โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ กึ่งกรุปย่อยปกติและสมาชิกปกติบางตัวของกึ่งกรุป $T_{P,X}$

A Regular Subsemigroup and Some Regular Elements of The Semigroup $T_{P,X}$

ชื่อนิสิต นายพชร พลอยเพ็ชร์ **เลขประจำตัว** 5933533923

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กึ่งกรุปย่อยปกติและสมาชิกปกติบางตัวของกึ่งกรุป $T_{P,X}$

นายพชร พลอยเพ็ชร์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

A Regular Subsemigroup and Some Regular Elements of The Semigroup $T_{P,X}$

Patchara Ploypetch

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science, Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	กึ่งกรุปย่อยปกติและสมาชิกปกติบางตัวของกึ่งกรุป $T_{P,X}$
โดย	นายพชร พลอยเพ็ชร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สำรวม บัวประดิษฐ์)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ)

พชร พลอยเพ็ชร์: กึ่งกรุปย่อยปกติและสมาชิกปกติบางตัวของกึ่งกรุป $T_{P,X}$
(A REGULAR SUBSEMIGROUP AND SOME REGULAR ELEMENTS OF THE SEMIGROUP $T_{P,X}$)
อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล, 34 หน้า.

ในโครงงานนี้ กำหนดให้ X เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง เราศึกษากึ่งกรุปย่อย $T_{P,X}$ ของกึ่งกรุปการแปลงเต็มบน X และศึกษาสับเซต $T_{P,k}$ ของ $T_{P,X}$ ซึ่งเป็นกึ่งกรุปย่อยปกติภายใต้การประกอบ และสุดท้ายได้ให้ตัวอย่างสมาชิกปกติของ $T_{P,X} - T_{P,k}$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต พชร

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

ปีการศึกษา 2562

5933533923: MAJOR MATHEMATICS. PATCHARA PLOYPETCH: A REGULAR SUBSEMIGROUP AND SOME REGULAR ELEMENTS OF THE SEMIGROUP $T_{P,X}$.

ADVISOR: ASSOC. PROF. SAJEE PIANSKOOL, Ph.D., 34 pp.

In this project, let X be a nonempty finite set. We study the subsemigroup $T_{P,X}$ of the full transformation semigroup on X and a subset $T_{P,k}$ of $T_{P,X}$ such that $T_{P,k}$ is a regular subsemigroup under composition. Finally, we provide some regular elements in $T_{P,X} - T_{P,k}$

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature ....

Field of Study: Mathematics Advisor's Signature ....

Academic Year: 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่องกึ่งกรุปย่อยปกติและสมาชิกปกติบางตัวของกึ่งกรุป $T_{P,X}$ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะได้รับความอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินโครงงานจึงขอขอบพระคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานนี้ที่คอยชี้แนะแนวทาง ขั้นตอนการดำเนินงาน รวมไปถึงตรวจทานข้อบกพร่องของโครงงานฉบับนี้จนกระทั่งโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สำรวม บัวประดิษฐ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ ซึ่งเป็นกรรมการในการสอบ และยังชี้ให้เห็นถึงข้อบกพร่องและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ของโครงงานฉบับนี้เพื่อนำไปแก้ไขจนทำให้โครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

พชร พลอยเพ็ชร์

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย iv

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ v

กิตติกรรมประกาศ vi

สารบัญ vii

บทที่ 1 บทนำและความรู้พื้นฐาน 1

บทที่ 2 กึ่งกรุปย่อยปกติ $T_{P,k}$ ของกึ่งกรุป $T_{P,X}$ และสมาชิกปกติบางตัวของ $T_{P,X}$ 9

บทที่ 3 ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ 24

เอกสารอ้างอิง 25

ภาคผนวก แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2562 27

ประวัติผู้เขียน 30

บทที่ 1
บทนำและความรู้พื้นฐาน

บทนี้ จะขอกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาโครงงานวิทยาศาสตร์นี้

บทนิยาม 1.1. *กึ่งกรุป* $(S,\cdot)$ ประกอบด้วยเซตไม่ว่าง S และ การดำเนินการทวิภาค $\cdot$ บน S ที่สอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ สำหรับทุก $a,b,c\in S$

เรียก $x\in S$ ว่า *สมาชิกปกติ* ถ้ามี $y\in S$ ซึ่ง $x = x\cdot y\cdot x$

เรียกกึ่งกรุป $(S,\cdot)$ ว่า *กึ่งกรุปปกติ* ถ้า x เป็นสมาชิกปกติ สำหรับทุก $x\in S$

ตัวอย่าง 1.2. กำหนดให้ $G=\{a,b\}$ และนิยาม $*$ บน G ดังนี้

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

จะได้ว่า G เป็นกึ่งกรุป [2]

พิจารณา $a\in G$ จะได้ว่ามี $b\in G$ ซึ่ง $a*b*a = a*a = a$

พิจารณา $b\in G$ จะได้ว่ามี $a\in G$ ซึ่ง $b*a*b = b*b = b$

สรุปได้ว่า $(G,*)$ เป็นกึ่งกรุปปกติ

ตัวอย่าง 1.3. กำหนดให้ $G = \{a, b, c\}$ และนิยาม $*$ บน G ดังนี้

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

จะได้ว่า $(G, *)$ เป็นกึ่งกรุป [2]

พิจารณา $c * a * c = a * c = a, c * b * c = a * c = a$ และ $c * c * c = a * c = a$ ดังนั้น c ไม่เป็นสมาชิกปกติใน G

สรุปได้ว่า กึ่งกรุป $(G, *)$ ไม่เป็นกึ่งกรุปปกติ

บทนิยาม 1.4. [1] ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง *กึ่งกรุปการแปลงเต็มบน* X เป็นกึ่งกรุป $(T_X, \circ)$ เมื่อ $\circ$ คือการประกอบ โดยที่

$$T_X = \{\alpha \mid \alpha : X \to X\}$$

ข้อตกลง ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง สำหรับแต่ละ $f, g \in T_X$ เขียน fg แทน $g \circ f$

บทนิยาม 1.5. ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง และ I เป็นเซตดรรชนี *ผลแบ่งกั้นของ* X คือ
เซต $P = \{A_i \subseteq X \mid i \in I\}$ ซึ่งสอดคล้องกับ

1. $A_i \neq \emptyset$ สำหรับทุก $i \in I$
2. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$
3. $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับทุก $i, j \in I$ ที่ $i \neq j$

ตลอดโครงงานเล่มนี้ กำหนดให้ X เป็นเซตไม่ว่าง และ $P = \{A_i \subseteq X \mid i \in I\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X

สำหรับแต่ละ $\alpha \in T_X$ และแต่ละ $x \in X$ ใช้สัญลักษณ์ $x\alpha$ แทน ภาพของ x ภายใต้ฟังก์ชัน α

สำหรับแต่ละ $\alpha \in T_X$ และแต่ละ $A_i \in P$ ใช้สัญลักษณ์ $A_i\alpha$ แทน ภาพของ A_i ภายใต้ฟังก์ชัน α

นอกจากนี้ $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับทั้งหมด

บทนิยาม 1.6. สำหรับ $\alpha \in T_X$ ให้ $rank(\alpha)$ แทน จำนวนสมาชิกของเซต $im(\alpha) = \{x\alpha \mid x \in X\}$ นอกจากนี้ ถ้า $rank(\alpha) = r$ โดยที่ $r \in \mathbb{N}$ แล้ว จะเขียนเซต $\{x\alpha \mid x \in X\}$ เป็น $\{x_j\alpha \mid j \in \{1, \ldots, r\}\}$ เมื่อ $x_1, \ldots, x_r \in X$

Rakbud ได้ให้นิยามใน [3] เซต $T_{P,X}$ เมื่อ P เป็นผลแบ่งกั้นของเซต X และในโครงงานนี้ เราจะแนะนำเซต $T_{P,k}$ ดังบทนิยาม 1.7

บทนิยาม 1.7. ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $P = \{A_i \subseteq X \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X นิยาม

$$T_{P,X} = \{\alpha \in T_X \mid \forall A_i \in P \exists A_j \in P, A_i\alpha \subseteq A_j\}$$

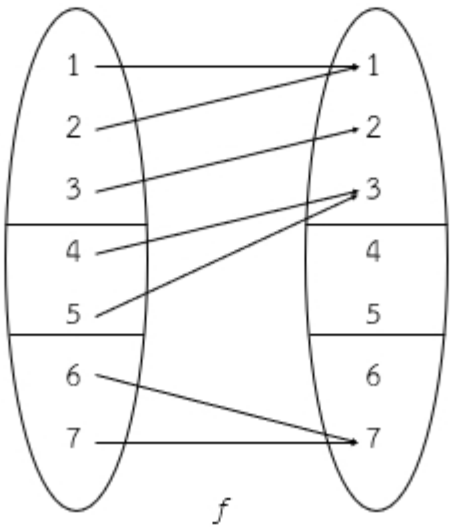
$$T_{P,k} = \{\alpha \in T_{P,X} \mid rank(\alpha) = k \text{ และ } \forall A_i \in P \exists! x_j\alpha \in im(\alpha), x_j\alpha \in A_i\}$$

ในโครงงานนี้ กำหนดให้ X เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุป (จาก [3] $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุป $(T_X, \circ)$) เราจะพิจารณาว่าสับเซต $T_{P,k}$ ของ $T_{P,X}$ เป็นกึ่งกรุปปกติหรือไม่ และท้ายสุด เราจะยกตัวอย่างสมาชิกปกติของเซต $T_{P,X} - T_{P,k}$

ตัวอย่าง 1.8. (ตัวอย่างสมาชิกของ $T_{P,X}$) ให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ พิจารณา $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$ ซึ่งชัดเจนว่า P เป็นผลแบ่งกั้นของ X นอกจากนี้ ให้

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5\} \text{ และ } A_3 = \{6, 7\}$$

พิจารณา แผนภาพฟังก์ชัน f ดังรูป



f

จะได้ว่า $im(f) = \{1, 2, 3, 7\}$ และชัดเจนว่า $f \in T_X$
พิจารณา A_1

$1f = 1, 2f = 1$ และ $3f = 2$

เพราะฉะนั้น $A_1 f \subseteq A_1$

พิจารณา A_2

$4f = 3$ และ $5f = 3$

เพราะฉะนั้น $A_2 f \subseteq A_1$

พิจารณา A_3

$6f = 7$ และ $7f = 7$

เพราะฉะนั้น $A_3 f \subseteq A_3$

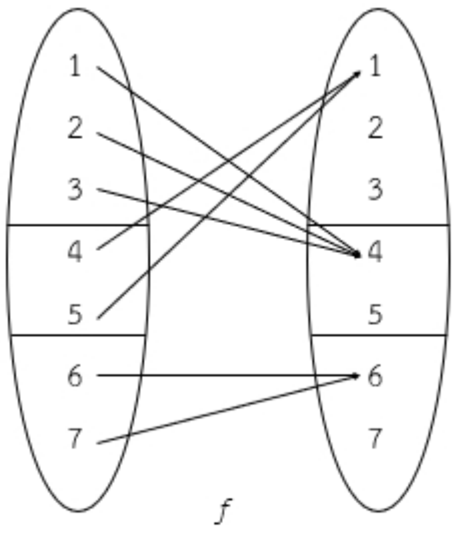
จึงได้ว่า $\forall A_i \in P \exists A_j \in P, A_i f \subseteq A_j$

สรุปได้ว่า $f \in T_{P,X}$

ตัวอย่าง 1.9. (ตัวอย่างสมาชิกของ $T_{P,k}$) ให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ พิจารณา $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$ ซึ่งชัดเจนว่า P เป็นผลแบ่งกั้นของ X นอกจากนี้ ให้

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5\} \text{ และ } A_3 = \{6, 7\}$$

พิจารณา แผนภาพฟังก์ชัน f ดังรูป



จะได้ว่า $im(f) = \{1, 4, 6\}$ และชัดเจนว่า $f \in T_{P,X}$

จะเห็นได้ว่า $rank(f) = 3 =$ จำนวนสมาชิกของผลแบ่งกั้น P

พิจารณา A_1

เห็นชัดว่ามี $1 \in im(f)$ เพียงตัวเดียวซึ่ง $1 \in A_1$

พิจารณา A_2

เห็นชัดว่ามี $4 \in im(f)$ เพียงตัวเดียวซึ่ง $4 \in A_2$

พิจารณา A_3

เห็นชัดว่ามี $6 \in im(f)$ เพียงตัวเดียวซึ่ง $6 \in A_3$

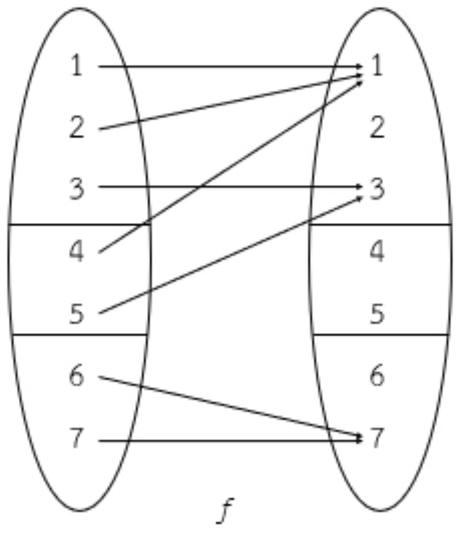
ดังนั้น $\forall A_i \in P \; \exists! \; x_j f \in im(f), x_j f \in A_i$ และ $rank(f) =$ จำนวนสมาชิกของ P

สรุปได้ว่า $f \in T_{P,k}$

ตัวอย่าง 1.10. (ตัวอย่างสมาชิกปกติของ $T_{P,X}$) ให้ $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ และ $P = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$ ซึ่งชัดเจนว่า P เป็นผลแบ่งกั้นของ X นอกจากนี้ ให้

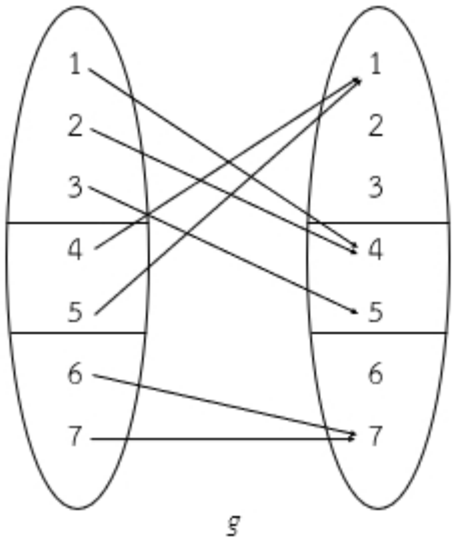
$$A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{4,5\} \text{ และ } A_3 = \{6,7\}$$

พิจารณา แผนภาพฟังก์ชัน f ดังรูป

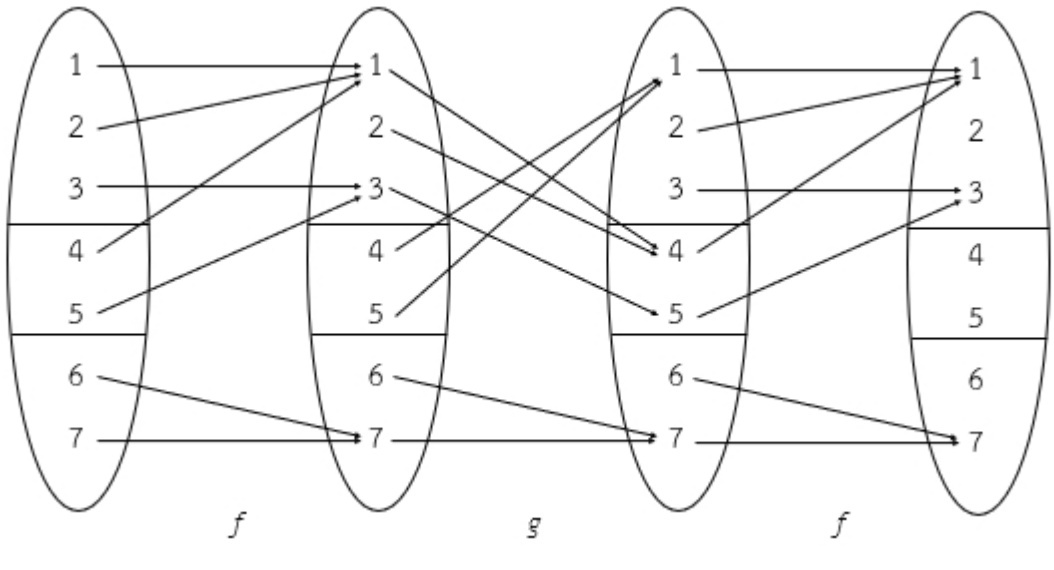


จะแสดงว่า f เป็นสมาชิกปกติใน $T_{P,X}$ นั่นคือ จะแสดงว่า มี $g \in T_{P,X}$ ซึ่ง $f = fgf$

นิยาม g ดังแผนภาพ



พิจารณา fgf จะได้ว่า



จากแผนภาพเห็นชัดว่า $fgf = f$

ต่อไปจะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$

จากแผนภาพ $im(g) = \{1, 4, 5, 7\}$ และชัดเจนว่า $g \in T_X$

พิจารณา A_1

$1g = 4, 2g = 4$ และ $3g = 5$

เพราะฉะนั้น $A_1 g \subseteq A_2$

พิจารณา A_2

$4g = 1$ และ $5g = 1$

เพราะฉะนั้น $A_2g \subseteq A_1$

พิจารณา A_3

$6g = 7$ และ $7g = 7$

เพราะฉะนั้น $A_3g \subseteq A_3$

จึงได้ว่า $\forall A_i \in P\ \exists A_j \in P, A_ig \subseteq A_j$

ดังนั้น $g \in T_{P,X}$

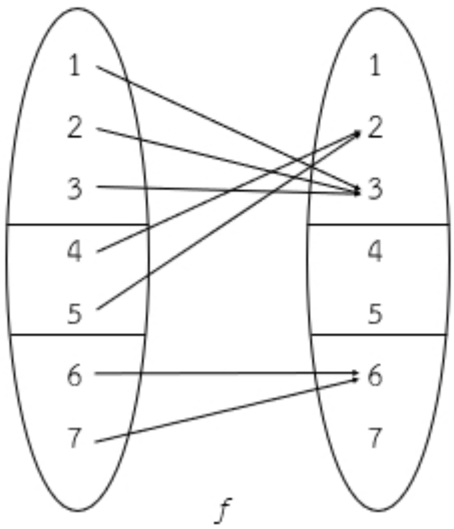
สรุปได้ว่า $\exists g \in T_{P,X}, f = fgf$

นั่นคือ f เป็นสมาชิกปกติใน $T_{P,X}$

ตัวอย่าง 1.11. (ตัวอย่างของสมาชิกของ $T_{P,X}$ ที่ไม่เป็นสมาชิกปกติ) ให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$ ซึ่งชัดเจนว่า P เป็นผลแบ่งกั้นของ X นอกจากนี้ ให้

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4, 5\} \text{ และ } A_3 = \{6, 7\}$$

พิจารณา แผนภาพฟังก์ชัน f ดังรูป



สมมติ f เป็นสมาชิกปกติใน $T_{P,X}$ นั่นคือ มี $g \in T_{P,X}$ ซึ่ง $f = fgf$

เพราะฉะนั้น $xf = x(fgf)$ ทุก $x \in X$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $2f = 2(fgf)$

ฉะนั้น $3 = 3(gf) = (3g)f$

จึงได้ว่า $3g \in \{1, 2, 3\} \subseteq A_1$

เนื่องจาก $4f = 4(fgf)$

ฉะนั้น $2 = 2(gf) = (2g)f$

จึงได้ว่า $2g = \{4, 5\} \subseteq A_2$

ดังนั้น $2g \in A_2$ แต่ $3g \in A_1$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $g \notin T_{P,X}$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น f ไม่เป็นสมาชิกปกติใน $T_{P,X}$

บทที่ 2
กึ่งกรุปย่อยปกติ $T_{P,k}$ ของกึ่งกรุป $T_{P,X}$ และสมาชิกปกติบางตัวของ $T_{P,X}$

ถึงแม้ว่า ใน [3] ได้กล่าวว่า $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_X, \circ)$ แต่ไม่ได้มีการพิสูจน์ไว้ เราจึงขอแสดงการพิสูจน์ของข้อความนี้

ทฤษฎีบท 2.1. กำหนดให้ X เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง $k \in \mathbb{N}$ และ $P = \{A_i \subseteq X \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X จะได้ว่า $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุป

บทพิสูจน์. เนื่องจาก $T_{P,X} \subseteq T_X$ ฉะนั้น เราจะแสดงว่า $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_X, \circ)$
ให้ $z \in X$ นิยาม $f : X \to X$ โดยที่ $f(x) = z$ สำหรับทุก $x \in X$
เพราะฉะนั้น $A_i f = \{z\}$ ทุก $i \in \{1, \ldots, k\}$
ดังนั้น $f \in T_{P,X}$ ทำให้ได้ว่า $T_{P,X} \neq \emptyset$

ต่อไปจะแสดงว่า $T_{P,X}$ มีสมบัติปิด
ให้ $f, g \in T_{P,X}$ และ $A_i \in P$ ฉะนั้นย่อมมี $A_j, A_{j'} \in P$ ซึ่ง $A_i f \subseteq A_j$ และ $A_j g \subseteq A_{j'}$
ดังนั้น $A_i fg = (A_i f)g \subseteq A_j g \subseteq A_{j'}$
นั่นคือ $A_i fg \subseteq A_{j'}$
เพราะฉะนั้น $fg \in T_{P,X}$
ดังนั้น $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_X, \circ)$
สรุปได้ว่า $(T_{P,X}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุป $\square$

ต่อไปจะแสดงว่า $(T_{P,k},\circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของ $(T_{P,X},\circ)$

ทฤษฎีบท 2.2. กำหนดให้ X เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง $k\in\mathbb{N}$ และ $P=\{A_i\subseteq X\mid i\in\{1,\ldots,k\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X จะได้ว่า $(T_{P,k},\circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_{P,X},\circ)$

บทพิสูจน์. สมมติให้ X เป็นเซตจำกัดขนาด n
จะแสดงก่อนว่า $T_{P,k}\neq\emptyset$ โดย ให้ $x_1\in A_1,x_2\in A_2,\ldots,x_k\in A_k$ นิยาม $f:X\to X$ โดย

$$f(x)=x_i \text{ เมื่อ } x\in A_i$$

ดังนั้น $A_if=\{x_i\}$ ทุก $i\in\{1,\ldots,k\}$ ดังนั้น $f\in T_{P,X}$
เนื่องจาก $x_1\in A_1,x_2\in A_2,\ldots,x_k\in A_k$ ฉะนั้น $x_1,\ldots,x_k$ ต่างกันหมด
ทำให้ได้ว่า $rank(f)=k$ และ $im(f)=\{x_1,\ldots,x_k\}$
เพราะฉะนั้น $T_{P,k}\neq\emptyset$ นอกจากนี้ เห็นชัดว่า $T_{P,k}\subseteq T_{P,X}$

ต่อไปจะแสดงว่า $(T_{P,k},\circ)$ มีสมบัติปิด ให้ $f,g\in T_{P,k}$ ดังนั้น $fg\in T_{P,X}$ เพราะว่า $T_{P,X}$ เป็นกึ่งกรุป และจะได้ว่า $rank(f)=k$ ดังนั้น มี $x_1,\ldots,x_k\in X$ ที่ต่างกันหมด ซึ่ง $im(f)=\{x_1f,\ldots,x_kf\}$ และ $x_1f,\ldots,x_kf$ ต่างกันหมด ให้ $X_f=\{x_1,\ldots,x_k\}$ เหลือเพียงแสดงว่า $rank(fg)=k$ และ $\forall A_i\in P\ \exists!\ x_jfg\in im(fg),x_jfg\in A_i$
ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\forall A_i\in P\ \exists!\ x_j\in X_f,x_j\in A_i$

ให้ $A_i\in P$ และโดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่ามี $x_1,x_2\in X_f$ ซึ่ง $x_1,x_2\in A_i$
จาก $f\in T_{P,X}$ เพราะฉะนั้น มี $l\in\{1,\ldots,k\}$ ซึ่ง $A_if\subseteq A_l$
ดังนั้น $x_1f,x_2f\in A_l$ เนื่องจาก $f\in T_{P,k}$ เพราะฉะนั้น $x_1f=x_2f$ ทำให้ได้ว่า $rank(f)<k$
ขัดแย้งกับ $rank(f)=k$ ดังนั้น $\forall A_i\in P\exists!x_j\in X_f,x_j\in A_i$

เรียงลำดับสมาชิกใน X_f ใหม่โดย ให้ $X_f=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}$ เมื่อ $x_{i_m}f\in A_m$ ทุก $m\in\{1,\ldots,k\}$ และจะได้ว่า $im(f)=\{x_{i_1}f,\ldots,x_{i_k}f\}$
ให้ $X_g=\{(x_{i_1}f)g,\ldots,(x_{i_k}f)g\}$ ดังนั้น $X_g\subseteq im(g)$
ต่อไปจะแสดงว่า $X_g=im(g)$ สมมติ $X_g\neq im(g)$
ฉะนั้น $X_g\subset im(g)$ จึงได้ว่า มี $z\in X$ ซึ่ง $zg\in im(g)$ แต่ $zg\notin X_g$
จาก $z\in X$ ดังนั้น มี $\beta\in\{1,\ldots,k\}$ ซึ่ง $z\in A_{i_\beta}$ ฉะนั้น $z,x_{i_\beta}f\in A_{i_\beta}$
จาก $g\in T_{P,X}$ เพราะฉะนั้น มี $\gamma\in\{1,\ldots,k\}$ ซึ่ง $A_{i_\beta}g\subseteq A_{i_\gamma}$
จาก $g\in T_{P,k}$ ทำให้ได้ว่า $zg=(x_{i_\beta}f)g\in X_g$
ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $X_g=im(g)$
จึงได้ว่า $im(fg)=(imf)g=\{x_{i_1}fg,\ldots,x_{i_k}fg\}=im(g)$
ดังนั้น $rank(fg)=rank(g)=k$

เพราะว่า $g \in T_{P,k}$ จึงได้ว่า $\forall A_i \in P \exists ! x_j g \in im(g), x_j g \in A_i$ แต่เพราะว่า
$im(g) = \{x_{i_1}fg, \ldots, x_{i_k}fg\} = im(fg)$ ฉะนั้น $\forall A_i \in P \exists ! x_{i_l}fg \in im(fg), x_{i_l}fg \in A_i$
ดังนั้น $fg \in T_{P,k}$
สรุปได้ว่า $(T_{P,k}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_{P,X}, \circ)$ $\square$

ในตอนนี้เราทราบแล้วว่า $(T_{P,k}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $(T_{P,X}, \circ)$ ในส่วนถัดไปจะแสดงว่า $(T_{P,k}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของ $(T_{P,X}, \circ)$ นั่นคือจะแสดงว่า $\forall f \in T_{P,k} \exists g \in T_{P,k}, f = fgf$

สำหรับทุก $f \in T_{P,k}$ เขียน $f = \begin{pmatrix} X_i \\ f_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ แทนการบอกว่า $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$ (สัญลักษณ์ $\sqcup$ แทน ยูเนียนแบบไม่มีส่วนร่วม) $rank(f) = k, im(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$ และ $\{f_i\}f^{-1} = X_i$ ทุก $i \in \{1, \ldots, k\}$ ซึ่งเป็นการใช้สัญลักษณ์ที่ปรากฏใน [1]

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4 จะพิสูจน์บทตั้ง 2.3

บทตั้ง 2.3. กำหนดให้ X เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง $k \in \mathbb{N}$ และ $P = \{A_i \subseteq X \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ X สำหรับทุก $f = \begin{pmatrix} X_i \\ f_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in T_{P,k}$ ได้ว่า $\forall X_i \subseteq X \exists ! A_j \in P$ ซึ่ง $X_i = A_j$

บทพิสูจน์. ให้ $f = \begin{pmatrix} X_i \\ f_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}} \in T_{P,k}$ โดยที่ $rank(f) = k, im(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$ และ $\{f_i\}f^{-1} = X_i$ ทุก $i \in \{1, \ldots, k\}$

ให้ $i \in \{1, \ldots, k\}$ พิจารณา X_i
จะแสดงว่า ไม่มีทางเกิดกรณีนี้ได้

มี $A_\alpha, A_\beta \in P$ ซึ่ง $\alpha \neq \beta, X_i \cap A_\alpha \neq \emptyset$ และ $X_i \cap A_\beta \neq \emptyset - (*)$

สมมติเพื่อหาข้อขัดแย้ง ให้ $x_1 \in X_i \cap A_\alpha$ และ $x_2 \in X_i \cap A_\beta$ เพราะฉะนั้น $x_1 f = f_i = x_2 f$ จาก $x_1 \in A_\alpha, x_2 \in A_\beta$ และ จาก $f \in T_{P,X}$ ย่อมมี $A_{\alpha'}, A_{\beta'} \in P$ ซึ่ง $A_\alpha f \subseteq A_{\alpha'}$ และ $A_\beta f \subseteq A_{\beta'}$ ดังนั้น $x_2 f = x_1 f \in A_{\alpha'}$ และ $x_2 f \in A_{\beta'}$ นั่นคือ $A_{\alpha'} \cap A_{\beta'} \neq \emptyset$ จะได้ว่า $\alpha' = \beta'$ เหลือชั้นใน P อีก $k - 2$ ชั้น ซึ่งในแต่ละชั้นจะมีสมาชิกของ $im(f)$ ได้ไม่เกิน 1 ตัว เพราะฉะนั้น $rank(f) \leq (k-2) + 1 = k - 1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $rank(f) = k$

ฉะนั้น สำหรับ $A_\alpha, A_\beta \in P$ ถ้า $X_i \cap A_\alpha \neq \emptyset$ หรือ $X_i \cap A_\beta \neq \emptyset$ แล้ว $\alpha = \beta$
นั่นคือ $\forall X_i \subseteq X \exists ! A_\alpha \in P, X_i \cap A_\alpha \neq \emptyset$
จึงได้ว่า $\forall X_i \subseteq X \exists ! A_\alpha \in P, X_i \subset A_\alpha \vee A_\alpha \subset X_i \vee X_i = A_\alpha$

ให้ $X_i \subseteq X$ ฉะนั้น มี $A_\alpha \in P$ เพียงชั้นเดียวเท่านั้นที่ $X_i \subset A_\alpha$ หรือ $A_\alpha \subset X_i$ หรือ $X_i = A_\alpha$ จะได้ว่า ไม่มีทางเกิดกรณี $A_\alpha \subset X_i$ มิเช่นนั้น จะได้ว่ามี $A_\beta \in P$ โดยที่ $\alpha \neq \beta$ และ $A_\beta \cap X_i \neq \emptyset$ ซึ่งขัดแย้งกับ $(*)$

ขั้นต่อมาจะแสดงว่า ไม่มีทางเกิดกรณี $X_i \subset A_\alpha$ สมมติว่า $X_i \subset A_\alpha$
ฉะนั้น มี $x_1 \in X_i$ และ $x_2 \in A_\alpha - X_i$ เพราะฉะนั้น $x_1 f = f_i$
จาก $f \in T_{P,X}$ ย่อมมี $A_l \in P$ ซึ่ง $A_\alpha f \subseteq A_l$ และจาก $x_1, x_2 \in A_\alpha$ ดังนั้น $x_1 f, x_2 f \in A_l$
จาก $f \in T_{P,k}$ เพราะฉะนั้น $x_2 f = x_1 f = f_i$ ดังนั้น $x_2 \in X_i$ ขัดแย้งกับ $x_2 \in A_\alpha - X_i$
ดังนั้น จึงสรุปว่า $\forall X_i \subseteq X \exists ! A_\alpha \in P, X_i = A_\alpha$
นั่นคือสำหรับทุก $f \in T_{P,k}$ ได้ว่า $\forall X_i \subseteq P \exists !\ A_j \in P$ ซึ่ง $X_i = A_j$ □

ทฤษฎีบท 2.4. $(T_{P,k}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของ $(T_{P,X}, \circ)$

บทพิสูจน์. เพียงพอที่จะแสดงว่า สำหรับแต่ละ $f \in T_{P,k}$ จะมี $g \in T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$
ให้ $f = \begin{pmatrix} X_i \\ f_i \end{pmatrix}_{\{1,\dots,k\}} \in T_{P,k}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $f_1 \in A_1, \dots, f_k \in A_k$ โดยบทตั้ง 2.3 ได้ว่า $\{X_1, \dots, X_k\}$ เป็นผลแบ่งกั้น P เช่นกัน ให้ $X_1 = A_{1'}, \dots, X_k = A_{k'}$ โดย $1', \dots, k' \in \{1, \dots, k\}$ และ $1', \dots, k'$ ต่างกันหมด
สำหรับแต่ละ $i \in \{1, \dots, k\}$ ให้ $g_i \in X_i$ และ $Y_i = A_i$ นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\dots,k\}}$

จะแสดงว่า $f = fgf$
ให้ $x \in X$ ฉะนั้น มี $i \in \{1, \dots, k\}$ ซึ่ง $x \in A_{i'} = X_i$ ดังนั้น $xf = f_i$ และ
$xfg = f_i g = g_i$ เพราะว่า $f_i \in A_i$ และ $A_i = Y_i$
ฉะนั้น $xfgf = g_i f = f_i = xf$ เพราะว่า $g_i \in X_i$
เพราะฉะนั้น $f = fgf$

สุดท้ายจะแสดงว่า $g \in T_{P,k}$ ให้ $A_{i'} \in P$ ฉะนั้น $A_{i'} = X_i$ จาก $g_i \in X_i$ ดังนั้น $g_i \in X_i = A_{i'}$ และจาก P เป็นผลแบ่งกั้น จึงได้ว่า $\forall A_{i'} \in P \exists ! g_i \in im(f), g_i \in A_{i'}$
เพราะฉะนั้น $g \in T_{P,k}$ □

จนถึงขณะนี้ทราบแล้วว่า $(T_{P,k}, \circ)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของ $(T_{P,X}, \circ)$ นั่นคือสมาชิกทุกตัวของ $T_{P,k}$ เป็นสมาชิกปกติ ฉะนั้นในโครงงานนี้จึงสนใจที่จะหาสมาชิกปกติของ $T_{P,X} - T_{P,k}$ โดยจะพิจารณาสมาชิกของ $T_{P.X} - T_{P,k}$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขบางอย่างเพิ่มเติม นั่นคือ พิจารณา $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $(*)$ (ซึ่งประกอบด้วย (1) , (2) และ (3))

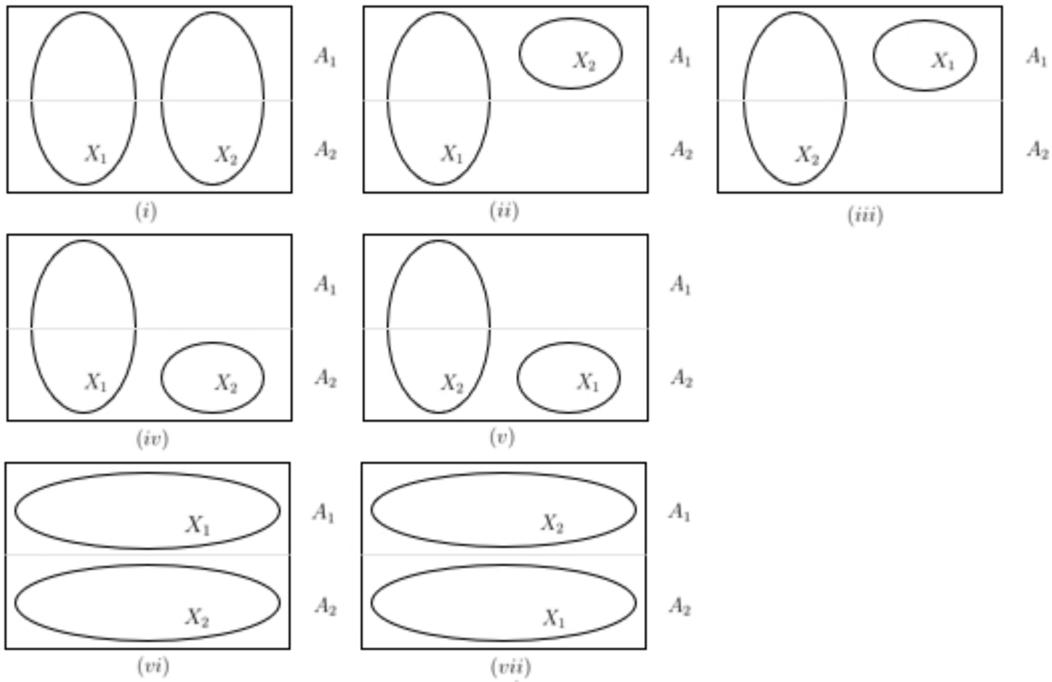
(1) $rank(f) = k$

(2) $\exists ! A_j \in P$ ที่มี $f_\alpha, f_\beta \in imf$ โดยที่ $\alpha \neq \beta$ ซึ่ง $f_\alpha, f_\beta \in A_j$ และ

(3) ทุก $A_l \in P$ ที่ $l \in \{1, \dots, k\} - \{j\}$ ถ้า $A_l \cap im(f) \neq \emptyset$ แล้ว $\exists ! f_\gamma \in im(f)$ ซึ่ง α, β, γ แตกต่างกันหมด $f_\gamma \in A_l$ และ $\{f_\gamma\} f^{-1} = A_l$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $f_1, f_2 \in A_1$ และ $f_3 \in A_3, \dots, f_k \in A_k$
เพราะฉะนั้น $X_3 = A_3, \dots, X_k = A_k$

พิจารณาความเป็นไปได้ของ X_1 และ X_2 เนื่องจาก $X_3 = A_3, \ldots, X_k = A_k$ ดังนั้น X_1 และ X_2 ต้องมีความเกี่ยวข้องกับ A_1 และ A_2 เท่านั้นโดยสามารถแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ดังนี้

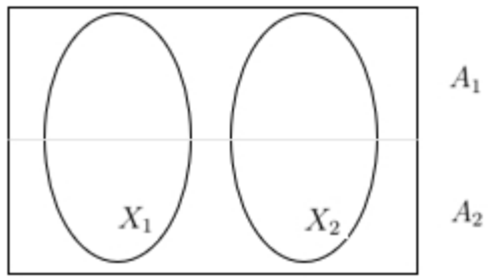


ต่อไปจะแสดงว่า สมาชิกของ $T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่สอดคล้องกรณี $(i) - (v)$ เป็นสมาชิกปกติ นั่นคือ จะแสดงว่า

สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่สอดคล้อง กรณี $(i) - (v)$ จะมี $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$

และสมาชิกของ $T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่สอดคล้องกรณี (vi) และ (vii) จะไม่เป็นสมาชิกปกติ
ซึ่งในการแสดงข้อความเหล่านี้ จะใช้สัญลักษณ์ที่กล่าวไว้ข้างต้น

ทฤษฎีบท 2.5. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (i) แล้วจะได้ว่า จะมี $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$



(i)

บทพิสูจน์. สามารถแบ่งเป็นกรณีย่อยได้ 4 กรณี

1. $f_1 \in X_1$ และ $f_2 \in X_2$
2. $f_1 \in X_2$ และ $f_2 \in X_1$
3. $f_1, f_2 \in X_1$
4. $f_1, f_2 \in X_2$

<u>**กรณี 1** $f_1 \in X_1$ **และ** $f_2 \in X_2$</u>
เลือก $g = f$ ดังนั้น $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$
ต่อมาจะแสดงว่า $f = fgf$
ให้ $x \in X$ ฉะนั้น มี $i \in \{1, \ldots, k\}$ ซึ่ง $x \in X_i$
ฉะนั้น $xf = f_i$ และเนื่องจาก $f_i \in X_i$ จึงได้ว่า
$xfg = xff = f_i f = f_i$ ดังนั้น $xfgf = f_i f = f_i = xf$
จึงได้ว่า $xf = xfgf$ ทุก $x \in X$
สรุปได้ว่า $f = fgf$
<u>**กรณี 2** $f_1 \in X_2$ **และ** $f_2 \in X_1$</u>
เลือก $g = f$ ดังนั้น $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$
ต่อมาจะแสดงว่า $f = fgf$
ให้ $x \in X$ ฉะนั้น มี $i \in \{1, \ldots, k\}$ ซึ่ง $x \in X_i$
<u>กรณี $x \in X_1$</u> จะได้ $xf = f_1$ ฉะนั้น $xfg = f_1 f = f_2$ เพราะว่า $f_1 \in X_2$
ดังนั้น $xfgf = f_2 f = f_1 = xf$ เพราะว่า $f_2 \in X_1$

<u>กรณี $x \in X_2$</u> จะได้ $xf = f_2$ ฉะนั้น $xfg = f_2f = f_1$ เพราะว่า $f_2 \in X_1$

ดังนั้น $xfgf = f_1f = f_2 = xf$ เพราว่า $f_1 \in X_2$

<u>กรณี $x \in X_i$</u> เมื่อ $i \in \{3, \ldots, k\}$ จะได้ $xf = f_i$ ฉะนั้น $xfg = f_if = f_i$ เพราะว่า $f_i \in X_i$

ดังนั้น $xfgf = f_if = f_i = xf$

จึงได้ว่า $xf = xfgf$ ทุก $x \in X$

สรุปได้ว่า $f = fgf$

<u>**กรณี 3** $f_1, f_2 \in X_1$</u>

ให้ $g_l \in X_l \cap A_1$ เมื่อ $l \in \{1, 2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

และให้ $Y_1 = X_1 - \{f_2\}, Y_2 = X_2 \cup \{f_2\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1, \ldots, k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$

ต่อไปจะแสดงว่า $f = fgf$ ให้ $x \in X$

<u>กรณี $x \in X_1$</u> จะได้ $xf = f_1$ ฉะนั้น $xfg = f_1g = g_1$ เพราะว่า $f_1 \in X_1 - \{f_2\} = Y_1$

ดังนั้น $xfgf = g_1f = f_1 = xf$ เพราะว่า $g_1 \in X_1$

<u>กรณี $x \in X_2$</u> จะได้ $xf = f_2$ ฉะนั้น $xfg = f_2g = g_2$ เพราะว่า $f_2 \in X_2 \cup \{f_2\} = Y_2$

ดังนั้น $xfgf = g_2f = f_2 = xf$ เพราะว่า $g_2 \in X_2$

<u>กรณี $x \in X_i$</u> เมื่อ $i \in \{3, \ldots, k\}$ จะได้ $xf = f_i$ ฉะนั้น $xfg = f_ig = g_i$ เพราะว่า

$f_i \in X_i = Y_i$ ดังนั้น $xfgf = g_if = f_i = xf$ เพราะว่า $g_i \in X_i$

จึงได้ว่า $xf = xfgf$ ทุก $x \in X$

สรุปได้ว่า $f = fgf$

ขั้นต่อมา จะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$ ให้ $x \in A_i$ เมื่อ $i \in \{1, \ldots, k\}$

<u>กรณี $x \in A_1$</u>

เนื่องจาก $Y_l = A_l$ ทุก $l \in \{3, \ldots, k\}$ ฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x \in Y_2$

กรณี $x \in Y_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_1$

กรณี $x \in Y_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_1$

ดังนั้น $A_1g \subseteq A_1$

<u>กรณี $x \in A_2$</u>

ฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x \in Y_2$ ทำนองเดียวกันกับกรณี $x \in A_1$

ดังนั้น $A_2g \subseteq A_1$

<u>กรณี $x \in A_i$</u> เมื่อ $i \in \{3, \ldots, k\}$

ฉะนั้น $x \in Y_i$ จะได้ว่า $xg = g_i \in A_i$

ดังนั้น $A_ig \subseteq A_i$

จึงได้ว่า สำหรับแต่ละ $i \in \{1, \ldots, k\}$ จะมี $j \in \{1, \ldots, k\}$ ซึ่ง $A_i g \subseteq A_j$
สรุปได้ว่า $g \in T_{P.X} - T_{P,k}$

กรณี 4 $f_1, f_2 \in X_2$

ให้ $g_l \in X_l \cap A_1$ เมื่อ $l \in \{1, 2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$
และให้ $Y_1 = X_1 \cup \{f_1\}, Y_2 = X_2 - \{f_1\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$
นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$
ต่อไปจะแสดงว่า $f = fgf$ ให้ $x \in X$

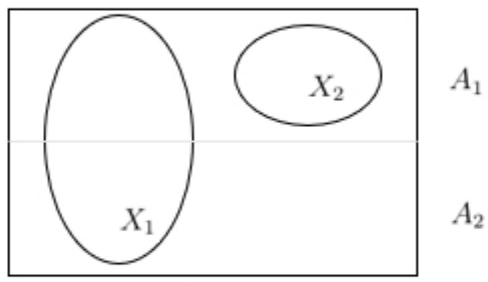
กรณี $x \in X_1$ จะได้ $xf = f_1$ ฉะนั้น $xfg = f_1 g = g_1$ เพราะว่า $f_1 \in X_1 \cup \{f_1\} = Y_1$
ดังนั้น $xfgf = g_1 f = f_1 = xf$ เพราะว่า $g_1 \in X_1$

กรณี $x \in X_2$ จะได้ $xf = f_2$ ฉะนั้น $xfg = f_2 g = g_2$ เพราะว่า $f_2 \in X_2 - \{f_1\} = Y_2$
ดังนั้น $xfgf = g_2 f = f_2 = xf$ เพราะว่า $g_2 \in X_2$

กรณี $x \in X_i$ เมื่อ $i \in \{3, \ldots, k\}$ จะได้ $xf = f_i$ ฉะนั้น $xfg = f_i g = g_i$ เพราะว่า
$f_i \in X_i = Y_i$ ดังนั้น $xfgf = g_i f = f_i = xf$ เพราะว่า $g_i \in X_i$

จึงได้ว่า $xf = xfgf$ ทุก $x \in X$ สรุปได้ว่า $f = fgf$
สามารถแสดงในทำนองเดียวกับกรณีที่ 3 สรุปได้ว่า $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ □

ทฤษฎีบท 2.6. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (ii) แล้วจะได้ว่า จะมี $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$



(ii)

บทพิสูจน์. สามารถแบ่งเป็นกรณีย่อยได้ 4 กรณี

1. $f_1 \in X_1$ และ $f_2 \in X_2$
2. $f_1 \in X_2$ และ $f_2 \in X_1$
3. $f_1, f_2 \in X_1$
4. $f_1, f_2 \in X_2$

<u>**กรณี 1** $f_1 \in X_1$ **และ** $f_2 \in X_2$</u> และ <u>**กรณี 2** $f_1 \in X_2$ **และ** $f_2 \in X_1$</u>

เลือก $g = f$ ดังนั้น $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$

และพิสูจน์เหมือนกรณี 1 และกรณี 2 ของทฤษฎีบท 2.5

สรุปได้ว่า $f = fgf$

<u>**กรณี 3** $f_1, f_2 \in X_1$</u>

ให้ $g_l \in X_l \cap A_1$ เมื่อ $l \in \{1, 2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

และให้ $Y_1 = X_1 - \{f_2\}, Y_2 = X_2 \cup \{f_2\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1, \ldots, k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$

และพิสูจน์เหมือนกรณีที่ 3 ของทฤษฎีบท 2.5

สรุปได้ว่า $f = fgf$

ขั้นต่อมา จะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$ ให้ $x \in A_i$ เมื่อ $i \in \{1, \ldots, k\}$

<u>กรณี $x \in A_1$</u>

  เพราะฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x \in Y_2$

  กรณี $x \in Y_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_1$

  กรณี $x \in Y_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_1$

  ดังนั้น $A_1 g \subseteq A_1$

<u>กรณี $x \in A_2$</u>

  เพราะฉะนั้น $x \in Y_1$ เท่านั้น เพราะ $Y_2 \cap A_2 = \emptyset$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_1$

  ดังนั้น $A_2 g \subseteq A_1$

<u>กรณี $x \in A_i$</u> เมื่อ $i \in \{3, ..., k\}$

  เพราะฉะนั้น $x \in Y_i$ จะได้ว่า $xg = g_i \in A_i$

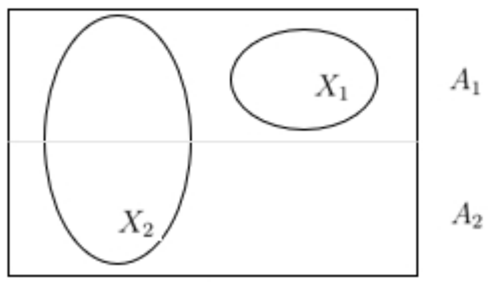
  ดังนั้น $A_i g \subseteq A_i$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $i \in \{1, ..., k\}$ จะมี $j \in \{1, ..., k\}$ ซึ่ง $A_i g \subseteq A_j$

ดังนั้น $g \in T_{P.X} - T_{P,k}$

<u>**กรณี 4** $f_1, f_2 \in X_2$</u>
ให้ $g_l \in X_l \cap A_1$ เมื่อ $l \in \{1,2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3,\ldots,k\}$
และ $Y_1 = X_1 \cup \{f_1\}, Y_2 = X_2 - \{f_1\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3,\ldots,k\}$
นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$
และพิสูจน์เหมือนกรณีที่ 4 ของทฤษฎีบท 2.5
สรุปได้ว่า $f = fgf$
ขั้นต่อมา จะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$
และพิสูจน์ทำนองเดียวกับกรณีที่ 3 ข้างต้น สรุปได้ว่า $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ □

ทฤษฎีบท 2.7. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (iii) แล้วจะได้ว่า จะมี $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$



(iii)

บทพิสูจน์. สามารถแบ่งเป็นกรณีย่อยได้ 4 กรณี

1. $f_1 \in X_1$ และ $f_2 \in X_2$
2. $f_1 \in X_2$ และ $f_1 \in X_1$
3. $f_1, f_2 \in X_1$
4. $f_1, f_2 \in X_2$

<u>**กรณี 1** $f_1 \in X_1$ **และ** $f_2 \in X_2$</u> และ <u>**กรณี 2** $f_1 \in X_2 f_2 \in X_1$</u>
เลือก $g = f$ ดังนั้น $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$
และพิสูจน์เหมือนกรณี 1 และกรณี 2 ของทฤษฎีบท 2.5
สรุปได้ว่า $f = fgf$
<u>**กรณี 3** $f_1, f_2 \in X_1$</u>
ให้ $g_l \in X_l \cap A_1$ เมื่อ $l \in \{1,2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3,\ldots,k\}$

และให้ $Y_1 = X_1 - \{f_2\}, Y_2 = X_2 \cup \{f_2\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$
นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$
และพิสูจน์เหมือนกรณีที่ 3 ของทฤษฎีบท 2.5

สรุปได้ว่า $f = fgf$

ขั้นต่อมา จะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$ ให้ $x \in A_i$ เมื่อ $i \in \{1, \ldots, k\}$

<u>กรณี $x \in A_1$</u>

เพราะฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x \in Y_2$

กรณี $x \in Y_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_1$

กรณี $x \in Y_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_1$

ดังนั้น $A_1 g \subseteq A_1$

<u>กรณี $x \in A_2$</u>

เพราะฉะนั้น $x \in Y_2$ เท่านั้น เพราะ $Y_1 \cap A_2 = \emptyset$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_1$

ดังนั้น $A_2 g \subseteq A_1$

<u>กรณี $x \in A_i$</u> สำหรับ $i \in \{3, \ldots, k\}$

เพราะฉะนั้น $x \in Y_i$ จะได้ว่า $xg = g_i \in A_i$

ดังนั้น $A_i g \subseteq A_i$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $i \in \{1, \ldots, k\}$ จะมี $j \in \{1, \ldots, k\}$ ซึ่ง $A_i g \subseteq A_j$

ดังนั้น $g \in T_{P.X} - T_{P,k}$

<u>**กรณี 4** $f_1, f_2 \in X_2$</u>

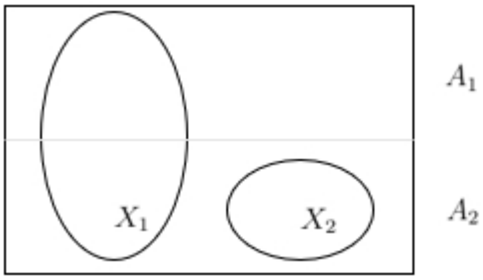
ให้ $g_l \in X_l \cap A_1$ เมื่อ $l \in \{1, 2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

และให้ $Y_1 = X_1 \cup \{f_1\}, Y_2 = X_2 - \{f_1\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$
นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$
และพิสูจน์เหมือนกรณีที่ 4 ของทฤษฎีบท 2.5

สรุปได้ว่า $f = fgf$

และพิสูจน์ทำนองเดียวกับกรณีที่ 3 ข้างต้น สรุปได้ว่า $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.8. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (iv) แล้วจะได้ว่า จะมี $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$



(iv)

บทพิสูจน์. เนื่องจาก $f_1, f_2 \in A_1$ ฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า $f_1, f_2 \in X_1$ เท่านั้น

ให้ $g_l \in X_l \cap A_2$ เมื่อ $l \in \{1, 2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

และให้ $Y_1 = X_1 - \{f_2\}, Y_2 = X_2 \cup \{f_2\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \ldots, k\}$

นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\ldots,k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$

ต่อไปจะแสดงว่า $f = fgf$ ให้ $x \in X$

<u>กรณี $x \in X_1$</u> จะได้ $xf = f_1$ ฉะนั้น $xfg = f_1 g = g_1$ เพราะว่า $f_1 \in X_1 - \{f_2\} = Y_1$

ดังนั้น $xfgf = g_1 f = f_1 = xf$ เพราะว่า $g_1 \in X_1$

<u>กรณี $x \in X_2$</u> จะได้ $xf = f_2$ ฉะนั้น $xfg = f_2 g = g_2$ เพราะว่า $f_2 \in X_2 \cup \{f_2\} = Y_2$

ดังนั้น $xfgf = g_2 f = f_2 = xf$ เพราะว่า $g_2 \in X_2$

<u>กรณี $x \in X_i$</u> เมื่อ $i \in \{3, \ldots, k\}$ จะได้ $xf = f_i$ ฉะนั้น $xfg = f_i g = g_i$ เพราะว่า

$f_i \in X_i = Y_i$ ดังนั้น $xfgf = g_i f = f_i = xf$ เพราะว่า $g_i \in X_i$

จึงได้ว่า $xf = xfgf$ ทุก $x \in X$

สรุปได้ว่า $f = fgf$

ขั้นต่อไป จะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$ ให้ $x \in A_i$ เมื่อ $i \in \{1, \ldots, k\}$

<u>กรณี $x \in A_1$</u>

เพราะฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x = f_2$

กรณี $x \in Y_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_2$

กรณี $x = f_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_2$

ดังนั้น $A_1 g \subseteq A_2$

<u>กรณี $x \in A_2$</u>

เพราะฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x \in Y_2$

กรณี $x \in Y_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_2$

กรณี $x \in Y_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_2$

ดังนั้น $A_2 g \subseteq A_2$

<u>กรณี $x \in A_i$</u> สำหรับ $i \in \{3, \dots, k\}$

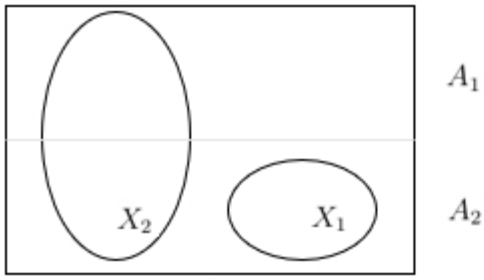
เพราะฉะนั้น $x \in Y_i$ จะได้ว่า $xg = g_i \in A_i$

ดังนั้น $A_i g \subseteq A_i$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $i \in \{1, \dots, k\}$ จะมี $j \in \{1, \dots, k\}$ ซึ่ง $A_i g \subseteq A_j$

ดังนั้น $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ $\square$

ทฤษฎีบท 2.9. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (v) แล้วจะได้ว่า จะมี $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง $f = fgf$



(v)

บทพิสูจน์. เนื่องจาก $f_1, f_2 \in A_1$ ฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า $f_1, f_2 \in X_2$ เท่านั้น

ให้ $g_l \in X_l \cap A_2$ เมื่อ $l \in \{1, 2\}$ และ $g_l \in X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \dots, k\}$

และให้ $Y_1 = X_1 \cup \{f_1\}, Y_2 = X_2 - \{f_1\}$ และ $Y_l = X_l$ เมื่อ $l \in \{3, \dots, k\}$

นิยาม $g = \begin{pmatrix} Y_i \\ g_i \end{pmatrix}_{i \in \{1,\dots,k\}}$ ชัดเจนว่า $g : X \to X$ และ $g \notin T_{P,k}$

ต่อไปจะแสดงว่า $f = fgf$ ให้ $x \in X$

<u>กรณี $x \in X_1$</u> จะได้ $xf = f_1$ ฉะนั้น $xfg = f_1 g = g_1$ เพราะว่า $f_1 \in X_1 \cup \{f_1\} = Y_1$)

ดังนั้น $xfgf = g_1 f = f_1 = xf$ เพราะว่า $g_1 \in X_1$

<u>กรณี $x \in X_2$</u> จะได้ $xf = f_2$ ฉะนั้น $xfg = f_2 g = g_2$ เพราะว่า $f_2 \in X_2 - \{f_1\} = Y_2$

ดังนั้น $xfgf = g_2 f = f_2 = xf$ เพราะว่า $g_2 \in X_2$

<u>กรณี $x \in X_i$</u> เมื่อ $i \in \{3, \dots, k\}$ จะได้ $xf = f_i$ ฉะนั้น $xfg = f_i g = g_i$ เพราะว่า

$f_i \in X_i = Y_i$ ดังนั้น $xfgf = g_i f = f_i = xf$ เพราะว่า $g_i \in X_i$

จึงได้ว่า $xf = xfgf$ ทุก $x \in X$

สรุปได้ว่า $f = fgf$

ขั้นต่อไป จะแสดงว่า $g \in T_{P,X}$ ให้ $x \in A_i$ เมื่อ $i \in \{1, \dots, k\}$

<u>กรณี $x \in A_1$</u>

เพราะฉะนั้น $x = f_1$ หรือ $x \in Y_2$

กรณี $x = f_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_2$

กรณี $x \in Y_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_2$

ดังนั้น $A_1 g \subseteq A_2$

<u>กรณี $x \in A_2$</u>

เพราะฉะนั้น $x \in Y_1$ หรือ $x \in Y_2$

กรณี $x \in Y_1$ จะได้ว่า $xg = g_1 \in A_2$

กรณี $x \in Y_2$ จะได้ว่า $xg = g_2 \in A_2$

ดังนั้น $A_2 g \subseteq A_2$

<u>กรณี $x \in A_i$</u> สำหรับ $i \in \{3, \ldots, k\}$

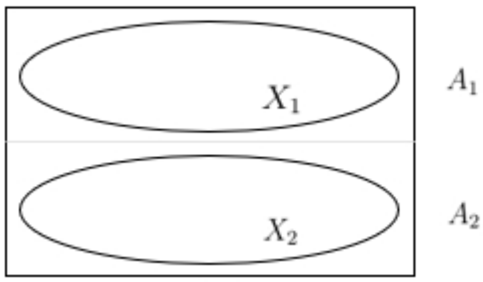
เพราะฉะนั้น $x \in Y_i$ จะได้ว่า $xg = g_i \in A_i$

ดังนั้น $A_i g \subseteq A_i$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $i \in \{1, \ldots, k\}$ จะมี $j \in \{1, \ldots, k\}$ ซึ่ง $A_i g \subseteq A_j$

ดังนั้น $g \in T_{P,X} - T_{P,k}$ □

ทฤษฎีบท 2.10. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (vi) แล้ว จะไม่มี $g \in T_{P,X}$ ซึ่ง $f = fgf$



(vi)

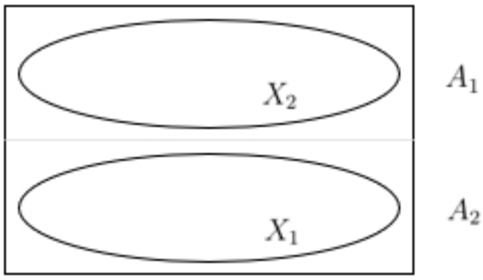
บทพิสูจน์. สมมติว่ามี $g \in T_{P,X}$ ซึ่ง $f = fgf$ พิจารณา $x_1 \in X_1$ และ $x_2 \in X_2$

ดังนั้น $x_1 f = x_1 fgf$ นั่นคือ $f_1 = f_1 gf$ ดังนั้น $f_1 g \in X_1 \subseteq A_1$

และ $x_2 f = x_2 fgf$ นั่นคือ $f_2 = f_2 gf$ ดังนั้น $f_2 g \in X_2 \subseteq A_2$

ขัดแย้งกับ $g \in T_{P,X}$ เนื่องจาก $f_1, f_2 \in X_1 \subseteq A_1$ แต่ $f_1 g \in A_1$ และ $f_2 g \in A_2$ □

ทฤษฎีบท 2.11. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ถ้า f สอดคล้องกับกรณี (vii) แล้ว จะไม่มี $g \in T_{P,X}$ ซึ่ง $f = fgf$



(vii)

บทพิสูจน์. สมมติว่ามี $g \in T_{P,X}$ ซึ่ง $f = fgf$
พิจารณา $x_1 \in X_1$ และ $x_2 \in X_2$
ดังนั้น $x_1 f = x_1 fgf$ นั่นคือ $f_1 = f_1 gf$ ดังนั้น $f_1 g \in X_1 \subseteq A_2$
และ $x_2 f = x_2 fgf$ นั่นคือ $f_2 = f_2 gf$ ดังนั้น $f_2 g \in X_2 \subseteq A_1$
ขัดแย้งกับ $g \in T_{P,X}$ เนื่องจาก $f_1, f_2 \in X_2 \subseteq A_1$ แต่ $f_1 g \in A_2$ และ $f_2 g \in A_1$ $\square$

จากทฤษฎีบท 2.5 - ทฤษฎีบท 2.11 สรุปได้ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 2.12. สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $(*)$ ได้ว่า

f เป็นสมาชิกปกติ ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องเงื่อนไขหนึ่งในกรณี (i) ถึงกรณี (v)

บทที่ 3
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานเล่มนี้มุ่งเน้นที่จะพิสูจน์ว่า $T_{P,X}$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ T_X และ $T_{P,k}$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของ $T_{P,X}$ ภายใต้การประกอบ นั่นคือ แต่ละสมาชิกของ $T_{P,k}$ เป็นสมาชิกปกติ ในตอนแรกโครงงานนี้ได้มีแผนการที่จะศึกษาสมาชิกอื่นนอกเหนือจากสมาชิกในเซต $T_{P,k}$ ว่าเป็นสมาชิกปกติหรือไม่ จึงได้เริ่มศึกษาจาก $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่มีสมบัติ

(1) $rank(f) = k$

(2) $\exists! A_j \in P$ ที่มี $f_\alpha, f_\beta \in imf$ โดยที่ $\alpha \neq \beta$ ซึ่ง $f_\alpha, f_\beta \in A_j$ และ

(3) $\forall A_l \in P$ ที่ $l \in \{1, \ldots, k\} - \{j\}$ ถ้า $A_l \cap im(f) \neq \emptyset$ แล้ว $\exists! f_\gamma \in im(f)$ ซึ่ง α, β, γ แตกต่างกันหมด $f_\gamma \in A_l$ และ $\{f_\gamma\}f^{-1} = A_l$

เราพบว่า สามารถขยายแนวคิดนี้ออกไปได้เป็น

สำหรับ $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่มีสมบัติ

(1) $rank(f) = k$

(2) $\exists! A_{j_1}, A_{j_2} \in P$ ที่มี $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\delta \in imf$ โดยที่ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ต่างกันหมด ซึ่ง $f_\alpha, f_\beta \in A_{j_1}$ และ $f_\gamma, f_\delta \in A_{j_2}$ และ

(3) $\forall A_l \in P$ ที่ $l \in \{1, \ldots, k\} - \{j_1, j_2\}$ ถ้า $A_l \cap im(f) \neq \emptyset$ แล้ว $\exists! f_\epsilon \in imf$ ซึ่ง $\epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ แตกต่างกันหมด $f_\epsilon \in A_l$ และ $\{f_\epsilon\}f^{-1} = A_l$

หรืออาจขยายแนวคิดออกไปในลักษณะ

ถ้า $|X|$ เป็นจำนวนคู่ พิจารณา $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ที่มีสมบัติ

$\exists! A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{\frac{k}{2}}}$ ที่มี $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k} \in im(f)$ โดยที่ $j_1, j_2, \ldots j_k$ แตกต่างกันหมด ซึ่ง $f_{j_1}, f_{j_2} \in A_{i_1}, f_{j_3}, f_{j_4} \in A_{i_2}, \ldots, f_{j_{k-1}}, f_{j_k} \in A_{i_{\frac{k}{2}}}$ หรือ

ถ้า $|X|$ เป็นจำนวนคี่ พิจารณา $f \in T_{P,X} - T_{P,k}$ ซึ่ง

$\exists! A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}$ ที่มี $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_{k-1}} \in im(f)$ โดยที่ $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ แตกต่างกันหมด ซึ่ง $f_{j_1}, f_{j_2} \in A_{i_1}, f_{j_3}, f_{j_4} \in A_{i_2}, \ldots, f_{j_{k-2}}, f_{j_{k-1}} \in A_{i_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}$

หรือจะขยายแนวคิดไปในทิศทางอื่นนอกเหนือจากข้อเสนอแนะเหล่านี้ก็ได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Dolinka, I., and East, J.*Variants of finite full transformation semigroups*. Department of Mathematics and Informatics, University of Novi, 2015: page 3

[2] Mitchell, J.D. *Computing a finite semigroup*. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, 2014: page 7

[3] Rakbud, J. *Regularity of a Particular Subsemigroup of the Semigroup of Transformations Preserving an Equivalence*. Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University, 2018: page. 3

ภาคผนวก

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) กึ่งกรุปย่อยปกติและสมาชิกบางตัวของกึ่งกรุป $T_{P,X}$ ที่มีตัวผกผัน

ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) A Regular Subsemigroup and Some Invertible Elements of The $T_{P,X}$ Semigroup

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. ศจี เพียรสกุล

ผู้ดำเนินการ นายพชร พลอยเพ็ชร์ เลขประจำตัวนิสิต 5933533923
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

กึ่งกรุป$(Semigroup)(S,\cdot)$ ประกอบด้วยเซตไม่ว่าง S และการดำเนินการทวิภาค $\cdot$ บนเซต S ที่สอดคล้องสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ สำหรับทุก $a, b, c \in S$

เรียกกึ่งกรุป$(S,\cdot)$ ว่า *กึ่งกรุปปกติ*$(Regularsemigroup)$ ถ้า สำหรับแต่ละ $x \in S$ มี $y \in S$ ซึ่ง $x = x \cdot y \cdot x$ และเรียก y ว่า *ตัวผกผัน*$(inverse)$ *ของ* x

ให้ X เป็นเซต นิยาม *กึ่งกรุปการแปลงเต็มบน* X $(Fulltransformationsemigroup)(T_X,\circ)$ โดยที่ $T_X = \{\alpha \mid \alpha : X \to X\}$ และ $\circ$ คือการประกอบ$(Composition)$ ซึ่ง $(T_X,\circ)$ เป็นกึ่งกรุป

สำหรับ $\alpha \in T_X$ ใช้สัญลักษณ์ $x\alpha$ แทน $image$ ของ $x \in X$ ภายใต้ α นิยาม $rank(\alpha)$ คือ จำนวนสมาชิกของเซต $im(\alpha) = \{x\alpha \mid x \in X\}$ ถ้า $rank(\alpha) = r$ โดยที่ $r \in \mathbb{N}$ แล้ว จะเขียน $\{x\alpha \mid x \in X\}$ เป็น $\{x_j\alpha \mid j \in \{1, \dots, k\}\}$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $P = \{A_i \subseteq X \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ เป็นผลแบ่งกั้น$(Partition)$ ของ X นิยาม $T_{P,X}$ และ T ดังนี้

$T_{P,X} = \{\alpha \in T_X \mid \forall A_i \in P \exists A_j \in P, A_i\alpha \subseteq A_j\}$

$T = \{\alpha \in T_{P,X} \mid rank(\alpha) = k$ และ $\forall A_i \in P \exists! \, x_j\alpha \in im(\alpha), x_j\alpha \in A_i\}$

ในโครงงานนี้ เราสนใจว่า เมื่อ $\boldsymbol{X}$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้วสับเซต $\boldsymbol{T}$ ของ $\boldsymbol{T_{P,X}}$ เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติหรือไม่ และยกตัวอย่างสมาชิกของเซต $\boldsymbol{T_{P,X} - T}$ ที่มีตัวผกผันใน $\boldsymbol{T_{P,X}}$

วัตถุประสงค์

1. แสดงว่าเซต T เป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของ $T_{P,X}$
2. ให้ตัวอย่างสมาชิกของเซต $T_{P,X} - T$ ที่มีตัวผกผันใน $T_{P,X}$

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาสับเซต T ของ $T_{P,X}$ โดย X เป็นเซตจำกัดที่ไม่ว่าง

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกึงกรุป กึ่งกรุปปกติ และกึ่งกรุปการแปลงเต็ม
2. ศึกษาการเป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของเซต T
3. ให้ตัวอย่างสมาชิก $T_{P,X} - T$ ที่มีตัวผกผันใน $T_{P,X}$
4. เขียนรูปเล่มโครงงาน

วิธีการดำเนินงาน	เดือน/ปีการศึกษา 2562								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1.ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกึ่งกรุป กึ่งกรุปปกติ และกึ่งกรุปการแปลงเต็ม									
2.ศึกษาการเป็นกึ่งกรุปย่อยปกติของเซต T									
3.ให้ตัวอย่างสมาชิก $T_{P,X} - T$ ที่มีตัวผกผันใน $T_{P,X}$									
4.เขียนรูปเล่มโครงงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รับความรู้เกี่ยวกับกึ่งกรุป กึ่งกรุปปกติ และกึ่งกรุปการแปลงเต็ม
2. ได้ตัวอย่างของกึ่งกรุปย่อยปกติของกึ่งกรุป $T_{P,X}$
3. ได้ตัวอย่างสมาชิก $T_{P,X} - T$ ที่มีตัวผกผันใน $T_{P,X}$
4. ได้เรียนรู้และได้รับทักษะในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษและอุปกรณ์เครื่องเขียน
2. คอมพิวเตอร์
3. เครื่องพิมพ์เอกสาร

งบประมาณ

1.	ค่ากระดาษ	500	บาท
2.	ค่าอุปกรณ์เครื่องเขียน	500	บาท
3.	หนังสือ	4,000	บาท
	รวมเงินทั้งสิ้น	5,000	บาท

หมายเหตุ งบประมาณที่ตั้งไว้ขอถัวเฉลี่ยกันทุกรายการ

เอกสารอ้างอิง

ยุพาภรณ์ เข็มประสิทธิ์. 2545. *ทฤษฎีกึ่งกรุปเชิงพีชคณิต.* กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

Purisang P. 2015. Regularity of Some Transformation Semigroups. Master’s Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University.

ประวัติผู้เขียน

นายพชร พลอยเพ็ชร์ รหัสประจำตัวนิสิต 5933533923
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย