โครงการ
การเรียนการสอนเพื่อประสบการณ์

ชื่อโครงการ	การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง Construction of the regular polygons by compass and straightedge
ชื่อนิสิต	นายเสก ประยงค์พันธ์ 6033545923
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2563

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง

นายเสก ประยงค์พันธ์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

Construction of the regular polygons by compass and straightedge

Mr. Sek Prayongpan

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science   Chulalongkorn University Academic Year 2020

หัวข้อโครงงาน การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง

โดย นาย เสก ประยงค์พันธ์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก อาจารย์ ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(อาจารย์ ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์)

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ยศนันต์ มีมาก)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

เสก ประยงค์พันธ์ : การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง(construction of regular polygons with compass and straightedge) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : อ.ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์, 42 หน้า.

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลายมือชื่อนิสิต เสก ประยงค์พันธ์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก นิธิ รุ่งธนาภิรมย์

ปีการศึกษา 2563

เสก ประยงค์พันธ์: การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง
(construction of regular polygons with compass and straightedge)
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : อาจารย์ ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์, 42 หน้า.

บทคัดย่อ

โครงงานนี้ศึกษาวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมโดยใช้วงเวียนและสันตรงเท่านั้น วิธีการสร้างรูปดังกล่าวอาศัยความรู้และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เช่น ทฤษฎีกรุปวัฏจักร เลขคณิตมอดุลาร์ พหุนามไซโคลโทมิก ทฤษฎีของกาลัว จำนวนเฉพาะแฟร์มาและตรีโกณมิติ ในการศึกษาครั้งนี้ได้แสดงการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าขึ้นมาจำนวนหนึ่งซึ่งรวมถึงรูปสิบ-เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าและสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยใช้โปรแกรม GeoGebra

Sek Prayongpan: construction of regular polygons with compass and straightedge
Advisor: Dr. Nithi Rungthanapirom, 42 pages.

Abstract

This project studies several straightedge and compass constructions of regular polygons inscribed in a circle. This can be done by using various areas of mathematics, such as cyclic groups, modular mathematics, cyclotomic polynomials, Fermat's primes, Galois theory and trigonometry. GeoGebra software is employed in this study, some of constructions including a regular decagon and a regular heptadecagon are illustrated.

กิตติกรรมประกาศ

โครงงาน “การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง” ของข้าพเจ้าจะไม่สำเร็จไปได้ด้วยดีถ้าขาด อาจารย์ ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณท่านเป็นอย่างยิ่งที่คอยให้คำปรึกษาและคำแนะนำตลอดช่วงระยะเวลาที่ผ่านมา ทั้งยังสละเวลาส่วนตัวให้ความช่วยเหลือ ข้าพเจ้าซาบซึ้งใจเป็นอย่างยิ่ง โครงงานนี้สำเร็จได้ด้วยดี โดยผู้ให้การสนับสนุนให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะดังนี้

1. อ.ดร. เรวัต ถนัดกิจหิรัญ
2. ศ.ดร.ยศนันต์ มีมาก
3. รศ.ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน
4. รศ.ดร.ศจี เพียรสกุล
5. นายภูมิยศ วิมลกิตติวัฒน์
6. อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

   อ.ดร. นิธิ รุ่งธนาภิรมย์

ผู้จัดทำโครงงานขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณ คณาจารย์คณะวิทยาศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนและถ่ายทอดความรู้แก่ข้าพเจ้า

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าหวังว่าโครงงานเรื่องนี้จะเป็นประโยชน์ไม่มากก็น้อยสำหรับผู้สนใจหรือนำไปศึกษาต่อ หากมีข้อผิดพลาดประการใดต้องกราบขออภัย ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย... 6

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ 7

กิตติกรรมประกาศ... 8

สารบัญ... 9

บทที่ 1 บทนำ ....……….. 10-11

บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง...................................12-22

บทที่ 3 การสร้างรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง………….23-34

เอกสารอ้างอิง...35

ภาคผนวก..36-42

บทที่ 1
บทนำ

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าเป็นหัวข้อที่ถูกกล่าวถึงและใช้ประโยชน์บ่อยครั้งในวิชาคณิตศาสตร์ กรณีที่จำนวนเหลี่ยมน้อย เช่น สามหรือสี่เหลี่ยมด้านเท่า การสร้างรูปสามารถทำได้โดยง่าย แต่เมื่อมีจำนวนเหลี่ยมของรูปมากขึ้น ความซับซ้อนในการสร้างและวิเคราะห์รูปจะสูงขึ้นอย่างมาก มิใช่รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าทุกรูปจะสามารถสร้างได้จากวงเวียนและสันตรง ผู้จัดทำจึงเกิดความสนใจที่จะศึกษา วิธีการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเหล่านี้ ในโครงงานนี้ผู้จัดทำได้ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์หลากหลายด้านรวมทั้งทฤษฎีกาลัว พหุนามไซโคลโทมิก จำนวนเฉพาะแฟร์มา และกฎของเกาส์

นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกโบราณเป็นผู้ริเริ่มการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้วยวงเวียนและสันตรง พวกเขาใช้วิธีนี้ในการสร้างรูปหลายเหลี่ยมต่างๆ แต่พบว่าเพียงบางรูปเท่านั้นที่สามารถสร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง จึงทำให้เกิดคำถามที่ว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าทั้งหมด จะสามารถสร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง ถ้าสร้างไม่ได้มีรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแบบใดบ้างที่สร้างไม่ได้

ในปี พ.ศ. 2339 (ค.ศ. 1796) คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ ได้พิสูจน์ว่ารูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่าสามารถสร้างได้จากนั้นอีกห้าปีต่อมา เขาก็ได้สร้างทฤษฎี Gaussian periods ในงานเขียน ***Disquisitiones Arithmeticae*** ทฤษฎีนี้ทำให้เขาสามารถกำหนดเงื่อนไขเพียงพอเพื่อทดสอบความสามารถในการสร้างของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

เกาส์คาดว่าเงื่อนไขนี้อาจเป็นเงื่อนไขจำเป็น แต่เขาก็ไม่ได้เสนอการพิสูจน์สำหรับคำกล่าวนี้ จนกระทั่งได้รับการพิสูจน์โดย Pierre Wantzel เมื่อ พ.ศ. 2380 (ค.ศ. 1837) ว่าคำกล่าวนี้อาจดูเหมือนว่าเกาส์ไม่ได้มีการพิสูจน์ที่ถูกต้อง เพราะหากพิจารณาการสร้างรูปเก้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าจะยุติลงด้วยความเป็นไปไม่ได้ที่จะแบ่งมุม 120° ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน ซึ่งเป็นข้อเท็จจริงที่เกาส์ได้ตระหนักไว้ ซึ่งข้อเท็จจริงนี้สอดคล้องกับในกรณี รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสามารถสร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง ถ้า n คือ กำลังของสองและจำนวนใดๆ ที่แตกต่างกันของจำนวนเฉพาะแฟร์มา

กุญแจสำคัญในการศึกษาการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมด้วยวงเวียนและสันตรง คือการประยุกต์ใช้ **ทฤษฎีกาลัว (Galois Theory)** และพหุนามไซโคลโทมิก

ซึ่งคือ พหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีรากปฐมฐานที่ n ของ 1 เป็นราก ซึ่งทำให้เราพิสูจน์ได้ว่า รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงได้ก็ต่อเมื่อ $\varphi(n)$ เป็นกำลังของสอง นั่นคือ $n = 2^k p_1 \dots, p_r$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}_0$ และ $p_1 \dots, p_r$ เป็นจำนวน-เฉพาะแฟร์มาที่ต่างกันทั้งหมด

ในโครงงานนี้ เราจะศึกษาการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม เช่น $n = 17$ โดยการแก้สมการกำลังสองต่อเนื่องหลายครั้ง ที่จะทำให้เราได้รากเชิงซ้อน ς_n ที่ n ของ 1 ตัวอย่างเช่น เมื่อ $n = 17$ จากการคำนวณที่จะแสดงในบทที่ 3 จะได้ว่า

ς_{17} เป็นรากของสมการกำลังสอง

$$x^2 - z_1 x + 1 = 0$$

เมื่อ z_1 เป็นรากค่ามากของสมการ

$$x^2 - y_1 x + y_3 = 0$$

เมื่อ y_1, y_3 เป็นรากค่ามากของสมการ

$$x^2 - x_1 x + 1 = 0 \quad \text{และ} \quad x^2 - x_2 x + 1 = 0$$

ตามลำดับ เมื่อ $x_1 > x_2$ เป็นรากของสมการ

$$x^2 - x + 4 = 0$$

เมื่อได้ ς_n แล้ว เราจะสร้าง $1, \varsigma_n, {\varsigma_n}^2, \dots, {\varsigma_n}^{k-1}$ ได้ซึ่งเป็นจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุม-เท่าแนบในวงกลมหนึ่งหน่วย

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง

2.1 การสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง

เราจะศึกษาปัญหาการสร้างรูปด้วยวงเวียนและสันตรง โดยพิจารณาจุดบนระนาบเชิงซ้อนโดยใช้วงเวียนและสันตรงภายใต้กติกาต่อไปนี้

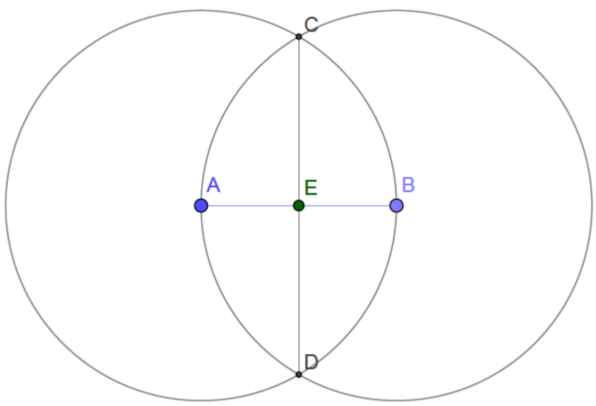
1. มีวงเวียน สันตรง และจุดเริ่มต้นสองจุด ให้เป็น $0,1 \in \mathbb{C}$
2. ใช้สันตรงเพื่อลากเส้นตรงระหว่างจุดที่สร้างไปแล้วสองจุดได้
3. จุดตัดเส้นตรงของเส้นตรงสองเส้น หรือ เส้นตรงกับวงกลม หรือ วงกลมสองวง สามารถนำมาใช้ต่อได้
4. วงกลมที่สร้างด้วยวงเวียนต้องมีจุดศูนย์กลางเป็นจุดที่สร้างไปแล้วและมีความยาวรัศมีเท่ากับระยะห่างระหว่างสองจุดที่สร้างไปแล้วเท่านั้น

นิยาม เราจะเรียกจุดตัดที่ได้จากข้อ 3 ว่า จุดที่สร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง เรียกเส้นตรงที่ได้จากการสร้างในข้อ 2 ว่า เส้นตรงที่สร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง

จากกติกาข้างต้น ทำให้เราสามารถใช้วงเวียนและสันตรงตอบปัญหาบางประการทางเรขาคณิตได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

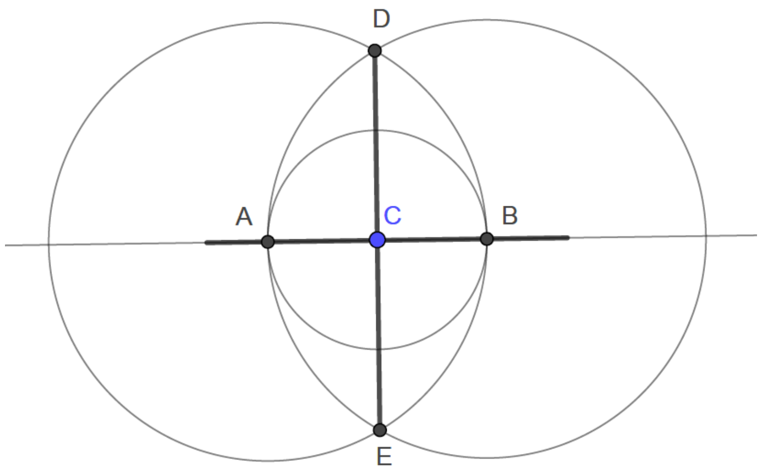
การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $\boldsymbol{A}$ และจุด $\boldsymbol{B}$ ที่กำหนดให้

1. ใช้สันตรงลากเส้นตรงผ่าน จุด A และ จุด B
2. กางวงเวียนรัศมี AB สร้างวงกลมโดยให้ จุด A และ จุด B เป็นจุดศูนย์กลาง
3. ได้วงกลมสองวงตัดกันที่ จุด C และ จุด D
4. ลากเส้นตรง CD ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด E ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ จุด B



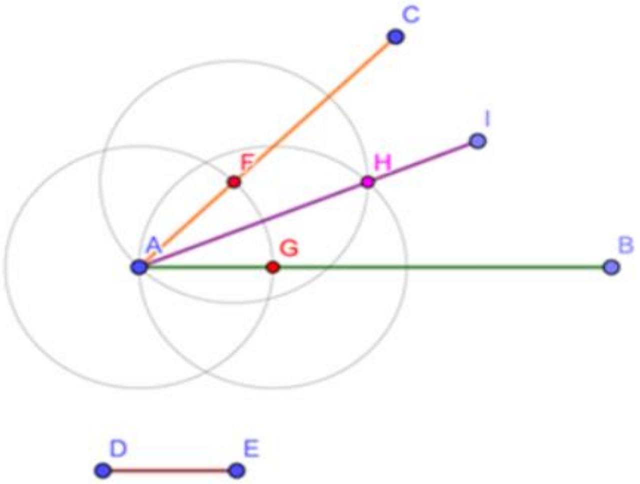
การสร้างเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง ณ จุดที่กำหนดให้

1. กำหนดจุด C เป็นจุดบนเส้นตรงที่กำหนดให้
2. สร้างวงกลมโดยให้ C เป็นจุดศูนย์กลาง ได้ส่วนโค้งของวงกลมตัดเส้นตรงที่ จุด A และ จุด B
3. สร้างวงกลม รัศมี AB โดยให้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง
4. ได้วงกลมสองวงตัดกันที่จุด E และ D
5. ใช้สันตรงลาก $\overline{DE}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด C จะได้ $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$



การแบ่งครึ่งมุม *BAC* ที่กำหนดให้

1. สร้างวงกลมรัศมีพอสมควร นั่นคือ $\overline{DE}$ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง ได้จุดตัดบนเส้นตรง AB ที่จุด G และ ได้จุดตัดบนเส้นตรง AC ที่จุด F ตามลำดับ
2. สร้างวงกลมรัศมีพอสมควรนั่นคือ $\overline{DE}$ โดยให้จุด G และให้จุด F เป็นจุดศูนย์กลาง ได้วงกลมตัดกันที่จุด H
3. ใช้สันตรงลาก AI ผ่านจุด H จะได้ มุม CAI มีขนาดเท่ากับ มุม BAI



2.2 ทฤษฎีทางพีชคณิตเกี่ยวกับการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง

ในการใช้ทฤษฎีทางพีชคณิตเกี่ยวกับการสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง เราจะพิจารณาระนาบที่กำหนดให้เป็นระนาบของจำนวนเชิงซ้อน$[z = x + yi \in \mathbb{C}$ คือจุดต่างๆ บนระนาบเชิงซ้อน$]$

ทฤษฎีบท ให้ $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ เป็นเซตบนจุดระนาบเชิงซ้อนที่นิยามดังนี้

$E_0 = \mathbb{Q}$

$E_1 = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} \mid z$ เป็นรากสมการของกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน $E_0\})$

$E_2 = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} \mid z$ เป็นรากสมการของกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน $E_1\})$

$\vdots$

$E_n = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} \mid z$ เป็นรากสมการของกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน $E_{n-1}\})$

จะได้ว่า $\mathrm{E} = \bigcup_{\mathrm{i} \geq 0} \mathrm{E_i}$ เป็นเซตของจุดทั้งหมดของระนาบจำนวนเชิงซ้อนที่สร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง

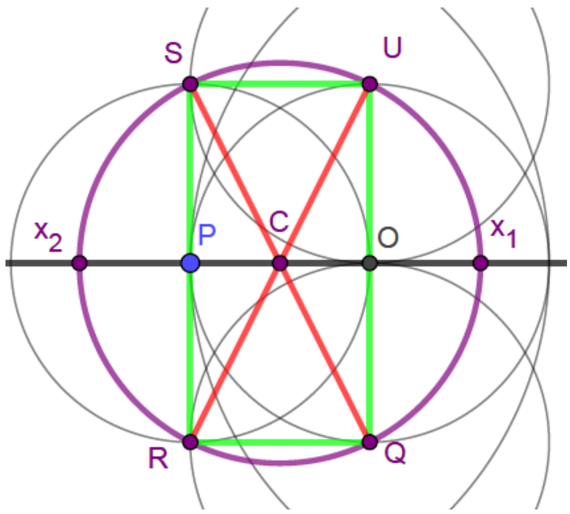
พิสูจน์ [3] ทฤษฎีบท 1.4.1

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น เราต้องทราบแนวทางในการสร้างเพื่อหารากสมการกำลัง-สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สร้างด้วยวงเวียนและสันตรง โดยเราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่สัมประสิทธิ์ของสมการดังกล่าวเป็นจำนวนจริงใน E_{i-1} และรากของสมการเป็นจำนวนจริงใน E_i ดังนี้

การแก้สมการกำลังสองด้วยวงเวียนและสันตรง

การใช้วงเวียนและสันตรงเพื่อแก้สมการกำลังสองที่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง ซึ่งรูปแบบของสมการคือ $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $a, b, c \in E_{i-1} \cap \mathbb{R}$ (เช่น เมื่อ $i = 1$ จะได้ $a, b, c \in \mathbb{Q}$ และคำตอบของสมการอยู่ใน E_1 ซึ่งเราสามารถนำไปใช้ต่อเพื่อสร้างจุดใน E_2 ที่เป็นคำตอบของสมการที่มีสัมประสิทธิ์ใน $E_1 \cap \mathbb{R}$) สามารถทำได้ดังนี้

1. ให้ $p = \frac{-b}{a}$ และ $q = \frac{c}{a}$
2. ใช้วงเวียนและสันตรงเพื่อสร้างพิกัด $U(0,1), P(p,0), Q(0,q), R(p,q)$ และ $S(p,1)$
3. สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $UQRS$ ต่อมาลากเส้นทแยงมุม $\overline{SQ}$ และ $\overline{RU}$ จะได้ C เป็นจุดตัด ของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $UQRS$
4. สร้างวงกลมโดยให้ C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CU จะได้ว่าวงกลมดังกล่าวตัดแกน X ที่จุด $A(x_1, 0)$ และ $G(x_2, 0)$ ดังรูป
   จะได้ว่า x_1 และ x_2 เป็นรากจริงของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$



พิสูจน์

พิจารณาวงกลมที่มี C เป็นจุดศูนย์กลาง คือ $\left(\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ และรัศมียาวเท่ากับ CU

นั่นคือ $r = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + (q-1)^2}$

จะได้ สมการวงกลม คือ $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(p^2 + (q-1)^2)$

แทน $y = 0$ จะได้ว่า $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(p^2 + (q-1)^2)$

