โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

Inverse operator method for solving PDEs

ชื่อนิสิต นายอดิศักดิ์ สีดามาตร **เลขประจำตัว** 6033546523

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2563

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

นายอดิศักดิ์ สีดามาตร

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

Inverse operator method for solving PDEs

Mr. Adisak Seedamad

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2020

หัวข้อโครงงาน	วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
โดย	นายอดิศักดิ์ สีดามาตร
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย)

นายอดิศักดิ์ สีดามาตร: วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย. (Inverse operator method for solving PDEs) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รศ.ดร. สุจินต์ คมฤทัย, 33 หน้า.

โครงการวิจัย เรื่อง “วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย” มีวัตถุประสงค์ คือ ศึกษาเรียบเรียงและพัฒนาวิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ขอบเขตการวิจัยจะพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญมาอ้างอิงในการพิสูจน์ ผลการวิจัยพบว่า ตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย มีสมบัติสลับที่ สมบัติเชิงเส้น และสามารถหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $f(D_x, D_y)u = \phi(x,y)$ เมื่อฟังก์ชัน $\phi(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับ e^{mx+ny} , $\cos(mx+ny)$ และ $\sin(mx+ny)$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต อดิศักดิ์ สีดามาตร
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก สุจินต์ คมฤทัย
ปีการศึกษา 2563

6033546523: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : INVERSE OPERATORS, PARTICULAR SOLUTIONS, PDE

ADISAK SEEDAMAD : INVERSE OPERATOR METHOD FOR SOLVING PDE's. ADVISOR : ASSOC. PROF. SUJIN KHOMRUTAI, Ph.D., 33 pp.

This project entitled "Inverse Operator Method for Solving PDE's" has the objective to develop the inverse operator methods for solving PDE's. We investigate only second order PDEs of two variables. We employ several properties from the inverse operator method for solving ODEs to apply to PDEs. The results showed the properties of the inverse operator method for solving sub-derivative equations. The results in this work is that we have obtained the commutativity and the linearity of the inverse operators, and furthermore, we can solve for specific solutions of the equation $f(D_x, D_y)u = \phi(x,y)$ where $\phi(x,y)$ has the form about e^{mx+ny}, $\cos(mx+ny)$, $\sin(mx+ny)$.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Adisak

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature Sujin Khomrutai

Academic Year : 2020

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เพราะ ได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินการโครงงานจึงขอขอบคุณใน ความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานและคอยให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ชี้แนะให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานมาตลอด ตั้งแต่เริ่มต้นทำงานจนโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ

ตลอดจนขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล และรองศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย ที่ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบโครงงาน และได้ให้ข้อเสนอแนะ ข้อคิด รวมถึงชี้ให้เห็นช้อผิดพลาดต่าง ๆ ซึ่งทำให้โครงงานนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านและรุ่นพี่ทุกคนที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และตลอดระยะเวลาที่ได้ทำโครงงานนี้มา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและเหตุผลการวิจัย

การหาผลเฉลยของสมการการเชิงอนุพันธ์ในปัจจุบัน ช่วยแก้ปัญหาในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และศาสตร์สาขาอื่น ๆ ที่สามารถอธิบาย ได้ด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งส่วนใหญ่ จะอยู่ในรูปอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งที่กำลังศึกษา เช่น ความร้อน คลื่น ตำแหน่งของวัตถุ เป็นต้น

ในการศึกษาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะเขียนอยู่ในรูป $y = y_c + y_p$ ซึ่ง y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ เมื่อแทน $\phi(x)$ ด้วยฟังก์ชันศูนย์ และ y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ สำหรับแต่ละ $\phi(x)$ ที่กำหนดให้ จะเห็นว่า y_p ตามบทนิยามสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน ขึ้นอยู่กับเทคนิคในการแก้ปัญหา เช่น หลักการเทียบสัมประสิทธิ์ ตัวดำเนินการผกผัน การแปรพารามิเตอร์ เป็นต้น

ดังนั้นผู้จัดทำมีความสนใจที่จะศึกษาวิธีตัวดำเนินการผกผันของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพราะช่วยแก้สมการได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ จากการค้นคว้าพบว่ายังไม่มีการกล่าวถึงการใช้วิธีแบบเดียวกันในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอย่างเป็นระบบมีเพียงเอกสารอ้างอิง [1] ผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะค้นคว้าเรียบเรียงและพัฒนาวิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ศึกษาเรียบเรียงและพัฒนาวิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

1.3 ขอบเขตการวิจัย

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว

1.4 ขั้นตอนการวิจัย

การวิจัยเพื่อการวิเคราะห์ความพึงพอใจของผู้เรียนในระบบการจัดการเรียนการสอนแบบห้องเรียนกลับด้าน มีขั้นตอนการดำเนินการดังต่อไปนี้

1. ศึกษาทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
2. ศึกษาการจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออกเป็นประเภทต่าง ๆ
3. ค้นคว้าหนังสือและงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีตัวดำเนินการผกผันในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
4. พิสูจน์ผลลัพธ์เกี่ยวกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีตัวดำเนินการผกผันในกรณีต่าง ๆ

5. ตรวจสอบความถูกต้องของการดำเนินงาน
6. สรุปและจัดทำรูปเล่ม

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัยในครั้งนี้มีดังนี้

1. เข้าใจกระบวนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยตัวดำเนินการผกผัน
2. มีวิธีการในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยตัวดำเนินการผกผันที่รวดเร็วและมีประสิทธิภาพ

1.6 โครงสร้างของรายงาน

บทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

บทที่ 3 บทพิสูจน์และตัวอย่างของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

บทที่ 4 บทพิสูจน์และตัวอย่างของตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

บทที่ 5 จะกล่าวถึงข้อสรุป และข้อเสนอแนะ

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2.1 ตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผันในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \phi(x) \qquad (1)$$

โดย $a_n, \dots, a_1, a_0$ เป็นค่าคงตัว และ $\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้
สมการสามารถเขียนได้ในรูป

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ \dots \ + a_1 D + a_0) y = \phi(x)$$

โดย

$$D = \frac{d}{dt}$$

กำหนดให้ $f(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ \dots \ + a_1 \mathrm{D} + a_0$
เรียก $f(D)$ ว่าตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ของสมการ (1)
ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) เขียนได้เป็น $y = y_c + y_p$

โดยที่ y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ เมื่อแทน $\phi(x)$ ด้วยฟังก์ชันศูนย์ และ y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ สำหรับแต่ละ $\phi(x)$ ที่กำหนดให้

บทนิยาม ตัวดำเนินการผกผัน $\dfrac{1}{f(D)}$ กระทำกับ $\phi(x)$ คือฟังก์ชัน y_p ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $f(D) y_p = \phi(x)$ และเขียนใหม่เป็น $y_p = \frac{1}{f(D)} \phi(x)$
หมายเหตุ : y_p ตามบทนิยามสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน โดยในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสูตรต่างๆ ที่นำไปสู่การหาตัวดำเนินการผกผันที่สอดคล้องสมบัติ (1)

พิจารณาสมการ $Dy = \phi(x)$ และสามารถเขียนเป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ผกผัน $y = \frac{1}{D} \phi(x)$ เรารู้ว่าสมการข้างต้นนี้มีผลเฉลยเฉพาะโดยใช้ความรู้พื้นฐานดังนี้ $y = \int \phi(x)\, dx$
ดังนั้นสรุปได้ว่า $\frac{1}{D} \phi(x) = \int \phi(x)\, dx$

สำหรับ $D = \frac{d}{dt}$ จะกำหนดนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ตัวดำเนินการผกผันของ $D = \frac{d}{dt}$ คือ $\frac{1}{D}(\phi(x)) = \int \phi(x)\ dx$

2.2 สมบัติของตัวดำเนินการและตัวดำเนินการผกผัน

ให้ $f(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ \dots\ + a_1 \mathrm{D} + a_0$

โดย $a_n, \dots, a_1, a_0$ เป็นค่าคงตัว, $\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ

1.[1] $f(D)\left[\frac{1}{f(D)}\phi(x)\right] = \phi(x)$

2.[1] $\frac{1}{f_1(D)f_2(D)}\phi(x) = \frac{1}{f_1(D)}\left(\frac{1}{f_2(D)}\phi(x)\right) = \frac{1}{f_2(D)}\left(\frac{1}{f_1(D)}\phi(x)\right)$

3.[1] $\frac{1}{f(D)}[c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)] = c_1\frac{1}{f(D)}\phi_1(x) + c_2\frac{1}{f(D)}\phi_2(x)$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ และ $\phi_1(x), \phi_2(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ

4.[1] $f(D)e^{ax} = f(a)e^{ax}$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหา $D^3(D^2+1)\, e^{2x}$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f(D)e^{ax} = f(a)e^{ax}$

จะได้ $D^3(D^2+1)e^{2x} = 2^3(2^2+1)e^{2x} = 40e^{2x}$

5.[1] $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$ โดยที่ $f(a) \neq 0$ และ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2 + D + 2)u = 2e^{4x}$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$

จะได้ $u_p = \frac{1}{D^2 + D + 2}\, 2e^{4x} = e^{4x}\frac{1}{(4)^2 + (4) + 2} = \frac{e^{4x}}{22}$

6.[1] $f(D)(\phi(x)e^{ax}) = e^{ax}f(D+a)\phi(x)$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหา $(D^2 + 3D + 2)x^3e^x$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f(D)(\phi(x)e^{ax}) = e^{ax}f(D+a)\phi(x)$

จะได้
$$\begin{aligned}(D^2+3D+2)x^3e^x &= e^x[(D+1)^2 + 3(D+1) + 2]x^3 \\ &= e^x(D^2 + 2D + 1 + 3D + 3 + 2)x^3 \\ &= e^x(D^2 + 5D + 6)x^3 \\ &= e^x(6x + 15x^2 + 6x^3)\end{aligned}$$

7.[1] $\frac{1}{f(D)}(\phi(x)e^{ax}) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}\phi(x)$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D-4)u = xe^{4x}$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน
วิธีทำ จาก $\frac{1}{f(D)}(\phi(x)e^{ax}) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}\phi(x)$
จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D-4}xe^{4x} = e^{4x}\frac{1}{(D+4)-4}x = e^{4x}\frac{1}{D}x = e^{4x}\int x\,dx = \frac{x^2e^{4x}}{2}$

8.[1] $\frac{1}{(D-a)^m}e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{m!}$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่ และ m เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D-3)^5u = e^{3x}$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน
วิธีทำ จาก $\frac{1}{(D-a)^m}e^{ax} = \frac{x^m e^{ax}}{m!}$ จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{(D-3)^5}e^{3x} = \frac{x^5e^{3x}}{5!}$

9. $(D-a)^m x^n e^{ax} = 0$ โดยที่ $m > n$, a เป็นค่าคงที่ และ m, n เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง จงหา $(D-1)^4x^3e^x$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ
วิธีทำ จาก $(D-a)^m t^n e^{ax} = 0$ และ $4 > 3$
จะได้ $(D-1)^4x^3e^x = 0$

10.[1] $\frac{1}{(D-a)^m f(D)}e^{ax} = \frac{x^m}{m!f(a)}e^{ax}$ โดยที่ $f(a) \neq 0$, a เป็นค่าคงที่ และ m เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D-3)^5(D^2+1)u = e^{3x}$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน
วิธีทำ จาก $\frac{1}{(D-a)^m f(D)}e^{ax} = \frac{x^m}{m!f(a)}e^{ax}$
จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{(D-3)^5(D^2+1)}e^{3x} = \frac{x^5e^{3x}}{5!(3^2+1)} = \frac{x^5e^{3x}}{5!\,10}$

11. $(D^2+a^2)\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases} = (a^2-b^2)\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases}$ โดยที่ a, b เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหา $(D^2+3)\sin 2x$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ
วิธีทำ จาก $(D^2+a^2)\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases} = (a^2-b^2)\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases}$
จะได้ $(D^2+3)\sin 2x = (-2^2+3)\sin 2x = \sin 2x$

12.[1] $\frac{1}{D^2+a^2}\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases} = \frac{1}{a^2-b^2}\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases}$ โดยที่ $|a| \neq |b|$ และ a, b เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2+1)u = \sin 2x$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{D^2+a^2}\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases} = \frac{1}{a^2-b^2}\begin{cases}\cos bx\\ \sin bx\end{cases}$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D^2+1}\sin 2x = \frac{1}{-2^2+1}\sin 2x = -\frac{1}{3}\sin 2x$

13.[1] $\frac{1}{D^2+a^2}\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases} = \frac{1}{2a}\begin{cases}x\sin ax\\ -x\cos ax\end{cases}$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2+4)u = \cos 2x$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผันผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{D^2+a^2}\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases} = \frac{1}{2a}\begin{cases}x\sin ax\\ -x\cos ax\end{cases}$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D^2+4}\cos 2x = \frac{1}{2(2)}x\sin 2x = \frac{1}{4}x\sin 2x$

14.[1] $f(D^2)\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases} = f(-a^2)\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases}$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหา $(3D^2+4D+5)\cos 2x$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f(D^2)\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases} = f(-a^2)\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases}$

