บทที่ 2

ทฤษฎี และการคำนวณจากผลการทดลอง

2.1 ทฤษฎี

เมื่อพิจารณาการไหลของไหลที่อัดตัวไม่ได้ที่เป็นแบบ Steady State และ two-dimensional มีคุณสมบัติทางฟิสิกส์คงที่ ไม่มีแรงภายนอกกระทำการแจกแจงความเร็วที่ปากทางเข้าเป็นแบบพาราโบลิกและการไหลมีการปรับตัวเต็มที่

จากสมการคอนตินิวตี้ (Continuity) [4,8,11]

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad \ldots\ldots (2.1)$$

เมื่อ u = องค์ประกอบความเร็วของของไหลในทิศทาง x

v = องค์ประกอบความเร็วของของไหลในทิศทาง y

w = องค์ประกอบความเร็วของของไหลในทิศทาง z

ดังนั้นจากข้อกำหนดข้างต้น สมการ (2.1)ลดรูปเป็น [3]

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \quad \ldots\ldots (2.2)$$

จากสมการโมเมนตั้ม (momentum) หรือสมการนาเวียร์-สโตก (Navier-Stoke) ของการไหล [4,15,23]

ในทิศทาง x เขียนได้เป็น

$$u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z =$$

$$(-1/\rho)(\partial P/\partial x) + (\mu/\rho)(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2) \quad \ldots\ldots (2.3)$$

ในทิศทาง y เขียนได้เป็น

$$u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y + w\partial v/\partial z =$$

$$(-1/\rho)(\partial P/\partial y) + (\mu/\rho)(\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 + \partial^2 v/\partial z^2) \quad \ldots\ldots (2.4)$$

ในทิศทาง z เขียนได้เป็น

$$u\partial w/\partial x + v\partial w/\partial y + w\partial w/\partial z =$$

$$(-1/\rho)(\partial P/\partial z) + (\mu/\rho)(\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 + \partial^2 w/\partial z^2) \quad \ldots\ldots (2.5)$$

เมื่อ u,v และ w = องค์ประกอบความเร็วของของไหลในทิศทาง x,y และ z ตามลำดับ

P = ความดัน

μ = ความหนืดสัมบูรณ์ของของไหล

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

จากเอกสารอ้างอิง [3] ได้แจกแจงความเร็วในท่อสี่เหลี่ยมขนานจากสมมติฐานตามหลักการ Order-of-Magnitude ดังนี้

1. เทอม $\partial^2 u/\partial z^2$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอม $\partial^2 u/\partial x^2$ และ $\partial^2 u/\partial y^2$

   เทอม $\partial^2 u/\partial z^2$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอม $\partial^2 u/\partial x^2$ และ $\partial^2 u/\partial y^2$

2. ความเร็ว w น้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็ว u และ v ดังนั้นสมการ (2.5) และเทอม ของ w จึงละทิ้งได้

3. dP/dx และ dP/dy เป็นฟังก์ชั่นของ x และ y ตามลำดับเท่านั้น

ดังนั้นสมการ (2.3) และ(2.4)ลดรูปเขียนเป็นสมการ Dimensionless [3] ดังนี้ จาก(2.3)เขียนได้เป็น

$$u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y = -C\partial P/\partial x + (C\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (2.6)$$

จาก (2.4)เขียนได้เป็น

$$u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y = -\partial P/\partial y + (C\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2). \ldots\ldots\ldots (2.7)$$

เมื่อ $C = (b/L)^2$

และจากสมการพลังงาน (Energy equation)

$$U\partial T/\partial x + V\partial T/\partial y + W\partial T/\partial z = \alpha(\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2) \ldots\ldots (2.8)$$

เมื่อ T = อุณหภูมิเฉพาะที่

α = ค่าการฟุ้งกระจายความร้อนของของไหล

= $K/\rho C_p$

การนำความร้อนในแนวแกน z, $(\partial^2 T/\partial z^2)$ ไม่นำมาพิจารณา เมื่อเปรียบเทียบกับเทอม $\partial T/\partial x^2$ และ $\partial^2 T/\partial y^2$ และเนื่องจากความเร็ว w มีค่าน้อยมาก ดังนั้นสมการพลังงานลดรูปเขียนได้เป็นดังนี้

จาก (2.7)จะได้สมการ dimensionless [3]

$$U\partial T/\partial x + V\partial T/\partial y = (1/Pr)\,(C\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2) \qquad (2.9)$$

จากสมการ (2.2),(2.6),(2.7) และ(2.9)สามารถแก้สมการได้ โดยใช้วิธีการวิเคราะห์นิวเมอริคัล (Numerical Analysis) สำหรับการไหลในท่อสี่เหลี่ยม ซึ่งรายละเอียดดูได้จาก ดร. สหัส บัณฑิตกุล [1,2,3]

สรุปผลจากการวิเคราะห์จะได้สมการต่าง ๆ ดังนี้

สำหรับท่อคอคอดแบบยาวที่มีสภาพการให้อุณหภูมิเท่ากันตลอดพื้นผิว

$$Nu_m = 2.26\,Gz^{1/3} \qquad Gz > 70 \qquad (2.10)$$
$$= 9.3 \qquad Gz < 70$$

สำหรับท่อคอคอดแบบสั้น ที่มีสภาพการให้อุณหภูมิเท่ากันตลอดพื้นผิว

$$Nu_m = \begin{cases} 9.3 & B_H < 3.5 \\ 2.26\,Gz^{1/3} & 4.4 > B_H > 3.5 \\ 3.08\,B_H & B_H > 4.4 \end{cases} \qquad (2.11)$$

เมื่อ $Nu_m = hD_h/K$

$Gz = Re\,Pr\,D_h/L$

$B_H = Gz^{1/3}\sigma^{1/4}$ หรือ $B_F Pr^{1/3}$

$B_F = (ReD_h/L)^{1/3}\sigma^{1/4}$

และ $B_H > 4.4$ จะใช้เป็นเกณฑ์สำหรับท่อคอคอดแบบสั้น สมการความสัมพันธ์การไหลและช่วงที่ให้ความร้อน l_T สำหรับท่อคอคอดแบบยาวจะได้ดังนี้

$l_T/D_h = C_T \, Re \, Pr$ เมื่อ $C_T = 0.06$

$$\therefore \quad l_T/D_h = 0.06 \, Re \, Pr \qquad (2.12)$$

ในการไหลแบบปรับตัวเต็มที่ในท่อทั้งแบบลามินาร์ (Laminar) หรือเทอร์บูเลนท์ (Turbulent) ΔP จะเป็นสัดส่วนกับความยาวและมีความสัมพันธ์ดังนี้ [15,23]

$$\Delta P/L = \varphi(V,D,\rho,\mu,e) \qquad (2.13)$$

เมื่อ แรง F, มวล M, ความยาว L และ เวลา Q เป็นขนาดพื้นฐาน และ

V = ความเร็วเฉลี่ยของของไหล

D = เส้นผ่าศูนย์กลางท่อ

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

μ = ความหนืดสมบูรณ์ของของไหล

e = ความขรุขระของผิดท่อคอคอดมีหน่วยเป็นความยาว

จากทฤษฎีของ Pi จะได้ความสัมพันธ์ในรูปของสมการดังนี้

$$\Delta P/4(L/D)(\rho V^2/2) = \varphi(VD\rho/\mu, e/D) \qquad (2.14)$$

และความสัมพันธ์ในรูปของสมการของแฟนนิ่ง ดังนี้

$$f = \Delta P/4(L/D)(\rho V^2/2) \qquad (2.15)$$

เมื่อ f = สัมประสิทธิ์ความเสียดทานแฟนนิ่ง

จาก(2.14) และ(2.15) จะได้

$$f = \varphi(Re, e/D) \qquad (2.16)$$

สำหรับท่อเหลี่ยมใช้ D_h แทน D ดังนี้

$$D_h = 4A/P$$

$= 4$ (พื้นที่หน้าตัดท่อ)/ความยาวเส้นรอบท่อ

สำหรับการไหลแบบลามินาร์ระหว่างแผนขนาน Poisuille flow ได้ใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$\Delta P/\Delta X = 12\mu v/b^2$ ....(2.17)

เมื่อ b = ระยะห่างระหว่างแผ่นขนาน

$D_h = 2b$

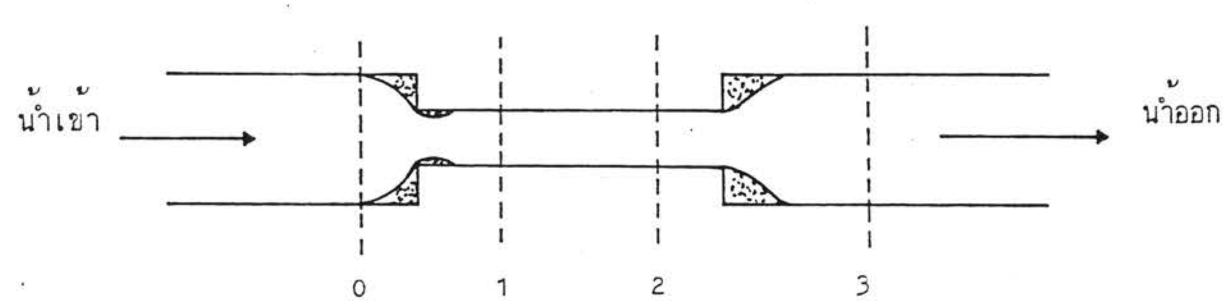
และสมการ (16) จะเขียนเป็น

$f = 24/Re$......................................(2.18)

การคำนวนหาค่า k_c และ K_e จากสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การสูญเสียและองค์ประกอบซึ่งสามารถวัดได้ในการทดลอง [3,21]

รูปที่ 2.1 รูปแสดงการลดและเพิ่มขนาดของท่ออย่างฉับพลัน

ท่อขนานที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดลดลงและเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน



จากสมการเบอร์นูลี่ (Bernaulli equation) [23]

$dH = d(P/\rho + V^2/2 + Zg_c) = dF$....................(2.19)

dF = The friction effect

$P/\rho + V^2/2 + g_c z$ = Bernoulli head, H

สมการ (2.19) ใช้สำหรับการไหลที่ไม่มีแรงเสียดทาน ($dF = 0$)

ความดันลดในท่อลดขนาดและเพิ่มขนาดอย่างฉับพลันเขียนลดรูปจากสมการ (2.19) และสัมประสิทธิ์การสูญเสีย เนื่องจากพลังงานจลน์ของการไหลในพื้นที่หน้าตัด ซึ่งเล็กมาก ดังนั้น $\Delta Z = 0$

จะได้ $(P_0 + P_1)/\rho_{01} + (V_0^2 + V_1^2)/2g_c = K_c V_0^2/2g_c$ ....(2.20)

$(P_2 - P_3)/\rho_{23} + (V_2^2 - V_3^2)/2g_c = K_e V_2^2/2g_c$ ....(2.21)

จากสมการต่อเนื่อง (Continuity Equation)

AV = ค่าคงที่

$\rho_0 = \rho_1$

$\rho_2 = \rho_3$

$A_1/A_0 = V_0/V_1$ และ $A_2/A_3 = V_3/V_2$ ....(2.22)

แทนสมการ (2.22) ใน (2.20) และ (2.21)

ดังนั้น สมการ (2.20) และ (2.21) ตามลำดับจะเขียนใหม่ได้เป็น

$\Delta P_1 = (1 - \sigma^2)\rho V^2/2g_c + K_c \rho V^2/2g_c$ ....(2.23)

$\Delta P_2 = -(1 - \sigma^2)\rho V^2/2g_c + K_e \rho V^2/2g_c$ ....(2.24)

ซึ่ง $\sigma = A_1/A_0 = A_2/A_3$

= อัตราส่วนของพื้นที่หน้าตัดคอกอดต่อพื้นที่หน้าตัดท่อขนาน

$V = V_1 = V_2$

= ความเร็วเฉลี่ยของของไหลในท่อ

ΔP_1 = ความดันลดเนื่องจากท่อลดขนาดอย่างฉับพลัน

ΔP_2 = ความดันลดเนื่องจากท่อเพิ่มขนาดอย่างฉับพลัน

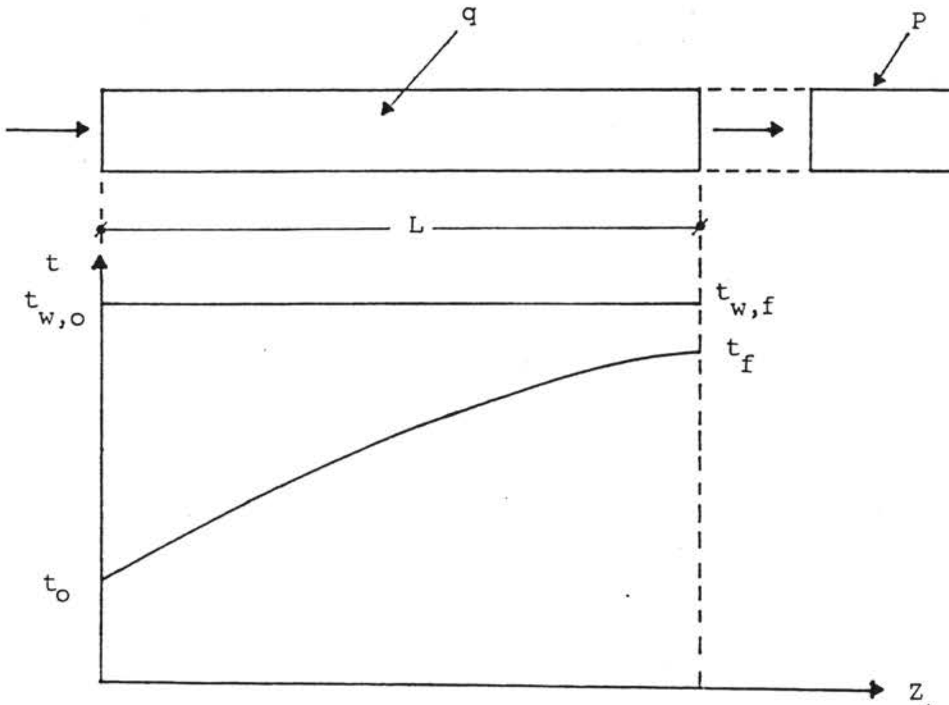
g_c = Conversion factor

ρ = ความหนาแน่นของของไหล

สัมประสิทธิ์การสูญเสีย K_c, K_e และตัวประกอบความเสียดทานแฟนนิ่ง f, หาได้จากสมการ (2.23),(2.24)และ (2.15) ตามลำดับ

ในการหาค่านัสเซลท์นัมเบอร์ Nu จากการทดลอง ท่อคอคอดที่จะพิจารณายาว L และเส้นรอบรูป p ความร้อนทั้งหมดถ่ายเทผ่านผิวท่อยอมเท่ากับความร้อนที่ของไหลรับไปขณะที่ไหลผ่านคอคอดส่วนนั้น สามารถแสดงในรูปของสมการดังนี้ [6,11,26]

รูปที่ 2.2 แสดงการถ่ายเทความร้อน



เมื่อ $q = h_m A \Delta t_1 = \dot{m} C_p (t_f - t_o)$ ....(2.25)

$A = PL$ และ $\dot{m} = \rho A_c V$

q = อัตราการถ่ายเทความร้อน

v = ความเร็วเฉลี่ยของไหลในทิศตามความยาวของท่อ

A_c = พื้นที่หน้าตัดของท่อคอคอด

C_p = ความจุความร้อนจำเพาะเฉลี่ยของของไหล

t_o = อุณหภูมิของของไหลก่อนเข้าท่อคอคอด

t_f = อุณหภูมิของของไหลหลังออกท่อคอคอด

h_m = ค่าเฉลี่ยแบบล็อกของสัมประสิทธิ์การพาความร้อน

Δt_1 = ค่าเฉลี่ยแบบล็อกของผลต่างอุณหภูมิ

$$\Delta t_1 = \frac{(t_{w,o} - t_o) - (t_{w,f} - t_f)}{\ln \dfrac{(t_{w,o} - t_o)}{(t_{w,f} - t_f)}} \quad \text{......(2.26)}$$

โดยที่ $t_{w,o}$ = อุณหภูมิผิวท่อคอคอดตรงปากทางเข้า

$t_{w,f}$ = อุณหภูมิผิวท่อคอคอดตรงปากทางออก

จาก (2.25) $h_m = \dfrac{\dot{m}C_p (t_f - t_o)}{A\Delta t_1}$ ......(2.27)

$$Nu_m = h_m D_h / K$$

แทนค่า $Nu_m = \dfrac{mC_p (t_f - t_o) D_h}{KPL\Delta t_1}$

$$Nu_m = \frac{\rho A_c V C_p (t_f - t_o) D_h}{KPL\Delta t_1}$$

$$Nu_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{VD_h^2}{\alpha L} \cdot \frac{(t_f - t_o)}{\Delta t_1} \quad \text{......(2.28)}$$

เมื่อ α = สัมประสิทธิ์การแพร่ความร้อนของของไหล

$= K/\rho C_p$

012322

2.2 สมการใช้งาน

จากทฤษฎีดังกล่าวมาแล้วสามารถสรุปสมการที่จะใช้ในการคำนวณผลจากการทดลองของวิทยานิพนธ์เรื่องนี้คือ

สำหรับหาค่าตัวประกอบเสียดทานแฟนนิ่ง "f" จากสมการ (2.15)

$$f = \Delta P/4(L/D_h)(\rho V^2/2)$$

สำหรับของค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียความดันของท่อขนานที่ลดขนาดลงลงอย่างฉับพลัน "K_c" จากสมการ (2.23)

$$K_c = \frac{2g_c \Delta P_c}{\rho V^2} - 1 + \sigma^2$$

สำหรับหาค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสียความดันของท่อขนานที่เพิ่มขนาดขึ้นอย่างฉับพลัน "K_e" จากสมการ (2.24)

$$K_e = \frac{2g_c \Delta P_c}{\rho v^2} + 1 - \sigma^2$$

สำหรับหาค่านัสเซลท์นัมเบอร์เฉลี่ย "Nu_m" จากสมการ (2.28)

$$Nu_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{VD_h}{\alpha L} \cdot \frac{(t_f - t_o)}{\Delta t_1}$$