ดังนั้น $(2x-p)^2+(q+1)^2=p^2+(q-1)^2$

$(2x-p)^2=p^2+(q-1)^2-(q+1)^2$

$(2x-p)^2=p^2+(q^2-2q+1)-(q^2+2q+1)$

$(2x-p)^2=p^2-4q$

$2x-p=\pm\sqrt{p^2-4q}$

$x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

แทน $p=\frac{-b}{a}$ และ $q=\frac{c}{a}$

ดังนั้น $x=\frac{\frac{-b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)}}{2}$

$=\frac{\frac{-b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\left(\frac{c}{a}\right)}}{2}=\frac{\frac{-b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\left(\frac{ac}{a^2}\right)}}{2}$

$=\frac{\frac{-b}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ และ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ เป็นคำตอบของสมการ □

2.3 การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง

ในการศึกษาการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมด้วยวงเวียนและสันตรง เรามีทฤษฎีบทหลักที่ใช้ในการระบุว่า เมื่อไรที่สามารถสร้างได้หรือไม่ได้ เราจะพิจารณาจากนิยามต่อไปนี้

นิยาม $\varsigma\in\mathbb{C}$ เป็นรากที่ n ของ 1 ต่อเมื่อ $\varsigma^n=1$ และ ς เป็นรากปฐมฐานที่ n ของ 1 ก็ต่อเมื่อ $1,\varsigma,\ldots,\varsigma^{n-1}$ เป็นรากที่ n ของ 1 ที่ต่างกันทั้งหมด

เช่น ถ้า $n=5$ รากที่ 5 ของ 1 คือ $1,\varsigma_5,\ \varsigma_5{}^2,\varsigma_5{}^3,\varsigma_5{}^4$ จะเป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยและเป็นจุดที่เชื่อมต่อระหว่างด้านของห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

ถ้า $n=8$ รากที่ 8 ของ 1 คือ $1,\varsigma_8,\ \varsigma_8{}^2,\ldots,\varsigma_8{}^7$ จะเป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยและเป็นจุดที่เชื่อมต่อระหว่างด้านของแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

หมายเหตุ จากสูตรของเดอมวฟร์จะได้ว่า รากที่ n ของ 1 ทั้งหมด ได้แก่ $\varsigma_n{}^k=e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ โดยที่ $k=0,1,\ldots,n-1$ ซึ่งเมื่อพิจารณาระนาบเชิงซ้อน จะได้ว่าจำนวนเหล่านี้เป็นจุดยอดของรูป

n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมหนึ่งหน่วย

หมายเหตุ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า พหุนามไซโคลโทมิก

$$\Phi_n(x) \coloneqq \prod_{\substack{1\le k\le n \\ \gcd(k,n)=1}} (x - \varsigma_n{}^k)$$

เป็นพหุนามดีกรีต่ำสุด ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมี ς_n เป็นราก ข้อเท็จจริงดังกล่าว ประกอบกับการที่ว่า $1, \varsigma_n, \dots, \varsigma_n{}^{n-1}$ เป็นจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมหนึ่งหน่วย เป็นกุญแจสำคัญในการศึกษาการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมด้วยวงเวียนและสันตรง

ในการพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าว ต้องใช้ทฤษฎีกาลัว (Galois theory) และข้อเท็จจริงที่ว่า $\Phi_n(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $\varphi(n)$ ซึ่งจะไม่ขอกล่าว ณ ที่นี้ อย่างไรก็ตาม เราจะยกตัวอย่างการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทข้างต้นดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงได้ก็ต่อเมื่อ $\Phi_{\mathrm{n}}(x)$ เป็นกำลังของสอง นั่นคือ $n = 2^k p_1 \cdots p_r$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}_0$ และ $p_1, \cdots, p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะแฟร์มาที่ต่างกันทั้งหมด, [1]

หมายเหตุ : จำนวนแฟร์มา (Fermat number) คือจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป

$$F_m = 2^{2^m} + 1,\ m > 0$$

ถ้า F_m เป็นจำนวนเฉพาะ เราจะเรียก F_m ว่า **จำนวนเฉพาะแฟร์มา (Fermat prime)**

ตัวอย่าง กรณี $n = 5$

สร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

$E_0 = \mathbb{Q}$

$E_1 = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} |\ z$ เป็นรากของสมการกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน $\mathbb{Q}\})$

ให้ $x_1 = \varsigma_5 + \sigma^2(\varsigma_5)$

$x_1 = \varsigma_5 + \varsigma_5{}^4$

จะได้ว่า $x_1{}^2 = (\varsigma_5 + \varsigma_5{}^4)^2 = \varsigma_5{}^2 + 2\varsigma_5{}^5 + \varsigma_5{}^8 = \varsigma_5{}^2 + \varsigma_5{}^3 + 2$

$x_1{}^2 + x_1 - 1 = \varsigma_5{}^4 + \varsigma_5{}^3 + \varsigma_5{}^2 + \varsigma_5 + 2 - 1$

$\varsigma_5{}^4 + \varsigma_5{}^3 + \varsigma_5{}^2 + \varsigma_5 + 2 - 1 = 0$

x_1 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + x - 1 = 0$ นั่นคือ $x_1 \in E_1$

จากสมการ $x^2 + x - 1 = 0$ จะได้ว่า $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$x_1 = \varsigma_5 + {\varsigma_5}^4$$

$$\varsigma_5 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$${\varsigma_5}^4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$x_1 = \varsigma_5 + {\varsigma_5}^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$E_2 = \mathbb{Q}(\{\mathrm{z} \in \mathbb{C} | \mathrm{z}$ เป็นรากของสมการกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน $\mathrm{E}_1\})$

เนื่องจาก $(x-\varsigma_5)(x-{\varsigma_5}^4) = x^2 - (\varsigma_5 + {\varsigma_5}^4)x + 1 = x^2 - x_1x + 1$
จะได้ว่า ς_5 เป็นรากของสมการ $x^2 - x_1x + 1 = 0$ นั่นคือ $\varsigma_5 \in E_2$

เราจะสร้าง ς_5 ซึ่งเป็นจุดยอดจุดหนึ่งของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมโดยพิจารณาว่า ς_5 เป็นจุดตัดของวงกลมสองวง ดังนี้

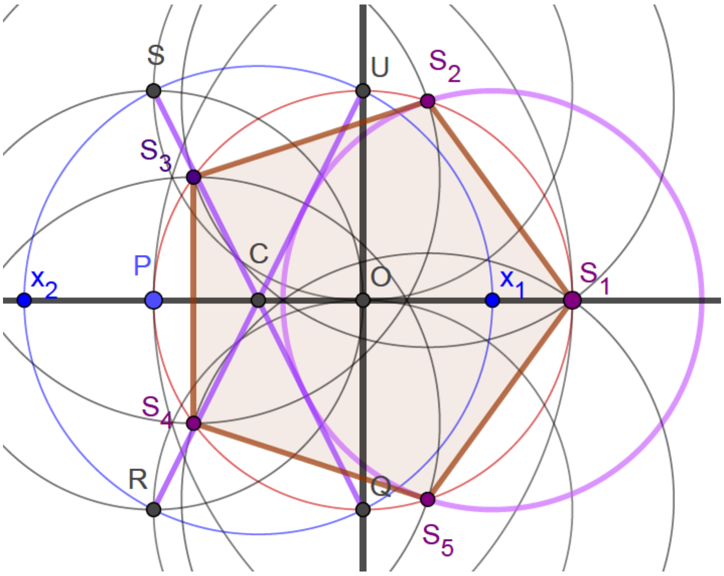
จากสมการ วงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $(x-x_1)^2 + y^2 = 1$
จะได้ว่า $y^2 = 1 - x^2$ และ $y^2 = 1 - (x-x_1)^2$
ดังนั้น $1 - x^2 = 1 - (x-x_1)^2$
$x^2 = (x-x_1)^2$ จะได้ว่า $x = \pm(x-x_1)$
ดังนั้น $x = -(x-x_1)$ จะได้ว่า $2x = x_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$$x = \frac{x_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

ดังนั้น จุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $(x-x_1)^2 + y^2 = 1$

คือ $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$ และ $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$
ซึ่งสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน ς_5 และ $\overline{\varsigma_5}$ ตามลำดับ $\square$

การสร้างรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

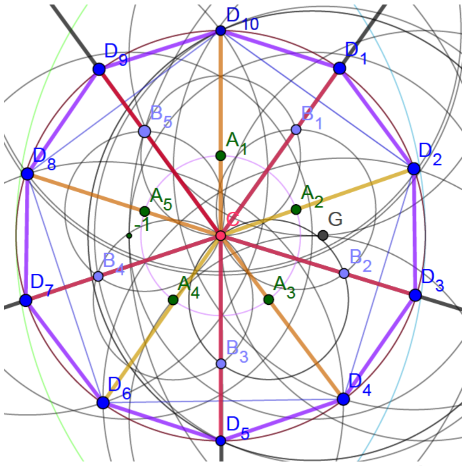


1. กางวงเวียน 1 หน่วย เริ่มที่ จุด $O(0,0)$ ตัดแกน Y ที่จุด $U(0,1)$ และตัดแกน X ที่จุด $P(-1,0)$ ให้จุด $U(0,1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง กางวงเวียน 1 หน่วย ให้ตัดกับส่วนของวงกลมที่จุด $P(-1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 1 หน่วย และจะได้จุดตัด คือ $S(-1,1)$ และ $E(0,0)$
2. ที่จุด $O(0,0)$ กางวงเวียน 1 หน่วย ตัดส่วนโค้งใต้แกน Y ได้จุด $Q\ (0,-1)$ ให้ $Q(0,-1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และกางวงเวียน 1 หน่วย ตัดกับส่วนของวงกลมที่จุด $P(-1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 1 หน่วย ได้จุดตัด คือ $R(-1,-1)$
3. หาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $R(-1,-1)$ และจุด $U(0,1)$ คือ จุด $C(\frac{-1}{2},0)$ กางวงเวียนเท่ากับ $\overline{CU}$ โดยให้ $C(\frac{-1}{2},0)$ เป็นจุดศูนย์กลางสร้างวงกลม จะได้ส่วนโค้งของวงกลมตัดแกน X ที่จุด $A(x_1,0)$ และ $G(x_2,0)$
4. ที่ จุด $A(x_1,0)$ กางวงเวียน 1 หน่วย ตัดส่วนโค้งกับวงกลม ที่จุด $O(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 1 หน่วย ที่ S_2 และ S_5
5. สร้างวงกลมให้ $S_1(1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $\overline{S_1S_2}$ ตัดเส้นรอบวงของวงกลม ที่ จุด $O(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 1 หน่วย ได้จุดตัด 5 จุด ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดตัด จะได้รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในวงกลมหนึ่งหน่วย

จากรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม นำมาสร้างรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมได้ดังนี้

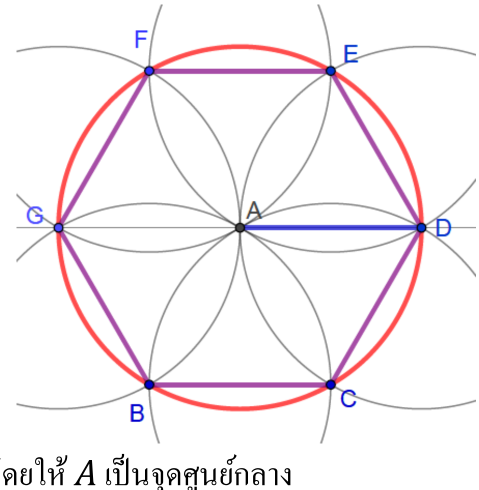
$\varphi(10) = 2^2$ เพราะ $k \in \{1,2,3,\ldots,10\}$ ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ กับ 10 มี 4 ตัว คือ $1,3,7,9$

การสร้างรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม



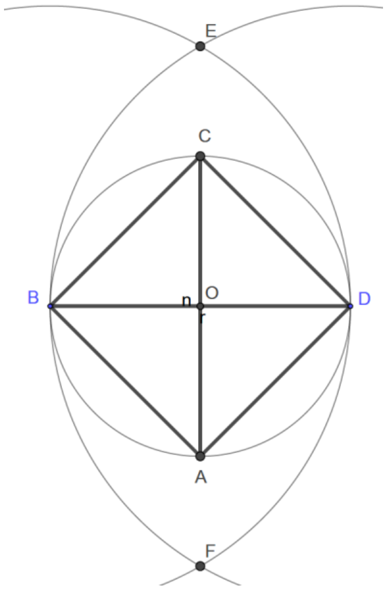
1. สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมจากจุดศูนย์กลางของวงกลมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าทั้ง 5 มุม จะได้เส้นแบ่งครึ่งมุมตัดเส้นรอบวงที่ D_1, D_3, D_5, D_7 และ D_9
2. ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้ง 10 จุด ก็จะได้รูป 10 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

การสร้างรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม



1. สร้างวงกลมรัศมี AD โดยให้ A เป็นจุดศูนย์กลาง
2. กางวงเวียนรัศมี AD สร้างส่วนโค้งตัดเส้นรอบวงได้ 6 จุด
3. ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดตัดทั้ง 6 จุด จะได้รูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

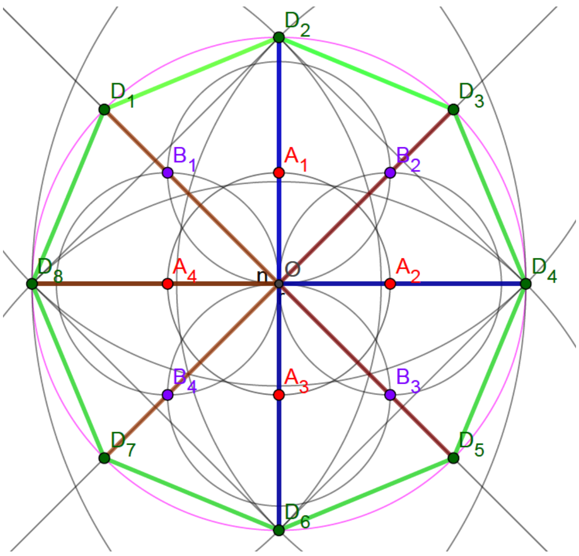
การสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม



1. สร้างวงกลมรัศมี OB โดยให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง
2. สร้างวงกลมรัศมี BD โดยให้ B และ D เป็นจุดศูนย์กลาง
3. ลากเส้นระหว่างจุดตัดของวงกลมสองวง ตัดเส้นรอบวงที่ จุด C และจุด D
4. ลากเส้นเชื่อมระหว่าง $ABCD$ จะได้สี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

การสร้างรูปแปดด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

$\varphi(8) = 4 = 2^2$ เพราะ $k \in \{1,2,3, \dots ,8\}$ ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ กับ 8 มี 4 ตัว คือ 1,3,5,7



จากรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม นำมาสร้างรูปแปดเหลี่ยมมุมเท่าแนบในวงกลมได้ ดังนี้

1.สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมจากจุดศูนย์กลางของวงกลมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าทั้ง 4 มุม จะได้เส้นแบ่งครึ่งมุมตัดเส้นรอบวงที่ D_1, D_3, D_5 และ D_7

2. ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้ง 8 จุด ก็จะได้รูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

หมายเหตุ ถ้าเราแบ่งครึ่งมุมที่จุดศูนย์กลางของรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม เราจะได้จุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุมบนเส้นรอบวง และลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด ก็จะได้รูปสิบหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

ในทำนองเดียวกัน เราก็จะสามารถใช้วิธีนี้ สร้างรูป จะได้รูป 32, 64, 128, … เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมตามลำดับ

ถ้าเราแบ่งครึ่งมุมที่จุดศูนย์กลางของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม เราก็จะ-ได้ 12, 24, 48, 96, … เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม ตามลำดับ

บทที่ 3

การสร้างรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง

ในบทนี้ เราจะหาวิธีการสร้างรูป 17 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง โดยเริ่มจากการศึกษาโครงสร้างของกรุป $\mathrm{Aut}(\langle \varsigma_{17} \rangle)$ จากนั้นจึงจะหาสมการกำลังสองที่ใช้สร้างรูป 17 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรงดังนี้

3.1 โครงสร้างของกรุป $\mathbf{Aut}(\langle \varsigma_{17} \rangle)$

สำหรับ $a \in \mathbb{Z}$ ให้ $\sigma_a : \langle \varsigma_{17} \rangle \to \langle \varsigma_{17} \rangle$ เป็นสาทิสสัณฐานระหว่างกรุปซึ่ง

$\sigma_a(\varsigma_{17}) = {\varsigma_{17}}^a$

จะได้ว่า $\sigma_a({\varsigma_{17}}^n) = {\varsigma_{17}}^{an}$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{Z}$ และ

σ_a เป็นอัตสัณฐาน (Automorphism) ก็ต่อเมื่อ $\gcd(a, 17) = 1$

ทฤษฎีบท ถ้า $\gcd(a, 17) = 1$ แล้ว $\mathrm{ord}(\sigma_a) = \mathrm{ord}_{17}(a)$

บทพิสูจน์

เนื่องจาก $\mathrm{ord}_{17}(\mathrm{a}) \coloneqq \min\{k \in \mathbb{N} | a^k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17)\}$

$\mathrm{ord}(\sigma_a) \coloneqq \min\{k \in \mathbb{N} | \sigma^k = \mathrm{id}\}$

ดังนั้น $\varsigma^{a^k} = \sigma^k(\varsigma_{17}) = id(\varsigma_{17}) = \varsigma^1$

ก็ต่อเมื่อ $a^k \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17\ )$

ดังนั้น $\mathrm{ord}(\sigma_a) = k_{\min} = \mathrm{ord}_{17}(a)$ □

ทฤษฎีบท $\mathrm{Aut}(\langle \varsigma_{17} \rangle) = \langle \sigma_3 \rangle$

บทพิสูจน์

เนื่องจาก $\mathrm{Aut}(\langle \varsigma_{17} \rangle)$ มีสมาชิก 16 ตัว คือ σ_a เมื่อ $a \in \{1,2,3, \dots ,16\}$

ต้องพิสูจน์ว่า $\mathrm{ord}(\sigma_3) = 16$

นั่นคือ ต้องพิสูจน์ว่า $\mathrm{ord}_{17}(3) = 16$

นั่นคือ 1. $3^{16} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17)$

2. $3^8 \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17)$

ต้องพิสูจน์ว่า $3^{16} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17)$

เนื่องจาก $3^2 \equiv 9 \ (\mathrm{mod}\ 17)$

ดังนั้น $3^4 \equiv 9 * 9 \ (\mathrm{mod}\ 17) \equiv 13 (\mathrm{mod}\ 17)$

$3^8 \equiv 16 \ (\mathrm{mod}\ 17)$

$3^{16} \equiv 16 * 16 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{17}$

จึงได้ว่า $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

เนื่องจาก $\varphi(17) = 16 = 2^4$

มี 2 เป็นตัวประกอบเฉพาะเพียงตัวเดียว

จึงต้องพิสูจน์ว่า $3^{\frac{16}{2}} \not\equiv 1 \pmod{17}$

เนื่องจาก $3^8 \equiv 16 \pmod{17}$

จะได้ว่า $3^8 \not\equiv 1 \pmod{17}$

ดังนั้น $\mathrm{ord}_{17}(3) = 16$

สรุปได้ว่า $\mathrm{Aut}\left(\langle \varsigma_{17} \rangle\right) = \langle \sigma \rangle$ $\square$

ต่อไปนี้เราจะให้ $\sigma = \sigma_3$ จะได้ว่า กรุปย่อย ของ $\mathrm{Aut}(\langle \varsigma_{17} \rangle)$ ได้แก่

$$\{\mathrm{id}\} \leq H_3 \leq H_2 \leq H_1 \leq \mathrm{Aut}(\langle \varsigma_{17} \rangle)$$

โดยที่ $H_3 := \{\mathrm{id}, \sigma^8\}$, $H_2 := \{\mathrm{id}, \sigma^4, \sigma^8, \sigma^{12}\}$

และ $H_1 := \{\mathrm{id}, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6, \ldots, \sigma^{14}\}$

3.2 เอกลักษณ์เกี่ยวกับรากที่ 17 ของ 1

ก่อนที่เราจะแสดงวิธีการสร้างสมการกำลังสองที่ใช้ในการสร้างรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า เราจะพิสูจน์เอกลักษณ์ที่จะเป็นประโยชน์ต่อการคำนวณหาสมการกำลังสอง ดังนี้

บทตั้งที่ 1 ให้ $k \in \{1,2,3,\ldots,16\}$ จะได้ว่า ${\varsigma_{17}}^k + {\varsigma_{17}}^{17-k} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right)$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
{\varsigma_{17}}^k &= \cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right) \\
{\varsigma_{17}}^{17-k} &= \cos\left(\frac{2(17-k)\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2(17-k)\pi}{17}\right) \\
{\varsigma_{17}}^{17-k} &= \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{17}\right) \\
{\varsigma_{17}}^k + {\varsigma_{17}}^{17-k} &= \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right)\right) \\
&\quad + (\cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{17}\right) \\
{\varsigma_{17}}^k + {\varsigma_{17}}^{17-k} &= \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right)\right) + \cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right)
\end{aligned}
$$

$$\varsigma_{17}{}^{k} + \varsigma_{17}{}^{17-k} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) \qquad \square$$

3.3 การหาสมการกำลังสองที่ใช้ในการสร้างรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม

จากทฤษฎีกาลัว จะได้ว่า

$x_1 := \sum_{\tau\in H_1} \tau(\varsigma_{17}) \in E_1$, $y_1 := \sum_{\tau\in H_2} \tau(\varsigma_{17}) \in E_2$,

$z_1 := \sum_{\tau\in H_3} \tau(\varsigma_{17}) \in E_3$ และ $\varsigma_{17} \in E_4$

เราจึงจะสร้างสมการกำลังสองที่มี $x_1, y_1, z_1, \varsigma_{17}$ เป็นรากตามลำดับดังนี้

3.3.1 สมการกำลังสองสำหรับ x_1

พิจารณา
$$\begin{aligned} x_1 &= \varsigma_{17} + \sigma^2(\varsigma_{17}) + \sigma^4(\varsigma_{17}) + \sigma^6(\varsigma_{17}) + \sigma^8(\varsigma_{17}) \\ &\quad +\sigma^{10}(\varsigma_{17}) + \sigma^{12}(\varsigma_{17}) + \sigma^{14}(\varsigma_{17}) \\ x_1 &= \varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^2 \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} x_2 = \sigma(x_1) &= \sigma^1(\varsigma_{17}) + \sigma^3(\varsigma_{17}) + \sigma^5(\varsigma_{17}) + \sigma^7(\varsigma_{17}) + \sigma^9(\varsigma_{17}) \\ &\quad +\sigma^{11}(\varsigma_{17}) + \sigma^{13}(\varsigma_{17}) + \sigma^{15}(\varsigma_{17}) \\ x_2 &= \varsigma_{17}{}^3 + \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^5 + \varsigma_{17}{}^{11} + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^7 + \varsigma_{17}{}^{12} + \varsigma_{17}{}^6 \end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^2 + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^3 + \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^5 + \varsigma_{17}{}^{11} + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^7 + \varsigma_{17}{}^{12} + \varsigma_{17}{}^6 \end{aligned}$$

นั่นคือ $x_1 + x_2 = -1$ จากบทตั้งที่ 2

และ
$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^6 + \varsigma_{17}{}^{12} + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^{13} + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^{12} + \varsigma_{17}{}^2 + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^{20} + \varsigma_{17}{}^6 + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^4 + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^6 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^7 + \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^3 + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^2 + \varsigma_{17}{}^1 + \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^3 + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^{12} + \varsigma_{17}{}^5 + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^2 + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^{13} + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^6 + \varsigma_{17}{}^{11} + \varsigma_{17}{}^5 + \varsigma_{17}{}^{11} + \varsigma_{17}{}^1 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^2 + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^5 + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^3 + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^7 + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^2 + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^1 + \varsigma_{17}{}^{11} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^5 + \varsigma_{17}{}^{12} + \\ &\quad \varsigma_{17}{}^7 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= 4(\varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^2 \\ &\quad +\varsigma_{17}{}^3 + \varsigma_{17}{}^{10} + \varsigma_{17}{}^5 + \varsigma_{17}{}^{11} + \varsigma_{17}{}^{14} + \varsigma_{17}{}^7 + \varsigma_{17}{}^{12} \\ &\quad + \varsigma_{17}{}^6) \end{aligned}$$

นั่นคือ $x_1x_2 = 4(-1) = -4$ จากบทตั้งที่ 2

จะได้ว่า x_1, x_2 เป็นรากของสมการ $x^2 + x - 4 = 0$

ต่อไปจะแสดงว่า $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0$

$$x_1 = \varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^8 + \varsigma_{17}{}^4 + \varsigma_{17}{}^2$$

$$x_1 = (\varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^{16}) + (\varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^8) + (\varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^4) + (\varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^2)$$

จากบทตั้งที่ 1 จะได้ว่า $\varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

$$\varsigma_{17}{}^9 + \varsigma_{17}{}^8 = 2\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right)$$

$$\varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^4 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$$

$$\varsigma_{17}{}^{15} + \varsigma_{17}{}^2 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)$$

$$x_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + 2\cos(\frac{16\pi}{17})$$

ต่อไปต้องแสดงว่า $2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) > 0$

พิจารณา $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)$ และ $\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right)$

จาก $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

จะได้ว่า $\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) > 0$

และ $\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{12\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) > 0$

ดังนั้น $\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) > 0$

$$2(\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)) > 0$$

ดังนั้น $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0$

และ $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$ เนื่องจาก x_2 เป็นรากอีกตัวหนึ่งของ $x^2 + x - 4 = 0$

3.3.2 สมการกำลังสองสำหรับ y_1

พิจารณา $y_1 = \sigma^0(\varsigma_{17}) + \sigma^4(\varsigma_{17}) + \sigma^8(\varsigma_{17}) + \sigma^{12}(\varsigma_{17})$

$$= \varsigma_{17} + \varsigma_{17}{}^{13} + \varsigma_{17}{}^{16} + \varsigma_{17}{}^4$$

และ $y_2 \;=\; \sigma^2(\varsigma_{17}) + \sigma^6(\varsigma_{17}) + \sigma^{10}(\varsigma_{17}) + \sigma^{14}(\varsigma_{17})$

$= \; {\varsigma_{17}}^9 + {\varsigma_{17}}^{15} + {\varsigma_{17}}^8 + {\varsigma_{17}}^2$

จะได้ว่า $y_1 + y_2 = \varsigma_{17} + {\varsigma_{17}}^{13} + {\varsigma_{17}}^{16} + {\varsigma_{17}}^4 + {\varsigma_{17}}^9 + {\varsigma_{17}}^{15} + {\varsigma_{17}}^8 + {\varsigma_{17}}^2$

นั่นคือ $y_1 + y_2 = x_1$

และ $y_1 y_2 = (\varsigma_{17} + {\varsigma_{17}}^{13} + {\varsigma_{17}}^{16} + {\varsigma_{17}}^4)({\varsigma_{17}}^9 + {\varsigma_{17}}^{15} + {\varsigma_{17}}^8 + {\varsigma_{17}}^2)$

$$y_1 y_2 = {\varsigma_{17}}^{10} + {\varsigma_{17}}^{16} + {\varsigma_{17}}^9 + {\varsigma_{17}}^3 + {\varsigma_{17}}^5 + {\varsigma_{17}}^{11} + {\varsigma_{17}}^4 + {\varsigma_{17}}^{15} + {\varsigma_{17}}^8 + {\varsigma_{17}}^{14} + {\varsigma_{17}}^7 + \varsigma_{17} + {\varsigma_{17}}^{13} + {\varsigma_{17}}^2 + {\varsigma_{17}}^{12} + {\varsigma_{17}}^6$$

นั่นคือ $y_1 y_2 = -1$ จากบทตั้งที่ 2

จะได้ว่า y_1, y_2 เป็นรากของสมการ $x^2 - x_1 x - 1 = 0$

ต้องแสดงว่า $y_1 > 0$

$$y_1 = \varsigma_{17} + {\varsigma_{17}}^{13} + {\varsigma_{17}}^{16} + {\varsigma_{17}}^4$$

$$y_1 = (\varsigma_{17} + {\varsigma_{17}}^{16}) + ({\varsigma_{17}}^{13} + {\varsigma_{17}}^4)$$

จากบทตั้งที่ 1 จะได้ว่า ${\varsigma_{17}}^1 + {\varsigma_{17}}^{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

$${\varsigma_{17}}^{13} + {\varsigma_{17}}^4 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$$

จาก $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

จะได้ $\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) > 0$

ดังนั้น $y_1 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = 2 * 2\cos\left(\frac{5\pi}{17}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{17}\right) > 0$

ดังนั้น $y_1 > 0$

3.3.3 สมการกำลังสองสำหรับ y_3

ให้ $y_3 = \sigma^1(\varsigma_{17}) + \sigma^5(\varsigma_{17}) + \sigma^9(\varsigma_{17}) + \sigma^{13}(\varsigma_{17})$

$= {\varsigma_{17}}^3 + {\varsigma_{17}}^5 + {\varsigma_{17}}^{14} + {\varsigma_{17}}^{12}$

และ $y_4 = \sigma^3(\varsigma_{17}) + \sigma^7(\varsigma_{17}) + \sigma^{11}(\varsigma_{17}) + \sigma^{15}(\varsigma_{17})$

$= {\varsigma_{17}}^{10} + {\varsigma_{17}}^{11} + {\varsigma_{17}}^7 + {\varsigma_{17}}^6$

จะได้ว่า $y_3 + y_4 = {\varsigma_{17}}^3 + {\varsigma_{17}}^5 + {\varsigma_{17}}^6 + {\varsigma_{17}}^7 + {\varsigma_{17}}^{10} + {\varsigma_{17}}^{11} + {\varsigma_{17}}^{12} + {\varsigma_{17}}^6$

นั่นคือ $y_3 + y_4 = x_2$

และ $y_3y_4 \;=\; (\varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{15}+\varsigma_{17}{}^{14}+\varsigma_{17}{}^{12})(\varsigma_{17}{}^{10}+\varsigma_{17}{}^{11}+\varsigma_{17}{}^{7}+\varsigma_{17}{}^{6})$

$$y_3y_4 = \varsigma_{17}{}^{13}+\varsigma_{17}{}^{14}+\varsigma_{17}{}^{10}+\varsigma_{17}{}^{9}+\varsigma_{17}{}^{15}+\varsigma_{17}{}^{16}+\varsigma_{17}{}^{12}+\varsigma_{17}{}^{11} +\varsigma_{17}{}^{7}+\varsigma_{17}{}^{8}+\varsigma_{17}{}^{7}+\varsigma_{17}+\varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{2}+\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{6}$$

นั่นคือ $y_3y_4 = -1$ จากบทตั้งที่ 2

จะได้ว่า y_3, y_4 เป็นรากของสมการ $x^2 - x_2x - 1 = 0$

ต้องแสดงว่า $y_3 > 0$

$$y_3 = \varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{14}+\varsigma_{17}{}^{12}$$
$$y_3 = (\varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{14})+(\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{12})$$

จากบทตั้งที่ 1 จะได้ว่า $\varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{14} = 2\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right)$

$$\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{12} = 2\cos\left(\frac{10\pi}{17}\right)$$

$$y_3 = \varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{14}+\varsigma_{17}{}^{12}$$
$$y_3 = (\varsigma_{17}{}^{3}+\varsigma_{17}{}^{14})+(\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{12})$$
$$y_3 = 2\cos\left(\frac{10\pi}{17}\right)+2\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right)$$

จาก $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

ดังนั้น $y_3 = 2 * 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) > 0$

และเนื่องจาก $y_3y_4 = -1 < 0$ จะได้ว่า $y_4 < 0$

3.3.4 สมการกำลังสองสำหรับ z_1

ให้ $z_1 = \varsigma_{17}+\varsigma_{17}{}^{16}$

และ $z_2 = \varsigma_{17}{}^{13}+\varsigma_{17}{}^{4}$

จะได้ $z_1 + z_2 = y_1$

และ $z_1z_2 = (\varsigma_{17}+\varsigma_{17}{}^{16})(\varsigma_{17}{}^{13}+\varsigma_{17}{}^{4})$

$$z_1z_2 = \varsigma_{17}{}^{14}+\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{29}+\varsigma_{17}{}^{20}$$

นั่นคือ $z_1z_2 = \varsigma_{17}{}^{14}+\varsigma_{17}{}^{5}+\varsigma_{17}{}^{12}+\varsigma_{17}{}^{3} = y_3$

จะได้ว่า z_1, z_2 เป็นรากของสมการ

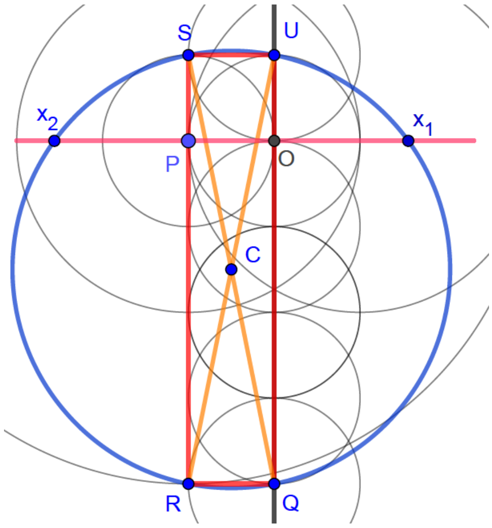
$$x^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2 = 0$$

หรือ $x^2 - y_1x + y_3 = 0$

3.4 การสร้างรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง

ขั้นตอนการสร้างรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรงทำได้ดังนี้

1. จุด $0,1 \in \mathbb{C}$ และเส้นตรง ℓ ที่เชื่อมระหว่างจุด 0 และ 1 และ ลากเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ ℓ ที่จุด $(0,0)$
2. สร้าง x_1, x_2 จากสมการ $x^2 + x - 4 = 0$ ดังนี้
   $p = \frac{-b}{a} = -1\,, q = \frac{c}{a} = -4$ และได้จุดต่อไปนี้คือ
   $U(0,1), P(-1,0), Q(0,-4), R(-1,-4), S(-1,1)$



2.1 กางวงเวียน 1 หน่วย เริ่มที่ จุด $(0,0)$ ตัดแกน Y ที่จุด $U(0,1)$ และตัดแกน X ที่จุด $P(-1,0)$ จากนั้น วาดส่วนของวงกลม โดย $U(0,1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง ให้ตัดส่วนของวงกลมที่มี $P(-1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลางและมีรัศมี 1 หน่วย จะได้จุดตัด คือ $O(0,0)$ และ $S(-1,1)$

2.2 ที่จุด $O(0,0)$ กางวงเวียน 1 หน่วย ตัดส่วนโค้งใต้แกน Y 4 ครั้งต่อเนื่อง ได้จุด $Q(0,-4)$ ที่จุด $Q(0,-4)$ กางวงเวียน 1 หน่วย ให้ตัดส่วนของวงกลมที่จุด $P(-1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง ที่มีรัศมี 4 หน่วย จะได้จุดตัด คือ $R(-1,-4)$

2.3 ใช้สันตรงลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด $UQRS$ จะได้สี่เหลี่ยมผืนผ้า

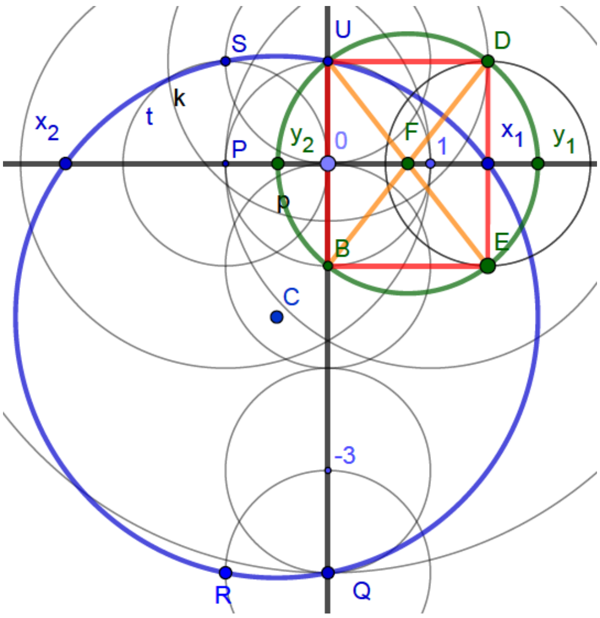
2.4 ลากเส้นทแยงมุม $\overline{SQ}$ และ $\overline{UR}$ ตัดกันที่จุด $C(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2})$

2.5 กางวงเวียนเท่ากับ $\overline{CU}$ โดยให้ $C(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2})$ เป็นจุดศูนย์กลางและสร้างวงกลม จะได้ส่วนโค้งของวงกลมตัดแกน X ที่จุด $A(x_1, 0)$ และ $G(x_2, 0)$ โดยที่ $x_1 > x_2$

3. สร้าง y_1, y_2 จากสมการ $x^2-(x_1)x-1=0$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\\
x &= \frac{x_1 \pm \sqrt{{x_1}^2+4}}{2}\\
b &= -x_1\ ,\quad c=-1\\
p &= \frac{-b}{a} = \frac{-(-x_1)}{1} \;=\; x_1\\
q &= \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1
\end{aligned}
$$

จะได้ $U(0,1), A(x_1,0), B(0,-1), E(x_1,-1), D(x_1,1)$



3.1 ที่จุด $U(0,1)$ และ ที่จุด $B(0,-1)$ กางวงเวียน x_1 หน่วย ตัดส่วนของวงกลม 1 หน่วย ที่มีจุด $A(x_1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้จุดตัด คือ $D(x_1,1)$ และ $E(x_1,-1)$ ตามลำดับ

3.2 ใช้สันตรงลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด $UBED$ จะได้สี่เหลี่ยมผืนผ้า

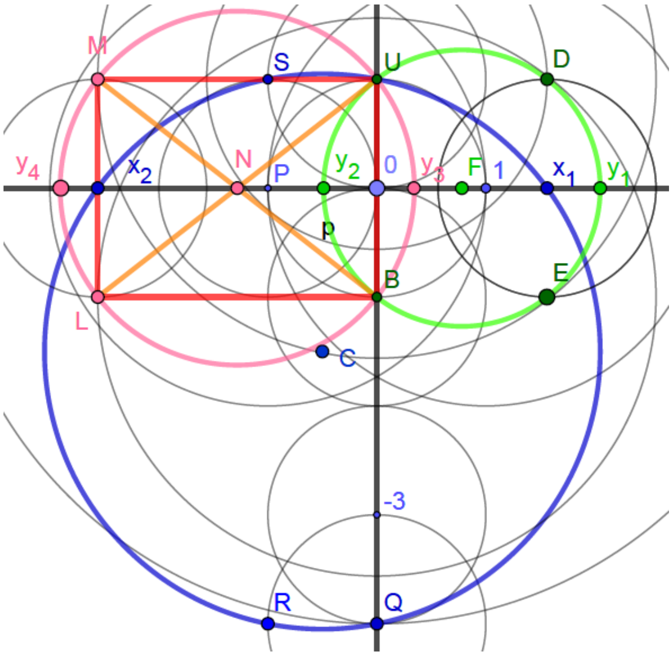
3.3 ลากเส้นทแยงมุม $\overline{UE}$ และ $\overline{BD}$ ตัดกันที่จุด $F\left(\frac{x_1}{2},0\right)$

3.4 กางวงเวียนเท่ากับ $\overline{FD}$ โดยให้ $F(\frac{x_1}{2},0)$ เป็นจุดศูนย์กลางสร้างวงกลม จะได้ส่วนโค้งของวงกลมตัดแกน X ที่จุด $H(y_1,0)$ และ $I(y_2,0)$ โดยที่ $y_1 > y_2$

4. สร้าง y_3, y_4 จากสมการ $x^2 - (x_2)x - 1 = 0$ ดังนี้

$$b = -x_1, \quad c = -1$$
$$p = \frac{-b}{a} = \frac{-(-x_2)}{1} = x_2$$
$$q = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

จะได้ $U(0,1), G(x_2,0), B(0,-1), L(x_2,-1), M(x_2,1)$



4.1 ที่จุด $U(0,1)$ และ ที่จุด $B(0,-1)$ กางวงเวียน x_2 หน่วย ตัดส่วนของวงกลม 1 หน่วย ที่มีจุด $G(x_2,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้จุดตัด คือ $M(x_2,1)$ และ $L(x_2,-1)$

4.2 ใช้สันตรงลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด $MUBL$ จะได้สี่เหลี่ยมผืนผ้า

4.3 ลากเส้นทแยงมุม $\overline{LU}$ และ $\overline{BM}$ ตัดกันที่จุด $N\left(\frac{x_2}{2}, 0\right)$

4.4 กางวงเวียนเท่ากับ $\overline{NU}$ โดยให้ $N\left(\frac{x_2}{2}, 0\right)$ เป็นจุดศูนย์กลางสร้างวงกลม จะได้ส่วนโค้งของวงกลม ตัดแกน X ที่จุด $T(y_3, 0)$ และ $V(y_4, 0)$ โดยที่ $y_3 > y_4$

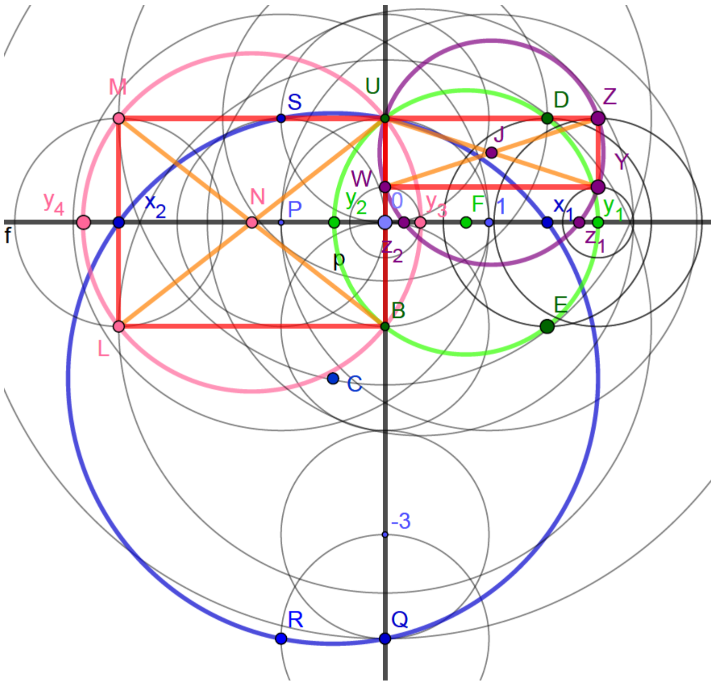
5. สร้าง z_1, z_2 จากสมการ $x^2 - y_1x + y_3 = 0$ ดังนี้

$$b = -y_1\,, \quad c = y_3$$

$$p = \frac{-b}{a} = \frac{-(-y_1)}{1} = y_1$$

$$q = \frac{c}{a} = \frac{y_3}{1} = y_3$$

จะได้ $U(0,1), H(y_1,0), W(0,y_3), Y(y_1,y_3), Z(y_1,1)$



5.1 ที่จุด $U(0,1)$ กางวงเวียน y_1 หน่วย ตัดส่วนของวงกลม 1 หน่วย ที่จุด $H(y_1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้จุดตัด คือ $Z(y_1,1)$

5.2 ที่จุด $O(0,0)$ กางวงเวียน y_3 หน่วย ตัดแกน Y ที่จุด $W\ (0,y_3)$ ให้ $W(0,y_3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และกางวงเวียน y_1 หน่วย ตัดส่วนของวงกลม ที่มี $H(y_1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี y_3 หน่วย ได้จุดตัด คือ $Y(y_1,y_3)$

5.3 ใช้สันตรงลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด $UWYZ$ จะได้สี่เหลี่ยมผืนผ้า

5.4 ลากเส้นทแยงมุม $\overline{UY}$ และ $\overline{WZ}$ ตัดกันที่จุด $J\left(\frac{y_1}{2},\frac{y_3+1}{2}\right)$ ให้ $J\left(\frac{y_1}{2},\frac{y_3+1}{2}\right)$ เป็จุดศูนย์กลาง สร้างวงกลม รัศมี $\overline{JZ}$ จะได้ส่วนโค้งของวงกลมตัดแกน X ที่จุด $K(z_1,0)$ และ $X(z_2,0)$ โดยที่ $z_1 > z_2$

6. สร้าง ς_{17} ซึ่งเป็นจุดยอดจุดหนึ่งของรูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม โดยพิจารณาว่า ς_{17} เป็นจุดตัดของวงกลมสองวง ดังนี้

จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $(x - z_1)^2 + y^2 = 1$

เนื่องจาก $x = \frac{z_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

จะได้ว่า $y^2 = 1 - x^2$ และ $y^2 = 1 - (x - z_1)^2$

ดังนั้น $x^2 = (x - z_1)^2$ จะได้ว่า $x = \pm(x - z_1)$

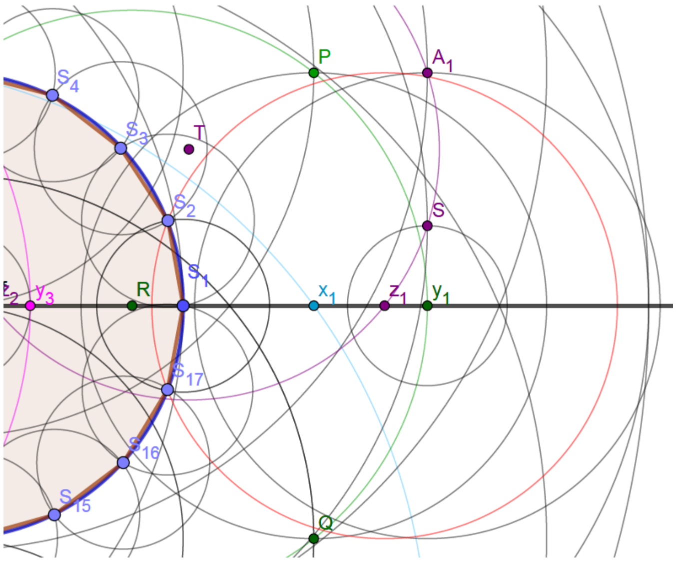
ดังนั้น $x = -(x - z_1)$ จะได้ว่า $2x = z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

ดังนั้น $x = \frac{z_1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$

ดังนั้น จุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และ $(x - z_1)^2 + y^2 = 1$

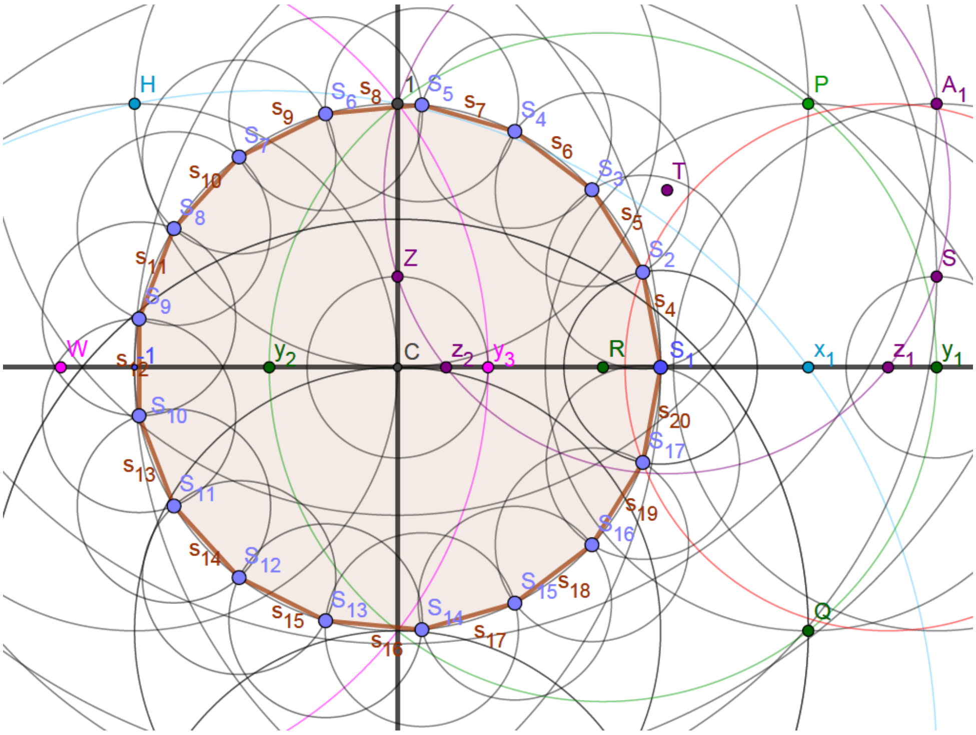
คือ $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)\right)$ และ $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right), -\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)\right)$

ซึ่งสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน ς_{17} และ $\overline{\varsigma_{17}}$ ตามลำดับ



ที่จุด $K(z_1, 0)$ กางวงเวียน 1 หน่วย ตัดส่วนของวงกลม 1 หน่วย ที่มี $O(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้จุดตัด คือ S_2 และ S_{17}

7. สร้างวงกลม โดยให้ จุด $S_1(1,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี $\overline{S_1S_2}$ ตัดส่วนโค้งของวงกลม รัศมี 1 หน่วย ที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง ต่อเนื่อง จะได้จุดตัด $S_2, S_3, \ldots, S_{17}$
8. ใช้สันตรงลากเส้นเชื่อม จุด $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{17}$
9. จะได้รูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม



รูปสิบเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมโดยสร้างด้วยโปรแกรม GeoGebra

เอกสารอ้างอิง

[1] นิธิ รุ่งธนาภิรมย์, **เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีจำนวน**, คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย, 2563

[2] ศจี เพียรสกุล, **เอกสารประกอบการสอนวิชาพีชคณิตนามธรรม** 1, คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2562

[3] Antoine Chambert-Noir. A field Guide to Algebra (2005). Springer

[4] Tobias Dantzig. Solving a quadratic with straightedge and compass[online]. 2015. Available from : http://lostmathlessons.blogspot.com/2015/06/solving-quadratic-with-straightedge-and.html [19 ตุลาคม 2563]

[5] Ben Lynn. The heptadecagon. 19 November, 2020. Available from https://crypto.stanford.edu/pbc/notes/numbertheory/

ภาคผนวก

กลุ่มที่ ......6....

เอกสารนี้ได้รับการอนุมัติจากอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานแล้ว

ลงชื่อ ....

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2563

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Construction of regular polygons by compass and straightedge
อาจารย์ที่ปรึกษา	อ.ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์
ผู้ดำเนินการ	1. ชื่อ เสก ประยงค์พันธ์ เลขประจำตัวนิสิต 6033545923 สาขา วิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรงในวงกลม เป็นที่น่าสนใจของนักคณิตศาสตร์โบราณว่ามีวิธีการสร้างอย่างไร ทำไมบางรูปถึงสร้างได้และทำไมบางรูปสร้างไม่ได้ มีข้อจำกัดอย่างไร

ผู้จัดทำโครงงานนี้มีความคิดที่จะศึกษารูปแบบในการสร้างว่ามีรูปแบบการสร้างรูปหลาย-เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรงในวงกลมว่าน่าจะมีความสัมพันธ์กับความรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยนำความรู้ทางพีชคณิตมาศึกษาปัญหาในการสร้างรูป

เราจะศึกษาปัญหาการสร้างรูปด้วยวงเวียนและสันตรง โดยพิจารณาจุดบนระนาบเชิงซ้อน โดยใช้วงเวียนและสันตรงภายใต้กติกาต่อไปนี้

1. มีวงเวียน สันตรง และจุดเริ่มต้นสองจุด ให้เป็น $0,1 \in \mathbb{C}$
2. ใช้สันตรงเพื่อลากเส้นตรงระหว่างจุดที่สร้างไปแล้วสองจุดได้
3. จุดตัดของเส้นตรงสองเส้น หรือ เส้นตรงกับวงกลม หรือ วงกลมสองวง สามารถนำมาใช้ต่อได้
4. วงกลมที่สร้างด้วยวงเวียนต้องมีจุดศูนย์กลางเป็นจุดที่สร้างไปแล้วและมีความยาวรัศมีเท่ากับระยะห่างระหว่างสองจุดที่สร้างไปแล้วเท่านั้น

เราจะเรียกจุดตัดที่ได้จากข้อ 3 ว่า จุดที่สร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรงและเรียกรูปหลาย-เหลี่ยมที่มีจุดยอดทุกจุดสร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรงว่า รูปที่สร้างด้วยวงเวียนและสันตรง สำหรับคำถามที่ว่า จุดใดบนระนาบเชิงซ้อนสามารถสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงได้บ้าง เราจะพิจารณาให้

$$E_0 = \mathbb{Q}$$
$$E_1 = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} | z \text{ เป็นรากสมการของกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน } E_0\})$$
$$E_2 = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} | z \text{ เป็นรากสมการของกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน } E_1\})$$
$$\vdots$$
$$E_n = \mathbb{Q}(\{z \in \mathbb{C} | z \text{ เป็นรากสมการของกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์ใน } E_{n-1}\})$$

เพื่อสรุปว่า $\mathrm{E} = \bigcup_{\mathrm{i} \geq 0} \mathrm{E_i}$ เป็นเซตของจุดทั้งหมดของระนาบจำนวนเชิงซ้อนที่สร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง เนื่องจากเราสามารถใช้วงเวียนและสันตรงเพื่อหารากบนระนาบเชิงซ้อนของสมการกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนที่สร้างได้ด้วยวงเวียนและสันตรง

ในการศึกษาการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสร้างด้วยวงเวียนและสันตรง เรามีทฤษฎีบทหลักที่ใช้ในการระบุว่า เมื่อไรที่สามารถสร้างได้หรือไม่ได้ ซึ่งก็คือทฤษฎีบทต่อไปนี้

รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสร้างด้วยวงเวียนและสันตรงได้ก็ต่อเมื่อ $\varphi(n)$ เป็นกำลัง-ของสอง นั่นคือ $n = 2^k p_1 \cdots p_r$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}_0$ *และ* $p_1, \cdots, p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะแฟร์-มาที่ต่างกันทั้งหมด, [1]

ในโครงงานนี้ เราจะศึกษาการสร้างรูป n เหลี่ยม เช่น $n = 17$ โดยการแก้สมการกำลัง-สองต่อเนื่องหลายครั้ง เพื่อให้ได้จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นรากที่ n ของ 1

วัตถุประสงค์

เพื่อหาวิธีการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในวงกลมด้วยวงเวียนและสันตรง

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาวิธีการวิธีสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในวงกลมโดยใช้วงเวียนและสันตรง สำหรับค่า n บางค่า เช่น $n = 3, 5, 6, 17$

วิธีการดำเนินงาน

1) ศึกษาประวัติความเป็นมาของการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยสันตรงและวงเวียน และตัวอย่างการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรงเมื่อ n มีค่าไม่มาก เช่น $n = 3,5,6$
2) นำความรู้ทางพีชคณิตมาหาวิธีการสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง เมื่อ n มีค่ามากขึ้นจากในข้อ 1 เช่น $n = 17$
3) เขียนรายงาน

วิธีการดำเนินงาน

แผนการดำเนินงาน

เดือน / การดำเนินการ	ส.ค. 63	ก.ย. 63	ต.ค. 63	พ.ย. 63	ธ.ค. 63	ม.ค. 64	ก.พ. 64	มี.ค. 64	เม.ย. 64
1. กำหนดหัวข้อในการทำโครงงาน									
2. วางแผนดำเนินงาน									
3. ศึกษาเนื้อหา ศึกษาโจทย์ปัญหาเปลี่ยนรูปแบบโจทย์									
4. สังเกตคำตอบที่ได้ และสร้างรูปแบบของคำตอบ									
5.ทบทวนพื้นฐานทางพีชคณิตและทฤษฎีจำนวนที่จำเป็น									
6.สังเกตรูปแบบการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในวงกลม									
7.สร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าในวงกลมด้วยวงเวียนและสันตรงเท่านั้น									
8.เขียนรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ทราบวิธีการสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าด้วยวงเวียนและสันตรง

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

กระดาษ เครื่องเขียน วงเวียน คอมพิวเตอร์ โปรแกรม GeoGebra

งบประมาณ

1.	กระดาษ A4 2 รีม	300.00 บาท
2.	ชุดเครื่องเขียน	100.00 บาท
3.	USB flash drive 16 GB	150.00 บาท
4.	หมึกเติมเครื่องพิมพ์ Epson	800.00 บาท
	รวม	1,350.00 บาท

หมายเหตุ งบประมาณที่ตั้งไว้ขอถัวเฉลี่ยกันทุกรายการ

เอกสารอ้างอิง

[1] นิธิ รุ่งธนาภิรมย์, **เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีจำนวน**, คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย, 2563

[2] ศจี เพียรสกุล, **เอกสารประกอบการสอนวิชาพีชคณิตนามธรรม** 1, คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2562

[3] Antoine Chambert-Noir. A field Guide to Algebra (2005). Springer

[4] Tobias Dantzig. Solving a quadratic with straightedge and compass[online]. 2015. Available from : http://lostmathlessons.blogspot.com/2015/06/solving-quadratic-with-straightedge-and.html [19 ตุลาคม 2563]

[5] Ben Lynn. The heptadecagon. 19 November, 2020. Available from https://crypto.stanford.edu/pbc/notes/numbertheory/