จะได้ $(3D^2+4D+5)\cos 2x$
$$\begin{aligned} &= (3(-2^2)+4D+5)\cos 2x \\ &= (4D-7)\cos 2x \\ &= -8\sin 2x - 7\cos 2x \end{aligned}$$

15. $f(D)\begin{cases}\phi(x)e^{ax}\cos\omega x\\ \phi(x)e^{ax}\sin\omega x\end{cases} = e^{ax}\begin{cases}Re\left(e^{i\omega x}f(D+Z)\phi(x)\right)\\ Im\left(e^{i\omega x}f(D+Z)\phi(x)\right)\end{cases}$

โดยที่ $Z = a + i\omega$ ซึ่ง a, ω เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหา $(5D+2)x^2e^x\cos x$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f(D)\begin{cases}\phi(x)e^{ax}\cos\omega x\\ \phi(x)e^{ax}\sin\omega x\end{cases} = e^{ax}\begin{cases}Re\left(e^{i\omega x}f(D+Z)\phi(x)\right)\\ Im\left(e^{i\omega x}f(D+Z)\phi(x)\right)\end{cases}$

จะได้ $(5D+2)x^2e^x\cos x = e^xRe[e^{ix}(5((D+1+i)+2)x^2$
$$\begin{aligned} &= e^xRe\left[e^{ix}(5D+5i+7)x^2\right] \\ &= e^xRe[e^{ix}(10x+5x^2i+7x^2)] \end{aligned}$$

16.[1] $\frac{1}{f(D^2)}\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases} = \frac{1}{f(-a^2)}\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases}$ โดยที่ $f(-a^2) \neq 0$ และ a เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2+3D+1)u = \cos x$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{f(D^2)}\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases} = \frac{1}{f(-a^2)}\begin{cases}\cos ax\\ \sin ax\end{cases}$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D^2+3D+1}\cos x = \frac{1}{-1^2+3D+1}\cos x = \frac{1}{3D}\cos x$

$= \frac{1}{3}\int \cos x\, dx = -\frac{1}{3}\sin x$

17.[1] $\dfrac{1}{aD^2+bD+c}\begin{cases}\cos \omega x\\ \sin \omega x\end{cases} = \dfrac{\left[(c-a\omega^2)\begin{cases}\cos \omega x\\ \sin \omega x\end{cases} + b\omega\begin{cases}\sin \omega x\\ -\cos \omega x\end{cases}\right]}{(c-a\omega^2)^2 - b^2\omega^2}$

โดยที่ a, b, c, ω เป็นค่าคงที่ และ $(c-a\omega^2)^2 - b^2\omega^2 \neq 0$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(4D^2+5D+6)u = \cos 3x$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{aD^2+bD+c}\begin{cases}\cos \omega x\\ \sin \omega x\end{cases} = \frac{\left[(c-a\omega^2)\begin{cases}\cos \omega x\\ \sin \omega x\end{cases} + b\omega\begin{cases}\sin \omega x\\ -\cos \omega x\end{cases}\right]}{(c-a\omega^2)^2 - b^2\omega^2}$

จะได้ว่า $u_p = \dfrac{1}{4D^2+5D+6}\cos 3x = \dfrac{\left(6-4\left(3^2\right)\right)\cos 3x + 5(3)\sin 3x}{\left(6-4\left(3^2\right)\right)^2 - 5^2\left(3^2\right)}$

$= \dfrac{-30\cos 3x + 15\sin 3x}{225} = \dfrac{-2\cos 3x + \sin 3x}{15}$

18.[1] $\dfrac{1}{f(D)}x^n = \dfrac{1}{a_0[1+g(D)]}x^n$

$= \dfrac{1}{a_0}[1 - g(D) + g^2(D) - g^3(D) + \cdots + g^n(D) + \cdots]x^n$

เมื่อ $a_0 \neq 0$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^2+D+2)u = x^4$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{f(D)}x^n = \frac{1}{a_0}[1 - g(D) + g^2(D) - g^3(D) + \cdots + g^n(D) + \cdots]x^n$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D^2+D+2}x^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}D^2+\frac{1}{2}D+1}x^4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)}x^4\right)$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right) + \left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)^3 + \left(\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)^4\right]x^4$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{2}D^3 + \frac{1}{4}D^4 - \frac{1}{8}D^3 - \frac{3}{8}D^4 + \frac{1}{16}D^4 + \cdots\right]x^4$

$= \frac{1}{2}\left[x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 3x^2 + 12x + 6 - 3x - 9 + \frac{3}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 9x - \frac{3}{2}\right]$

19. $f(D)\{x\phi(x)\} = xf(D)\phi(x) + f'(D)\phi(x)$

ตัวอย่าง จงหา $(D^2 + 3D + 2)xe^{2x}$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ
วิธีทำ จาก $f(D)\{x\phi(x)\} = xf(D)\phi(x) + f'(D)\phi(x)$
จะได้ $\quad (D^2 + 3D + 2)xe^{2x} = x(D^2 + 3D + 2)e^{2x} + (2D + 3)e^{2x}$

$= x(2^2 + 3(2) + 2)e^{2x} + (2(2) + 3)e^{2x}$

(สมบัติตัวดำเนินการสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 4)

$= 12xe^{2x} + 7e^{2x}$

20.[3] $\frac{1}{f(D)}\{x\phi(x)\} = x\frac{1}{f(D)}\phi(x) - \frac{f'(D)}{[f(D)]^2}\phi(x)$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D + 1)u = xe^{4x}$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{f(D)}\{x\phi(x)\} = x\frac{1}{f(D)}\{\phi(x)\} - \frac{f'(D)}{[f(D)]^2}\{\phi(x)\}$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D+1}xe^{4x} = x\frac{1}{D+1}e^{4x} - \frac{1}{(D+1)^2}e^{4x} = \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{25}\right)e^{4x} = \frac{5x-1}{25}e^{4x}$

บทที่ 3
ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ของ PDE

ในบทนี้จะกล่าวถึงตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

3.1 ตัวดำเนินการในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการ

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\phi(x,\mathrm{y}) \qquad (2)$$

โดย a,b,c เป็นค่าคงตัว และ $\phi(x,y)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ
ด้วย วิธีเชิงตัวดำเนินการผกผัน โดยเขียนสมการเป็น

$$\left(aD_x^2+2bD_xD_y+cD_y^2\right)u=\phi(x,\mathrm{y})$$

โดย $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$ และ $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$
กำหนดให้ $f\left(D_x,D_y\right)=aD_x^2+2bD_xD_y+cD_y^2$
เรียก $f\left(D_x,D_y\right)$ ว่าตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ของสมการ (2)

3.2 สมบัติของตัวดำเนินการในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ให้ $f\left(D_x,D_y\right)=aD_x^2+2bD_xD_y+cD_y^2$ โดย a,b,c เป็นค่าคงตัว, $\phi(x,y)$ เป็นฟังก์ชัน และ m,n เป็นค่าคงที่

1. $f\left(D_x,D_y\right)e^{mx+ny}=f(m,n)e^{mx+ny}$

บทพิสูจน์ $f\left(D_x,D_y\right)e^{mx+ny}=\left(aD_x^2+2bD_xD_y+cD_y^2\right)e^{mx+ny}$

$$=aD_x^2e^{mx+ny}+2bD_xD_ye^{mx+ny}+cD_y^2e^{mx+ny}$$

$$=am^2e^{mx+ny}+2bmne^{mx+ny}+cn^2e^{mx+ny}$$

$$=(am^2+2bmn+cn^2)e^{mx+ny}=f(m,n)e^{mx+ny} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง จงหา $\left(D_x^2-2D_xD_y+3D_y^2\right)e^{x+3y}$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ
วิธีทำ จาก $f\left(D_x,D_y\right)e^{mx+ny}=f(m,n)e^{mx+ny}$
จะได้ว่า $\left(D_x^2-2D_xD_y+3D_y^2\right)e^{x+3y}=(1^2-2(1)(3)+3(3^2))e^{x+3y}=22e^{x+3y}$

2. $f\left(D_x,D_y\right)\phi(x,y)e^{mx+ny}=e^{mx+ny}f\left(D_x+m,D_y+n\right)\phi(x,y)$

บทพิสูจน์ $f\left(D_x,D_y\right)\phi(x,y)e^{mx+ny}=(aD_x^2+2bD_xD_y+cD_y^2)\phi(x,y)e^{mx}e^{ny}$

$= aD_x^2\phi(x,y)e^{mx}e^{ny} + 2bD_xD_y\phi(x,y)e^{mx}e^{ny} + cD_y^2\phi(x,y)e^{mx}e^{ny}$
$= a\, e^{mx}e^{ny}(D_x+m)^2\phi(x,y) + 2be^{mx}e^{ny}(D_x+m)(D_y+n)\phi(x,y)$
$+c\, e^{mx}e^{ny}\left(D_y+n\right)^2\phi(x,y)$ (สมบัติตัวดำเนินการสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 6)
$= e^{mx}e^{ny}\,[a\,(D_x+m)^2\phi(x,y) + 2b(D_x+m)(D_y+n)\phi(x,y)$
$+c\,\left(D_y+n\right)^2\phi(x,y)]$
$= e^{mx}e^{ny}\,[a\,(D_x+m)^2 + 2b(D_x+m)(D_y+n) + c\,\left(D_y+n\right)^2]\,\phi(x,y)$
$= e^{mx+ny}f\left(D_x+m, D_y+n\right)\phi(x,y)$ ■

ตัวอย่าง จงหา $\left(D_x^2+2D_xD_y\right)x^2ye^{2x+y}$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f\left(D_x, D_y\right)\phi\left(x,y\right)e^{mx+ny} = e^{mx+ny}f\left(D_x+m, D_y+n\right)\phi\left(x,y\right)$

จะได้ว่า $\left(D_x^2+2D_xD_y\right)x^2ye^{2x+y}$
$= e^{2x+y}[(D_x+2)^2 + 2(D_x+2)(D_y+1)]x^2y$
$= e^{2x+y}\left[D_x^2+4D_x+4+2\left(D_xD_y+D_x+2D_y+2\right)\right]x^2y$
$= e^{2x+y}\left[D_x^2+4D_x+4+2D_xD_y+2D_x+4D_y+4\right]x^2y$
$= e^{2x+y}\left[D_x^2+2D_xD_y+6D_x+4D_y+8\right]x^2y$
$= e^{2x+y}(y+4x+12xy+4x^2+8x^2y)$

3. $f(D_x,D_y)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = -f(m,n)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$

บทพิสูจน์ $f\left(D_x,D_y\right)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = \left(aD_x^2+2bD_xD_y+cD_y^2\right)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$
$= aD_x^2\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} + 2bD_xD_y\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} + cD_y^2\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$
$= a(-m^2)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} + 2b(-mn)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} + c(-n^2)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$
$= [a(-m^2)+2b(-mn)+c(-n^2)]\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$
$= -[a(m^2)+2b(mn)+c(n^2)]\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$
$= -f(m,n)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$ ■

ตัวอย่าง จงหา $\left(D_x^2-4D_y^2\right)\sin(x+3y)$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f(D_x,D_y)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = -f(m,n)\begin{cases}\cos\left(mx+ny\right)\\ \sin\left(mx+ny\right)\end{cases}$

จะได้ว่า

$\left(D_x^2-4D_y^2\right)\sin(x+3y) = -\left(1^2-4(3^2)\right)\sin(x+3y) = 35\sin(x+3y)$

4. $f(D_x, D_y)\begin{cases}\phi(x,y)\cos(mx+ny)\\ \phi(x,y)\sin(mx+ny)\end{cases}$

$$= \begin{cases}Re\left(e^{i(mx+ny)}f\big(D_x+im, D_y+in\big)\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}f\big(D_x+im, D_y+in\big)\phi(x,y)\right)\end{cases}$$

บทพิสูจน์ $f\Big(D_x, D_y\Big)\begin{cases}\phi\big(x,y\big)\cos\big(mx+ny\big)\\ \phi\big(x,y\big)\sin\big(mx+ny\big)\end{cases}$

$$= \left(aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2\right)\begin{cases}\phi(x,y)Re(e^{i(mx+ny)})\\ \phi(x,y)Im(e^{i(mx+ny)})\end{cases}$$

$$= \begin{cases}Re\left(e^{i(mx+ny)}\left(a(D_x+im)^2 + 2b(D_x+im)(D_y+in) + c\big(D_y+in\big)^2\right)\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}\left(a(D_x+im)^2 + 2b(D_x+im)(D_y+in) + c\big(D_y+in\big)^2\right)\phi(x,y)\right)\end{cases}$$

(สมบัติตัวดำเนินการสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 2)

$$= \begin{cases}Re\left(e^{i(mx+ny)}f\big(D_x+im, D_y+in\big)\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}f\big(D_x+im, D_y+in\big)\phi(x,y)\right)\end{cases} \qquad ■$$

ตัวอย่าง จงหา $(D_x^2 + D_y^2)x^2y\,sin(x+3y)$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก

$$f(D_x, D_y)\begin{cases}\phi(x,y)\cos(mx+ny)\\ \phi(x,y)\sin(mx+ny)\end{cases} = \begin{cases}Re\left(e^{i(mx+ny)}f\big(D_x+im, D_y+in\big)\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}f\big(D_x+im, D_y+in\big)\phi(x,y)\right)\end{cases}$$

จะได้ว่า $\big(D_x^2 + D_y^2\big)x^2y\sin(x+3y)$

$= \mathrm{Im}\big(e^{i(x+3y)}f\big(D_x+i, D_y+3i\big)x^2y\big)$

$= \mathrm{Im}\big(e^{i(x+3y)}(D_x^2 + 2iD_x - 1^2 + D_y^2 + 6iD_y - 3^2)x^2y\big)$

$= \mathrm{Im}\big(e^{i(x+3y)}(2y + 4ixy - 10x^2y + 0 + 6ix^2)\big)$

$= Im(2ye^{i(x+3y)} + 4ixye^{i(x+3y)} - 10x^2ye^{i(x+3y)} + 6ix^2e^{i(x+3y)})$

$= 2y\,sin(x+3y) - 4xy\,cos(x+3y) - 10x^2y\,sin(x+3y) - 6x^2\,cos(x+3y)$

$= (2y - 10x^2y)sin(x+3y) - (4xy + 6x^2)cos(x+3y)$

5. $f\big(D_x, D_y\big)[x^m + y^n] = am(m-1)x^{m-2} + cn(n-1)y^{n-2}$

บทพิสูจน์ $f\Big(D_x, D_y\Big)\Big[x^m + y^n\Big]$

$= \big(aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2\big)[x^m + y^n]$

$= aD_x^2[x^m + y^n] + 2bD_xD_y[x^m + y^n] + cD_y^2[x^m + y^n]$

$= am(m-1)x^{m-2} + cn(n-1)y^{n-2}$ ■

ตัวอย่าง จงหา $\big(D_x^2 + 3D_y^2\big)[x^3 + y^2]$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการ

วิธีทำ จาก $f\Big(D_x, D_y\Big)\Big[x^m + y^n\Big] = am\big(m-1\big)x^{m-2} + cn\big(n-1\big)y^{n-2}$

จะได้ว่า $\big(D_x^2 + 3D_y^2\big)[x^3 + y^2] = 1(3)(2)x + 3(2)(1) = 6x + 6$

บทที่ 4
ตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้ PDE

ในบทนี้จะกล่าวถึง ผลของการดำเนินการวิจัยศึกษาเรียบเรียงและพัฒนาวิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

4.1 ตัวดำเนินการผกผันในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

บทนิยาม ตัวดำเนินการผกผัน $\frac{1}{f(D_x,D_y)}$ กระทำกับ $\phi(x,y)$ คือฟังก์ชัน u_p ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $f(D_x,D_y)u_p = \phi(x,y)$

ดังนั้น $\dfrac{1}{f\left(D_x,D_y\right)}\phi\left(x,y\right) = u_p$ ก็ต่อเมื่อ $f\left(D_x,D_y\right)u_p = \phi\left(x,y\right)$

หมายเหตุ : u_p ตามบทนิยามสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน โดยในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสูตรต่างๆ ที่นำไปสู่การหาตัวดำเนินการผกผันที่สอดคล้องสมบัติ (2)

สำหรับ $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ และ $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ จะกำหนดนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ตัวดำเนินการผกผันของ $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ คือ $\frac{1}{D_x}(\phi(x,y)) = \int \phi(x,y)\ dx$ และตัวดำเนินการผกผันของ $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ คือ $\frac{1}{D_y}(\phi(x,y)) = \int \phi(x,y)\ dy$

4.2 สมบัติของตัวดำเนินการผกผันในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ให้ $f(D_x,D_y) = aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2$ โดย a,b,c เป็นค่าคงตัว , $\phi(x,y), \phi_1(x,y), \phi_2(x,y)$ เป็นฟังก์ชัน และ c_1,c_2,m,n เป็นค่าคงที่

1. $f(D_x,D_y)\left[\dfrac{1}{f(D_x,D_y)}\phi(x,y)\right] = \phi(x,y)$
2. $\dfrac{1}{f_1(D_x,D_y)f_2(D_x,D_y)}\phi(x,y) = \dfrac{1}{f_2(D_x,D_y)f_1(D_x,D_y)}\phi(x,y)$

บทพิสูจน์ ให้ $\frac{1}{f_1(D_x,D_y)f_2(D_x,D_y)}\phi(x,y) = u$

จะได้ว่า $f_1\left(D_x,D_y\right)f_2\left(D_x,D_y\right)u = \phi\left(x,y\right)$

จาก $f_1\left(D_x,D_y\right)f_2\left(D_x,D_y\right)u = f_2\left(D_x,D_y\right)f_1\left(D_x,D_y\right)u$

จะได้ว่า $f_2\left(D_x,D_y\right)f_1\left(D_x,D_y\right)u = \phi\left(x,y\right)$

ดังนั้น $\dfrac{1}{f_1\left(D_x,D_y\right)f_2\left(D_x,D_y\right)}\phi\left(x,y\right) = u$

นั้นคือ $\dfrac{1}{f_1(D_x, D_y) f_2(D_x, D_y)} \phi(x, y) = \dfrac{1}{f_2(D_x, D_y) f_1(D_x, D_y)} \phi(x, y)$ ■

3. $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}[c_1\phi_1(x, y) + c_2\phi_2(x, y)]$

$= \dfrac{1}{f(D_x, D_y)} c_1\phi_1(x, y) + \dfrac{1}{f(D_x, D_y)} c_2\phi_2(x, y)$

บทพิสูจน์ ให้ $\frac{1}{f(D_x, D_y)} \phi_1(x, y) = u_1$, $\frac{1}{f(D_x, D_y)} \phi_2(x, y) = u_2$ และ c_1 , c_2 เป็นค่าคงที่

จะได้ว่า $f(D_x, D_y)u_1 = \phi_1(x, y)$ และ $f(D_x, D_y)u_2 = \phi_2(x, y)$

ดังนั้น $f(D_x, D_y)[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1 f(D_x, D_y)u_1 + c_2 f(D_x, D_y)u_2$

$= c_1\phi_1(x, y) + c_2\phi_2(x, y)$

นั้นคือ $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}\left[c_1\phi_1(x, y) + c_2\phi_2(x, y)\right] = c_1u_1 + c_2u_2$

$= c_1 \frac{1}{f(D_x, D_y)} \phi_1(x, y) + c_2 \frac{1}{f(D_x, D_y)} \phi_2(x, y)$ ■

4. $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)} e^{mx+ny} = \dfrac{1}{f(m, n)} e^{mx+ny}$ โดยที่ $f(m, n) \neq 0$

บทพิสูจน์ $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)} e^{mx+ny} = \dfrac{1}{aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2} e^{mx} e^{ny}$

$= e^{mx} \dfrac{1}{am^2 + 2bmD_y + cD_y^2} e^{ny}$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 5)

$= e^{mx} e^{ny} \dfrac{1}{am^2 + 2bmn + cn^2}$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 5)

$= \dfrac{1}{am^2 + 2bmn + cn^2} e^{mx+ny}$

$= \dfrac{1}{f(m, n)} e^{mx+ny}$ โดยที่ $f(m, n) \neq 0$ ■

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D_x^2 - 4D_y^2)u = e^{x+y}$
โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\dfrac{1}{f(D_x, D_y)} e^{mx+ny} = \dfrac{1}{f(m, n)} e^{mx+ny}$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{(D_x^2 - 4D_y^2)} e^{x+y} = \frac{1}{1^2 - 4(1^2)} e^{x+y} = -\frac{1}{3} e^{x+y}$

ตรวจคำตอบ $(D_x^2 - 4D_y^2)u = (D_x^2 - 4D_y^2)\left[-\dfrac{1}{3} e^{x+y}\right]$

$$= D_x^2\left[-\frac{1}{3}e^{x+y}\right] - 4D_y^2\left[-\frac{1}{3}e^{x+y}\right]$$

$= -\frac{1}{3}e^{x+y} + \frac{4}{3}e^{x+y} = e^{x+y}$ เป็นจริง

5. $\frac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)e^{mx+ny} = e^{mx+ny}\frac{1}{f(D_x+m, D_y+n)}\phi(x,y)$

บทพิสูจน์ $\frac{1}{f\left(D_x, D_y\right)}\phi\left(x,y\right)e^{mx+ny}$

$$= \frac{1}{\left(aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2\right)}\phi(x,y)e^{mx}e^{ny}$$

$$= e^{mx}\frac{1}{\left(a(D_x+m)^2 + 2b(D_x+m)D_y + cD_y^2\right)}\phi(x,y)e^{ny}$$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 7)

$$= e^{mx}e^{ny}\frac{1}{\left(a(D_x+m)^2 + 2b(D_x+m)(D_y+n) + c\left(D_y+n\right)^2\right)}\phi(x,y)$$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 7)

$$= e^{mx+ny}\frac{1}{f\left(D_x+m, D_y+n\right)}\phi(x,y)$$ ■

หมายเหตุ สมบัติข้อที่ 1-5 นี้ ยังคงเป็นจริงสำหรับ $f\left(D_x, D_y\right)$ ใดๆ

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D_x - 1)(D_y - 3)u = 3xye^{x+3y}$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $\frac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)e^{mx+ny} = e^{mx+ny}\frac{1}{f(D_x+m, D_y+n)}\phi(x,y)$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{(D_x-1)(D_y-3)}3xye^{x+3y}$

$= e^{x+3y}\frac{1}{(D_x+1-1)(D_y+3-3)}3xy$

$= e^{x+3y}\frac{1}{D_xD_y}3xy = e^{x+3y}\iint 3xy\,dydx$

$= e^{x+3y}\int \frac{3}{2}xy^2\,dx = \frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y}$

ตรวจคำตอบ $(D_x - 1)(D_y - 3)u_p = (D_x - 1)(D_y - 3)\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y}$

$$= \left(D_xD_y - 3D_x - D_y + 3\right)\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y}$$

$$= D_xD_y\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y} - 3D_x\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y} - D_y\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y} + \frac{9}{4}x^2y^2e^{x+3y}$$

$$= D_xD_y\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y} - 3D_x\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y} - D_y\frac{3}{4}x^2y^2e^{x+3y} + \frac{9}{4}x^2y^2e^{x+3y}$$

$$= \frac{9}{4}x^2y^2e^{x+3y} + \frac{3}{2}x^2ye^{x+3y} + \frac{9}{2}xy^2e^{x+3y} + 3xye^{x+3y} - \frac{9}{4}x^2y^2e^{x+3y} - \frac{9}{2}xy^2e^{x+3y} - \frac{9}{4}x^2y^2e^{x+3y} - \frac{3}{2}x^2ye^{x+3y} + \frac{9}{4}x^2y^2e^{x+3y}$$

$= 3xye^{x+3y}$ เป็นจริง

6. $$\frac{1}{f(D_x, D_y)}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = \frac{2b(-mn) + (am^2+cn^2)}{4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

บทพิสูจน์ $$\frac{1}{f(D_x, D_y)}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = \frac{1}{aD_x^2 + 2bD_xD_y + cD_y^2}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

$$= \frac{1}{a(-m^2) + 2bD_xD_y + c(-n^2)}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 16)

$$= \frac{1}{2bD_xD_y - (am^2+cn^2)}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

$$= \frac{1}{[2bD_xD_y - (am^2+cn^2)]}\frac{[2bD_xD_y + (am^2+cn^2)]}{[2bD_xD_y + (am^2+cn^2)]}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

$$= 2bD_xD_y + (am^2+cn^2)\frac{1}{[4b^2D_x^2D_y^2 - (am^2+cn^2)^2]}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

$$= [2bD_xD_y + (am^2+cn^2)] \begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}\frac{1}{4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2}$$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ข้อที่ 16)

$$= \frac{2bD_xD_y\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} + (am^2+cn^2)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}}{4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2}$$

โดยที่ $4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2 \neq 0$

$$= \frac{2b(-mn)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} + (am^2+cn^2)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}}{4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2}$$

โดยที่ $4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2 \neq 0$

$$= \frac{2b(-mn) + (am^2+cn^2)}{4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

โดยที่ $4b^2m^2n^2 - (am^2+cn^2)^2 \neq 0$ ■

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2)u = \cos(3x+2y)$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก $$\frac{1}{f(D_x, D_y)}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = \frac{2b(-mn)+(am^2+cn^2)}{4b^2m^2n^2-(am^2+cn^2)^2}\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$$

จะได้ว่า $$u_p = \frac{1}{D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2}\cos(3x+2y)$$

$$= \frac{2(-2)(-3(2)) + 1(3^2) + 3(2^2)}{4(-2)^2(3^2)(2^2) - (1(3^2) + 3(2^2))^2}\cos(3x+2y)$$

$$= \frac{24+9+12}{576-441}\cos(3x+2y)$$
$$= \frac{45}{135}\cos(3x+2y)$$
$$= \frac{1}{3}\cos(3x+2y)$$

ตรวจคำตอบ $\left(D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2\right)u_p = \left(D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2\right)\frac{1}{3}\cos(3x+2y)$

$= D_x^2\frac{1}{3}\cos(3x+2y) - 4D_xD_y\frac{1}{3}\cos(3x+2y) + 3D_y^2\frac{1}{3}\cos(3x+2y)$

$= -3\cos(3x+2y) + 8\cos(3x+2y) - 4\cos(3x+2y)$

$= \cos(3x+2y)$ เป็นจริง

7. $$\frac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = \begin{cases} Re\left(e^{i(mx+ny)}\dfrac{1}{f(D_x+im, D_y+in)}\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}\dfrac{1}{f(D_x+im, D_y+in)}\phi(x,y)\right)\end{cases}$$

บทพิสูจน์ $\frac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases}$

$$= \frac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)\begin{cases}Re\left(e^{i(mx+ny)}\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}\right)\end{cases}$$

$$= \begin{cases} Re\left(\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)e^{i(mx+ny)}\right)\\ Im\left(\dfrac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)e^{i(mx+ny)}\right)\end{cases}$$

$$= \begin{cases} Re\left(e^{i(mx+ny)}\dfrac{1}{f(D_x+im, D_y+in)}\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}\dfrac{1}{f(D_x+im, D_y+in)}\phi(x,y)\right)\end{cases}$$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 5) ■

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $\left(D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2\right)u = e^x\cos(3x+2y)$ โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ จาก

$$\frac{1}{f(D_x, D_y)}\phi(x,y)\begin{cases}\cos(mx+ny)\\ \sin(mx+ny)\end{cases} = \begin{cases} Re\left(e^{i(mx+ny)}\dfrac{1}{f(D_x+im, D_y+in)}\phi(x,y)\right)\\ Im\left(e^{i(mx+ny)}\dfrac{1}{f(D_x+im, D_y+in)}\phi(x,y)\right)\end{cases}$$

จะได้ว่า $u_p = \frac{1}{D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2}e^x\cos(3x+2y)$

$$= Re(e^{i(3x+2y)} \frac{1}{(D_x+3i)^2 - 4(D_x+3i)(D_y+2i) + 3(D_y+2i)^2} e^x)$$
$$= Re(e^{i(3x+2y)} \frac{1}{D_x^2 + 6iD_x - 9 - 4D_xD_y - 8iD_x - 12iD_y + 24 + 3D_y^2 + 12iD_y - 12} e^x)$$
$$= Re(e^{i(3x+2y)} \frac{1}{D_x^2 - 2iD_x - 4D_xD_y + 3D_y^2 + 3} e^x)$$
$$= Re\left(e^{i(3x+2y)} \frac{1}{1^2 - 2i(1) - 4(1)(0) + 3(0^2) + 3} e^x\right)$$
(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 5)
$$= Re(e^{i(3x+2y)} \frac{1}{4-2i} e^x)$$
$$= Re(e^{i(3x+2y)} \frac{1}{(4-2i)} \frac{(4+2i)}{(4+2i)} e^x)$$
$$= Re(e^{i(3x+2y)} \frac{(4+2i)}{(16+4)} e^x)$$
$$= \frac{e^x}{20}[Re(4e^{i(3x+2y)}) + Re(2ie^{i(3x+2y)})]$$
$$= \frac{e^x}{20}[4\cos(3x+2y) - 2\sin(3x+2y)]$$

ตรวจคำตอบ $(D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2)u_p$
$$= (D_x^2 - 4D_xD_y + 3D_y^2)\left(\frac{e^x}{20}[4\cos(3x+2y) - 2\sin(3x+2y)]\right)$$
$$= \frac{e^x}{20}((D_x+1)^2 - 4(D_x+1)D_y + 3D_y^2)([4\cos(3x+2y) - 2\sin(3x+2y)])$$
(สมบัติตัวดำเนินการสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 2)
$$= \frac{e^x}{20}(D_x^2 + 2D_x + 1 - 4D_xD_y - 4D_y + 3D_y^2)([4\cos(3x+2y) - 2\sin(3x+2y)])$$
$$= \frac{e^x}{20}\Big[4(D_x^2 + 2D_x + 1 - 4D_xD_y - 4D_y + 3D_y^2)\cos(3x+2y) \\ - 2(D_x^2 + 2D_x + 1 - 4D_xD_y - 4D_y + 3D_y^2)\sin(3x+2y)\Big]$$
$$= \frac{e^x}{20}\Big[4\big(D_x^2\cos(3x+2y) + 2D_x\cos(3x+2y) + \cos(3x+2y) \\ - 4D_xD_y\cos(3x+2y) - 4D_y\cos(3x+2y) + 3D_y^2\cos(3x+2y)\big) \\ - 2(D_x^2\sin(3x+2y) + 2D_x\sin(3x+2y) + \sin(3x+2y) \\ - 4D_xD_y\sin(3x+2y) - 4D_y\sin(3x+2y) + 3D_y^2\sin(3x+2y))\Big]$$
$$= \frac{e^x}{20}[4(-9\cos(3x+2y) - 6\sin(3x+2y) + \cos(3x+2y) + 24\cos(3x+2y) \\ + 8\sin(3x+2y) - 12\cos(3x+2y)) \\ - 2(-9\sin(3x+2y) + 6\cos(3x+2y) + \sin(3x+2y) \\ + 24\sin(3x+2y) - 8\cos(3x+2y) - 12\sin(3x+2y))]$$
$$= \frac{e^x}{20}[4(4\cos(3x+2y) + 2\sin(3x+2y)) - 2(4\sin(3x+2y) - 2\cos(3x+2y))]$$
$$= \frac{e^x}{20}[16\cos(3x+2y) + 8\sin(3x+2y) - 8\sin(3x+2y) + 4\cos(3x+2y)]$$
$= e^x\cos(3x+2y)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการปัวซง (Poisson's equation)

$$\left(D_x^2 + D_y^2\right)u = 6\sin(2x+y) + 25e^{3x+4y}$$

โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ $u_p = \frac{1}{D_x^2+D_y^2}\left(6\sin(2x+y) + 25e^{3x+4y}\right)$

$= 6\frac{1}{D_x^2+D_y^2}\sin(2x+y) + 25\frac{1}{D_x^2+D_y^2}e^{3x+4y}$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 3)

$= 6\frac{1}{D_x^2+D_y^2}\sin(2x+y) + 25\frac{1}{3^2+4^2}e^{3x+4y}$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 4)

$= 6\frac{0+(1(2^2)+1(1^2))}{0+\left(1(2^2)+1(1^2)\right)^2}\sin(2x+y) + e^{3x+4y}$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 6)

$= -\frac{6}{5}\sin(2x+y) + e^{3x+4y}$

ตรวจคำตอบ $\left(D_x^2 + D_y^2\right)u_p = \left(D_x^2 + D_y^2\right)\left[-\frac{6}{5}\sin(2x+y) + e^{3x+4y}\right]$

$= D_x^2\left[-\frac{6}{5}\sin(2x+y) + e^{3x+4y}\right] + D_y^2\left[-\frac{6}{5}\sin(2x+y) + e^{3x+4y}\right]$

$= \frac{24}{5}\sin(2x+y) + 9e^{3x+4y} + \frac{6}{5}\sin(2x+y) + 16e^{3x+4y}$

$= 6\sin(2x+y) + 25e^{3x+4y}$ เป็นจริง

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการคลื่น (Wave equation)

$$(D_t^2 - c^2D_x^2)u = e^{-x}\sin t$$

โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ $u_p = \frac{1}{D_t^2-c^2D_x^2}\ e^{-x}\,sin\,t$

$= e^{-x}\frac{1}{D_t^2-c^2(D_x-1)^2}\ sin\,t$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 5)

$= e^{-x}\frac{1}{-1^2-c^2(0-1)^2}\ sin\,t = -\frac{1}{1+c^2}e^{-x}\ sin\,t$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 4)

ตรวจคำตอบ $(D_t^2 - c^2D_x^2)u_p = (D_t^2 - c^2D_x^2)\left[-\frac{1}{1+c^2}e^{-x}\ sin\,t\right]$

$= D_t^2\left[-\frac{1}{1+c^2}e^{-x}\ sin\,t\right] - c^2D_x^2\left[-\frac{1}{1+c^2}e^{-x}\ sin\,t\right]$

$= \frac{1}{1+c^2}e^{-x}\ sin\,t + \frac{c^2}{1+c^2}e^{-x}\ sin\,t$

$= e^{-x}\sin t$ เป็นจริง

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการความร้อน (Heat equation)

$$(D_t - kD_x^2)u = 4e^{-2x}\cos 3t$$

โดยใช้วิธีตัวดำเนินการผกผัน

วิธีทำ $u_p = \frac{1}{D_t - kD_x^2}[\,4e^{-2x}\cos 3t]$

$= 4e^{-2x}\frac{1}{D_t - k(D_x-2)^2}\cos 3t$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 5)

$= 4e^{-2x}\frac{1}{D_t - k(D_x-2)^2}\frac{(D_t + k(D_x-2)^2)}{(D_t + k(D_x-2)^2)}\cos 3t$

$= 4e^{-2x}\frac{D_t + k(D_x-2)^2}{D_t^2 - k^2(D_x-2)^4}\cos 3t$

$= 4e^{-2x}\frac{D_t + k(D_x-2)^2}{-3^2 - k^2(0-2)^4}\cos 3t$

(สมบัติตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ข้อที่ 4)

$= 4e^{-2x}\frac{D_t\cos 3t + k(D_x^2 - 4D_x + 4)\cos 3t}{-9-16k^2}$

$= \frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-3\sin 3t + 4k\cos 3t)$

ตรวจคำตอบ $(D_t - kD_x^2)u_p = (D_t - kD_x^2)\left[\frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-3\sin 3t + 4k\cos 3t)\right]$

$$= D_t\left[\frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-3\sin 3t + 4k\cos 3t)\right]$$

$$- kD_x^2\left[\frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-3\sin 3t + 4k\cos 3t)\right]$$

$$= \frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-9\cos 3t - 12k\sin 3t)$$

$$- 4k\left[\frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-3\sin 3t + 4k\cos 3t)\right]$$

$$= \frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-9\cos 3t - 12k\sin 3t + 12k\sin 3t - 16k^2\cos 3t)$$

$= \frac{4}{-9-16k^2}e^{-2x}(-9-16k^2)\cos 3t = 4e^{-2x}\cos 3t$ เป็นจริง

บทที่ 5
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 ข้อสรุป

จากวัตถุประสงค์ พบว่า ตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย มีสมบัติสลับที่ สมบัติเชิงเส้น และสามารถหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $f(D_x, D_y)u = \phi(x,y)$ เมื่อฟังก์ชัน $\phi(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับ e^{mx+ny} , $\cos(mx+ny)$ และ $\sin{(mx+ny)}$

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ผู้วิจัยไม่สามารถพิสูจน์วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับ e^{xy} , $sin\, xy$ หรือ $cos\, xy$ ได้ ซึ่งสามารถนำไปพัฒนาต่อยอดงานวิจัยได้

รายการอ้างอิง

[1] Kythe, P.K., Puri, P., and Schaferkotter, M.R. Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Mathematica. 2nd ed. London: Chapman & Hall/CRC, 2003.

[2] วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร, สมการเชิงอนุพันธ์, ครั้งที่พิมพ์ 1 (กรุงเทพ : โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์, 2559), หน้า 50-65

[3] สุพัฒนา เอื้อทวีเกียรติ, มนตรี สวัสดิ์ศฤงฆาร, เทียนชัย ประดิสถายน และ ลัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ. ครั้งที่พิมพ์ 2. กรุงเทพ : บริษัทแอคทีฟ ปริ้นท์ จำกัด, 2558

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2563

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	วิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Inverse operator method for solving PDEs
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร. สุจินต์ คมฤทัย
ผู้ดำเนินการ	นายอดิศักดิ์ สีดามาตร เลขประจำตัวนิสิต 6033546523
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ วิธีหนึ่งที่ช่วยให้แก้สมการได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพคือวิธีตัวดำเนินการผกผัน จากการค้นคว้าพบว่ายังไม่มีการกล่าวถึงการใช้วิธีแบบเดียวกันในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอย่างเป็นระบบมีเพียงเอกสารอ้างอิง [1] ผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะค้นคว้าเรียบเรียงและพัฒนาวิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

วัตถุประสงค์

ศึกษาเรียบเรียงและพัฒนาวิธีตัวดำเนินการผกผันสำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ขอบเขตของโครงงาน

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเชิงเส้นที่มีตัวแปรสองตัว

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
2. ศึกษาการจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออกเป็นประเภทต่าง ๆ
3. ค้นคว้าหนังสือและงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีตัวดำเนินการผกผันในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย
4. พิสูจน์ผลลัพธ์เกี่ยวกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีตัวดำเนินการผกผันในกรณีต่าง ๆ
5. ตรวจสอบความถูกต้องของการดำเนินงาน
6. สรุปและจัดทำรูปเล่ม

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม พ.ศ. 2563 ถึง เมษายน พ.ศ. 2564								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค	เม.ย
1. ศึกษาทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย									
2. ค้นคว้าหนังสือและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีตัวดำเนินการผกผันในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย									
3. พิสูจน์ผลลัพธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในประเภทต่าง ๆ									
4. ตรวจสอบความถูกต้องของการดำเนินงาน									
5. สรุปและจัดทำรูปเล่ม									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจกระบวนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยตัวดำเนินการผกผัน
2. มีวิธีการในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยตัวดำเนินการผกผันที่รวดเร็วและมีประสิทธิภาพ

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Word

เอกสารอ้างอิง

[1] Kythe, P.K., Puri, P., and Schaferkotter, M.R. Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Mathematica. 2^{nd} ed. London: Chapman & Hall/CRC, 2003.

ประวัติผู้เขียน

นายอดิศักดิ์ สีดามาตร
รหัสประจำตัวนิสิต 6033543623
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย