โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$

Positive Integer Solutions of $py^k = x^4 + x$

ชื่อนิสิต นายรัฐภูมิ หาญมานพ **เลขประจำตัว** 5933541923

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$

นายรัฐภูมิ หาญมานพ

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

Positive Integer Solutions of $py^k = x^4 + x$

Ratthapoom Hanmanop

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$
โดย	นายรัฐภูมิ หาญมานพ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	อาจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(อาจารย์ ดร.กีรติ ศรีอมร)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วาสนา สุขกระสานติ)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.คำรณ เมฆฉาย)

นายรัฐภูมิ หาญมานพ : ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$ (Positive Integer Solutions of $py^k = x^4 + x$) อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : อาจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร, 33 หน้า.

โครงงานนี้เราหาเงื่อนไขที่จำเป็นของ p และ k ซึ่งทำให้สมการ $py^k = x^4 + x$ มีผลเฉลย x, y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ในกรณีที่ k เป็นจำนวนคี่ที่มีค่ามากกว่า 2 การสรุปผลจะเป็นเพียงข้อคาดเดาที่ได้จากการใช้การคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งข้อคาดเดานี้อาจนำไปสู่การพิสูจน์ในทางทฤษฎีต่อไป

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต รัฐภูมิ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก กีรติ ศรีอมร

ปีการศึกษา 2562

5933541923: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : POSITVE INTEGER SOLUTIONS / $py^k = x^4 + x$

RATTHAPOOM HANMANOP: Positive Integer Solutions of $py^k = x^4 + x$.

ADVISOR : KIRATI SRIAMORN, 33 pp.

This project, we find essential conditions of p and k to make the equation $py^k = x^4 + x$ has solution x, y which are positive integers and p is prime number which not equal to 2 and k is positive integers. In case that k odd integers which more than 2 , the conclusion can only be predicted by using computer programing. This prediction will be further proven by the theorem later.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Ratthapoom

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature Kirati Sriamorn

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง “ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$” สำเร็จไปได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงใคร่ขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมรที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษา ชี้ให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานมาตลอด ตั้งแต่เริ่มต้นจนทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์และนอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำตลอดระยะเวลาที่เข้ามาศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย รวมทั้งเพื่อน ๆ ที่คอยให้ความช่วยเหลือ

สุดท้ายนี้หวังว่าโครงงานของข้าพเจ้าจะเป็นประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจไม่มากก็น้อย และหากมีความผิดพลาดประการใดก็ขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ในปี 2004 ข้อสอบคัดผู้แทนโอลิมปิกของประเทศเกาหลีครั้งที่ 14 ได้ทำการพิจารณาสมการ $3y^2 = x^4 + x$ ซึ่งไม่มีผลเฉลย x, y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ต่อมาในปี 2010 Konstantine Zelator และ Ovidiu Furdui [1] ได้ทำการศึกษาสมการ $py^2 = x^4 + x$ สำหรับจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p \neq 2$ พบว่าในกรณีที่ $p \equiv 1 \ (mod\ 3)$ สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย x, y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก และหลังจากนั้นในปี 2013 Stan Dolan [2] สามารถแสดงได้ว่าไม่มีจำนวนเต็มบวก x, y ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ $py^2 = x^4 + x$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq 2$

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ทฤษฎีบท 2.1 ขั้นตอนวิธีการหาร ($The\ division\ algorithm$)

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$

แล้วจะมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวเท่านั้น ที่ทำให้

$$b = aq + r \qquad \text{โดยที่ } 0 \leq r < |a|$$

จะเรียก q ว่า **ผลหาร** ($quotient$) และ r ว่า **เศษ** ($remainder$)

บทนิยาม 2.2 การหารลงตัว ($Divisibility$)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$

เราจะเรียก a ว่าเป็น **ตัวหาร** ($divisor$) หรือ **ตัวประกอบ** ($factor$)

ตัวหนึ่งของ b ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $b = aq$

ในกรณีที่ a เป็นตัวหารของ b เราจะเรียกอีกแบบหนึ่งว่า

a **หาร** b **ลงตัว** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \mid b$ และ

ใช้สัญลักษณ์ $a \nmid b$ แทน a **หาร** b **ไม่ลงตัว**

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a \mid 0,\ 1 \mid a,\ a \mid a$ เมื่อ $a \neq 0$
2. $a \mid 1$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm 1$
3. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
4. ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$
5. ถ้า $a \mid (b + c)$ และ $a \mid b$ แล้ว $a \mid c$
6. $a \mid b$ และ $b \mid a$ ก็ต่อเมื่อ $a = \pm b$
7. ถ้า $a \mid b$ และ $b \neq 0$ แล้ว $|a| \leq |b|$
8. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (bx + cy)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม x, y

บทแทรก 2.2.2 สำหรับจำนวนเต็ม $a,\ b_1,\ b_2, \dots,\ b_n$ ใด ๆ ที่ $a \neq 0$ จะได้ว่า ถ้า $a \mid b_1,\ a \mid b_2, \dots,\ a \mid b_n$ แล้ว $a \mid (b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$ เมื่อ $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

บทนิยาม 2.2.3 ให้ $a,\ b$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ เราจะเรียกจำนวนเต็มบวก d ว่า **ตัวหารร่วมมาก** $(greatest\ common\ divisor)$ หรือ **ห.ร.ม.** $(g.c.d.)$ ของ a และ b เขียนแทนด้วย $(a,\ b)$ ก็ต่อเมื่อ d มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $d \mid a$ และ $d \mid b$

(2) ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \leq d$

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า มี $x,\ y \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $(a,\ b) = ax + by$

บทแทรก 2.3.2 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า สำหรับจำนวนเต็ม c ใด ๆ ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid (a,\ b)$

ทฤษฎีบท 2.3.3 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า $(a,b) = 1$ ก็ต่อเมื่อ มี $x,\ y \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $1 = ax + by$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $(ma,\ mb) = m(a,\ b)$

ทฤษฎีบท 2.3.5 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $d = (a,\ b)$ แล้ว $\left(\frac{a}{d},\ \frac{b}{d}\right) = 1$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ และ x เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $(a,\ b) = (a,\ b + ax) = (a + bx,\ b)$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ให้ $a,\ b,\ c,\ m$ เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. ถ้า $(a,\ m) = (b,\ m) = 1$ แล้ว $(ab,\ m) = 1$
2. ถ้า $(a,\ m) = 1$ และ $b \mid a$ แล้ว $(b,\ m) = 1$
3. ถ้า $a \mid bc$ และ $(a,\ b) = 1$ แล้ว $a \mid c$
4. ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ โดยที่ $(a,\ b) = 1$ แล้ว $ab \mid c$

ทฤษฎีบท 2.3.8 ให้ $a,\ b,\ q,\ r \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a > 0$
และ $b = aq + r,\ 0 \leq r < a$ จะได้ว่า $(a,\ b) = (a,\ r)$

บทนิยาม 2.2.4 ให้ $a,\ b$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ เราจะเรียกจำนวนเต็มบวก m ว่า ตัวคูณร่วมน้อย ($lest\ common\ multiple$) หรือ **ค.ร.น.** ($l.c.m.$) ของ a และ b เขียนแทนด้วย $[a,\ b]$ ก็ต่อเมื่อ m มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $a \mid m$ และ $b \mid m$

(2) สำหรับจำนวนเต็มบวก c ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ แล้ว $m \leq c$

ทฤษฎีบท 2.4.1 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ จะได้ว่า
สำหรับจำนวนเต็ม c ใด ๆ ถ้า $a \mid c$ และ $b \mid c$ แล้ว $[a,\ b] \mid c$

ทฤษฎีบท 2.4.2 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$
จะได้ว่า $(a,\ b)[a,\ b] = |ab|$

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $a,\ b \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ และ $m \in \mathbb{Z}$
จะได้ว่า $[ma,\ mb] = m[a,\ b]$

บทนิยาม 2.5 เราจะเรียกจำนวนเต็ม p ว่า **จำนวนเฉพาะ** ($prime\ number$)
ก็ต่อเมื่อ $p \neq 1$ และ
ถ้า $a,\ b \in \mathbb{Z}$ และ $p = ab$ แล้ว $a = \pm 1$ หรือ $b = \pm 1$

ทฤษฎีบท 2.5.1 ทุกจำนวนเต็ม $n > 1$ จะมีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p \mid n$

ทฤษฎีบท 2.5.2 ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า
ถ้า $p \mid ab$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b$

ทฤษฎีบท 2.5.3 ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ว่า
ถ้า $p \mid a_1 a_2 \ldots a_n$ แล้วจะมี a_i ที่ $1 \leq i \leq n$ ซึ่ง $p \mid a_i$

บทนิยาม 2.6 ให้ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ แทนตัวหารร่วมมากของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$
จำนวนเต็ม $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ จะเรียกว่าเป็น **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์**
$(relative\ prime\ numbers)$ ก็ต่อเมื่อ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$
และถ้าทุก i, j ที่ $i \neq j, (a_i, b_i) = 1$ แล้วเราจะกล่าวว่า
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็น **จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่**
$(pairwise\ relatively\ prime\ numbers)$

ทฤษฎีบท 2.6.1 สำหรับจำนวนเต็ม $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ใด ๆ
ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่
แล้ว $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

บทนิยาม 2.7 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเต็ม a และ b เราจะกล่าวว่า
a **คอนกรูเอนซ์กับ** b **มอดูโล** n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ
n หาร $a - b$ ลงตัว และถ้า n หาร $a - b$ ไม่ลงตัว เราจะกล่าวว่า
a **ไม่คอนกรูเอนซ์กับ** b **มอดูโล** n ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์
$a \not\equiv b \pmod{n}$ ในที่นี้เรียกจำนวนเต็มบวก n ว่า **มอดูลัส** $(modulus)$

ทฤษฎีบท 2.7.1 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ
$a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ a และ b มีเศษที่เหลือจากการหารด้วย n เท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.7.2 ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{n}$
2. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $b \equiv c \pmod{n}$
   แล้ว $a \equiv c \pmod{n}$
3. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$
   แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ และ $ac \equiv bd \pmod{n}$

4. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{n}$
และ $ac \equiv bc \pmod{n}$
5. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{n}$
สำหรับจำนวนเต็มบวก k
6. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $c \equiv d \pmod{n}$
แล้ว $ax + cy \equiv bx + dy \pmod{n}$
7. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ และ $d \mid n$ โดยที่ $d < 0$
แล้ว $a \equiv b \pmod{d}$

ทฤษฎีบท 2.7.3 ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ จะได้ว่า
1. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $(a, n) = (b, n)$
2. $ax \equiv ay \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $x \equiv y \left(\mathrm{mod}\ \frac{n}{(a,\ b)}\right)$
3. ถ้า $ax \equiv ay \pmod{n}$ และ $(a, n) = 1$
แล้ว $x \equiv y \pmod{n}$
4. ถ้า $ax \equiv ay \pmod{n}$ และ n เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $n \nmid a$
แล้ว $x \equiv y \pmod{n}$

ทฤษฎีบท 2.7.4 ให้ $[n_1, n_2, \dots, n_r]$ แทนตัวคูณร่วมน้อยของ $n_1, n_2, \dots, n_r$ และ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ $n_1, n_2, \dots, n_r$ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า
1. $a \equiv b \pmod{n_i}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, r$
ก็ต่อเมื่อ $a \equiv b \pmod{[n_1, n_2, \dots, n_r]}$
2. $a \equiv b \pmod{n_i}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, r$ และ $n_1, n_2, \dots, n_r$
เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ทุกคู่ แล้ว $a \equiv b \pmod{n_1 n_2 \dots n_r}$

ทฤษฎีบท 2.7.5 ให้ $a \in \mathbb{Z}$ และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่ามี $r \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \leq r < n$ เพียงค่าเดียว ที่ทำให้ $a \equiv r \pmod{n}$

บทนิยาม 2.8 ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ จะเรียก b ว่าเป็น **ส่วนตกค้าง** ($residue$) ของ a มอดุโล n และเรียกเซตของจำนวนเต็ม $\{a_1,\ a_2, \ldots, a_n\}$ ว่าเป็น **ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์** ($complete\ residue\ system$) มอดุโล n ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนเต็ม a จะมี a_i เพียงตัวเดียวที่ทำให้

$$a \equiv a_i \pmod{n}$$

ชั้นสมมูลของ a_i คือ $\{a \mid a$ เป็นจำนวนเต็มและ $a \equiv a_i \pmod{n}\}$ เรียกว่า **ชั้นส่วนตกค้าง** ($residue\ class$) ของ a_i มอดุโล n

ทฤษฎีบท 2.8.1 ให้ $\{a_1,\ a_2, \ldots, a_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n และ $(c,\ n) = 1$ จะได้ว่า $\{ca_1,\ ca_2, \ldots, ca_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n

ทฤษฎีบท 2.8.2 ให้ $f(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ เป็นพหุนามที่มี $c_i \in \mathbb{Z}$ และ $c_m \neq 0$ จะได้ว่า

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$
2. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ และ $a \equiv b \pmod{n}$ แล้ว b จะเป็นคำตอบของสมการ $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$

ทฤษฎีบท 2.8.3 ให้ $a,\ b,\ n \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $n > 0$ และ $(a,\ n) = d$ จะได้ว่า

1. สมการคอนกรูเอนซ์เชิงเส้น ($linear\ congruence\ equation$) $ax \equiv b \pmod{n}$ มีคำตอบ $x \in \mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ $d \mid b$
2. ถ้า $d \mid b$ แล้วสมการคอนกรูเอนซ์เชิงเส้น $ax \equiv b \pmod{n}$ มีคำตอบอยู่ d คำตอบที่ไม่คอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล n และคำตอบเหล่านั้นคือ $x \equiv x_0 + t\frac{n}{d} \pmod{n}$ เมื่อ $t = 0,\ 1,\ 2, \ldots, d-1$ โดยที่ x_0 คือคำตอบของสมการ $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \left(\mathrm{mod}\ \frac{n}{d}\right)$

บทนิยาม 2.9 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $(a, p) = 1$
ถ้า $x^2 \equiv a \pmod{p}$ มีผลเฉลยแล้ว จะเรียก a ว่า
ส่วนตกค้างกำลังสอง $(quadratic\ residues)$ ของ p และ
ถ้าไม่มีผลเฉลยแล้ว จะเรียก a ว่า **ส่วนไม่ตกค้างกำลังสอง**
$(quadratic\ non-residues)$ ของ p

ทฤษฎีบท 2.9.1 $(Euler's\ criterion)$ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่
และ $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $(a, p) = 1$
a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p ก็ต่อเมื่อ $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

บทนิยาม 2.10 **สัญลักษณ์เลอช็องดร์** $(Legendre\ symbol)$
ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $(a, p) = 1$
สัญลักษณ์เลอช็องดร์ $\left(\frac{a}{p}\right)$ กำหนดโดย

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a \text{ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \\ -1 & \text{ถ้า } a \text{ ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.10.1 $(Euler's\ criterion)$ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่
และ $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $(a, p) = 1$
a เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p ก็ต่อเมื่อ $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$
นั่นคือ $x^2 \equiv a \pmod{p}$ มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$

ทฤษฎีบท 2.10.2 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $(ab, p) = 1$

1. ถ้า $a \equiv b \pmod{p}$ แล้ว $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$
2. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
3. $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$

ทฤษฎีบท 2.10.3 ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $a \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $(a, p) = 1$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{p}{a}\right) = (-1)^{\left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{p-1}{2}\right)}$$

บทที่ 3

ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$

กรณีที่ $1 : k = 1$

พิจารณาสมการ $py = x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x + 1)(x^2 - x + 1)$

จะได้ว่า $p \mid x$ หรือ $p \mid (x + 1)$ หรือ $p \mid (x^2 - x + 1)$

ถ้า $p \mid x$ แล้ว $x = pn$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}^+$

ถ้า $p \mid (x + 1)$ แล้ว $x = pn - 1$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}^+$

ถ้า $p \mid (x^2 - x + 1)$ แล้ว

$$x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$4 \cdot (x^2 - x + 1) \equiv 4 \cdot 0 \pmod{p}$$

$$4x^2 - 4x + 4 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$4x^2 - 4x + 1 \equiv -3 \pmod{p}$$

$$(2x - 1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

สมการคอนกรูเอนซ์นี้จะมีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ -3 เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ p

นั่นคือ

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$$

เนื่องจาก

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$$

และ

$$\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{2}\right)}$$

จึงได้ว่า

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{\left(\frac{p}{3}\right)}$$

$$1 = \frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)}$$

$$\left(\frac{p}{3}\right) = 1$$

ข้อความนี้สอดคล้องกับ $p^{\frac{3-1}{2}} \equiv 1 \pmod 3$ นั่นคือ $p \equiv 1 \pmod 3$

เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ทำให้ $p \equiv 1 \pmod 2$

จากเงื่อนไขทั้งสอง ทำให้สรุปได้ว่า

$$p \equiv 1 \pmod 6$$

พิจารณาสมการ $(2x-1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$

ให้ $x_0 \in \mathbb{Z}^+$ ที่ทำให้ $x_0^2 \equiv -3 \pmod{p}$

เมื่อ $x_0^2 = qp - 3$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก q

จะได้ว่า

$$(2x-1)^2 \equiv x_0^2 \pmod{p}$$

$$(2x-1)^2 - x_0^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(2x-1-x_0)(2x-1+x_0) \equiv 0 \pmod{p}$$

ดังนั้น

$$2x-1-x_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

หรือ

$$2x-1+x_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

ถ้า $2x - 1 - x_0 \equiv 0 \pmod{p}$ ทำให้เราได้ว่า

$$2x \equiv 1 + x_0 \pmod{p}$$

$$\left(\frac{p+1}{2}\right) 2x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 + x_0) \pmod{p}$$

$$(p+1)x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 + x_0) \pmod{p}$$

$$x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 + x_0) \pmod{p}$$

ในทำนองเดียวกัน

ถ้า $2x - 1 + x_0 \equiv 0 \pmod{p}$ จะได้ว่า

$$2x \equiv 1 - x_0 \pmod{p}$$

$$\left(\frac{p+1}{2}\right) 2x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 - x_0) \pmod{p}$$

$$(p+1)x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 - x_0) \pmod{p}$$

$$x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 - x_0) \pmod{p}$$

■

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาสมการ $3y = x^4 + x$

เนื่องจาก $3 \not\equiv 1 \ (mod\ 6)$ จึงทำให้สมการนี้มีผลเฉลย 2 ชุด คือ

ชุดที่ 1 : $x = 3n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ และจาก $3y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$3y = (3n)^4 + (3n)$$

$$y = 27n^4 + n$$

ชุดที่ 2 : $x = 3n + 2$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ และจาก $3y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$3y = (3n+2)^4 + (3n+2)$$

$$y = 27n^4 + 72n^3 + 72n^2 + 33n + 6$$

■

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาสมการ $5y = x^4 + x$

เนื่องจาก $5 \not\equiv 1 \ (mod\ 6)$ จึงทำให้สมการนี้มีผลเฉลย 2 ชุด คือ

ชุดที่ 1 : $x = 5n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ และจาก $5y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$5y = (5n)^4 + (5n)$$

$$y = 125n^4 + n$$

ชุดที่ 2 : $x = 5n + 4$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ และจาก $5y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$5y = (5n+4)^4 + (5n+4)$$

$$y = 125n^4 + 400n^3 + 480n^2 + 257n + 52$$

■

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาสมการ $7y = x^4 + x$

เนื่องจาก $7 \equiv 1 \ (mod\ 6)$ จึงทำให้สมการนี้มีผลเฉลย 4 ชุด คือ

ชุดที่ 1 : $x = 7n$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ และจาก $7y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$7y = (7n)^4 + (7n)$$

$$y = 343n^4 + n$$

ชุดที่ 2 : $x = 7n + 6$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$ และจาก $7y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$7y = (7n+6)^4 + (7n+6)$$

$$y = 343n^4 + 1176n^3 + 1512n^2 + 865n + 186$$

เนื่องจาก $7 \equiv 1 \ (mod\ 6)$ นั่นว่า มี $x_0 \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง

$$x_0^2 \equiv -3 \ (\text{mod } 7)$$

$$x_0^2 \equiv 4 \ (\text{mod } 7$$

ดังนั้น $x_0 = 2$

ทำให้

$$x \equiv \left(\frac{7+1}{2}\right)(1+2) \equiv 12 \equiv 5 \ (\text{mod } 7)$$

