# ริงผลต่างและเซมิฟิลด์ผลหารของเซมิริง



นายสุชัย ตนัยอัชฌาวุฒ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2529

ISBN 974 - 567 - 274 - 2

# THE DIFFERENCE RING AND QUOTIENT SEMIFIELDS OF A SEMIRING

Mr. Suchai Tanaiacdchawoot

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1986

| | |
|---|---|
| Thesis Title | The Difference Ring and Quotient Semifields of a semiring |
| By | Mr. Suchai Tanaiacdchawoot |
| Department | Mathematics |
| Thesis Advisor | Dr. Sidney S. Mitchell |

---

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the requirements for the Master's Degree.

Thavorn Vajrabhaya ............................ Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya, Ph.D.)

Thesis Committe

Yupaporn Kemprasit ............................ Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.)

Patanee Udomkavanich ............................ Member

(Dr.Patanee Udomkavanich, Ph.D.)

Sidney S. Mitchell ............................ Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ริงผลต่างและเซมิฟิลด์ผลหารของเซมิริง

ชื่อนิสิต นายสุชัย ตนัยอัชฌาวุฒ

อาจารย์ที่ปรึกษา Dr. Sidey S. Mitchell

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2529



บทคัดย่อ

เซต S ที่ประกอบด้วยไบนารีโอเปอเรชัน + และ · จะเรียกว่าเป็น <u>เซมิริง</u> ก็ต่อเมื่อ

(1) (S,+) และ (S,·) เป็นเซมิกรุปที่สลับที่ได้

(2) สำหรับทุกสมาชิก x,y,z ใน S, $(x+y)z = xz+yz$

เซมิริง (E,+,·) จะเรียกว่า <u>เรโซเซมิริง</u> ก็ต่อเมื่อ (E,·) เป็นกรุป

เซมิริง (K,+,·) จะเรียกว่า <u>เซมิฟิลด์</u> ก็ต่อเมื่อมี a ใน K ซึ่งทำให้ $(K-\{a\},\cdot)$ เป็นกรุป

เซมิริง (S,+,·) จะเรียกว่า <u>เซมิริงที่เกือบมีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ</u> ก็ต่อเมื่อ มี a ใน S ซึ่งทำให้ $(S-\{a\},\cdot)$ เป็นเซมิกรุปที่มีคุณสมบัติการตัดออก

ให้ $\mathcal{C}$ เป็น แคททิกอรี ซึ่งมี ออฟเจค เป็นเซมิริง และ มอร์ฟิซึม เป็น เซมิริงโฮโมมอร์ฟิซึม ให้ S เป็น ออฟเจคใน $\mathcal{C}$ <u>เซมิฟิลด์ผลหารของ S เทียบกับ $\mathcal{C}$</u> คือ (S,f,K) โดยที่ K เป็นเซมิฟิลด์ใน $\mathcal{C}$ และ f อยู่ใน มอร์(S,K) ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับแต่ละออฟเจค K' ซึ่งเป็นเซมิฟิลด์ ใน $\mathcal{C}$ และ แต่ละ i อยู่ใน มอร์ (S,K') แล้ว เราสามารถหา g อยู่ใน มอร์(K,K') ได้เพียงอย่างเดียวที่ทำให้ $g\circ f = i$

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ดังนั้น ริงผลต่าง ของ S มีเอกลักษณ์การคูณ ก็ต่อเมื่อมี a,b ใน S ที่ทำให้ สำหรับทุก x,y ใน S,
$ax+by+y = ay+bx+x$.

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ดังนั้น ริงผลต่าง ของ S เป็น อินทิกรัลโดเมน ก็ต่อเมื่อ

1) มี $a, b$ ใน S ที่ทำให้ สำหรับทุก $x, y$ ใน S, $ax+by+y = ay+bx+x$.
2) ทุก $x_1, x_2, y_1, y_2$ ใน S ถ้า $x_1y_1+x_2y_2 = x_1y_2+x_2y_1$ แล้ว $x_1=x_2$ หรือ $y_1 = y_2$

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ดังนั้น ริงผลต่าง ของ S เป็น ฟิลด์ ก็ต่อเมื่อมี $a, b$ ใน S ที่ทำให้

1) สำหรับทุก $x, y$ ใน S, $ax+by+y = ay+bx+x$
2) สำหรับทุก $x, y$ ใน S ที่ต่างกันมี $u, v$ ใน S ที่ทำให้ $b+xu+yv = a+xv+yu$.

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ ดังนั้น เรโชเซมิริงผลหารของS(QR(S))มีคุณสมบัติ ทุก $\alpha, \beta$ ใน QR(S) ที่ต่างกัน มี $\eta, \delta$ ใน QR(S) ที่ทำให้ $1+\alpha\eta+\beta\delta = \alpha\delta+\beta\eta$ โดยที่ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณของ QR(S) ก็ต่อเมื่อ ทุก $a_1, a_2, b_1, b_2$ ใน S ที่ $a_1b_2 \neq a_2b_1$ มี $x_1, x_2, y_1, y_2$ ใน S ที่ทำให้

$$a_2b_2x_2y_2 + a_1b_2x_2y_1 + a_2b_1x_1y_2 = a_1b_2x_1y_2 + a_2b_1x_2y_1$$

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีศูนย์ และ มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ ดังนั้น เซมิฟิลด์ผลหาร ที่มีศูนย์ ของ S(Q(S)) มีคุณสมบัติ ทุก $\alpha, \beta$ ใน Q(S) ที่ต่างกัน มี $\eta, \delta$ ใน Q(S) ที่ทำให้ $1+\alpha\eta+\beta\delta = \alpha\delta+\beta\eta$ โดยที่ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณของ Q(S) ก็ต่อเมื่อ ทุก $a_1, a_2, b_1, b_2$ ใน S ที่ $a_1b_2 \neq a_2b_1$ และ $a_2, b_2$ ไม่ใช่ศูนย์ มี $x_1, x_2, y_1, y_2$ ใน S ที่ $x_2$ และ $y_2$ ไม่ใช่ศูนย์ และ $a_2b_2x_2y_2+a_1b_2x_2y_1+a_2b_1x_1y_2 = a_1b_2x_1y_2+a_2b_1x_2y_1$.

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีศูนย์ และ มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ ดังนั้น เซมิฟิลด์ผลหาร ที่มีศูนย์ ของ S เป็น ฟิลด์ ก็ต่อเมื่อ ทุก x ใน S มี $a, b$ ใน S โดยที่ b ไม่ใช่ศูนย์ ที่ทำให้ $bx+a = 0$.

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่มีศูนย์ และ มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ และ มีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ดังนั้น ริงผลต่าง และ เซมิฟิลด์ผลหารที่มีศูนย์ ของ S เป็น ฟิลด์ ก็ต่อเมื่อ S เป็น ฟิลด์

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ S เป็นเซมิริงที่เกือบจะมีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ เทียบกับ a ดังนั้น สิ่งหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริงเพียงอย่างเดียว

(1) ทุก $x$ ใน $S$, $ax = a$ หรือ

(2) $a^2 = a$ และ $S$ มีเอกลักษณ์การคูณ ที่ไม่ใช่ $a$ และมี $b$ ที่ไม่ใช่ $a$ ทำให้ $ab \neq a$ หรือ

(3) ทุก $x$ ใน $S$, $ax = x$ หรือ

(4) $a^2 \neq a$ และ $S$ มีเอกลักษณ์การคูณ หรือ

(5) $xy \neq a$ ทุก $x, y$ ใน $S$

วิทยานิพนธ์นี้เรายังได้ศึกษาโครงสร้าง ของเซมิริงที่เกือบจะมีคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ และหาเซมิฟิลด์ผลหาร ในแคทฑิกอรีที่กำหนดมาให้.

Thesis Title The Difference Ring and Quotient Semifields of a Semiring

Name Mr. Suchai Tanaiacdchawoot

Thesis Advisor Sidney S. Mitchell, Ph.D.

Department Mathematics

Acadamic Year 1986

## ABSTRACT

A triple $(S,+,\cdot)$ is said to be a <u>semiring</u> if and only if $S$ is a set and $+$ and $\cdot$ are binary operations on $S$ such that

(1) $(S,+)$ and $(S,\cdot)$ are commutative semigroups.

(2) $(x+y)\cdot z = x\cdot z+y\cdot z$ for all $x,y,z \in S$.

A semiring $(E,+,\cdot)$ is said to be a <u>ratio semiring</u> if and only if $(E,\cdot)$ is a group.

A semiring $(K,+,\cdot)$ is said to be a <u>semifield</u> if and only if there exists an element $a$ in $K$ such that $(K-\{a\},\cdot)$ is a group.

A semiring $(S,+,\cdot)$ is said to be an <u>almost multiplicatively cancellative semiring</u> if and only if there exists an $a \in S$ such that $(S-\{a\},\cdot)$ is a cancellative semigroup.

Let $\mathcal{C}$ be a category whose objects are semirings and whose morphisms are semiring homomorphisms. Let $S$ be an object of $\mathcal{C}$. <u>A quotient semifield of S w.r.t. the category $\mathcal{C}$</u> is a triple $(S,f,K)$ where $K$ is a semifield in $\mathcal{C}$ and $f \in \mathrm{Mor}(S,K)$ is 1-1 such that for each semifield object $K'$ in $\mathcal{C}$ and for each $i \in \mathrm{Mor}(S,K')$ which are 1-1, there exists a unique $g \in \mathrm{Mor}(K,K')$ such that $g\circ f = i$.

Theorem. Let S be an A.C. semiring. Then the difference ring of S has a multiplicative identity if and only if there exist $a,b \in S$ such that for all $x,y \in S$, $ax+by+y = ay+bx+x$.

Theorem. Let S be an A.C. semiring. Then the difference ring of S is an integral domain if and only if

i) there exist $a,b \in S$ such that for all $x,y \in S$,
$ax+by+y = ay+bx+x$

ii) for all $x_1,x_2,y_1,y_2 \in S$, if $x_1y_1 + x_2y_2 = x_1y_2 + x_2y_1$ then
$x_1 = x_2$ or $y_1 = y_2$.

Theorem. Let S be an A.C. semiring. Then the difference ring of S is a field if and only if there exist $a,b \in S$ such that

i) for all $x,y \in S$, $ax+by+y = ay+bx+x$ and

ii) for all distinct $x,y \in S$, there exist $u,v \in S$ such that
$b+xu+yv = a+xv+yu$.

Proposition. Let S be an M.C. semiring. Then the quotient ratio semiring of S (QR(S)) satisfies the property that for all distinct $\alpha, \beta \in QR(S)$ there exist $\eta, \gamma \in QR(S)$ such that $1+\alpha\eta+\beta\gamma = \alpha\gamma+\beta\eta$ (where 1 is the multiplicative identity of QR(S)) if and only if for all $a_1,a_2,b_1,b_2 \in S$ such that $a_1b_2 \neq a_2b_1$ there exist $x_1,x_2,y_1,y_2 \in S$ such that

$$a_2b_2x_2y_2+a_1b_2x_2y_1+a_2b_1x_1y_2 = a_1b_2x_1y_2+a_2b_1x_2y_1.$$

Proposition. Let S be a O-M.C. semiring. Then the quotient O-semifield of S (Q(S)) satisfies the property that for all distinct $\alpha, \beta \in Q(S)$ there exist $\eta, \gamma \in Q(S)$ such that $1+\alpha\eta+\beta\gamma = \alpha\gamma+\beta\eta$ ( 1 is the multiplicative identity of Q(S)) if and only if for all $a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$ such that $a_1b_2 \neq a_2b_1$ and $a_2, b_2 \neq 0$ there exist $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ such that $x_2, y_2 \neq 0$ and $a_2b_2x_2y_2 + a_1b_2x_2y_1 + a_2b_1x_1y_2 = a_1b_2x_1y_2 + a_2b_1x_2y_1$.

<u>Theorem.</u> Let S be a 0-M.C. semiring. Then a quotient 0-semifield of S is a field if and only if for all $x \in S$ there exist $a, b \in S$ with $b \neq 0$ such that $bx + a = 0$.

<u>Theorem.</u> Let S be an A.C. and 0-M.C. semiring. Then the difference ring and the quotient 0-semifield are fields if and only if S is a field.

<u>Theorem.</u> Let S be and almost multiplicatively cancellative semiring with respect to a. Then exactly one of the following holds:

1) $ax = a$ for all $x \in S$, or
2) $a^2 = a$ and there exists a $1 \in S-\{a\}$ such that $1x = x$ for all $x \in S$ and there exists a $b \in S-\{a\}$ such that $ab \neq a$, or
3) $ax = x$ for all $x \in S$, or
4) there exists a $1 \in S-\{a\}$ such that $1x = x$ for all $x \in S$ and $a^2 \neq a$, or
5) $xy \neq a$ for all $x, y \in S$.

In this thesis we study the structure of almost multiplicatively cancellative semirings and we also study the problem of whether or not an almost multiplicatively cancellative semiring has a quotient semifield with respect to a given category.

ACKNOWLEDGEMENT

I am grateful to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Thanks are due to all of my teachers for their previous lectures.

In particular, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved mother, father, brother and sister for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS