ภาคผนวก ก.

การแจงนับและคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1)$ และ $P(I(p,q,r,s) = 0)$

เนื่องจาก $X(p)$, $Y(q)$, $Z(r)$, $W(s)$ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการเท่ากันของสองตัวแปรใด ๆ จึงเป็นศูนย์ เราอาจถือได้ว่า เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้ต้องเกิดขึ้น

E_1 : $X < Y < Z < W$

E_2 : $X < Y < W < Z$

E_3 : $X < Z < Y < W$

E_4 : $X < Z < W < Y$

E_5 : $X < W < Y < Z$

E_6 : $X < W < Z < Y$

E_7 : $Y < X < Z < W$

E_8 : $Y < X < W < Z$

E_9 : $Y < Z < X < W$

E_{10} : $Y < Z < W < X$

E_{11} : $Y < W < X < Z$

E_{12} : $Y < W < Z < X$

E_{13} : $Z < X < Y < W$

E_{14} : $Z < X < W < Y$

E_{15} : $Z < Y < X < W$

E_{16} : $Z < Y < W < X$

E_{17} : $Z < W < X < Y$

E_{18} : $Z < W < Y < X$

E_{19} : $W < X < Y < Z$

E_{20} : $W < X < Z < Y$

E_{21} : $W < Y < X < Z$

E_{22} : $W < Y < Z < X$

E_{23} : $W < Z < X < Y$

E_{24} : $W < Z < Y < X$

เนื่องจาก $X(p)$, $Y(q)$, $Z(r)$, $W(s)$ มีการกระจายเหมือนกัน ดังนั้น แต่ละเหตุการณ์ข้างบนจึงมีความน่าจะเป็นเท่ากัน คือเท่ากับ $\frac{1}{24}$ เราพบว่า $I(p, q, r, s) = 1$ เมื่อ E_9, E_{10}, E_{15} และ E_{16} เกิดขึ้นเท่านั้น เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} P(I(p,q,r,s) = 1) &= P(E_9) + P(E_{10}) + P(E_{15}) + P(E_{16}) \\ &= \frac{4}{24} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

และเราได้

$$\begin{aligned} P(I(p,q,r,s) = 0) &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข.

การคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1 , I(p', q', r', s') = 1)$

เราอาจคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1 , I(p', q', r', s') = 1)$ ได้โดย การแจงนับ ในที่นี้จะขอยกตัวอย่าง แสดงการแจงนับเพื่อคำนวณ $P(I(p, q, r, s) = 1, I(p', q', r', s') = 1)$ **เมื่อ** $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R1 กับ $I(p', q', r', s')$ ดังต่อไปนี้

เมื่อ $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R1 กับ $I(p', q', r', s')$ สมมติว่า เป็นความสัมพันธ์ R1 ชนิด $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$, $s \neq s'$ ในที่นี้เรามีตัวแปรสุ่มซึ่งไม่ขึ้นต่อกันอยู่ทั้งหมด ๕ ตัว คือ $X(p)$, $Y(q), Z(r), W(s), W(s')$ ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ดังนั้น เราได้ว่า ความน่าจะเป็นของการเท่ากันของสองตัวแปรใด ๆ ที่ต่างกัน จึงมีค่าเป็นศูนย์

วิธีจัดลำดับตามขนาดของตัวแปรสุ่ม ๕ ตัวใด ๆ มีอยู่ทั้งสิ้น ๑๒๐ วิธี เนื่องจาก $X(p), Y(q), Z(r), W(s), W(s')$ มีการกระจายเหมือนกัน ดังนั้น แต่ละวิธีจึงมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{120}$

เนื่องจาก $I(p, q, r, s) = 1$ เมื่อ $X(p) > Y(q)$, $X(p) > Z(r)$,

$W(s) > Y(q)$, $W(s) > Z(r)$

และ $I(p, q, r, s') = 1$ เมื่อ $X(p) > Y(q)$, $X(p) > Z(r)$,

$W(s') > Y(q)$, $W(s') > Z(r)$

ดังนั้น เราพบว่า $I(p, q, r, s) = 1$ และ $I(p, q, r, s') = 1$ พร้อม ๆ กัน เมื่อเหตุการณ์ต่อไปนี้เกิดขึ้นเท่านั้น

E_1 : $X(p) > W(s) > W(s') > Y(q) > Z(r)$

E_2 : $X(p) > W(s) > W(s') > Z(r) > Y(q)$

E_3 : $X(p) > W(s') > W(s) > Y(q) > Z(r)$

E_4 : $X(p) > W(s') > W(s) > Z(r) > Y(q)$

E_5 : $W(s) > X(p) > W(s') > Y(q) > Z(r)$

E_6 : $W(s) > X(p) > W(s') > Z(r) > Y(q)$

E_7 : $W(s) > W(s') > X(p) > Y(q) > Z(r)$

E_8 : $W(s) > W(s') > X(p) > Z(r) > Y(q)$

E_9 : $W(s') > X(p) > W(s) > Y(q) > Z(r)$

E_{10} : $W(s') > X(p) > W(s) > Z(r) > Y(q)$

E_{11} : $W(s') > W(s) > X(p) > Y(q) > Z(r)$

E_{12} : $W(s') > W(s) > X(p) > Z(r) > Y(q)$

$$
\begin{aligned}
P(I(p,q,r,s) = 1,\ I(p,q,r,s') = 1) &= P(E_1) + \ldots\ldots + P(E_{12}) \\
&= \frac{12}{120} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ R1 กับ $I(p', q', r', s')$ แบบอื่น ๆ เช่น $p = p'$, $q = q'$, $r \neq r'$, $s = s'$ เราก็ยังสามารถแจงนับและคำนวณค่า $P(I(p, q,r,s) = 1, I(p,q,r',s) = 1)$ ได้เท่ากับ $\frac{1}{10}$ ดังนั้น เราได้ว่า

$P(I(p,q,r,s) = 1 , I(p', q', r', s')=1) = \frac{1}{10}$ เมื่อ $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ R1 กับ $I(p', q', r', s')$

เมื่อ $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ Ri กับ $I(p', q', r', s')$, $i = 0, 2, 2', 3, 4$ เราก็อาจคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1, I(p',q', r', s')= 1)$ ได้โดยการแจงนับตามวิธีที่แสดงไว้ในตัวอย่างข้างต้น ผลของการแจงนับและการคำนวณความน่าจะเป็นเหล่านี้มีแสดงไว้ในสูตร (๒.๒.๔)

ภาคผนวก ค.

การคำนวณ $P(I(p,q,r,s) = 1, J(p', q', r', s') = 1)$

เราอาจคำนวณ $P(I(p, q, r, s) = 1, J(p', q', r', s') = 1)$ ได้โดยการแจงนับ ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างแสดงการแจงนับเพื่อคำนวณ $P(I(p, q, r, s) = 1, J(p', q', r', s') = 1)$ เมื่อ $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p', q', r', s')$ ดังต่อไปนี้

เมื่อ $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p', q', r', s')$ สมมติว่า เป็นความสัมพันธ์ r2 ชนิด $p = p'$, $q=q'$, $r \neq r'$, $s \neq s'$ ในที่นี้เรามีตัวแปรสุ่มซึ่งไม่ขึ้นต่อกันอยู่ทั้งหมด ๖ ตัว คือ $X(p)$, $Y(q)$, $Z(r)$, $Z(r')$, $W(s)$, $W(s')$ ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการเท่ากันของสองแปรใด ๆ ที่ต่างกัน จึงมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก $I(p, q, r, s) = 1$ เมื่อ $X(p) > Y(q)$, $X(p) > Z(r)$, $W(s) > Y(q)$, $W(s) > Z(r)$ และ $J(p, q, r', s') = 1$ เมื่อ $X(p) < Y(q)$, $X(p) < Z(r')$, $W(s') < Y(q)$, $W(s') < Z(r')$ เราพบว่า เป็นไปไม่ได้ที่ $I(p, q, r, s) = 1$ และ $J(p, q, r', s') = 1$ จะเกิดขึ้นพร้อมกัน เพราะฉะนั้น

$$P(I(p, q, r, s) = 1, \; J(p, q, r', s') = 1) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p', q', r', s')$ แบบอื่น ๆ เช่น $p \neq p'$, $q \neq q'$, $r = r'$, $s = s'$ เราก็ยังสามารถแจงนับและคำนวณค่า $P(I(p, q, r, s) = 1, J(p', q', r, s) = 1)$ ได้เท่ากับ ๐

ดังนั้น $P(I(p, q, r, s) = 1, J(p', q', r', s') = 1) = 0$ เมื่อ $I(p,q,r,s)$ มีความสัมพันธ์ r2 กับ $J(p', q', r', s')$

เมื่อ $I(p, q, r, s)$ มีความสัมพันธ์ ri กับ $J(p', q', r', s')$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ เราก็อาจคำนวณค่า $P(I(p, q, r, s) = 1, J(p', q', r', s') = 1)$ ได้โดยการแจงนับตามวิธีที่แสดงไว้ในตัวอย่างข้างต้น ผลของการแจงนับ และการคำนวณความน่าจะเป็นเหล่านี้มี แสดงไว้ในสูตร (๒.๒.๑๑)

บรรณานุกรม

๑. Samuel S. Wilks Mathematical Statistics (New York. John Wiley and Sons, Inc., 1962).

๒. Harold Cramér Mathematical Methods of Statistics (Princeton University Press, 1946).