หรือ

$$x \equiv \left(\frac{7+1}{2}\right)(1-2) \equiv -4 \equiv 3 \ (\text{mod } 7)$$

ชุดที่ 3 : ถ้า $x \equiv 5 \pmod 7$ แล้ว $x = 7n + 5$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$
และจาก $7y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$7y = (7n+5)^4 + (7n+5)$$

$$y = 343n^4 + 980n^3 + 1050n^2 + 501n + 90$$

ชุดที่ 4 : ถ้า $x \equiv 3 \pmod 7$ แล้ว $x = 7n + 3$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$
และจาก $7y = x^4 + x$ จึงได้ว่า

$$7y = (7n+3)^4 + (7n+3)$$

$$y = 343n^4 + 588n^3 + 378n^2 + 109n + 12$$

■

กรณีที่ 2 : $k = 2$

พิจารณาสมการ $py^2 = x^4 + x$

จาก [1] และ [2] เราสามารถสรุปได้ว่า สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ไม่เท่ากับ 2

■

กรณีที่ 3 : $k = 3$

พิจารณาสมการ $py^3 = x^4 + x$

จากการทดลองแทนค่าจำนวนเฉพาะ $p \neq 2$ ที่มีค่าอยู่ระหว่าง $1 - 1000$ ลงในสมการดังกล่าวด้วยโปรแกรม Wolfram Mathematica จะเห็นว่าเมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะตัวอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ 19 จะส่งผลให้สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

แต่เมื่อแทนค่าจำนวนเฉพาะ $p = 19$ และ $(x, y) = (8, 6)$ จะได้ว่า

$$(19)(6)^3 = (8)^4 + (8)$$

$$4104 = 4104$$

ซึ่งทำให้สมการเป็นจริง จึงได้ข้อคาดเดาว่า เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ไม่ใช่ 2 และ 19 แล้วสมการ $py^3 = x^4 + x$ จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

■

กรณีที่ 4 : $k = 4$

พิจารณาสมการ $py^4 = x^4 + x$

จะเห็นว่า

$$p(y^2)^2 = x^4 + x$$

ให้ $z = y^2$ จะได้ว่า

$$pz^2 = x^4 + x$$

จากผลลัพธ์ในกรณีที่ 2 ทำให้เราได้ข้อสรุปว่า

ถ้า $k = 4$ แล้ว สมการ $py^k = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

■

ข้อสังเกต $py^k = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ k เป็นจำนวนคู่บวกใด ๆ
ให้ k เป็นจำนวนคู่บวกใด ๆ จะมี $m \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $k = 2m$
จะได้ว่า

$$py^{2m} = x^4 + x$$

นั่นคือ

$$p(y^m)^2 = x^4 + x$$

ให้ $z = y^m$ จะได้

$$pz^2 = x^4 + x$$

จากผลลัพธ์ในกรณีที่ 2 ทำให้เราได้ข้อสรุปว่า

สมการ $pz^2 = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $py^k = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ k เป็นจำนวนคู่บวกใด ๆ

■

กรณีที่ 5 : $k = 5$

พิจารณาสมการ $py^5 = x^4 + x$

จากการทดลองแทนค่าจำนวนเฉพาะ $p \neq 2$ ที่มีค่าอยู่ระหว่าง $1 - 1000$ ลงในสมการดังกล่าวด้วยโปรแกรม Wolfram Mathematica จะเห็นว่าเมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะตัวอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ 2 จะส่งผลให้สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

จึงได้ข้อคาดเดาว่า เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ไม่ใช่ 2 แล้วสมการ $py^5 = x^4 + x$ จะไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

■

บทที่ 4
ข้อสรุป

สำหรับการศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $py^k = x^4 + x$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq 2$ ทำให้ได้ข้อสรุป ดังนี้

กรณีที่ $\boldsymbol{k = 1}$ จะได้ว่าสมการ $py = x^4 + x$ จะมีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $p \not\equiv 1 \pmod 6$ แล้ว x ทั้งหมดที่เป็นไปได้ คือ

$$x = pn$$

หรือ $$x = pn - 1 \qquad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{Z}^+$$

ถ้า $p \equiv 1 \pmod 6$ แล้ว x ทั้งหมดที่เป็นไปได้ คือ

$$x = pn$$

หรือ $$x = pn - 1 \qquad \text{เมื่อ } n \in \mathbb{Z}^+$$

หรือ $$x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 + x_0) \pmod p$$

หรือ $$x \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)(1 - x_0) \pmod p$$

กรณีที่ $\boldsymbol{k = 2}$ จะได้ว่าสมการ $py^2 = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีที่ $\boldsymbol{k = 3}$ จากการแทนจำนวนเฉพาะ p ที่มีค่าอยู่ระหว่าง $1 - 1000$ ลงในโปรแกรม Wolfram Mathematica พบว่าสมการ $py^3 = x^4 + x$ มีผลเฉลย x, y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ $p = 19$ ซึ่งผลเฉลยที่ได้คือ $(x, y) = (8, 6)$ และทำให้ได้ข้อคาดเดาว่าสมการนี้ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่ามากกว่า 1000 ซึ่งข้อคาดเดาอาจนำไปสู่การพิสูจน์ในทางทฤษฎีต่อไป

กรณีที่ $\boldsymbol{k} = \mathbf{4}$ จะได้ว่าสมการ $py^4 = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีที่ $\boldsymbol{k} = \mathbf{5}$ จากการแทนจำนวนเฉพาะ p ที่มีค่าอยู่ระหว่าง $1 - 1000$ ลงในโปรแกรม Wolfram Mathematica ทำให้ได้ข้อคาดเดาว่าสมการ $py^5 = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่ามากกว่า 1000 ซึ่งข้อคาดเดาอาจนำไปสู่การพิสูจน์ในทางทฤษฎีต่อไป

กรณีที่ $\boldsymbol{k}$ เป็นจำนวนคู่ใด ๆ สมการ $py^k = x^4 + x$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก

เอกสารอ้างอิง

[1] Konstantine, Zelator,. and Ovidiu, Furdui. The non-existence of integer solutions to $py^2 = x^4 + x$. The Mathematical Gazette 94, 530(2010): 290-294.

[2] Stan, Dolan. The equation $py^2 = x^4 + x$. The Mathematical Gazette 97, 540(2013): 498-501

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ $py^k = x^4 + x$
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) Positive integer solutions of $py^k = x^4 + x$
อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร
ผู้ดำเนินการ นายรัฐภูมิ หาญมานพ เลขประจำตัวนิสิต 5933541923
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในปี 2004 ข้อสอบคัดผู้แทนโอลิมปิกของประเทศเกาหลีครั้งที่ 14 ได้ทำการพิจารณาสมการ $3y^2 = x^4 + x$ ซึ่งไม่มีผลเฉลย x, y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ต่อมาในปี 2010 Konstantine Zelator และ Ovidiu Furdui [1] ได้ทำการศึกษาสมการ $py^2 = x^4 + x$ และพบว่าในกรณีที่ $p \equiv 1 \ (mod\ 3)$ สมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย x, y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก และหลังจากนั้นในปี 2013 Stan Dolan [2] สามารถแสดงได้ว่าไม่มีจำนวนเต็มบวก x, y ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ $py^2 = x^4 + x$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq 2$

วัตถุประสงค์

ศึกษาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $py^k = x^4 + x$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ขอบเขตของโครงงาน

1. สนใจเฉพาะผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $py^k = x^4 + x$
   เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq 2$
2. พิจารณาจำนวนเต็มบวกคี่ k เมื่อ k มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษา และกำหนดขอบเขตของโครงงาน โดยผ่านความเห็นชอบจากอาจารย์ที่ปรึกษา
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน
3. หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ k ที่ทำให้สมการ $py^k = x^4 + x$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก
4. ตรวจสอบความถูกต้อง
5. สรุป และจัดทำรูปเล่มรายงาน
6. นำเสนอรายงาน

ระยะเวลาที่ศึกษา

แผนการศึกษา	ปี พ.ศ. 2562				ปี พ.ศ. 2563		
	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1. กำหนดหัวข้อโครงงานที่จะศึกษาและกำหนดขอบเขตของโครงงาน โดยผ่านความเห็นชอบจากอาจารย์ที่ปรึกษา							
2. ศึกษาและค้นคว้าข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโครงงาน							
3. หาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ k ที่ทำให้สมการ $py^k = x^4 + x$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก							
4. ตรวจสอบความถูกต้อง							
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน							
6. นำเสนอรายงาน							

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

1. ฝึกทักษะการทำงานวิจัยทางคณิตศาสตร์
2. ฝึกทักษะการพิสูจน์โดยเลือกใช้เครื่องมือทางทฤษฎีจำนวนได้อย่างเหมาะสมและรัดกุม
3. พัฒนาทักษะการคิด วิเคราะห์ และการสำเสนอ

ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่พัฒนาขึ้น

1. ได้ทราบเงื่อนไขที่เพียงพอของ k ที่ทำให้สมการ $py^k = x^4 + x$ มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวก
2. สามารถนำความรู้ที่ได้ไปใช้ต่อยอด

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล
2. เครื่องพิมพ์
3. โปรแกรม Microsoft word และ power point
4. กระดาษ A4

