บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในงานทางด้านคณิตศาสตร์ประกันชีวิต หน้าที่ที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งของนักคณิตศาสตร์ประกันชีวิต คือ การคำนวณอัตราเบี้ยประกันภัยสุทธิหรือเบี้ยประกันภัยแท้จริง (Pure Premium) สำหรับกรมธรรม์แบบต่างๆรวมทั้งการคำนวณเงินสำรอง(Reserve) มูลค่าที่ริบไม่ได้ (nonforfeiture Value) และอื่นๆ เพื่อที่จะให้แน่ใจว่าบริษัทจะมีเงินเพียงพอที่จะจ่ายเงินผลประโยชน์ตามกรมธรรม์และเพียงพอแก่ค่าใช้จ่ายในการดำเนินงาน ถ้าอัตราเบี้ยประกันภัยที่ถูกกำหนดต่ำเกินไป อาจเป็นปัญหาต่อความมั่นคงของบริษัทแต่ถ้าอัตราเบี้ยประกันภัยสูงเกินไป บริษัทก็อาจจะสูญเสียตลาดให้แก่คู่แข่งได้ ดังนั้นการคำนวณอัตราเบี้ยประกันภัยจึงเป็นเรื่องที่สำคัญมาก ในการคำนวณอัตราเบี้ยประกันภัยนั้น จะต้องคำนึงถึงองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่ง คือความน่าจะเป็นที่คนอายุ x จะเสียชีวิตภายใน 1 ปีข้างหน้า หรือ q_x ดังนั้น จำเป็นที่นักคณิตศาสตร์ประกันชีวิตจะต้องหาค่า q_x ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด เพื่อที่จะทำให้การคำนวณค่าเสี่ยงภัยแท้จริงดังกล่าวข้างต้นนั้นมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

ในการคำนวณหาค่า q_x นั้น โดยหลักการจะอาศัยการแจกแจงของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต (Future Lifetime) แต่ในทางปฏิบัติการหาการแจกแจงดังกล่าวยากที่จะกระทำได้ เนื่องจากในการหาระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคตจะต้องบันทึกตั้งแต่วันที่เริ่มต้นศึกษาจนกระทั่งคนที่ถูกศึกษาได้เสียชีวิต ซึ่งจะต้องอาศัยเวลาและเสียค่าใช้จ่ายจำนวนมาก ดังนั้นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในทางปฏิบัติในการประมาณค่า q_x คือ เก็บข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคตในช่วงระยะเวลาจำกัด โดยกำหนดช่วงเวลาที่สนใจศึกษา (Observation Period) ขึ้นมาเป็นช่วงเวลาที่จำกัด เช่น 1 ปี, 5 ปี และ 10 ปี เป็นต้น เพื่อที่จะได้สะดวกในการเก็บข้อมูลและไม่ต้องเสียค่าใช้จ่ายจำนวนมาก ซึ่งข้อมูลที่เก็บได้ในช่วงเวลาที่สนใจศึกษานี้ ลักษณะเป็นข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ (Incomplete Data) หรือข้อมูลที่ถูกตัดปลายทางขวา (Censored Data) เช่น การครบกำหนดอายุของกรมธรรม์ (Ender)

การขาดอายุกรมธรรม์ (Lapse) เป็นต้น ดังนั้นจะหาค่าประมาณ q_x ให้เหมาะสมภายใต้ข้อมูลลักษณะนี้

จากปัญหาดังกล่าว ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการศึกษาการประมาณค่า q_x โดยอาศัยข้อมูลแบบไม่สมบูรณ์ ซึ่งในที่นี้ จะศึกษาลักษณะของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต (Future Lifetime, T) ภายใต้การแจกแจง 2 แบบ คือ การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution) และการแจกแจงแบบกอมเพิรตซ์ (Gompertz Distribution) โดยการแจกแจงทั้งสองนี้เหมาะกับช่วงอายุ 15 - 65 ปี ซึ่งอายุที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้จะอยู่ในช่วงดังกล่าว และใช้วิธีการประมาณค่าทางสถิติ 3 วิธี ดังต่อไปนี้

1. การประมาณแบบคลาสสิค (Classical Estimation)
2. การประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation)
3. การประมาณแบบเบส์ (Bayes Estimation)

<u>วัตถุประสงค์ของการวิจัย</u>

เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณความน่าจะเป็นที่คนอายุ x จะเสียชีวิตภายใน 1 ปีข้างหน้า สำหรับข้อมูลประกันชีวิตแบบไม่สมบูรณ์ ซึ่งจะเสนอตามวิธีดังได้กล่าวไว้แล้วข้างต้น

<u>สมมติฐานของการวิจัย</u>

ภายใต้ข้อมูลแบบไม่สมบูรณ์นี้ วิธีการประมาณแบบเบส์ จะให้ค่าประมาณใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าวิธีการประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และ วิธีการประมาณแบบคลาสสิค

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1 ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้การแจกแจง 3 แบบ ดังนี้

1.1 การแจกแจงแบบไวบูลล์(Weibull Distribution) ซึ่งมี k และ n เป็นพารามิเตอร์ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต ดังต่อไปนี้

$$f(t) = \begin{cases} kt^n \exp\left(-\frac{k}{n+1}t^{n+1}\right) & ,t \geq 0 \quad ,k>0, n>0 \\ 0 & ,t<0 \end{cases}$$

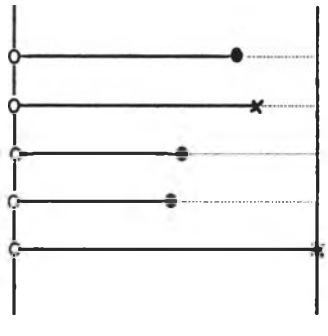
1.2 การแจกแจงแบบกอมเพิรตซ์ (Gompertz Distribution) ซึ่งมี B และ c เป็นพารามิเตอร์ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคต ดังต่อไปนี้

$$f(t) = \begin{cases} Bc^t \exp\left(-\frac{B}{\ln c}\left(c^t-1\right)\right) & , t \geq 0 \ , \ B>0, c>1 \\ 0 & , t<0 \end{cases}$$

1.3 การแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล (Exponential Distribution) ซึ่งมี β เป็นพารามิเตอร์ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของกำลังของมรณะ (Force of Mortality) ดังต่อไปนี้

$$f(t) = \begin{cases} \beta \exp(-\beta t) & , \ t \geq 0 \ , \ \beta>0 \\ 0 & , \ t<0 \end{cases}$$

2 ในการวิจัยครั้งนี้ การเก็บข้อมูลความยาวนานของชีวิตมีลักษณะเป็นการศึกษาแบบติดตามผล (Follow - up Time of Study)[1] ซึ่งเป็นแบบที่เป็นไปได้ในทางปฏิบัติแบบหนึ่งและช่วยให้ง่ายแก่การบันทึก และการวิเคราะห์ข้อมูล โดยการศึกษาลักษณะดังกล่าวนี้ จะเริ่มด้วยกลุ่มบุคคลกลุ่มหนึ่ง ณ เวลาเริ่มต้นเดียวกันคือ t = 0 แต่ละคนจะถูกสังเกตจนกระทั่งเกิดหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งใน 3 เหตุการณ์ คือ เสียชีวิต ออกจากช่วง หรือสิ้นสุดช่วงการศึกษา



[1] Elandt-Johnson, R.C. and Johnson, N.L. **Survival Models and Data Analysis.** New York : John Wiley & Sons, 1981 , p151-152.

o ผู้ที่เข้ามาในช่วงที่สนใจ

x ผู้ที่ออกจากช่วงที่สนใจ

• ผู้ที่เสียชีวิตในช่วงที่สนใจ

ขอบเขตของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ จะทำการวิจัยภายใต้ขอบเขต ดังนี้

1 การแจกแจงของระยะเวลาที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปในอนาคตที่นำมาใช้ในการวิจัยมี 2 แบบ คือ

1.1 การแจกแจงแบบไวบูลล์ ซึ่งมี 2 พารามิเตอร์ คือ k และ n

1.2 การแจกแจงแบบกอมเพิรตซ์ ซึ่งมี 2 พารามิเตอร์ คือ B และ c

2 ผู้วิจัยสนใจศึกษาค่า q_x สำหรับอายุ x ในช่วง 25-65 ปี

3 ขนาดตัวอย่างที่นำมาศึกษามี 8 ระดับ คือ 30, 50, 70, 100, 300, 500, 700 และ 1,000 ตามลำดับ

4 สำหรับวิธีการประมาณแบบเบส์ ในที่นี้ผู้วิจัยได้ทำการกำหนดการแจกแจงก่อนการทดลอง (Prior Distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงของกำลังของมรณะ (Force of Mortality) ให้มีการแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล (Exponential Distribution) ทั้งนี้ได้มีผู้ศึกษารูปแบบของกำลังของมรณะ คือ บี กอมเพิรตซ์ (B. Gompertz) เมื่อปี ค.ศ. 1825 ดับเบิ้ลยู เอ็ม เมคแฮม (W.M. Makeham) เมื่อปี ค.ศ. 1860 และไวบูลล์ (Weibull) เมื่อปี ค.ศ. 1939 ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการศึกษากราฟแสดงค่าความถี่ (Histogram Graph) ของรูปแบบของกำลังมรณะข้างต้น พบว่าการแจกแจงของกำลังมรณะ หรือการแจกแจงก่อนการทดลองที่เหมาะสมมีรูปแบบคล้ายคลึงกันโดยเข้าสู่การแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้ทำการทดลองศึกษาการแจกแจงของกำลังของมรณะในรูปแบบอื่น ได้แก่ การแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution) และการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) ซึ่งจากการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า q_x นี้ โดยกำหนดการแจกแจงของกำลังของมรณะเป็น 3 แบบ คือ การแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล การแจกแจงแบบแกมมา และการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ พบว่า การกำหนดการแจกแจงของกำลังของมรณะเป็นแบบเอกซโพเนนเชียล จะให้ค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า q_x มีค่าต่ำสุด ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้จึงกำหนดให้การแจกแจงก่อนการทดลองของกำลังของมรณะมีการแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล

เกณฑ์การตัดสินใจ

เกณฑ์การตัดสินใจว่าการประมาณค่า q_x ด้วยวิธีใดใช้ได้ดีกว่า จะพิจารณาโดยการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าประมาณ q_x กับค่าจริง ในรูปของเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Percentage Error , APE) วิธีการใดให้เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ที่ต่ำกว่า จะเป็นวิธีการประมาณค่า q_x ที่ดีกว่า

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1 เพื่อเป็นแนวทางให้นักวิจัยมีผลสรุปในการเลือกวิธีการประมาณค่า q_x อย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสม เมื่อข้อมูลมีค่าสังเกตที่ถูกตัดปลายทางขวา

2 เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาวิจัยและเปรียบเทียบวิธีการประมาณความน่าจะเป็นเมื่อข้อมูลมีค่าสังเกตที่ถูกตัดปลายทางขวาในรูปแบบอื่นๆ เช่น ในกรณีการลดลงเนื่องจากหลายสาเหตุ (Multiple Decrement)