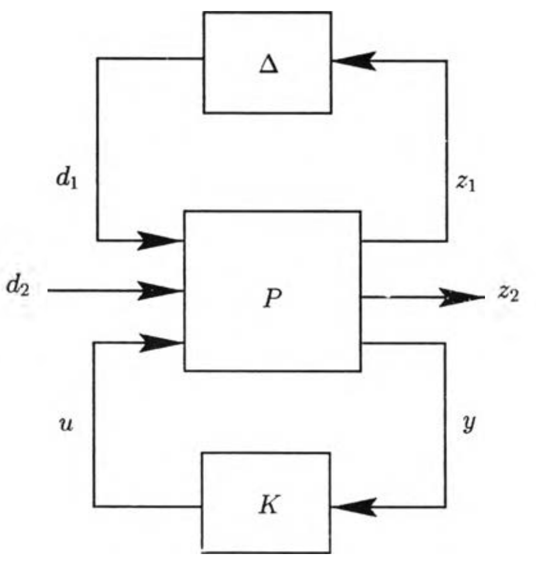
บทที่ 3

การวิเคราะห์และสังเคราะห์มิว

เนื่องจากความอนุรักษ์ที่เกิดจากการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ จะทำให้ตัวควบคุมไม่สามารถปรับปรุงสมรรถนะของระบบให้ดีได้ ในบทนี้จะเสนอการวิเคราะห์มิว (μ-analysis) และสังเคราะห์มิว (μ-synthesis) เพื่อลดความอนุรักษ์จากการไม่คำนึงถึงโครงสร้างความไม่แน่นอน หัวข้อแรกจะเป็นการแนะนำเมทริกซ์ที่สำคัญต่อการวิเคราะห์และสังเคราะห์มิว หัวข้อที่สองจะเป็นการวิเคราะห์เสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนของระบบ MIMO และ SISO จากนั้นจะเสนอการสังเคราะห์มิว เพื่อการออกแบบตัวควบคุมมิวที่มีความอนุรักษ์น้อยกว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้

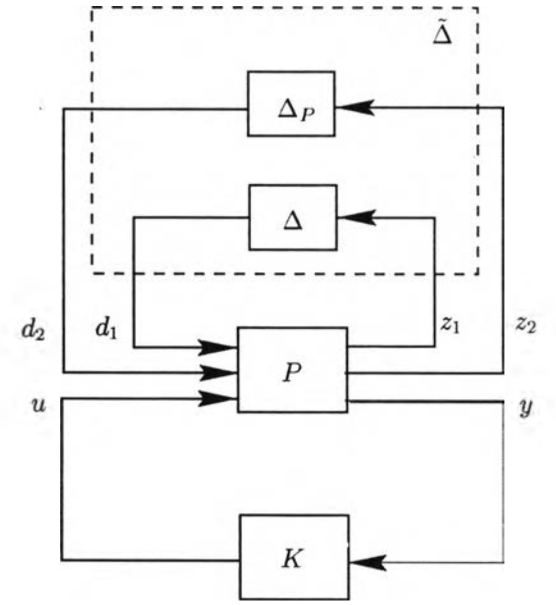
3.1 เมทริกซ์ถ่ายโอนสำหรับการวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุม [1, หน้า 291-302]



รูปที่ 3.1: แผนภาพกรอบแสดงโครงสร้าง P สำหรับเงื่อนไขสมรรถนะคงทน

รูปที่ 3.1 แสดงระบบควบคุมซึ่งประกอบด้วยเมทริกซ์ถ่ายโอน P มีสัญญาณเข้า 3 สัญญาณ คือ สัญญาณ d_1 เป็นสัญญาณรบกวนที่เกิดจากความไม่แน่นอน Δ ซึ่งเป็นความไม่แน่นอนมีค่าเป็น $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_n \end{bmatrix}$, d_2 คือสัญญาณรบกวนภายนอก และสัญญาณควบคุม u ที่มาจากตัวควบคุม K สำหรับสัญญาณออกมี 3 สัญญาณได้แก่ z_1 เป็นสัญญาณเข้าความไม่แน่นอน, z_2 เป็นสัญญาณออกของระบบและ y คือสัญญาณที่วัดได้และเป็นสัญญาณเข้าตัวควบคุม จากรูปที่ 3.1 เราจะสร้างความไม่แน่นอนเสมือน Δ_P มิติใดๆ สัญญาณ z_2 เป็นสัญญาณเข้าและสัญญาณ d_2 เป็นสัญญาณออกของความไม่แน่

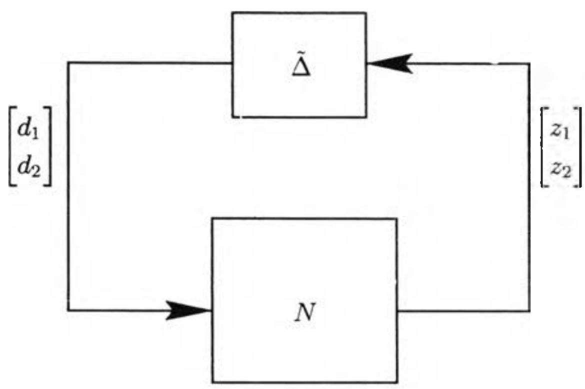
นอน Δ_P ความไม่แน่นอนนี้สร้างขึ้นเพื่อวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ หรือการแปลงรูปแบบปัญหาจากสมรรถนะคงทนเป็นเสถียรภาพคงทน โดยการรวมความไม่แน่นอนเสมือน Δ_P เข้ากับ Δ เป็นความไม่แน่นอน $\tilde{\Delta}$ ซึ่งมีค่าเป็น $\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}$ เราสามารถเขียนแผนภาพกรอบได้ใหม่เป็นดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2: แผนภาพกรอบแสดงโครงสร้าง P สำหรับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทน

จากรูปที่ 3.2 เมื่อรวมตัวควบคุม K เข้ากับเมทริกซ์ถ่ายโอน P จะได้เมทริกซ์ถ่ายโอน N ซึ่งสอดคล้องกับแผนภาพกรอบดังรูปที่ 3.3 เมทริกซ์ถ่ายโอน N มีค่าเป็น

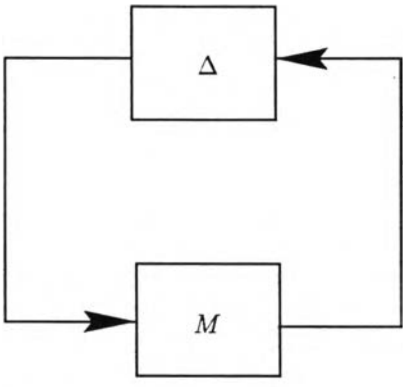
$$N = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$



รูปที่ 3.3: แผนภาพกรอบแสดงโครงสร้าง $N\Delta$

จากรูปที่ 3.2 เมื่อเราพิจารณาเฉพาะความไม่แน่นอน Δ ที่เกิดขึ้นจริง จะได้เมทริกซ์ถ่ายโอน M สอดคล้องกับรูปที่ 3.4 กำหนดให้ N เป็นเมทริกซ์สัดส่วนสัมพันธ์มีค่าเป็น $\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$ เมื่อพิจารณาเฉพาะความไม่แน่นอน Δ เมทริกซ์ถ่ายโอน M จะมีค่าเป็น

$$M = N_{11} \tag{3.1}$$



รูปที่ 3.4: แผนภาพกรอบแสดงโครงสร้าง $M\Delta$

3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนสำหรับระบบ MIMO [1, หน้า 303-325]

เนื่องจากเมทริกซ์ถ่ายโอน M พิจารณาความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นจริงกับระบบ ดังนั้นเราสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพคงทนได้จากเมทริกซ์ถ่ายโอน M หากกำหนดให้ M และ Δ เสถียร เงื่อนไขเสถียรภาพคงทนของระบบคือ

$$\text{RS} \Leftrightarrow \det(I - M\Delta) \text{ ไม่ล้อมรอบจุดกำเนิด} \tag{3.2}$$

$$\Leftrightarrow \|I + M\Delta\|_\infty > 0, \quad \forall\omega, \forall\Delta \tag{3.3}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(M)\bar{\sigma}(\Delta) < 1, \quad \forall\omega, \forall\Delta \tag{3.4}$$

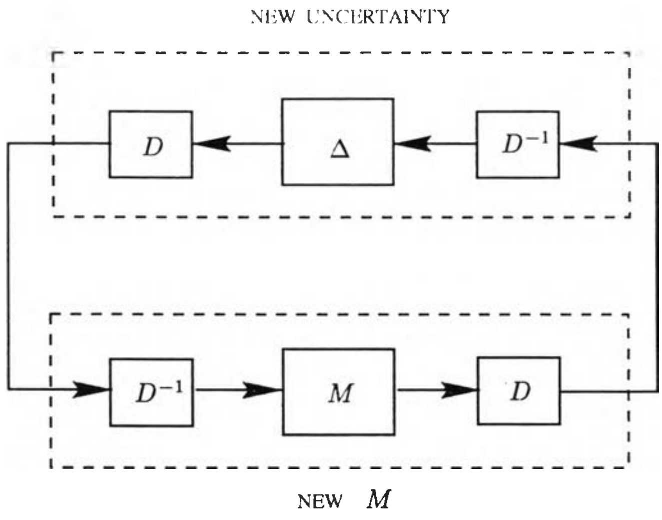
โดยที่ $\bar{\sigma}(\cdot)$ คือค่าเอกฐานมากที่สุด หาก $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ เมื่อพิจารณากรณีเลวที่สุดจะได้ว่า

$$\text{RS} \Leftarrow \bar{\sigma}(M) < 1, \quad \forall\omega \tag{3.5}$$

จากรูปที่ 3.4 เมื่อนำเมทริกซ์ปรับมาตราส่วน D และ D^{-1} เพิ่มลงในโครงสร้าง $M\Delta$ ดังรูปที่ 3.5 ระบบยังคงเป็นระบบเดิมที่มีเมทริกซ์ถ่ายโอน M ใหม่และความไม่แน่นอนใหม่ เมื่อเราพิจารณาเสถียรภาพของระบบ พบว่าเสถียรภาพของระบบเหมือนเดิม ดังนั้นเราสามารถเขียนเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนใหม่ได้เป็น

$$\text{RS} \Leftarrow \bar{\sigma}(DMD^{-1}) < 1, \forall\omega \quad \Delta = D\Delta D^{-1} \tag{3.6}$$

คุณสมบัติการปรับมาตราส่วนดังกล่าวจะเป็นพื้นฐานความเข้าใจในการพิจารณาโครงสร้างความไม่แน่นอนเพื่อการสังเคราะห์ตัวควบคุมมิวต่อไป



รูปที่ 3.5: การปรับมาตราส่วนด้วยเมทริกซ์ปรับมาตราส่วน

3.2.1 ค่ามิว (Structured Singular Value, μ)

ค่ามิวเป็นฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการกำหนดเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทน ซึ่งคำนึงถึงโครงสร้างความไม่แน่นอนโดยเรานิยามค่ามิว ดังนี้

นิยามค่ามิว

กำหนดให้ M เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนเชิงซ้อนและ Δ เป็นความไม่แน่นอนเมื่อ $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ ซึ่งสอดคล้องกับรูปที่ 3.4 จะได้ว่า

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \left(\min_{\Delta}\{k_m | \det(I - k_m M\Delta) = 0, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \right)^{-1} \tag{3.7}$$

เพื่อความเข้าใจค่ามิวยิ่งขึ้น เราจะกล่าวถึงคุณสมบัติของค่ามิวบางประการดังนี้

คุณสมบัติของค่ามิว

1. $\mu(\alpha M) = |\alpha|\mu(M)$
   เมื่อ α คือค่าสเกลาร์จริง (real scalar) หรือค่าสเกลาร์เชิงซ้อน (complex scalar)
   นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่างการคูณด้วยค่าสเกลาร์และค่ามิวเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น

2. หาก $\Delta = \delta I$ เมื่อ δ คือค่าสเกลาร์เชิงซ้อนจะได้ว่า

   $$\mu_\Delta(M) = \rho(M) \tag{3.8}$$

   เมื่อ ρ คือขนาดค่าเจาะจงมากที่สุดของเมทริกซ์ M หรือ $\rho = \max_i |\lambda_i(M)|$

3. ถ้า Δ เป็นความไม่แน่นอนแบบไร้โครงสร้างหรือที่มีค่าทุกองค์ประกอบ (full block) จะได้ว่า

   $$\mu_\Delta(M) = \bar{\sigma}(M) \tag{3.9}$$

4. ค่ามิวจะถูกจำกัดขอบเขตด้วยค่าเจาะจงมากที่สุด (spectral radius) และค่าเอกฐานมากที่สุด (maximum singular value) ซึ่งสามารถเขียนเป็นอสมการได้ดังนี้

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \tag{3.10}$$

จากคุณสมบัติข้อ 2 และข้อ 3 จะได้ว่าค่ามิวที่ต่ำสุดได้มาจากความไม่แน่นอนที่มีโครงสร้างทแยงมุม (diagonal martix) และค่ามิวที่สูงสุดได้มาจากความไม่แน่นอนแบบไร้โครงสร้างหรือมีค่าทุกองค์ประกอบ

5. พิจารณาเมทริกซ์ U ที่มีโครงสร้างเหมือนกับ Δ ได้ว่า

$$\mu_\Delta(MU) = \mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(UM) \tag{3.11}$$

6. จากข้อ 5 ถ้าพิจารณาเมทริกซ์ปรับมาตราส่วนซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขสมมาตร $\Delta D = D\Delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mu_\Delta(DM) &= \mu_\Delta(MD) \\ \mu_\Delta(DMD^{-1}) &= \mu_\Delta(M) \end{aligned} \tag{3.12}$$

นั่นคือ การปรับมาตราส่วนด้วยเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสมมาตรไม่มีผลต่อค่ามิว

7. พิจารณาขอบเขตค่ามิวกับเมทริกซ์ปรับมาตราส่วน จะได้ว่า

$$\mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \tag{3.13}$$

จากคุณสมบัติข้อ 6 และ 7 เราจะนำไปประยุกต์ใช้ในการสังเคราะห์ตัวควบคุม

3.2.2 ทฤษฎีเสถียรภาพคงทน

กำหนดให้ M เป็นระบบปกติและ Δ เสถียร ซึ่งสอดคล้องรูปที่ 3.4 หากระบบ $M\Delta$ เสถียร สำหรับทุกค่า $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ จากเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนใน (3.4) และคุณสมบัติค่ามิวในข้อที่ 3 และ 4 จะได้ว่า

$$\text{RS} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_\Delta(M(j\omega)) < 1, \quad \forall\omega \tag{3.14}$$

3.2.3 ทฤษฎีสมรรถนะคงทน

กำหนดให้ N สอดคล้องกับรูปที่ 3.3 และระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนแล้ว เรานิยามเงื่อนไขสมรรถนะคงทนได้ดังนี้

$$\text{RP} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\hat{\Delta}}(N(j\omega)) < 1, \quad \forall\omega \tag{3.15}$$

สรุปเงื่อนไขสำหรับเสถียรภาพและสมรรถนะคงทน เมื่อพิจารณาด้วยค่ามิวดังนี้

1. NS $\Leftrightarrow$ N มีเสถียรภาพภายใน

2. NP $\Leftrightarrow$ $\bar{\sigma}(N_{22}) < 1, \ \forall\omega$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข NS

3. RS $\Leftrightarrow$ $\mu_{\Delta}(M) < 1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข NS

4. RP $\Leftrightarrow$ $\mu_{\tilde{\Delta}}(N) < 1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข NS

3.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนสำหรับระบบ SISO

พิจารณาเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนของระบบควบคุมดังรูปที่ 2.8 แสดงระบบควบคุมที่มีสัญญาณอ้างอิงหนึ่งสัญญาณและสัญญาณควบคุมหนึ่งสัญญาณ นั่นคือความไม่แน่นอนรวมของระบบมีค่าเป็น $\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}$ โดย Δ มีมิติเป็น 1x1 และเมทริกซ์ถ่ายโอนทั้งสามของระบบจากหัวข้อ 3.1 มีค่าเป็น

$$
\begin{aligned}
P &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & w_i \\ \frac{w_p}{\gamma}G_0 & \frac{w_p}{\gamma} & \frac{w_p}{\gamma}G_0 \\ \hline G_0 & 1 & -G_0 \end{array}\right] \\
N &= \begin{bmatrix} w_iT & w_iKS \\ \frac{w_p}{\gamma}G_0S & \frac{w_p}{\gamma}S \end{bmatrix} \\
M &= w_iT
\end{aligned}
$$

เงื่อนไขเสถียรภาพคงทนของระบบ SISO คือเงื่อนไขในอสมการ (3.14) และเงื่อนไขสมรรถนะคงทนของระบบ SISO คือเงื่อนไขในอสมการ (3.15) พิจารณาค่ามิวในเงื่อนไขสมรรถนะคงทนของระบบ SISO

$$
\begin{aligned}
\mu_{\tilde{\Delta}}(N) &= \mu_{\tilde{\Delta}}\left(\begin{bmatrix} w_iT & w_iKS \\ \frac{w_p}{\gamma}GS & \frac{w_p}{\gamma}S \end{bmatrix}\right) = \mu_{\tilde{\Delta}}\left(\begin{bmatrix} w_iT & w_iT \\ \frac{w_p}{\gamma}S & \frac{w_p}{\gamma}S \end{bmatrix}\right) \\
&= |w_iT| + \left|\frac{w_p}{\gamma}S\right| \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

จากคุณสมบัติของค่ามิวข้อที่ 2, 3 และ 4 จะได้ว่า

$$|w_iT| + \left|\frac{w_p}{\gamma}S\right| = \mu_{\tilde{\Delta}}(N) \le \bar{\sigma}(N) \qquad (3.17)$$

จากอสมการ (3.17) หาก $\bar{\sigma}(N)$ มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง จะทำให้ค่ามิวของ N น้อยกว่าหนึ่งด้วย ดังนั้นหากเราออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่สอดคล้องเงื่อนไขสมรรถนะคงทนแล้ว ตัวควบคุมมิวจะสอดคล้องเงื่อนไขสมรรถนะคงทนเช่นกัน แต่ในทางกลับกันไม่เป็นจริง

3.4 การสังเคราะห์มิว (μ synthesis) [1, หน้า 335-343]

วิธีการสังเคราะห์มิว เป็นการคำนวณตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทน ด้วยการพิจารณาโครงสร้างความไม่แน่นอน เมทริกซ์ปรับมาตราส่วนเป็นเมทริกซ์ที่ใช้ใน

การลดความอนุรักษ์ของการสังเคราะห์ตัวควบคุม การสังเคราะห์มิวคือการนำวัตถุประสงค์การควบคุมใน (2.10) รวมเมทริกซ์ปรับมาตราส่วน วัตถุประสงค์การควบคุมของการสังเคราะห์มิวจะเป็นดังนี้

$$\min_{K} \min_{D} \|DND^{-1}\|_{\infty} \tag{3.18}$$

ปัจจุบันยังไม่มีการคำนวณวิธีใดที่สามารถสังเคราะห์ตัวควบคุมได้จากวัตถุประสงค์ดังกล่าวโดยตรง อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ วิธีสำหรับการสังเคราะห์ตัวควบคุมมิวที่ใช้ในปัจจุบัน คือ การวนรอบดีเค (DK-iteration) ซึ่งรวมการสังเคราะห์ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้และการวิเคราะห์มิวเข้าด้วยกัน การคำนวณจะเริ่มจากการคำนวณขอบเขตบนของค่ามิวดังในอสมการ (3.13) และเปลี่ยนแปลงเมทริกซ์ปรับมาตราส่วนไปเรื่อยๆ จนกระทั่งการวนรอบไม่สามารถลดขนาดขอบเขตบนของค่ามิวหรือลดได้น้อย

3.4.1 ขั้นตอนของการออกแบบตัวควบคุมด้วยการวนรอบดีเค

การสังเคราะห์ตัวควบคุมด้วยการวนรอบเริ่มจากการกำหนดค่าเริ่มต้นของเมทริกซ์ปรับมาตราส่วน โดยทั่วไปจะกำหนดให้เมทริกซ์ปรับมาตราส่วนมีโครงสร้างเสถียร จากนั้นจะวนรอบเพื่อคำนวณตัวควบคุม ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นตอนเค (K-step) เป็นการสังเคราะห์ตัวควบคุมด้วยวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้ โดยให้เมทริกซ์ปรับมาตราส่วนมีค่าคงที่ วัตถุประสงค์ของการสังเคราะห์ตัวควบคุมในขั้นตอนนี้คือ

$$\min_{K} \|DND^{-1}\|_{\infty} \tag{3.19}$$

2. ขั้นตอนดี (D-step) เมื่อได้ตัวควบคุมดังขั้นตอนเคแล้ว เราจะหาเมทริกซ์ปรับมาตราส่วนใหม่เพื่อคำนวณในรอบต่อไป โดยวัตถุประสงค์ในขั้นตอนนี้คือ

$$\min_{D} \|DND^{-1}\|_{\infty} \tag{3.20}$$

เมื่อได้เมทริกซ์ปรับมาตราส่วนใหม่แล้ว ให้กลับไปขั้นตอนเคเพื่อสังเคราะห์ตัวควบคุมใหม่
การวนรอบจะหยุดเมื่อขอบเขตค่ามิวในแต่ละรอบมีขนาดใกล้เคียงกันหรือมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

ปัญหาของการวนรอบดีเคคือ ในขั้นตอนดีและขั้นตอนเคต่างก็เป็นการคำนวณเพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุดแบบนูน (convex optimization) แต่การรวมขั้นตอนทั้งสองเข้าด้วยกันไม่ได้ให้คำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหา (3.18) ดังนั้นคำตอบที่ได้อาจลู่เข้าสู่คำตอบเฉพาะที่ (local solution) และวิธีนี้ไม่ประกันการลู่เข้าของคำตอบ บางกรณีอาจลู่เข้าช้าหรือบางกรณีไม่ลู่เข้าเลย [33] ซึ่งอาจมีสาเหตุจากการคำนวณเชิงเลข ทางหนึ่งที่ช่วยให้การคำนวณลู่เข้าสู่คำตอบคือ การเพิ่มค่ามิวระหว่างการคำนวณซึ่งอาจช่วยแก้ปัญหาได้บ้างในบางกรณี ดังนั้นการคำนวณเชิงเลขเพื่อให้ได้คำตอบวงกว้าง (global solution) และประกันการลู่เข้าของคำตอบยังเป็นปัญหาเปิดที่ได้รับความสนใจในระยะเวลา 5 ปีที่ผ่านมา [34]

การสังเคราะห์ตัวควบคุมด้วยการวนรอบดีเคนี้ จะทำให้อันดับของตัวควบคุมมีค่าเท่ากับอันดับของระบบบวกด้วยอันดับของฟังก์ชันน้ำหนัก และบวกกับสองเท่าของอันดับของเมทริกซ์ปรับมาตราส่วน ซึ่งตัวควบคุมมิวจะมีอันดับสูงกว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ ดังนั้นข้อเสียอีกข้อของวิธีการสังเคราะห์มิวหรือวิธีการวนรอบดีเค คือ ตัวควบคุมที่ออกแบบได้มีอันดับสูง

3.5 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะคงทนของระบบ MIMO และ SISO เพื่อการสังเคราะห์มิวจากวิธีการวนรอบดีเค เมื่อพิจารณาข้อดีข้อเสียระหว่าง วิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้และวิธีการสังเคราะห์มิว วิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้เป็นตัวควบคุมที่มีความอนุรักษ์สูง ทำให้ไม่สามารถปรับปรุงสมรรถนะของระบบให้ดีได้ ต่างจากตัวควบคุมจากวิธีการสังเคราะห์มิวซึ่งคำนึงถึงโครงสร้างความไม่แน่นอนของระบบ ทำให้ตัวควบคุมมิวมีความความอนุรักษ์น้อยกว่าและปรับปรุงสมรรถนะของระบบให้ดีขึ้นด้วย อย่างไรก็ตามตัวควบคุมมิวจะมีอันดับสูงกว่าตัวควบคุมที่ได้จากวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้ ในการนำไปประยุกต์ใช้จริงหากตัวควบคุมมีอันดับสูง อาจทำให้เกิดปัญหาเชิงเลขขณะนำไปใช้จริงกับระบบได้ แนวทางการแก้ปัญหานี้อาจทำได้ด้วยการลดอันดับของตัวควบคุม เพื่อทำให้การคำนวณสะดวกขึ้น สำหรับกรณีที่ระบบควบคุมที่มีอันดับต่ำ ตัวควบคุมจากวิธีการสังเคราะห์มิวจะมีอันดับไม่สูงเกินไป วิธีการสังเคราะห์มิวน่าจะเป็นวิธีที่เหมาะสมกว่าวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้