งบประมาณ

1. กระดาษ A4
2. อุปกรณ์เครื่องเขียน
3. ค่าจัดทำรูปเล่ม

เอกสารอ้างอิง

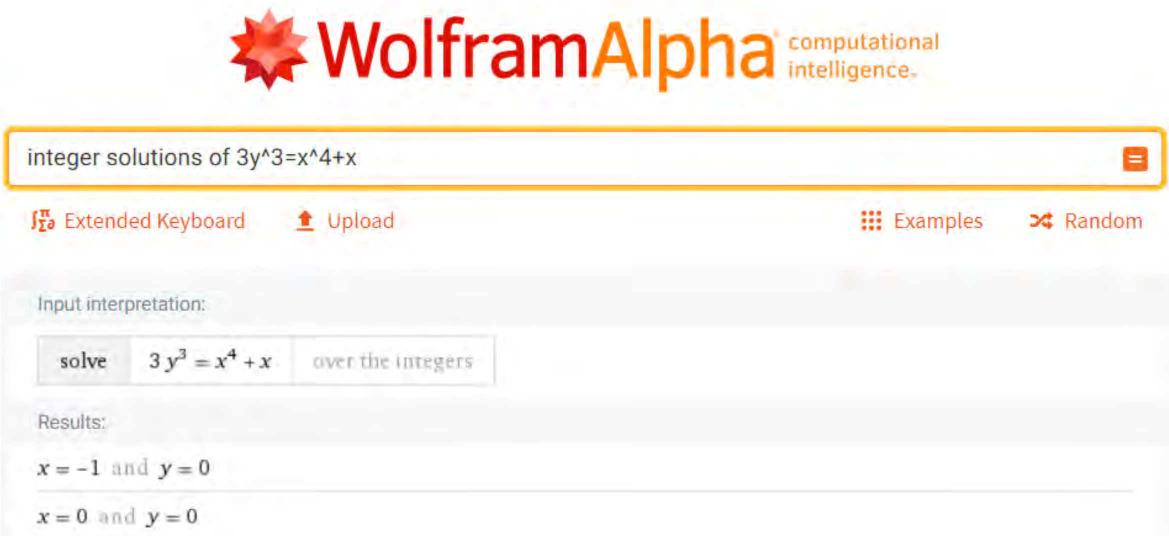
[1] Konstantine, Zelator,. and Ovidiu, Furdui. The non-existence of integer solutions to $py^2 = x^4 + x$. The Mathematical Gazette 94, 530(2010): 290-294.

[2] Stan, Dolan. The equation $py^2 = x^4 + x$. The Mathematical Gazette 97, 540(2013): 498-5

ตัวอย่างของการคำนวณด้วยโปรแกรม

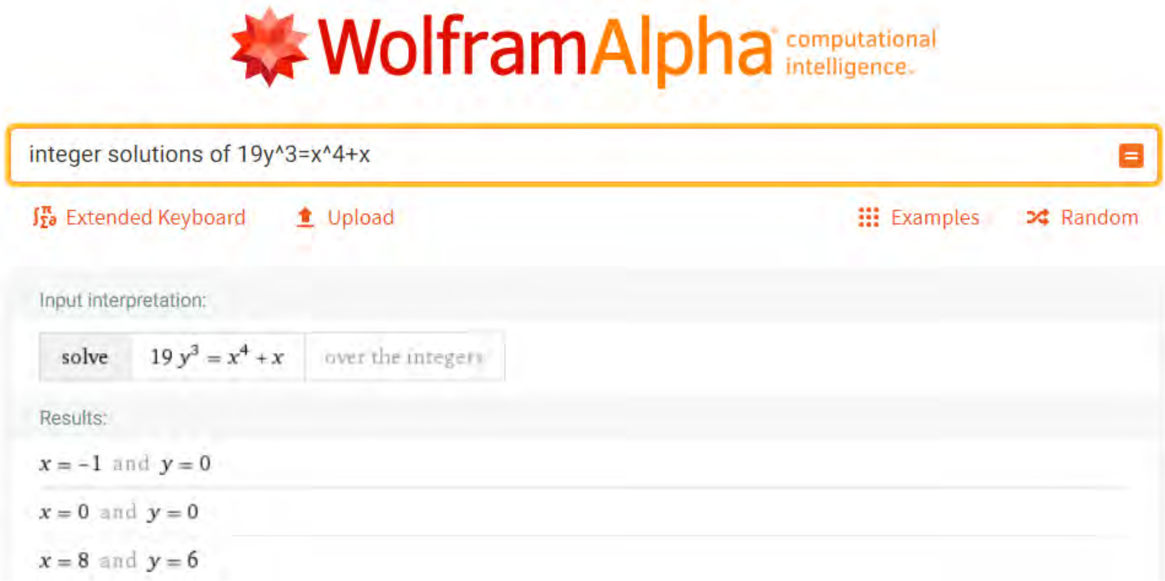
กรณีที่ $k = 3$

$p = 3$



$p = 13$

$p = 19$

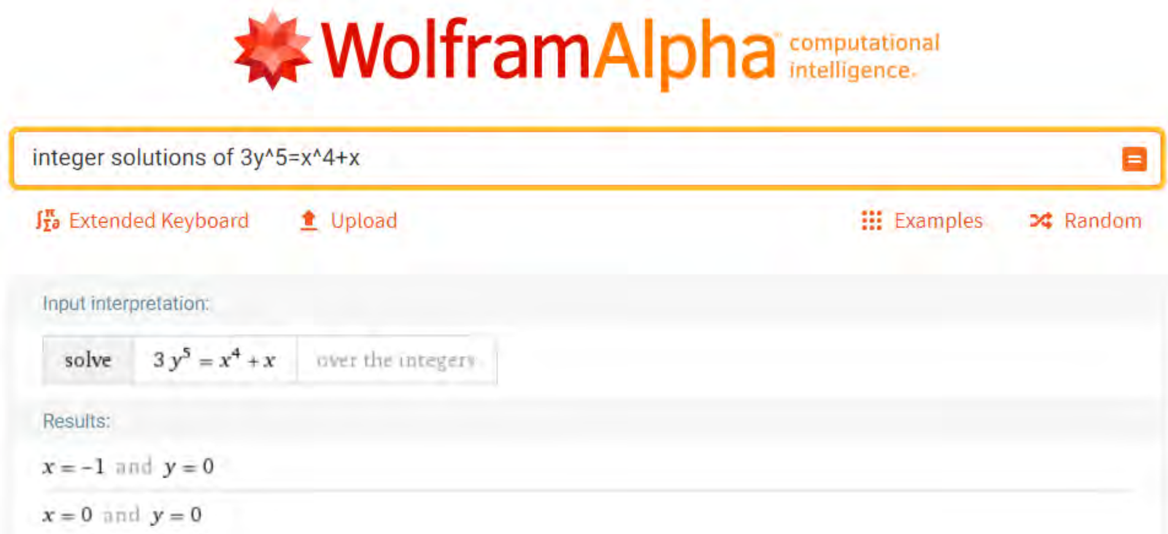

WolframAlpha computational intelligence.
integer solutions of 19y^3=x^4+x
Extended Keyboard
Upload
Examples
Random
Input interpretation:
solve $19\,y^3 = x^4 + x$ over the integers
Results:
$x = -1$ and $y = 0$
$x = 0$ and $y = 0$
$x = 8$ and $y = 6$

$p = 149$


WolframAlpha computational intelligence.
integer solutions of 149y^3=x^4+x
Extended Keyboard
Upload
Examples
Random
Input interpretation:
solve $149\,y^3 = x^4 + x$ over the integers
Results:
$x = -1$ and $y = 0$
$x = 0$ and $y = 0$

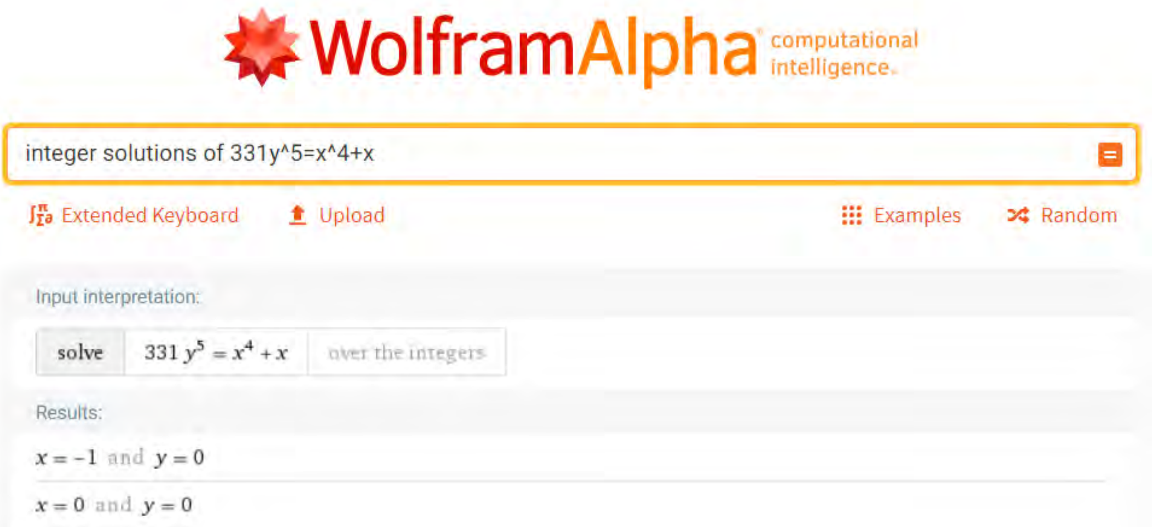
กรณีที่ $\boldsymbol{k} = \mathbf{5}$

$\boldsymbol{p} = \mathbf{3}$



$\boldsymbol{p} = \mathbf{47}$

$p = 331$


WolframAlpha computational intelligence.
integer solutions of 331y^5=x^4+x
Extended Keyboard
Upload
Examples
Random
Input interpretation:
solve $331\,y^5 = x^4 + x$ over the integers
Results:
$x = -1$ and $y = 0$
$x = 0$ and $y = 0$

$p = 509$


WolframAlpha computational intelligence.
integer solutions of 509y^5=x^4+x
Extended Keyboard
Upload
Examples
Random
Input interpretation:
solve $509\,y^5 = x^4 + x$ over the integers
Results:
$x = -1$ and $y = 0$
$x = 0$ and $y = 0$

ประวัติผู้เขียน

นายรัฐภูมิ หาญมานพ
เลขประจำตัวนิสิต 5933541923
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย