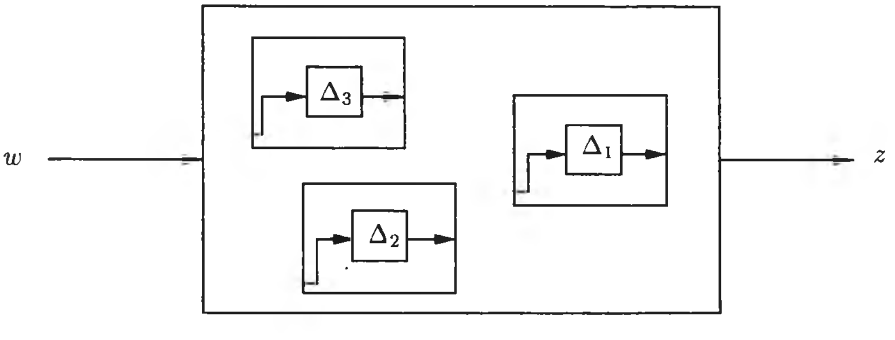
บทที่ 2

การควบคุมคงทน

ในบทนี้จะกล่าวครอบคลุมถึง ปัญหาที่เกิดขึ้นกับระบบเชิงเส้น ปัญหาที่เกิดขึ้นอาจทำให้ระบบขาดเสถียรภาพและไม่มีสมรรถนะตรงตามต้องการได้ ปัญหานี้เกิดจากความไม่แน่นอน เราจะอธิบายความหมายของความไม่แน่นอนและการสร้างแบบจำลองความไม่แน่นอน เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ และนิยามเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทน การวิเคราะห์เสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนจะเป็นพื้นฐานในการออกแบบตัวควบคุม เพื่อให้ระบบสามารถทำงานอย่างมีประสิทธิภาพแม้ระบบมีความไม่แน่นอน ในหัวข้อสุดท้ายเป็นการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ ซึ่งเป็นตัวควบคุมที่ประกันเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบที่มีความไม่แน่นอน

2.1 ปัญหาที่เกิดขึ้นกับระบบเชิงเส้น

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเชิงเส้นเพื่อการออกแบบตัวควบคุม ไม่สามารถจำลองระบบให้ตรงกับระบบจริงได้ไม่ว่าการจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีความแม่นยำมากเท่าใด การจำลองระบบต้องเกิดความแตกต่างระหว่างแบบจำลองกับระบบจริงเสมอ ความแตกต่างนี้อาจทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพหรือสมรรถนะตามต้องการได้ นอกจากนี้การเปลี่ยนแปลงสภาวะการทำงาน การสึกหรอของอุปกรณ์ หรือความคลาดเคลื่อนของอุปกรณ์วัดและตัวกระทำที่ไม่ละเอียดพอ ก็เป็นสาเหตุที่อาจทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพและสมรรถนะตามต้องการเช่นกัน สาเหตุต่างๆเหล่านี้รวมเรียกว่า **ความไม่แน่นอน (uncertainty)** ดังรูปที่ 2.1 ตัวควบคุมที่สามารถควบคุมระบบให้มีเสถียรภาพและสมรรถนะตามที่ต้องการแม้ระบบมีความไม่แน่นอนจะเรียกว่า **ตัวควบคุมคงทน (robust controller)**

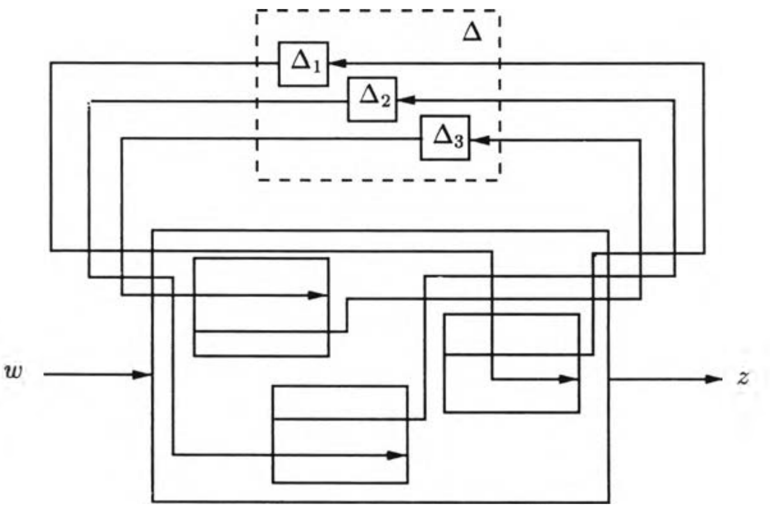


รูปที่ 2.1: ระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอน

2.2 การสร้างแบบจำลองความไม่แน่นอน [1, หน้า 253-269]

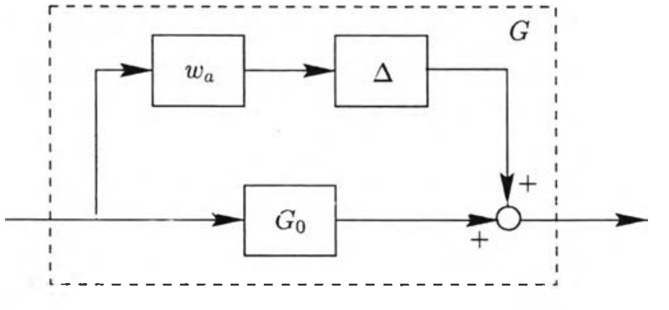
ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นกับระบบสามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่มดังนี้

1. ความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ (Parametric uncertainty) เกิดจากการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์เนื่องจากสภาวะการทำงานของระบบมีการเปลี่ยนแปลง
2. ความไม่แน่นอนจากการละเลยส่วนพลวัต (Unmodelled dynamic uncertainty) เกิดจากการละเลยพลวัตของแบบจำลองในบริเวณความถี่สูง



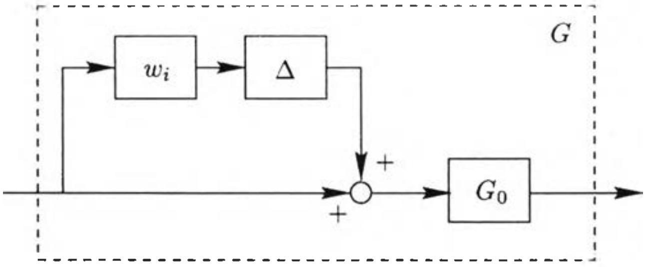
รูปที่ 2.2: การรวมความไม่แน่นอน

เราสามารถรวมความไม่แน่นอนทั้งสองส่วนข้างต้นให้เป็นความไม่แน่นอนแบบกลุ่มก้อน (lumped uncertainty) ดังรูปที่ 2.2 เพื่อใช้ออกแบบตัวควบคุมได้สะดวกขึ้น โครงสร้างของความไม่แน่นอนมีหลายรูปแบบ อาทิเช่น ความไม่แน่นอนเชิงการบวก (additive uncertainty) ดังรูปที่ 2.3 และโครงสร้างความไม่แน่นอนเชิงการคูณ (multiplicative uncertainty) ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.3: ระบบที่มีความไม่แน่นอนเชิงการบวก

เมื่อ G คือฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีความไม่แน่นอน, G_0 คือฟังก์ชันถ่ายโอน ณ สภาวะปกติ, w_a คือฟังก์ชันน้ำหนักความไม่แน่นอนซึ่งสอดคล้องกับ $|w_a| \geq \max_G |G - G_0|$



รูปที่ 2.4: ระบบที่มีความไม่แน่นอนเชิงการคูณ

เมื่อ G คือฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีความไม่แน่นอน, G_0 คือฟังก์ชันถ่ายโอน ณ สภาวะปกติ, w_i คือฟังก์ชันน้ำหนักความไม่แน่นอนที่สอดคล้องกับ $|w_i| \geq \max_G \left|\frac{G-G_0}{G_0}\right|$

การออกแบบตัวควบคุมส่วนใหญ่จะเลือกใช้โครงสร้างความไม่แน่นอนเชิงการคูณ เนื่องจากรูปแบบนี้สามารถอธิบายลักษณะทางกายภาพได้ดีกว่าโครงสร้างความไม่แน่นอนแบบอื่น ฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีความไม่แน่นอนเชิงการคูณ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$G = G_0(1 + w_i\Delta), \forall\Delta \leq 1 \tag{2.1}$$

วัตถุประสงค์โดยทั่วไปของการควบคุมคือ การออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ผลตอบของระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะตามที่ต้องการด้วยการป้อนกลับ หากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีลักษณะที่ตรงกับระบบจริง เราจะสามารถออกแบบตัวควบคุมให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์การควบคุมได้ แต่โดยทั่วไปความไม่แน่นอนทำให้ลักษณะผลตอบของระบบมีสมรรถนะที่เลวลง หรือบางครั้งทำให้ระบบขาดเสถียรภาพ ดังนั้นเราจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขเพื่อประกันว่าระบบจะมีเสถียรภาพและสมรรถนะในขอบเขตที่ยอมรับได้ เรานิยามเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบดังนี้

เสถียรภาพที่ระบุ (Nominal Stability: NS) หมายถึงการประกันว่าระบบ ณ สภาวะปกติ (ไม่มีความไม่แน่นอน) มีเสถียรภาพ

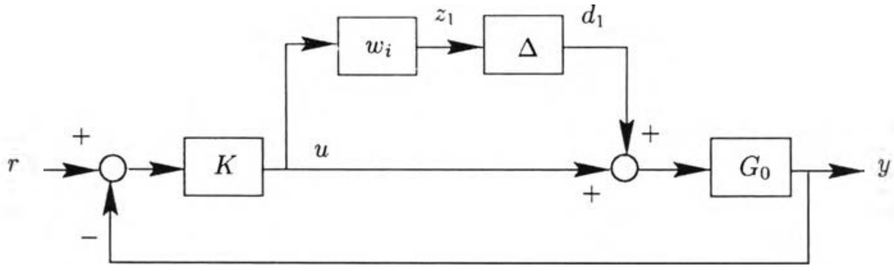
เสถียรภาพคงทน (Robust Stability: RS) หมายถึงการประกันว่าระบบมีเสถียรภาพ สำหรับทุกค่าความไม่แน่นอนที่มีขอบเขตจำกัด

สมรรถนะที่ระบุ (Nominal Performance: NP) หมายถึงการประกันสมรรถนะของระบบ ณ สภาวะปกติ (ไม่มีความไม่แน่นอน)

สมรรถนะคงทน (Robust Performance: RP) หมายถึงการประกันสมรรถนะของระบบที่มีเสถียรภาพคงทนและสำหรับทุกค่าความไม่แน่นอนที่มีขอบเขตจำกัด

2.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพคงทน [1, หน้า 270-276]

เป็นที่ทราบกันดีว่าเสถียรภาพของระบบเป็นสิ่งสำคัญที่สุดสำหรับการควบคุม เนื่องจากระบบที่ขาดเสถียรภาพจะไม่สามารถทำงานได้ตามที่ต้องการ อาทิเช่น การติดตามสัญญาณเข้า หรือการขจัดสัญญาณรบกวน เป็นต้น โดยทั่วไประบบจะมีความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นสาเหตุให้ระบบขาดเสถียรภาพ เราจึงกำหนดเงื่อนไขเสถียรภาพคงทน ตัวควบคุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพทุก



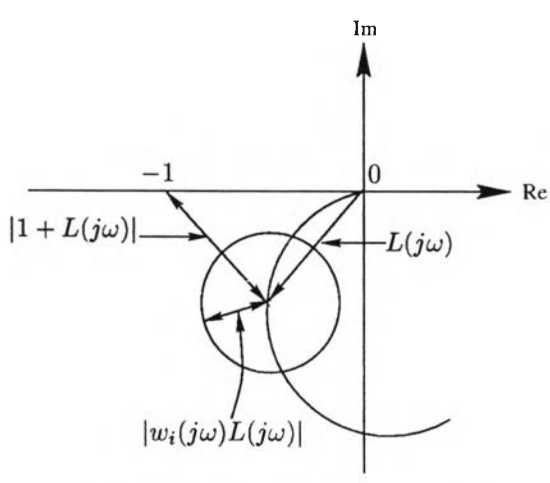
รูปที่ 2.5: ระบบควบคุมวงปิดที่มีความไม่แน่นอน

ค่าความไม่แน่นอนได้ เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบวงปิดที่มีความไม่แน่นอนในรูปที่ 2.5 สมมติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบ ณ สภาวะปกติ L มีเสถียรภาพ จากเกณฑ์เสถียรภาพไนควิสต์ (Nyquist stability criterion) ฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบต้องไม่ล้อมรอบจุด $(-1, 0)$ กำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบที่มีความไม่แน่นอน มีค่าดังนี้

$$L_p = GK \tag{2.2}$$

โดย G คือฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีความไม่แน่นอนในสมการ (2.1) เงื่อนไขเสถียรภาพคงทนคือ

$$\text{RS} \quad \Leftrightarrow \quad L_p \text{ ไม่ล้อมรอบจุด } (-1, 0) \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.6: กราฟไนควิสต์สำหรับการวิเคราะห์เสถียรภาพคงทน

