ และ $n_1 = n_0$ ในสมการที่ (26) (27) และ (28) จะได้

$$\beta_1 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0})$$

$$\beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_2}) + \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_2}) = 0$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0})$$

จะเห็นว่าค่าของ β จะมีค่าเท่ากับสมการดั้งเดิมคือสมการที่ (23) นั่นแสดงว่าสมการที่ (26) (27) และ (28) เป็นจริง

3. กำหนดให้ warning limit หรือ $\pm w$ มีค่าขยายไปเป็นค่าที่เท่ากับค่า center line หรือ 0 และ เช่นกัน เนื่องจากความสัมพันธ์ของ n_0 , n_1 และ n_2 เป็นไปตามสมการที่ (20) ซึ่งเกี่ยวข้องกับ ค่า b_1 และ b_2 ในสมการที่ (18) และ (19) ดังนั้นเมื่อแทนค่า w ด้วย 0 ดังกล่าวในสมการที่ (18) และ (19) จะได้ค่า $b_1 = 0$ และ $b_2 = 1$ เมื่อแทนค่าที่ได้ในสมการที่ (20) จะได้ว่า $(0)n_1 + (1)n_2 = n_0$ นั่นคือ $n_0 = n_2$ แทนค่าทั้งหมดคือแทน w ด้วย 0 และ $n_2 = n_0$ ในสมการที่ (26) (27) และ (28) จะได้

$$\beta_1 = \Phi(0 - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(0 - \delta\sqrt{n_1}) = 0$$

$$\beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(0 - \delta\sqrt{n_0}) + \Phi(0 - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0})$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = \Phi(Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0}) - \Phi(-Z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n_0})$$

จะเห็นว่าค่าของ β จะมีค่าเท่ากับสมการดั้งเดิมคือสมการที่ (23) นั่นแสดงว่าสมการที่ (26) (27) และ (28) เป็นจริง

จากการทดสอบทั้ง 3 กรณีพบว่าสมการที่ (26) (27) และ (28) เป็นจริง ดังนั้นสามารถนำสมการนี้ไปใช้งานได้ โดยในการหาขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมนั้น เมื่อกำหนดค่า w และแทนค่าในสมการที่ (13) จะได้ความสัมพันธ์ของ n_1 และ n_2 และสามารถหาค่าของ b_1 , b_2 ได้จากสมการที่ (18) และ (19) แทนค่าที่ได้ทั้งหมดในสมการที่ (26), (27) และ (30) และใช้คอมพิวเตอร์คำนวณหาค่า n_1 และ n_2 ได้ดังตัวอย่างในตารางที่ 4-3 ก ค่าของ $\delta = 0.5$ และ $\beta = 0.01$ พบว่าค่าของ n_1 และ n_2 ที่เป็นไปได้มีหลายค่า ดังนั้นจึงกำหนดข้อจำกัดว่า n_1 จะเป็นค่าขนาดตัวอย่างที่น้อย

ที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และ n_2 จะมีความสัมพันธ์กับ n_0 และ n_1 คือ $n_1 < n_0 < n_2$ ข้อมูลนอกเหนือจากนี้สามารถพบได้ในภาคผนวก

ตารางที่ 4-3 ก แสดงค่า n_1 และ n_2 เมื่อ $\delta = 0.5$ และ $\beta = 0.01$

w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2
0.5	0.383962	0.616038	113	32	164
1	0.684538	0.315462	113	44	264
1.5	0.868731	0.131269	113	59	477
2	0.957084	0.042916	113	75	975
2.5	0.990254	0.009746	113	93	2174

จากข้อมูลในตารางที่ 4-3 ก เมื่อ $w=0.5$ ทดลองแทนค่าในสมการที่ (27) และ (28) จะได้

$$\beta_1 = \Phi(0.5 - 0.5\sqrt{32}) - \Phi(-0.5 - 0.5\sqrt{32}) = 0.009675$$

$$\beta_2 = \Phi(3 - 0.5\sqrt{164}) - \Phi(0.5 - \delta\sqrt{164}) + \Phi(-0.5 - \delta\sqrt{164}) - \Phi(-3 - 0.5\sqrt{164}) = 0.000325$$

$$\beta = 0.009675 + 0.000325 = 0.01$$

และจากสมการที่ (23) เมื่อ n มีค่าคงที่เท่ากับ n_0 สามารถแทนค่าในสมการดังกล่าวได้คือ

$$\beta = \Phi(3 - 0.5\sqrt{113}) - \Phi(-3 - 0.5\sqrt{113}) = 0.01$$

จะเห็นได้ว่า ค่า β ที่ได้จากทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากันและเช่นเดียวกันกับค่าอื่นๆสามารถหาค่าการทดสอบข้อมูลในตารางที่ 4-3 ก กับสมการที่ (27) และ (28) เพื่อตรวจสอบว่า ค่า β ที่ได้จากสมการทั้งสองมีค่าตรงกับค่า β ทางทฤษฎีที่กำหนดมาจากสมการที่ (23) ซึ่งกำหนดโดย Hines และ Montgomery (1990) พบว่าได้ค่าจากการทดสอบดังตารางที่ 4-3 ข

ตารางที่ 4-3 ข แสดงค่าการทดสอบข้อมูลจากตารางที่ 4-3 ก เพื่อหาค่า β

w	n_0	n_1	n_2	$\beta = \beta_1 + \beta_2$	β_1	β_2
0.5	113	32	164	0.01	0.00967525591745144	0.00032474084229250
1	113	44	264	0.01	0.00999985414052007	0.00000015347466609
1.5	113	59	477	0.01	0.00999998083337406	0.000000000000000122
2	113	75	975	0.01	0.00999997889426107	0.000000000000000000
2.5	113	93	2177	0.01	0.00999992336204436	0.000000000000000000

จากตารางที่ 4-3 ข พบว่า ค่า $\beta = \beta_1 + \beta_2$ จะได้ค่าเท่ากับ 0.1 ซึ่งตรงกับค่า β จากสมการที่ (23)

การหาช่วงเวลาในการชักตัวอย่างสำหรับแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสม

จากสมการที่ (23) พบว่าความสัมพันธ์ของ t_0 , t_1 และ t_2 สามารถแสดงได้เป็น

$$t_2 = \frac{t_0 - b_2 t_1}{b_1} \quad (31)$$

เช่นเดียวกับการหาค่าขนาดตัวอย่าง เมื่อกำหนดค่า w แล้วจะสามารถหาความสัมพันธ์ของ t_1 และ t_2 ได้จากสมการที่ (11) จากการหาขนาดตัวอย่างที่เหมาะสมจะได้ค่าของ b_1 , b_2 จากสมการที่ (20) และ (21) ตามค่า w ที่กำหนด และถ้ากำหนดให้ค่า t_0 เป็น 1 ช่วงเวลาที่ต้องการชักตัวอย่าง อาจเป็น 1 ชั่วโมง หรือ 1 วันตามแต่กระบวนการที่พิจารณาแล้วแทนค่าในสมการที่ (31) จะได้ว่า

$$t_2 = \frac{1 - b_2 t_1}{b_1} \quad (32)$$

จากสมการที่ (11) และ (32) สามารถหาความสัมพันธ์ของ t_1 และ t_2 ได้ และเช่นเดียวกับค่าขนาดตัวอย่างคือค่าช่วงเวลาที่เป็นไปได้สำหรับ t_1 และ t_2 มีหลายชุดดังนั้น จะแสดงการหาค่าของ t_1 และ t_2 เป็นตัวอย่างในที่นี้ เมื่อ $t_1 = 0.01$ ช่วงเวลาที่ต้องการชักตัวอย่าง จะสามารถหาค่าของ t_2 ได้ดังตารางที่ 4 ข้อมูลที่เป็นไปได้นอกเหนือจากนี้สามารถพบได้ในภาคผนวก ในการนำค่าช่วงเวลาที่เหมาะสม เช่นตามตารางที่ 4 ไปใช้งาน ให้คูณค่าตัวเลขของช่วงเวลาในตารางกับค่าช่วงเวลาในการชักตัวอย่างต่อครั้งที่เหมาะสม เช่น ถ้าค่าช่วงเวลาในการชักตัวอย่างต่อครั้งที่เหมาะสมสำหรับกระบวนการเป็น 50 นาที แสดงว่าค่า t_1 ที่เหมาะสมเป็น 50×0.01 นาที = 30 วินาที เป็นต้น

ตารางที่ 4-4 แสดงค่า n_0 , n_1 , n_2 และ t_0 , t_1 และ t_2 เมื่อ $\delta = 0.5$ และ $\beta = 0.01$

w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2
0.5	0.383962	0.616038	113	32	164	1	0.01	2.59
1	0.684538	0.315462	113	44	264	1	0.01	1.46
1.5	0.868731	0.131269	113	59	477	1	0.01	1.15
2	0.957084	0.042916	113	75	975	1	0.01	1.04
2.5	0.990254	0.009746	113	93	2177	1	0.01	1.01

การสร้างแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่

จากรายละเอียดที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ สามารถสร้างแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่ได้ดังนี้

1. กำหนดค่าของ β และ w รวมถึงค่าการเลื่อนของกระบวนการ (δ) ว่าต้องการให้แผนภูมินี้สามารถหาค่าการเลื่อนของกระบวนการได้ที่เท่าใด กำหนดค่าที่เหมาะสมสำหรับกระบวนการที่พิจารณา โดยปกติมักจะใช้ค่า w เป็น 2 ส่วนค่าของ β ต้องขึ้นกับความเหมาะสมของกระบวนการ ถ้า β น้อยแสดงว่ายอมให้มีความผิดพลาดต่ำดังนั้นค่าขนาดตัวอย่างจะมาก แต่ถ้า β มากแสดงว่ายอมให้มีความผิดพลาดมากดังนั้นค่าขนาดตัวอย่างจะน้อย ทั้งนี้ต้องพิจารณาในภาพรวมของกระบวนการเช่นความสามารถในการตรวจวัดหรือประสิทธิภาพของเครื่องมือวัด และพนักงานด้วย

เช่นกำหนดให้ $\beta = 0.10$ $w = 2$ และค่าการเลื่อนของกระบวนการ (δ) = 1.5

2. เปิดตารางในภาคผนวก ก เพื่อหาค่าของ n_1 , n_2

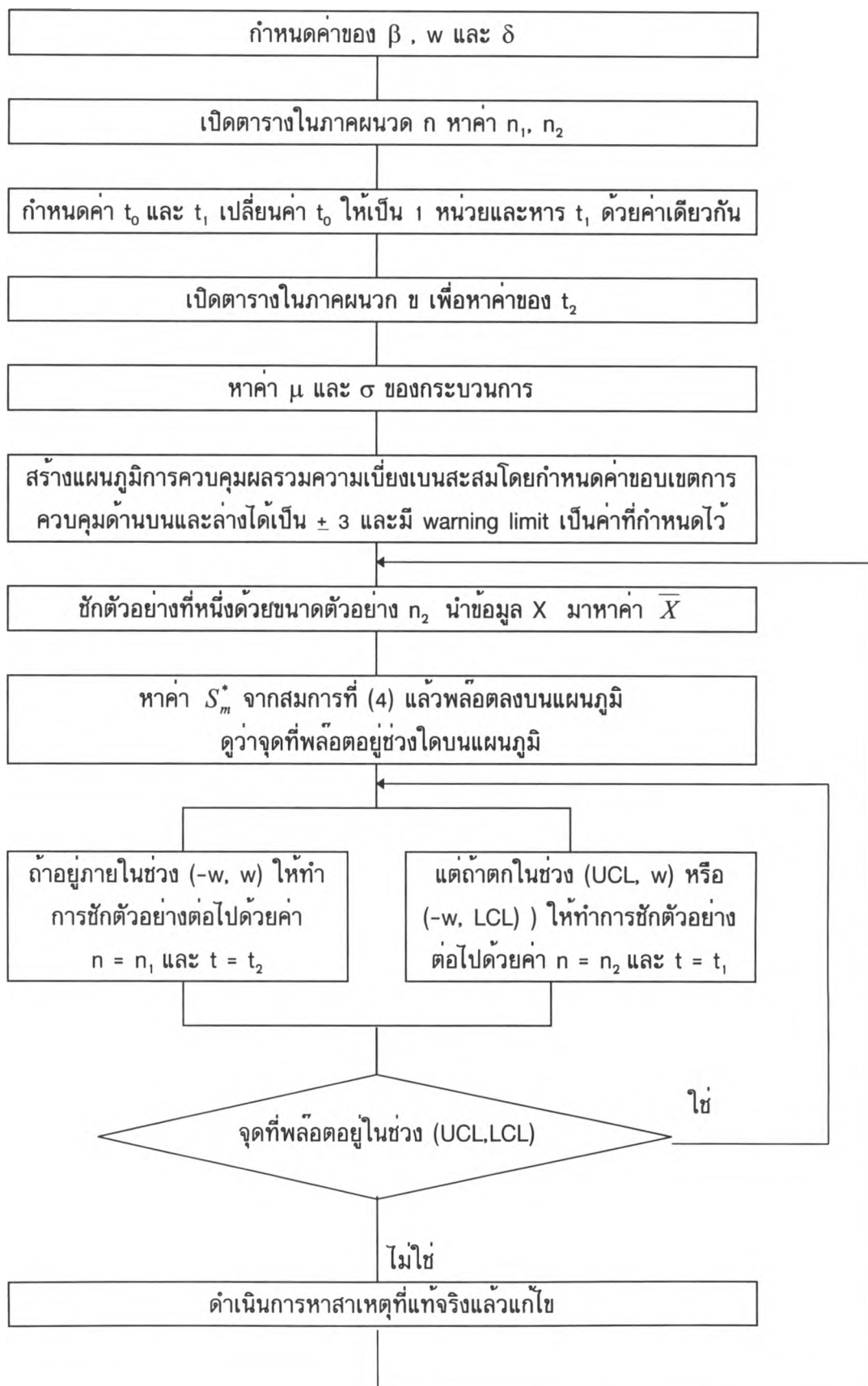
จากตัวอย่างข้อ 1 จะได้ $n_1 = 5$ และ $n_2 = 84$

3. พิจารณาค่าเวลาที่ใช้ในการชักตัวอย่างที่เป็นไปได้ของกระบวนการโดยเฉลี่ย (t_0) และเวลาที่เร็วที่สุดเท่าที่จะทำได้ที่สามารถใช้ในการชักตัวอย่าง (t_1) เปลี่ยนค่า t_0 ให้เป็น 1 หน่วยและหาร t_0 ด้วยค่าเดียวกันเพื่อหาค่า t_2 ในภาคผนวกได้

เช่น ถ้าค่าเวลาที่ใช้ในการชักตัวอย่างที่เป็นไปได้ของกระบวนการโดยเฉลี่ยเป็น 50 วินาที และเวลาที่เร็วที่สุดเท่าที่จะทำได้ที่สามารถใช้ในการชักตัวอย่างเป็น 30 วินาที ดังนั้นจะได้ว่า $t_0 = 50/50 = 1$ และ $t_1 = 30/50 = 0.6$

4. เปิดตารางในภาคผนวก ข เพื่อหาค่าของ t_2 และแปลงค่าที่ได้ให้อยู่ในหน่วยเดิม จากตัวอย่างข้อ 3 กำหนดค่า $w = 2$ $t_0 = 50/50 = 1$ และ $t_1 = 30/50 = 0.6$ จะได้ $t_2 = 1.02$ ดังนั้น ค่า t_2 ที่จะนำไปใช้จริงคือ $1.02 \times 50 = 51$ วินาที
5. หาค่า μ และ σ ของกระบวนการซึ่งมักจะได้จากข้อมูลในอดีต
6. สร้างแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่โดยกำหนดค่าขอบเขตการควบคุมด้านบนและล่างได้เป็น ± 3 และมี warning limit เป็นค่า w ที่กำหนดไว้
7. ชักตัวอย่างที่หนึ่งด้วยขนาดตัวอย่าง n_2 เนื่องจากการใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่มากพอ เพื่อทราบสถานะของกระบวนการก่อน เมื่อได้ข้อมูล X ให้หาค่า \bar{X}
8. คำนวณหาค่า S_m^* ของข้อมูลที่ 1 จากสมการที่ (4) แล้วพล็อตลงบนแผนภูมิดูว่าจุดที่พล็อตอยู่ช่วงใดบนแผนภูมิ ถ้าอยู่ภายใน warning limit หรือช่วง $(-w, w)$ ให้ทำการชักตัวอย่างที่สองด้วยขนาดตัวอย่างด้วยค่า $n = n_1$ และ $t = t_2$ แต่ถ้าตกในช่วง (UCL, w) หรือ $(-w, LCL)$ ให้ทำการชักตัวอย่างต่อไปด้วยค่า $n = n_2$ และ $t = t_1$
9. ดำเนินการชักตัวอย่างตามหลักเกณฑ์ในข้อ 8 ต่อไปจุดที่พล็อตอยู่นอกเขตการควบคุม หรือช่วงของ (∞, UCL) หรือ $(LCL, -\infty)$ แสดงว่าอยู่ในสถานะออกนอกการควบคุม ถ้าพบเหตุการณ์เช่นนี้แสดงว่ากระบวนการอยู่นอกการควบคุม ให้ดำเนินการหาสาเหตุที่แท้จริงแล้วแก้ไข ก่อนเริ่มกระบวนการตามข้อ 7-9 ต่อไปหลังจากดำเนินการแก้ไขแล้ว
10. นอกจากสัญญาณที่บอกจากจุดที่อยู่นอกเหนือขอบเขตการควบคุมที่กล่าวมาแล้ว ยังต้องพิจารณา trend ของจุดบนแผนภูมิเหมือนกับแผนภูมิประเภทอื่นด้วยเช่นกัน ถ้าจุดบนแผนภูมิมีลักษณะที่เป็นแบบ nonrandom pattern หรือเป็น systematic ตามที่กล่าวในบทที่ 1 ก็แสดงว่ากระบวนการนั้นออกนอกการควบคุมแล้วเช่นกัน

จากรายละเอียดที่กล่าวมาสามารถเขียนแผนภาพแสดงขั้นตอนได้ดังนี้



การเปรียบเทียบแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่กับแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าในการเปรียบเทียบแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างไม่คงที่ และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่ กับแผนภูมิการควบคุมผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่คงที่สำหรับการศึกษาในครั้งนี้ จะใช้ค่า ATS (The average time to signal) ซึ่งแสดงเวลาเฉลี่ยในการควบคุมเพื่อป้องกันสภาวะที่กระบวนการออกนอกเป้าหมายจาก μ_0 ไปเป็น $\mu_0 + \delta\sigma$ เนื่องจาก assignable cause ถ้ากระบวนการนั้นอยู่ใกล้เป้าหมาย ค่าของ ATS ที่ได้จะมีค่ามากแสดงว่าต้องใช้เวลามากกว่ากระบวนการจะเกิดการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย ในทางตรงกันข้าม ถ้ากระบวนการมีแนวโน้มออกนอกเป้าหมาย ค่า ATS ที่ได้จะมีค่าน้อยแสดงว่าใช้เวลาเพียงไม่นานก็พบสภาวะที่กระบวนการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย อย่างไรก็ตามค่า ATS ที่น้อยจะจำเป็นเมื่อค่าของ process mean เลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย จะต้องหาสภาวะออกนอกการควบคุมได้เร็วที่สุดเพื่อทำการตรวจสอบและแก้ไขเพื่อจะไม่ให้เกิดการสูญเสียในสภาวะที่กระบวนการออกนอกการควบคุม

จากการคำนวณค่าต่างตามที่แสดงในข้างต้นสามารถหาค่า ATS ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4-5 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=1$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 0$

									ATS _δ
$n_0 = 3t_0 = 1$									370.38
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
0	1	4	0.01	2.98	0.4295	0.33	0.67	370.38	
0	1	5	0.01	1.99	0.6724	0.5	0.5	370.38	
0	1	8	0.01	1.396	1.0633	0.71	0.29	370.38	
0	1	10	0.01	1.283	1.2151	0.78	0.22	370.38	
0	1	12	0.01	1.22	1.3285	0.82	0.18	370.38	
0	1	15	0.01	1.165	1.4568	0.86	0.14	370.38	
0	1	20	0.01	1.116	1.6087	0.89	0.11	370.38	
0	1	25	0.01	1.09	1.7179	0.92	0.08	370.38	

ตารางที่ 4-6 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=1$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 0.5$

									ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$									60.89
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
0.5	1	4	0.01	2.98	0.4295	0.33	0.67	37.31	
0.5	1	5	0.01	1.99	0.6724	0.5	0.5	33.40	
0.5	1	8	0.01	1.396	1.0633	0.71	0.29	25.56	
0.5	1	10	0.01	1.283	1.2151	0.78	0.22	22.17	
0.5	1	12	0.01	1.22	1.3285	0.82	0.18	19.68	
0.5	1	15	0.01	1.165	1.4568	0.86	0.14	17.10	
0.5	1	20	0.01	1.116	1.6087	0.89	0.11	14.70	
0.5	1	25	0.01	1.09	1.7179	0.92	0.08	13.67	

ตารางที่ 4-7 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=1$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 1.0$

									ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$									9.76
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
1	1	4	0.01	2.98	0.4295	0.33	0.67	2.49	
1	1	5	0.01	1.99	0.6724	0.5	0.5	2.25	
1	1	8	0.01	1.396	1.0633	0.71	0.29	2.28	
1	1	10	0.01	1.283	1.2151	0.78	0.22	2.48	
1	1	12	0.01	1.22	1.3285	0.82	0.18	2.71	
1	1	15	0.01	1.165	1.4568	0.86	0.14	3.06	
1	1	20	0.01	1.116	1.6087	0.89	0.11	3.64	
1	1	25	0.01	1.09	1.7179	0.92	0.08	4.18	

ตารางที่ 4-8 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=1$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 1.5$

								ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$								2.91
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2	
1.5	1	4	0.01	2.98	0.4295	0.33	0.67	1.17
1.5	1	5	0.01	1.99	0.6724	0.5	0.5	1.26
1.5	1	8	0.01	1.396	1.0633	0.71	0.29	1.49
1.5	1	10	0.01	1.283	1.2151	0.78	0.22	1.63
1.5	1	12	0.01	1.22	1.3285	0.82	0.18	1.76
1.5	1	15	0.01	1.165	1.4568	0.86	0.14	1.93
1.5	1	20	0.01	1.116	1.6087	0.89	0.11	2.19
1.5	1	25	0.01	1.09	1.7179	0.92	0.08	2.42

ตารางที่ 4-9 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=1$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 2$

								ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$								1.47
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2	
2	1	4	0.01	2.98	0.4295	0.33	0.67	1.06
2	1	5	0.01	1.99	0.6724	0.5	0.5	1.10
2	1	8	0.01	1.396	1.0633	0.71	0.29	1.21
2	1	10	0.01	1.283	1.2151	0.78	0.22	1.28
2	1	12	0.01	1.22	1.3285	0.82	0.18	1.34
2	1	15	0.01	1.165	1.4568	0.86	0.14	1.42
2	1	20	0.01	1.116	1.6087	0.89	0.11	1.54
2	1	25	0.01	1.09	1.7179	0.92	0.08	1.64

ตารางที่ 4-10 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=2$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 0$

									ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$									370.38
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
0	2	4	0.01	1.99	0.672	0.5	0.5	370.38	
0	2	5	0.01	1.495	0.964	0.667	0.333	370.38	
0	2	8	0.01	1.198	1.376	0.833	0.167	370.38	
0	2	10	0.01	1.141	1.525	0.875	0.125	370.38	
0	2	12	0.01	1.11	1.633	0.9	0.1	370.38	
0	2	15	0.01	1.083	1.754	0.923	0.077	370.38	
0	2	20	0.01	1.058	1.895	0.944	0.056	370.38	
0	2	25	0.01	1.045	1.995	0.957	0.043	370.38	

ตารางที่ 4-11 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=2$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 0.5$

									ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$									60.89
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
0.5	2	4	0.01	1.99	0.672	0.5	0.5	39.20	
0.5	2	5	0.01	1.495	0.964	0.667	0.333	36.81	
0.5	2	8	0.01	1.198	1.376	0.833	0.167	30.93	
0.5	2	10	0.01	1.141	1.525	0.875	0.125	27.87	
0.5	2	12	0.01	1.11	1.633	0.9	0.1	25.40	
0.5	2	15	0.01	1.083	1.754	0.923	0.077	22.58	
0.5	2	20	0.01	1.058	1.895	0.944	0.056	19.59	
0.5	2	25	0.01	1.045	1.995	0.957	0.043	18.01	

ตารางที่ 4-12 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=2$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 1.0$

									ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$									9.76
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
1	2	4	0.01	1.99	0.672	0.5	0.5	2.62	
1	2	5	0.01	1.495	0.964	0.667	0.333	2.41	
1	2	8	0.01	1.198	1.376	0.833	0.167	2.30	
1	2	10	0.01	1.141	1.525	0.875	0.125	2.40	
1	2	12	0.01	1.11	1.633	0.9	0.1	2.54	
1	2	15	0.01	1.083	1.754	0.923	0.077	2.78	
1	2	20	0.01	1.058	1.895	0.944	0.056	3.19	
1	2	25	0.01	1.045	1.995	0.957	0.043	3.57	

ตารางที่ 4-13 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=2$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 1.5$

									ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$									2.91
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2		
1.5	2	4	0.01	1.99	0.672	0.5	0.5	1.13	
1.5	2	5	0.01	1.495	0.964	0.667	0.333	1.17	
1.5	2	8	0.01	1.198	1.376	0.833	0.167	1.30	
1.5	2	10	0.01	1.141	1.525	0.875	0.125	1.39	
1.5	2	12	0.01	1.11	1.633	0.9	0.1	1.46	
1.5	2	15	0.01	1.083	1.754	0.923	0.077	1.56	
1.5	2	20	0.01	1.058	1.895	0.944	0.056	1.70	
1.5	2	25	0.01	1.045	1.995	0.957	0.043	1.82	

ตารางที่ 4-14 แสดงค่า ATS เมื่อ $n_1=2$, $t_1=0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ ขณะ $\delta = 2.0$

								ATS _{δ}
$n_0 = 3t_0 = 1$								1.47
δ	n_1	n_2	t_1	t_2	w	b_1	b_2	
2	2	4	0.01	1.99	0.672	0.5	0.5	1.02
2	2	5	0.01	1.495	0.964	0.667	0.333	1.04
2	2	8	0.01	1.198	1.376	0.833	0.167	1.08
2	2	10	0.01	1.141	1.525	0.875	0.125	1.11
2	2	12	0.01	1.11	1.633	0.9	0.1	1.14
2	2	15	0.01	1.083	1.754	0.923	0.077	1.17
2	2	20	0.01	1.058	1.895	0.944	0.056	1.22
2	2	25	0.01	1.045	1.995	0.957	0.043	1.26

ตารางที่ 4-5 ถึง 4-14 แสดงค่า ATS เมื่อค่า $n_0 = 3, t_0 = 1, n_1 = 2, t_1 = 0.01$ และ n_2, t_2 มีค่าต่างๆ เมื่อกระบวนการได้เลื่อนไป $\delta = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ พบว่า การเปลี่ยนแปลงขนาดตัวอย่าง n และช่วงเวลาในการชักตัวอย่าง จะทำให้สามารถพบว่ากระบวนการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมายได้เร็วกว่าเมื่อขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างมีค่าคงที่ โดยพิจารณาได้จากค่าของ ATS จะมีค่าน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่

การเปรียบเทียบแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่กับแผนภูมิชีวิตที่มีขนาดตัวอย่างคงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่

จากบทความของ Runger และ Pignatiello (1991) ซึ่งนำเสนอแผนภูมิการควบคุมชีวิตที่มีช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ แต่ขนาดตัวอย่างที่ใช้มีค่าคงที่ ดังนั้นจะทำการเปรียบเทียบแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่กับแผนภูมิชีวิตที่มีขนาดตัวอย่างคงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ ซึ่งแนวความคิดในการสร้างแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่เป็นการสร้างแผนภูมิที่มีค่าขอบเขตการควบคุมเป็น 3 sigma และค่าที่นำมากำหนดบนแผนภูมิเป็นค่ามาตรฐาน Z ดังนั้นแผนภูมิทั้งสองจะมีลักษณะเดียวกัน ซึ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้

สำหรับการเปรียบเทียบในครั้งนี จะใช้ค่า ATS (The average time to signal) ซึ่งแสดงเวลาเฉลี่ยในการควบคุมเพื่อป้องกันสภาวะที่กระบวนการออกนอกเป้าหมายจาก μ_0 ไปเป็น $\mu_0 + \delta\sigma$ เนื่องจาก assignable cause และเช่นเดียวกัน ถ้ากระบวนการนั้นอยู่ใกล้เป้าหมาย ค่าของ ATS ที่ได้จะมีค่ามากแสดงว่าต้องใช้เวลาานกว่ากระบวนการจะเกิดการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย ในทางตรงกันข้าม ถ้ากระบวนการมีแนวโน้มออกนอกเป้าหมาย ค่า ATS ที่ได้จะมีค่าน้อยแสดงว่าใช้เวลาเพียงไม่นานก็พบสภาวะที่กระบวนการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย อย่างไรก็ตามค่า ATS ที่น้อยจะจำเป็นเมื่อค่าของ process mean เลื่อนไปจากค่าเป้าหมาย จะต้องหาสภาวะออกนอกการควบคุมได้เร็วที่สุดเพื่อทำการตรวจสอบและแก้ไขเพื่อจะไม่ให้เกิดการสูญเสียในสภาวะที่กระบวนการออกนอกการควบคุม

จากการคำนวณค่าต่างตามที่แสดงในลักษณะเดียวกับการเปรียบเทียบก่อนหน้านี้ สามารถหาค่า ATS เมื่อค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ได้ดังตารางที่ 4-15 และค่า ATS เมื่อค่าขนาดตัวอย่างคงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ได้ดังตารางที่ 4-16

ตารางที่ 4-15 แสดงค่า ATS เมื่อค่า n และ t มีค่าไม่คงที่

UCL	LCL	δ	w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2	ATS $_{\delta}$ $n=n_0$	ATS $_{\delta}$ $t=t_1, t_2$ $t=t_0$ $n_0=n_1, n_2$
3	-3	0.50	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	0.01	1.99	60.893	39.2
3	-3	0.50	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	0.01	1.49	60.893	36.81
3	-3	0.50	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	0.01	1.20	60.893	30.92
3	-3	0.50	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	0.01	1.14	60.893	27.86
3	-3	0.50	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	0.01	1.11	60.893	25.4
3	-3	0.50	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	0.01	1.08	60.893	22.58
3	-3	0.50	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	0.01	1.06	60.893	19.59
3	-3	0.50	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	0.01	1.04	60.893	18.01

ตารางที่ 4-15 (ต่อ)

UCL	LCL	δ	w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2	ATS $_{\delta}$ $n=n_0$ $t=t_0$	ATS $_{\delta}$ $t=t_1, t_2$ $n_0=n_1, n_2$
3	-3	1.00	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	0.01	1.99	9.765	2.622
3	-3	1.00	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	0.01	1.49	9.765	2.407
3	-3	1.00	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	0.01	1.20	9.765	2.298
3	-3	1.00	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	0.01	1.14	9.765	2.396
3	-3	1.00	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	0.01	1.11	9.765	2.538
3	-3	1.00	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	0.01	1.08	9.765	2.781
3	-3	1.00	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	0.01	1.06	9.765	3.189
3	-3	1.00	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	0.01	1.04	9.765	3.569
3	-3	1.50	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	0.01	1.99	2.908	1.127
3	-3	1.50	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	0.01	1.49	2.908	1.168
3	-3	1.50	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	0.01	1.20	2.908	1.305
3	-3	1.50	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	0.01	1.14	2.908	1.387
3	-3	1.50	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	0.01	1.11	2.908	1.461
3	-3	1.50	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	0.01	1.08	2.908	1.56
3	-3	1.50	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	0.01	1.06	2.908	1.702
3	-3	1.50	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	0.01	1.04	2.908	1.823
3	-3	2.00	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	0.01	1.99	1.473	1.021
3	-3	2.00	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	0.01	1.49	1.473	1.036
3	-3	2.00	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	0.01	1.20	1.473	1.083
3	-3	2.00	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	0.01	1.14	1.473	1.111
3	-3	2.00	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	0.01	1.11	1.473	1.136
3	-3	2.00	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	0.01	1.08	1.473	1.169
3	-3	2.00	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	0.01	1.06	1.473	1.217
3	-3	2.00	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	0.01	1.04	1.473	1.258

ตารางที่ 4-16 แสดงค่า ATS n คงที่และค่า t มีค่าไม่คงที่

UCL	LCL	δ	w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2	ATS $_{\delta}$ n= n_0 t= t_0	ATS $_{\delta}$ t= t_1, t_2 n $_0=n_1=n_2$
3	-3	0.50	0.672	0.4998	0.5002	3.0	3	3	1.00	0.01	1.99	60.893	45
3	-3	0.50	0.964	0.6668	0.3332	3.0	3	3	1.00	0.01	1.49	60.893	47.14
3	-3	0.50	1.376	0.8334	0.1666	3.0	3	3	1.00	0.01	1.20	60.893	50.8
3	-3	0.50	1.525	0.8751	0.1249	3.0	3	3	1.00	0.01	1.14	60.893	52.17
3	-3	0.50	1.633	0.9000	0.1000	3.0	3	3	1.00	0.01	1.11	60.893	53.15
3	-3	0.50	1.754	0.9231	0.0769	3.0	3	3	1.00	0.01	1.08	60.893	54.21
3	-3	0.50	1.895	0.9445	0.0555	3.0	3	3	1.00	0.01	1.06	60.893	55.37
3	-3	0.50	1.995	0.9565	0.0435	3.0	3	3	1.00	0.01	1.04	60.893	56.14
3	-3	1.00	0.672	0.4998	0.5002	3.0	3	3	1.00	0.01	1.99	9.765	3.727
3	-3	1.00	0.964	0.6668	0.3332	3.0	3	3	1.00	0.01	1.49	9.765	4.244
3	-3	1.00	1.376	0.8334	0.1666	3.0	3	3	1.00	0.01	1.20	9.765	5.263
3	-3	1.00	1.525	0.8751	0.1249	3.0	3	3	1.00	0.01	1.14	9.765	5.699
3	-3	1.00	1.633	0.9000	0.1000	3.0	3	3	1.00	0.01	1.11	9.765	6.031
3	-3	1.00	1.754	0.9231	0.0769	3.0	3	3	1.00	0.01	1.08	9.765	6.413
3	-3	1.00	1.895	0.9445	0.0555	3.0	3	3	1.00	0.01	1.06	9.765	6.866
3	-3	1.00	1.995	0.9565	0.0435	3.0	3	3	1.00	0.01	1.04	9.765	7.188
3	-3	1.50	0.672	0.4998	0.5002	3.0	3	3	1.00	0.01	1.99	2.908	1.172
3	-3	1.50	0.964	0.6668	0.3332	3.0	3	3	1.00	0.01	1.49	2.908	1.239
3	-3	1.50	1.376	0.8334	0.1666	3.0	3	3	1.00	0.01	1.20	2.908	1.402
3	-3	1.50	1.525	0.8751	0.1249	3.0	3	3	1.00	0.01	1.14	2.908	1.485
3	-3	1.50	1.633	0.9000	0.1000	3.0	3	3	1.00	0.01	1.11	2.908	1.554
3	-3	1.50	1.754	0.9231	0.0769	3.0	3	3	1.00	0.01	1.08	2.908	1.641
3	-3	1.50	1.895	0.9445	0.0555	3.0	3	3	1.00	0.01	1.06	2.908	1.754
3	-3	1.50	1.995	0.9565	0.0435	3.0	3	3	1.00	0.01	1.04	2.908	1.841

ตารางที่ 4-16 (ต่อ)

UCL	LCL	δ	w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2	ATS $_{\delta}$ n= n_0 t= t_0	ATS $_{\delta}$ t= t_1, t_2 n $_0$ =n $_1$ =n $_2$
3	-3	2.00	0.672	0.4998	0.5002	3.0	3	3	1.00	0.01	1.99	1.473	1.012
3	-3	2.00	0.964	0.6668	0.3332	3.0	3	3	1.00	0.01	1.49	1.473	1.018
3	-3	2.00	1.376	0.8334	0.1666	3.0	3	3	1.00	0.01	1.20	1.473	1.037
3	-3	2.00	1.525	0.8751	0.1249	3.0	3	3	1.00	0.01	1.14	1.473	1.048
3	-3	2.00	1.633	0.9000	0.1000	3.0	3	3	1.00	0.01	1.11	1.473	1.059
3	-3	2.00	1.754	0.9231	0.0769	3.0	3	3	1.00	0.01	1.08	1.473	1.074
3	-3	2.00	1.895	0.9445	0.0555	3.0	3	3	1.00	0.01	1.06	1.473	1.095
3	-3	2.00	1.995	0.9565	0.0435	3.0	3	3	1.00	0.01	1.04	1.473	1.113

ตารางที่ 4-15 และ 4-16 แสดงค่า ATS เมื่อค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่และค่า ATS เมื่อค่าขนาดตัวอย่างคงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ พบว่าการเปลี่ยนแปลงขนาดตัวอย่าง n และช่วงเวลาในการชักตัวอย่าง จะทำให้สามารถพบว่ากระบวนการเคลื่อนไปจากค่าเป้าหมายได้เร็วกว่าเมื่อขนาดตัวอย่างคงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างมีค่าไม่คงที่ โดยพิจารณาได้จากค่าของ ATS จะมีค่าน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่

การเปรียบเทียบแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่กับแผนภูมิชีวจาร์ตที่มีขนาดตัวอย่างไม่คงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่

จากบทความของ Costa (1994) ซึ่งนำเสนอแผนภูมิการควบคุมชีวจาร์ตที่มีขนาดตัวอย่างที่ใช้มีค่าไม่คงที่ ในขณะที่ช่วงเวลาในการชักตัวอย่างมีค่าคงที่ ดังนั้นจะทำการเปรียบเทียบแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่กับแผนภูมิชีวจาร์ตที่มีขนาดตัวอย่างไม่คงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่ และเช่นกันกับการเปรียบเทียบที่ผ่านมาคือแนวความคิดในการสร้างแผนภูมิผลรวมความเบี่ยงเบนสะสมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่เป็นการสร้างแผนภูมิที่มีค่าขอบเขตการควบคุมเป็น 3 sigma และค่าที่นำมากำหนดบนแผนภูมิเป็นค่ามาตรฐาน Z ดังนั้นแผนภูมิทั้งสองจะมีลักษณะเดียวกัน ซึ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้และใช้ค่า ATS ในการเปรียบเทียบเช่นเดียวกัน

จากการคำนวณค่าต่างตามที่แสดงในลักษณะเดียวกับการเปรียบเทียบก่อนหน้านี้ สามารถ
หาค่า ATS เมื่อคำนวณตัวอย่างคงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่ได้ดังตารางที่ 4-17

ตารางที่ 4-17 แสดงค่า ATS n, t คงที่และค่า n ไม่คงที่กับ t มีค่าคงที่

UCL	LCL	δ	w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2	ATS $_{\delta}$ $n=n_0$ $t=t_0$	ATS $_{\delta}$ $n=n_1, n_2$ $t_0=t_1=t_2$
3	-3	0.50	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	1.00	1.00	60.893	53.97
3	-3	0.50	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	1.00	1.00	60.893	48.84
3	-3	0.50	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	1.00	1.00	60.893	38.4
3	-3	0.50	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	1.00	1.00	60.893	33.71
3	-3	0.50	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	1.00	1.00	60.893	30.13
3	-3	0.50	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	1.00	1.00	60.893	26.17
3	-3	0.50	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	1.00	1.00	60.893	22.05
3	-3	0.50	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	1.00	1.00	60.893	19.83
3	-3	1.00	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	1.00	1.00	9.765	7.135
3	-3	1.00	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	1.00	1.00	9.765	5.676
3	-3	1.00	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	1.00	1.00	9.765	3.967
3	-3	1.00	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	1.00	1.00	9.765	3.648
3	-3	1.00	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	1.00	1.00	9.765	3.56
3	-3	1.00	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	1.00	1.00	9.765	3.617
3	-3	1.00	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	1.00	1.00	9.765	3.898
3	-3	1.00	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	1.00	1.00	9.765	4.234
3	-3	1.50	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	1.00	1.00	2.908	2.346
3	-3	1.50	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	1.00	1.00	2.908	2.109
3	-3	1.50	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	1.00	1.00	2.908	1.971
3	-3	1.50	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	1.00	1.00	2.908	2.012
3	-3	1.50	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	1.00	1.00	2.908	2.072
3	-3	1.50	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	1.00	1.00	2.908	2.164
3	-3	1.50	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	1.00	1.00	2.908	2.298
3	-3	1.50	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	1.00	1.00	2.908	2.408

ตารางที่ 4-17 (ต่อ)

UCL	LCL	δ	w	b_1	b_2	n_0	n_1	n_2	t_0	t_1	t_2	ATS $_{\delta}$ n= n_0 t= t_0	ATS $_{\delta}$ n= n_1, n_2 t= $t_1=t_2$
3	-3	2.00	0.672	0.4998	0.5002	3.0	2	4	1.00	1.00	1.00	1.473	1.436
3	-3	2.00	0.964	0.6668	0.3332	3.0	2	5	1.00	1.00	1.00	1.473	1.444
3	-3	2.00	1.376	0.8334	0.1666	3.0	2	8	1.00	1.00	1.00	1.473	1.513
3	-3	2.00	1.525	0.8751	0.1249	3.0	2	10	1.00	1.00	1.00	1.473	1.55
3	-3	2.00	1.633	0.9000	0.1000	3.0	2	12	1.00	1.00	1.00	1.473	1.578
3	-3	2.00	1.754	0.9231	0.0769	3.0	2	15	1.00	1.00	1.00	1.473	1.611
3	-3	2.00	1.895	0.9445	0.0555	3.0	2	20	1.00	1.00	1.00	1.473	1.651
3	-3	2.00	1.995	0.9565	0.0435	3.0	2	25	1.00	1.00	1.00	1.473	1.681

ตารางที่ 4-15 และ 4-17 แสดงค่า ATS เมื่อค่าขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างไม่คงที่และค่า ATS เมื่อค่าขนาดตัวอย่างไม่คงที่และช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่ตามลำดับ พบว่าการเปลี่ยนแปลงขนาดตัวอย่าง n และช่วงเวลาในการชักตัวอย่าง จะทำให้สามารถพบว่กระบวนการเลื่อนไปจากค่าเป้าหมายได้เร็วกว่าเมื่อขนาดตัวอย่างไม่คงที่แต่ช่วงเวลาในการชักตัวอย่างมีค่าคงที่ โดยพิจารณาได้จากค่าของ ATS จะมีค่าน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างคงที่ ซึ่งค่าที่ได้เป็นไปในลักษณะเดียวกับที่เปรียบเทียบมาสำหรับแผนภูมิแบบอื่นๆดังที่กล่าวมาแล้ว

Phabhu, Montgomery และ Runger (1994) นำเสนอแผนภูมิการควบคุมที่มีขนาดตัวอย่างและช่วงเวลาในการชักตัวอย่างที่ไม่คงที่ ซึ่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ นำแนวคิดมาจากบทความนี้ ดังนั้นค่า ATS ที่ได้จากแผนภูมิที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้กับแผนภูมิดังกล่าวจะมีค่า ATS ที่เท่ากัน ดังนั้นจะทำการเปรียบเทียบแผนภูมิทั้งสองโดยการใช้ข้อมูลตัวอย่างดังจะกล่าวในบทต่อไป