รูปที่ 2.6 แสดงกราฟของระบบวงเปิดที่มีความไม่แน่นอน ระยะทางจากจุด $(-1, 0)$ ไปยังฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบคือ ระยะทางที่แสดงถึงขอบเขตส่วนเผื่อเสถียรภาพ (stability margin) ของระบบ ณ สภาวะปกติ มีขนาดเท่ากับ $|1 + L(j\omega)|$ นอกจากนี้วงกลมรัศมี $|w_i(j\omega)L(j\omega)|$ ที่จุดศูนย์กลาง $L(j\omega)$ หมายถึงความไม่แน่นอน ณ ความถี่ ω หากพิจารณาเสถียรภาพของระบบที่มีความไม่แน่นอน จะได้ว่าในแต่ละจุดบนวงกลมต้องไม่ล้อมรอบจุด $(-1, 0)$ จากความจริงนี้ เราสามารถแสดงได้ว่าเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนเทียบได้กับเงื่อนไขดังนี้

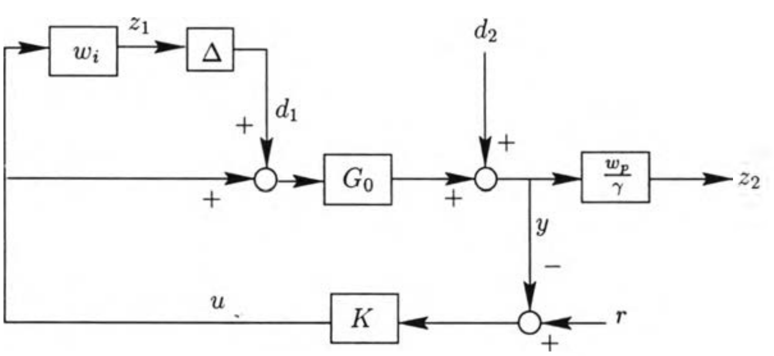
$$\text{RS} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|w_i T\|_\infty < 1 \tag{2.4}$$

โดยที่นอร์มอนันต์ (infinity norm) มีนิยามดังนี้

$$||X||_\infty = \sup_\omega |X(j\omega)|$$

ข้อสังเกต สำหรับฟังก์ชันวงรอบที่มีเฟสไม่ต่ำสุดและฟังก์ชันวงรอบที่ไม่มีเสถียรภาพ ไม่สามารถวิเคราะห์เสถียรภาพได้จากการพิจารณาการล้อมรอบจุด $(-1, 0)$ ในกราฟไนควิสต์ อย่างไรก็ตามเสถียรภาพคงทนของระบบที่ไม่เสถียรจะมีเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนเช่นเดียวกับระบบที่เสถียรดังอสมการที่ (2.4) [22, หน้า 53]

2.4 การวิเคราะห์สมรรถนะคงทน [1, หน้า 276-281]



รูปที่ 2.7: แผนภาพกรอบของระบบควบคุมวงปิด เมื่อระบบถูกรบกวน

การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ เราพิจารณาจากการรบกวนของสัญญาณ d_2 ดังรูปที่ 2.7 หาก d_2 มีผลต่อระบบน้อย หมายความว่าเราสามารถขจัดสัญญาณรบกวนได้ดี นั่นคือ สมรรถนะของระบบดี เราจึงพยายามให้ฟังก์ชันถ่ายโอนจาก d_2 ไปยัง z_2 มีค่าจำกัด โดยการออกแบบตัวควบคุมให้สอดคล้องเงื่อนไขสมรรถนะที่ระบุดังอสมการ (2.5)

$$\text{NP} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left|\frac{w_p}{\gamma} S\right| < 1. \quad \forall\omega \tag{2.5}$$

โดยที่ S คือฟังก์ชันความไว $(1 + L)^{-1}$, w_p คือฟังก์ชันน้ำหนักสมรรถนะ, γ คือค่าคงที่บวกที่แสดงสมรรถนะของระบบ พิจารณาระบบที่มีความไม่แน่นอน จะได้เงื่อนไขสมรรถนะคงทนดังนี้

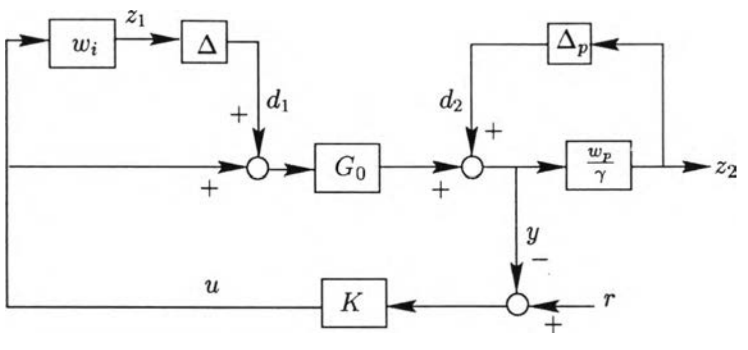
$$\text{RP} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left|\frac{w_p}{\gamma} S_p\right| < 1, \quad \forall S_p, \forall\omega \tag{2.6}$$

โดยที่ $S_p = (1 + L_p)^{-1}$ เมื่อพิจารณากรณีเลวที่สุดจะเทียบเงื่อนไขสมรรถนะคงทนได้กับเงื่อนไขดังนี้

$$\text{RP} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{w_p}{\gamma} S\right| + |w_i T| < 1, \quad \forall\omega \tag{2.7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\| \left|\frac{w_p}{\gamma} S\right| + |w_i T| \right\|_\infty < 1 \tag{2.8}$$

2.5 วิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้ [2, บทที่ 8]



รูปที่ 2.8: ระบบควบคุมวงปิด เมื่อแทนการรบกวนด้วยความไม่แน่นอน

จากรูปที่ 2.7 เมื่อเปรียบเทียบสัญญาณ d_1 ที่มาจากความไม่แน่นอน Δ กับสัญญาณรบกวน d_2 และสัญญาณ z_1 เป็นสัญญาณเข้าความไม่แน่นอน Δ กับสัญญาณสมรรถนะ z_2 เราอนุมานได้ว่าระบบมีความไม่แน่นอนในลักษณะป้อนกลับ Δ_p ดังรูปที่ 2.8 โดยที่ความไม่แน่นอน Δ_p มี z_2 เป็นสัญญาณเข้า และ d_2 เป็นสัญญาณออก ผลลัพธ์ที่สำคัญจากการอนุมานนี้คือ เงื่อนไขสมรรถนะคงทนสำหรับระบบในรูปที่ 2.7 เทียบได้กับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนสำหรับระบบในรูปที่ 2.8 ซึ่งมีความไม่แน่นอนทั้ง Δ และ Δ_p จากการอนุมานนี้ เราสามารถเขียนปัญหาการออกแบบตัวควบคุมคงทนเป็นปัญหาการควบคุมเอชอินฟินิตี้ นั่นคือ เราจะออกแบบตัวควบคุมคงทนที่ทำให้การรบกวนของ d_1 และ d_2 มีผลต่อระบบน้อยที่สุด การกำหนดปัญหาข้างต้นนี้ สามารถเขียนเป็นสมการสถานะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

เมื่อ x คือตัวแปรสถานะของระบบ, $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$, $w = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}^T$

การวิเคราะห์ความไม่แน่นอนของวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้ จะรวมความไม่แน่นอน Δ และ Δ_p เป็นความไม่แน่นอนหนึ่งตัวแบบไร้โครงสร้าง[1] จากนั้นจะคำนวณตัวควบคุมเพื่อทำให้ระบบสอดคล้องเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทน หาก γ เป็นค่าคงที่บวกใดๆที่ทำให้เราสามารถคำนวณตัวควบคุมที่มีเสถียรภาพได้แล้ว ตัวควบคุมดังกล่าวทำให้ขนาดสูงสุดของฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณรบกวนรวม w ไปยังสัญญาณออกรวม z มีค่าน้อยกว่า 1 ซึ่งสามารถเขียนเป็นเงื่อนไขได้ดังนี้

$$\min_{K} \ \|G_{zw}\|_\infty < 1 \tag{2.10}$$

โดยที่

$$G_{zw} = \left\| \begin{matrix} w_i T & w_i K S \\ \frac{w_p}{\gamma} G_0 S & \frac{w_p}{\gamma} S \end{matrix} \right\|_\infty$$

[1]หมายเหตุ อนึ่งการรวมความไม่แน่นอน Δ และ Δ_p เป็นความไม่แน่นอนแบบไร้โครงสร้าง จะทำให้เกิดความอนุรักษ์เนื่องจากผลของการเชื่อมต่อ (coupling) ระหว่าง d_1, z_2 และ d_2, z_1

การออกแบบตัวควบคุมให้ฟังก์ชันถ่ายโอนจาก d_2 ไปยัง z_2 มีขนาดต่ำที่สุดและยังทำให้ระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนดังสมการ (2.7) ทำได้โดยการลดขนาดของ γ ให้ต่ำที่สุด ดังนั้นวัตถุประสงค์ของวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้จึงเป็นดังนี้

$$\min_{K} \gamma \tag{2.11}$$

$$\text{โดยที่} \qquad \|G_{zw}\|_\infty < 1$$

การคำนวณตัวควบคุมด้วยวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้จำเป็นต้องมีข้อสมมติฐาน เพื่อมั่นใจว่าเราจะสามารถคำนวณตัวควบคุมให้ระบบมีเสถียรภาพและสอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนได้ โดยสมมติฐานดังกล่าวได้แก่

1. (A, B_2) สามารถทำให้มีเสถียรภาพได้ (stabilizable) และ (A, C_2) สามารถตรวจจับได้ (detectable) ซึ่งสมมติฐานข้อนี้ มีไว้เพื่อประกันว่าเราสามารถสังเคราะห์ตัวควบคุมที่มีเสถียรภาพได้

2. D_{12} มีอันดับสดมภ์เต็ม (full column rank) และ D_{21} มีอันดับแถวเต็ม (full row rank) หากระบบสอดคล้องกับสมมติฐานข้อนี้แล้ว จะได้ว่าตัวควบคุมที่สังเคราะห์ได้จะมีอันดับพหุนามของเศษน้อยกว่าหรือเท่ากับอันดับพหุนามของส่วน

3. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ มีอันดับสดมภ์เต็มทุกความถี่ ω

4. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ มีอันดับแถวเต็มทุกความถี่ ω

สมมติฐานข้อ 3 และ 4 มีไว้เพื่อประกันว่าตัวควบคุมที่สังเคราะห์ได้จะไม่มีการตัดกันของขั้วและศูนย์ที่แกนจินตภาพอันเป็นเหตุให้ระบบวงปิดขาดเสถียรภาพใน หากระบบสอดคล้องกับข้อสมมติฐานข้างต้น เราจะสังเคราะห์ตัวควบคุมได้จากสมการริกคาติเกี่ยวเนื่อง 2 สมการ (Two coupled Riccati equations) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{P}\tilde{A} + \tilde{A}^T\hat{P} + \tilde{C}^T\tilde{C} - \hat{P}(B_2B_2^T - B_1B_1^T)\hat{P} &= 0 \\
\hat{A}Q + Q\hat{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T - Q(\hat{C_2}^T\hat{C}_2 - F^TF)Q &= 0 \\
\rho(\hat{P}Q) = \max_i |\lambda_i(\hat{P}Q)| &< 1
\end{aligned}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= A - B_2D_{12}^TC_1 \\
\tilde{C}^T\tilde{C} &= C_1^T(I - D_{12}D_{12}^T)C_1 \\
\hat{A} &= A + B_1(I - D_{21}^TD_{21})B_1^T\hat{P} - B_1D_{21}^TC_2 \\
\bar{B}\bar{B}^T &= B_1(I - D_{21}^TD_{21})B_1{}^T \\
\hat{C}_2 &= C_2 + D_{21}B_1^T\hat{P} \\
F &= D_{12}^TC_1 + B_2^T\hat{P}
\end{aligned}$$

จากคำตอบของสมการริกคาติเกี่ยวเนื่อง เราจะได้ตัวควบคุมดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + (B_1D_{21}^T + QC_2^T)y \\
u &= (D_{12}^TC_1 + B_2^T\hat{P})\hat{x}
\end{aligned}$$

โดย $\hat{x}$ คือตัวแปรสถานะของตัวควบคุม

2.6 สรุป

ปัญหาที่เกิดขึ้นกับการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นคือ การที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับระบบจริงมีความแตกต่างกันหรือระบบมีความไม่แน่นอน ดังนั้นเราจำเป็นต้องออกแบบตัวควบคุมคงทนที่ทำให้ระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทน เพื่อการประกันว่าตัวควบคุมที่ออกแบบสามารถนำไปใช้กับระบบที่มีความไม่แน่นอนได้จริง หัวข้อสุดท้ายเป็นการเสนอการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน โดยตัวควบคุมที่ออกแบบได้สามารถประกันเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทน ในการกำหนดฟังก์ชันน้ำหนักความไม่แน่นอน จะพิจารณาจากความแตกต่างของลักษณะของระบบที่เกิดขึ้นจริงกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับการกำหนดฟังก์ชันน้ำหนักสมรรถนะ จะกล่าวต่อไปในบทที่ 4