ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะและ y เป็นจำนวนประกอบ

นายทรงกริช ดาพวรรณ

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Solutions of Diophantine equation $x^2 - y^2 = z^4$ where x is a prime number and y is a composite number

Mister Songkrit Dapawan

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2019
Copyright of Chulalongkorn University

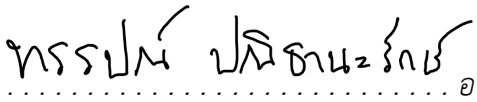
โครงงาน	*ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบ*
โดย	*นายทรงกริช ดาพวรรณ เลขประจำตัวนิสิต 5933517923*
สาขาวิชา	*คณิตศาสตร์*
อาจารย์ที่ปรึกษา	*อาจารย์ ดร.ทรรปณ์ ปณิธานะรักษ์*
	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

. . . . . หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน



. . . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(อาจารย์ ดร.ทรรปณ์ ปณิธานะรักษ์)

. . . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานร่วม

(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

. . . . . กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ)

. . . . . กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อธิปัตย์ ธำรงธัญลักษณ์)

นายทรงกริช ดาพวรรณ: ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะและ y เป็นจำนวนประกอบ. (Solutions of Diophantine equation $x^2 - y^2 = z^4$ where x is a prime number and y is a composite number) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน: อาจารย์ ดร.ทรรปณ์ ปณิธานะรักษ์ และ รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 38 หน้า

โครงงานนี้พิจารณาความเป็นไปได้ของการมีผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบ บางสมการ โดยจะพิจารณา z ที่เป็นได้ 2 กรณี คือ z เป็นจำนวนเฉพาะ และ z เป็นจำนวนประกอบ ในกรณีที่ z เป็นจำนวนประกอบจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ z เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะตัวเดียวกัน n ตัว และกรณีที่ z เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว เมื่อ $n \geq 2$ จากนั้นจะสร้างโปรแกรมโดยใช้ภาษาไพธอนในการหาผลเฉลยในกรณีทั้งสามดังกล่าว

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต . . . . . ทรงกริช ดาพวรรณ

สาขาวิชา . . . คณิตศาสตร์ . . . . . ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน . . . . . ทรรปณ์ ปณิธานะรักษ์

ปีการศึกษา . . . . 2562 . . ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานร่วม . . . .

#5933517923 : MAJOR MATHEMATICS

***KEYWORDS** : Diophantine equation, prime number, composite number*

*SONGKRIT DAPAWAN : Solutions of Diophantine equation $x^2 - y^2 = z^4$ where x is a prime number and y is a composite number. **ADVISORS** : THAP PANITANARAK, Ph.D. and ASSOC. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 38 pp.*

This project considers possibility of existence of solutions to some Diophantine equations $x^2 - y^2 = z^4$ where x is a prime number and y is a composite number. We divide z into two cases, prime and composite. For composite number, we consider only the cases where z is a product of n same prime number and product of n different prime numbers where $n \geq 2$. Then, we devise a computational program using Python to generate solutions of these three cases.

Department of Mathematics and Computer Science. Student's Signature .....
Field of Study . . Mathematics . . Advisor's Signature .....
Academic Year . . . . . 2019 . . . Co-Advisor's Signature .....

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้สำเร็จได้เพราะได้รับการอนุเคราะห์อย่างเต็มที่จากบุคคลเหล่านี้ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.ทรรปณ์ ปณิธานะรักษ์ และ รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ที่ให้คำแนะนำ ให้ความรู้ เคี่ยวเข็ญ ดูแลเอาใจใส่เป็นอย่างดีมาโดยตลอดระยะเวลาการทำโครงงานนี้

ขอขอบพระคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำโครงงาน ซึ่งทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ และ อาจารย์ ดร.อธิปัตย์ ธำรงธัญลักษณ์ ซึ่งเป็นกรรมการคุมสอบโครงงานนี้ช่วยตรวจทานและให้คำแนะนำทำให้โครงงานมีความถูกต้องมากขึ้น

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณพ่อแม่และเพื่อน ๆ ที่เป็นกำลังใจให้ผ่านลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... จ

กิตติกรรมประกาศ ..... ฉ

สารบัญ ..... ช

สารบัญภาพ ..... ซ

บทที่ 1 บทนำ 1

บทที่ 2 การวิเคราะห์เบื้องต้น 2

บทที่ 3 โปรแกรมผลลัพธ์เชิงตัวเลข 7

บทที่ 4 สรุปและข้อเสนอแนะ 26

เอกสารอ้างอิง 29

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ 33

ประวัติผู้เขียน 37

สารบัญภาพ

ภาพที่ 3.1 แผนผังแสดงการตรวจสอบจำนวนเฉพาะ.....7
ภาพที่ 3.2 แผนผังแสดงการสร้างสมการ.....8
ภาพที่ 3.3 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนเฉพาะ.....10
ภาพที่ 3.4 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูป z = pn
เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ n ≥ 2 12
ภาพที่ 3.5 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบ
ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัว เมื่อ n ≥ 2(1) 14
ภาพที่ 3.6 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบ
ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัว เมื่อ n ≥ 2(2) 15
ภาพที่ 3.7 การใช้งานส่วนเริ่มต้นโปรแกรม.....17
ภาพที่ 3.8 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนเฉพาะ.....17
ภาพที่ 3.9 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเริ่มต้น.....17
ภาพที่ 3.10 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนสิ้นสุด.....17
ภาพที่ 3.11 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 2 - 107.....18
ภาพที่ 3.12 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 109 - 107.....18
ภาพที่ 3.13 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 263 - 431.....19
ภาพที่ 3.14 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 433 - 599.....19
ภาพที่ 3.15 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 601 - 773.....20
ภาพที่ 3.16 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 787 - 997.....20
ภาพที่ 3.17 การใช้งานส่วนเริ่มต้นโปรแกรม.....20
ภาพที่ 3.18 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนประกอบ.....21
ภาพที่ 3.19 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนเฉพาะยกกำลัง n 21
ภาพที่ 3.20 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเริ่มต้น.....21
ภาพที่ 3.21 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนสิ้นสุด.....21
ภาพที่ 3.22 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนยกกำลัง 2.....22
ภาพที่ 3.23 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะยกกำลัง 2 ตั้งแต่ 13 - 53.....22

ภาพที่ 3.24 การใช้งานส่วนเริ่มต้นโปรแกรม.....22
ภาพที่ 3.25 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนประกอบ.....22
ภาพที่ 3.26 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนเฉพาะคูณกัน n ตัว.....23
ภาพที่ 3.27 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเฉพาะคูณกัน 2 ตัว.....23
ภาพที่ 3.28 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเริ่มต้น.....23
ภาพที่ 3.29 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนสิ้นสุด.....24
ภาพที่ 3.30 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวคูณกัน (1).....24
ภาพที่ 3.31 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวคูณกัน (2).....24
ภาพที่ 3.32 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวคูณกัน (3).....25

บทที่ 1
บทนำ

ในปี ค.ศ. 2019 Burshtein [1] ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในรูป $A^2 - B^2 = Z^4$ และได้ข้อสรุปว่า

(1) ถ้า A และ B เป็นจำนวนเฉพาะคี่ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว คือ (A, B, Z) = (5, 3, 2)

(2) ถ้า B เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4N + 3$ เมื่อ $N > 0$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวไม่มีผลเฉลย

(3) ถ้า B เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4N + 1$ และ N สอดคล้องเงื่อนไข (i) $N = L^2$ และ (ii) $2N + 1 = M^2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยเป็น $(A, B, Z) = (4L^2M^2 + 1, 4L^2 + 1, 2LM)$ และ

(4) ถ้า B เป็นจำนวนประกอบที่อยู่ในรูป $12N + 3$ และ N สอดคล้องเงื่อนไข (i) $3N + 1 = Q^2$ (ii) $6N + 1 = R^2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยเป็น $(A, B, Z) = (4(6N + 1)(3N + 1) + 1, 3(4N + 1), 2QR)$

โดยในงานวิจัยนี้ ได้มีคำถามที่ท้าทายว่า ถ้า A เป็นจำนวนเฉพาะ และ B เป็นจำนวนประกอบ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $A^2 - B^2 = Z^4$ จะมีผลเฉลยหรือไม่

โครงงานนี้ จึงมุ่งศึกษาความเป็นไปได้ของการมีอยู่ของผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบบางสมการ โดยแบ่งการพิจารณา z เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ z เป็นจำนวนเฉพาะ และกรณีที่ z เป็นจำนวนประกอบ ในกรณีที่ z เป็นจำนวนประกอบจะต้องพิจารณาเพียง 2 กรณีย่อย นั่นคือ z เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะตัวเดียวกัน n ตัว และ z เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว โดยที่ $n \geq 2$ จากนั้นจะสร้างโปรแกรมโดยใช้ภาษาไพธอนในการหาผลเฉลยในกรณีทั้งสามดังกล่าว

บทที่ 2
การวิเคราะห์เบื้องต้น

จากสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบ จะเริ่มพิจารณาโดยการแบ่ง z ออกเป็น 2 กรณี คือ z เป็นจำนวนเฉพาะ และ z เป็นจำนวนประกอบ ในแต่ละกรณีจะพิจารณาการมีอยู่ของผลเฉลยของสมการดังกล่าว ในกรณีที่สมการไม่มีผลเฉลยจะทำการพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง แต่ในกรณีที่มีความเป็นไปได้ที่จะมีผลเฉลยของสมการดังกล่าว จะนำเสนอผลเฉลย 1 ชุดของสมการดังกล่าวก่อน แล้วจะสร้างโปรแกรมในการคำนวณผลเฉลยโดยใช้ภาษาไพธอนในบทที่ 3

สมมติว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ มีผลเฉลย โดยที่ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบ

กรณีที่ 1 *z เป็นจำนวนเฉพาะ*

เนื่องจาก $x - y < x + y$ ทำให้แยกกรณีในการพิจารณาได้ 2 กรณี

1.1 $(x + y)(x - y) = (z^4)(1)$

ดังนั้น $x + y = z^4$ และ $x - y = 1$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (1 + z^4)/2$

1.1.1 กรณี $z = 2$ จะได้ $x = (1 + 2^4)/2 = 17/2$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง

1.1.2 กรณี z เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะเห็นว่ามี $z = 3$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ที่ทำให้ $x = (1 + 3^4)/2 = 41$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $y = 40$ เป็นจำนวนประกอบ สำหรับผลเฉลยชุดอื่น ๆ จะหาโดยใช้โปรแกรมต่อไป

1.2 $(x + y)(x - y) = (z^3)(z)$

ดังนั้น $x + y = z^3$ และ $x - y = z$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (z + z^3)/2$

1.2.1 กรณี $z = 2$ จะได้ $x = (2 + 2^3)/2 = 5$ เป็นจำนวนเฉพาะ แต่ $y = 3$ ไม่เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

1.2.2 กรณี z เป็นจำนวนเฉพาะคี่ สมมติว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยที่ x เป็นจำนวนเฉพาะและ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $z = 2m + 1$ จะได้ว่า

$$x = (2m + 1 + (2m + 1)^3)/2 = (8m^3 + 12m^2 + 8m + 1)/2$$

หรือนั่นคือ $2x = 8m^3 + 12m^2 + 8m + 1$ สังเกตว่า 2x เป็นจำนวนเต็มคู่

แต่ $8m^3 + 12m^2 + 8m + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงเกิดขัดแย้ง

กรณีที่ 2 *z เป็นจำนวนประกอบในรูป* $z = p^n$ *เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ* $n \geq 2$

ถ้า n = 2 นั่นคือ สมการที่พิจารณาอยู่ในรูป $x^2 - y^2 = p^8$ *เนื่องจาก* $x - y < x + y$ *จะแยกการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี*

(i) $x + y = p^8$ *และ* $x - y = 1$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (1 + p^8)/2$

(a) กรณี p = 2 จะได้ว่า $x = (1 + 2^8)/2 = 257/2$ *ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

(b) กรณี p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จะเห็นว่ามี z = 13 เป็นจำนวนเฉพาะคี่ ที่ทำให้ $x = (1 + 13^8)/2 = 407,865,361$ *เป็นจำนวนเฉพาะ และ y = 407,865,360 เป็นจำนวนประกอบ สำหรับผลเฉลยชุดอื่น ๆ จะหาโดยใช้โปรแกรมต่อไป*

(ii) $x + y = p^7$ *และ* $x - y = p$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (p + p^7)/2 = p(1 + p^6)/2$ *เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น p/2 หรือ* $(1 + p^6)/2$ *เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

(iii) $x + y = p^6$ *และ* $x - y = p^2$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (p^2 + p^6)/2 = p^2(1 + p^4)/2$ *เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น* $p^2/2$ *หรือ* $(1 + p^4)/2$ *เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

(iv) $x + y = p^5$ *และ* $x - y = p^3$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (p^3 + p^5)/2 = p^3(1 + p^2)/2$ *เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น* $p^3/2$ *หรือ* $(1 + p^2)/2$ *เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

ถ้า n = 3 นั่นคือ สมการที่พิจารณาอยู่ในรูป $x^2 - y^2 = p^{12}$ *เนื่องจาก* $x - y < x + y$ *จะแยกการพิจารณาออกเป็น 6 กรณี*

(i) $x + y = p^{12}$ *และ* $x - y = 1$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (1 + p^{12})/2 = (1 + p^4)(1 - p^4 + p^8)/2$ *เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น* $1 + p^4$ *และ* $1 - p^4 + p^8$ *เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งคู่ ซึ่งในกรณีแรกจะได้ว่า x ไม่เป็นจำนวนเต็ม แต่ในกรณีหลังจะได้ว่า x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

(ii) $x + y = p^{11}$ *และ* $x - y = p$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (p + p^{11})/2 = p(1 + p^{10})/2$ *เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น p/2 หรือ* $(1 + p^{10})/2$ *เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

(iii) $x + y = p^{10}$ *และ* $x - y = p^2$ *นั่นคือ จะได้ว่า* $x = (p^2 + p^{10})/2 = p^2(1 + p^8)/2$ *เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น* $p^2/2$ *หรือ* $(1 + p^8)/2$ *เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

(iv) $x + y = p^9$ และ $x - y = p^3$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^3 + p^9)/2 = p^3(1 + p^6)/2$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p^3/2$ หรือ $(1 + p^6)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(v) $x + y = p^8$ และ $x - y = p^4$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^4 + p^8)/2 = p^4(1 + p^4)/2$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p^4/2$ หรือ $(1 + p^4)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(vi) $x + y = p^7$ และ $x - y = p^5$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^5 + p^7)/2 = p^5 (1 + p^2)/2$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p^5/2$ หรือ $(1 + p^2)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ในกรณีทั่วไป ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ สมมติว่ามีจำนวนนับ m ที่ทำให้ $n = 2m$ จะได้ว่า $x = (p^i + p^{8m-i})/2$ เมื่อ $0 \le i \le 4m$

(i) $i = 0$ จะได้ว่า $x = (1 + p^{8m})/2$ เป็นกรณีที่มีแนวโน้มว่าจะสามารถหาผลเฉลยได้ ซึ่งจะหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมต่อไป

(ii) $1 \le i \le 4m$ จะได้ว่า $x = (p^i + p^{8m-i})/2 = p(p^{i-1} + p^{8m-i-1})/2$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น p/2 หรือ $(p^{i-1} + p^{8m-i-1})/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ สมมติว่ามีจำนวนนับ m ที่ทำให้ $n = 2m+1$ จะได้ว่า $x = (p^i + p^{8m+4-i})/2$ เมื่อ $0 \le i \le 4m + 2$

(i) $i = 0$ จะได้ว่า $x = (1 + p^{8m+4})/2 = (1 + p^4)(1 - p^4 + p^8 + \ldots + p^{4(2m)})/2$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $1 + p^4$ และ $1 - p^4 + p^8 + \ldots + p^{4(2m)}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งคู่ ซึ่งในกรณีแรกจะได้ว่า x ไม่เป็นจำนวนเต็ม แต่ในกรณีหลังจะได้ว่า x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(ii) $1 \le i \le 4m + 2$ จะได้ว่า $x = (p^i + p^{8m+4-i})/2 = p(p^{i-1} + p^{8m+3-i})/2$ เนื่องจาก p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น p/2 หรือ $(p^{i-1} + p^{8m+3-i})/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 3 *z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัว เมื่อ $n \ge 2$*
ถ้า $n = 2$ สมมติว่า $z = pq$ และสมการที่พิจารณาอยู่ในรูป $x^2 - y^2 = (pq)^4$
เนื่องจาก $x - y < x + y$ จะแยกการพิจารณาออกเป็น 8 กรณี

(i) $x + y = (pq)^4$ และ $x - y = 1$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (1 + (pq)^4)/2$ จะเห็นว่ามี $p = 3$ และ $q = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ ที่ทำให้ $x = (1 + (3 \times 7)^4)/2 = 97{,}241$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $y = 97{,}240$ เป็นจำนวนประกอบ สำหรับผลเฉลยชุดอื่น ๆ จะหาโดยใช้โปรแกรมต่อไป

(ii) $x + y = p^3q^4$ และ $x - y = p$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p + p^3q^4)/2 = p(1 + p^2q^4)/2$ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p/2$ หรือ $(1 + p^2q^4)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(iii) $x + y = p^2q^4$ และ $x - y = p^2$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^2 + p^2q^4)/2 = p^2(1 + q^4)/2$ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p^2/2$ หรือ $(1 + q^4)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(iv) $x + y = pq^4$ และ $x - y = p^3$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p + p^3q^4)/2 = p(1 + p^2q^4)/2$ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $p/2$ หรือ $(1 + p^2q^4)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(v) $x + y = q^4$ และ $x - y = p^4$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^4 + q^4)/2$ จะเห็นว่ามี $p = 3$ และ $q = 5$ เป็นจำนวนเฉพาะ ที่ทำให้ $x = (3^4 + 5^4)/2 = 353$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $y = 272$ เป็นจำนวนประกอบ สำหรับผลเฉลยชุดอื่น ๆ จะหาโดยใช้โปรแกรมต่อไป

(vi) $x + y = p^4q$ และ $x - y = q^3$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^4q + q^3)/2 = q(p^4 + q^2)/2$ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $q/2$ หรือ $(p^4 + q^2)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ หรือ $x = q(p^4 + q^2)/2$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(vii) $x + y = p^4q^2$ และ $x - y = q^2$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^4q^2 + q^2)/2 = q^2(p^4 + 1)/2$ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $q^2/2$ หรือ $(p^4 + 1)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ หรือ $x = q^2(p^4 + 1)/2$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง

(viii) $x + y = p^4q^3$ และ $x - y = q$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^4q^3 + q)/2 = q(p^4q^2 + 1)/2$ เนื่องจาก p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $q/2$ หรือ $(p^4q^2 + 1)/2$ เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า $n = 3$ สมมติว่า $z = pqr$ และสมการที่พิจารณาอยู่ในรูป $x^2 - y^2 = (pqr)^4$
เนื่องจาก $x - y < x + y$ จะแยกการพิจารณาออกเป็น 11 กรณี

(i) $x + y = (pqr)^4$ และ $x - y = 1$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (1 + (pqr)^4)/2$ จะเห็นว่ามี $p = 3$, $q = 5$ และ $r = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ ที่ทำให้ $x = (1 + (3 \times 5 \times 7)^4)/2 = 60,775,313$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $y = 60,775,312$ เป็นจำนวนประกอบ สำหรับผลเฉลยชุดอื่น ๆ จะหาโดยใช้โปรแกรมต่อไป

(ii) $x + y = (qr)^4$ และ $x - y = p^4$ นั่นคือ จะได้ว่า $x = (p^4 + (qr)^4)/2$ จะเห็นว่ามี $p = 3$, $q = 5$ และ $r = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ ที่ทำให้ $x = (3^4 + (5 \times 7)^4)/2 = 750,353$ เป็นจำนวน

เฉพาะ และ y = 750,272 เป็นจำนวนประกอบ สำหรับผลเฉลยชุดอื่น ๆ จะหาโดยใช้โปรแกรมต่อไป

(iii) – (xi) กรณีอื่นที่เหลือ คือ $x = (p + p^3q^4r^4)/2$, $(p^2 + p^2q^4r^4)/2$, $(p^3 + pq^4r^4)/2$, $(p^4q + q^3r^4)/2$, $(p^4q^2 + q^2r^4)/2$, $(p^4q^3 + qr^4)/2$, $(r + p^4q^4r^3)/2$, $(r^2 + p^4q^4r^3)/2$, $(r^3 + p^4q^4r)/2$ *จะเกิดข้อขัดแย้งทั้งสิ้น เนื่องจาก x เป็นจำนวนประกอบ หรือ x ไม่เป็นจำนวนเต็ม เช่น* $x = (p + p^3q^4r^4)/2 = p(1 + p^2q^4r^4)/2$ *เนื่องจาก p, q และ r เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น* $p/2$ *หรือ* $(1 + p^2q^4r^4)/2$ *เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนประกอบ จึงเกิดข้อขัดแย้ง*

ในกรณีทั่วไป สมมติว่า $z = p_1p_2p_3\cdots p_n$ *จะได้ว่า*

$$x = (p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{4-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n})/2$$

เมื่อ $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ *เป็นสมาชิกของ {0, 1, 2, 3, 4}*

(i) ถ้า $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ *เท่ากับ 0 หรือ 4 จะได้ว่า*

$$x = (p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{4-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n})/2$$

เป็นกรณีที่มีแนวโน้มว่าจะสามารถหาผลเฉลยได้ ซึ่งจะหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมต่อไป

(ii) ถ้า t_1 *หรือ* t_2 *หรือ ...* t_n *ไม่เท่ากับ 0 และ 4 โดยไม่เสียนัยทั่วไป กำหนดให้* t_1 *ไม่เท่ากับ 0 และ 4 จะได้ว่า*

$$\begin{aligned} x &= (p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{4-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n})/2 \\ &= p_1(p_1^{t_1-1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{3-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n})/2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด ดังนั้น* $p_1/2$ *หรือ* $(p_1^{t_1-1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{3-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n})$ *เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งจะทำให้ x เป็นจำนวนประกอบ หรือ* $x = (p_1^{t_1-1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{3-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n})/2$ *ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อแย้ง*

บทที่ 3

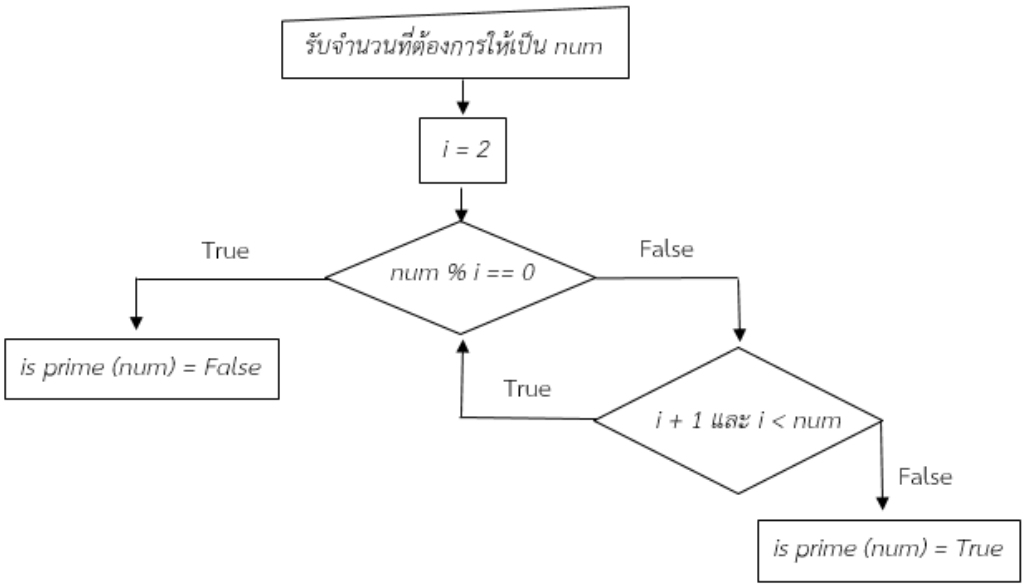
โปรแกรมและผลลัพธ์เชิงตัวเลข

เราสามารถสรุปขั้นตอนในการทำงานโปรแกรมในการหาผลเฉลยและวิธีการใช้โปรแกรมในการหาผลเฉลยได้ดังนี้

3.1 โปรแกรมในการคำนวณหาผลเฉลย

ขั้นตอนที่ 1 *การตรวจสอบจำนวนเฉพาะเพื่อนำไปใช้งาน*

แนวคิดในการตรวจสอบจำนวนเฉพาะเพื่อนำไปใช้งานสามารถนำมาเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังภาพที่ 3.1



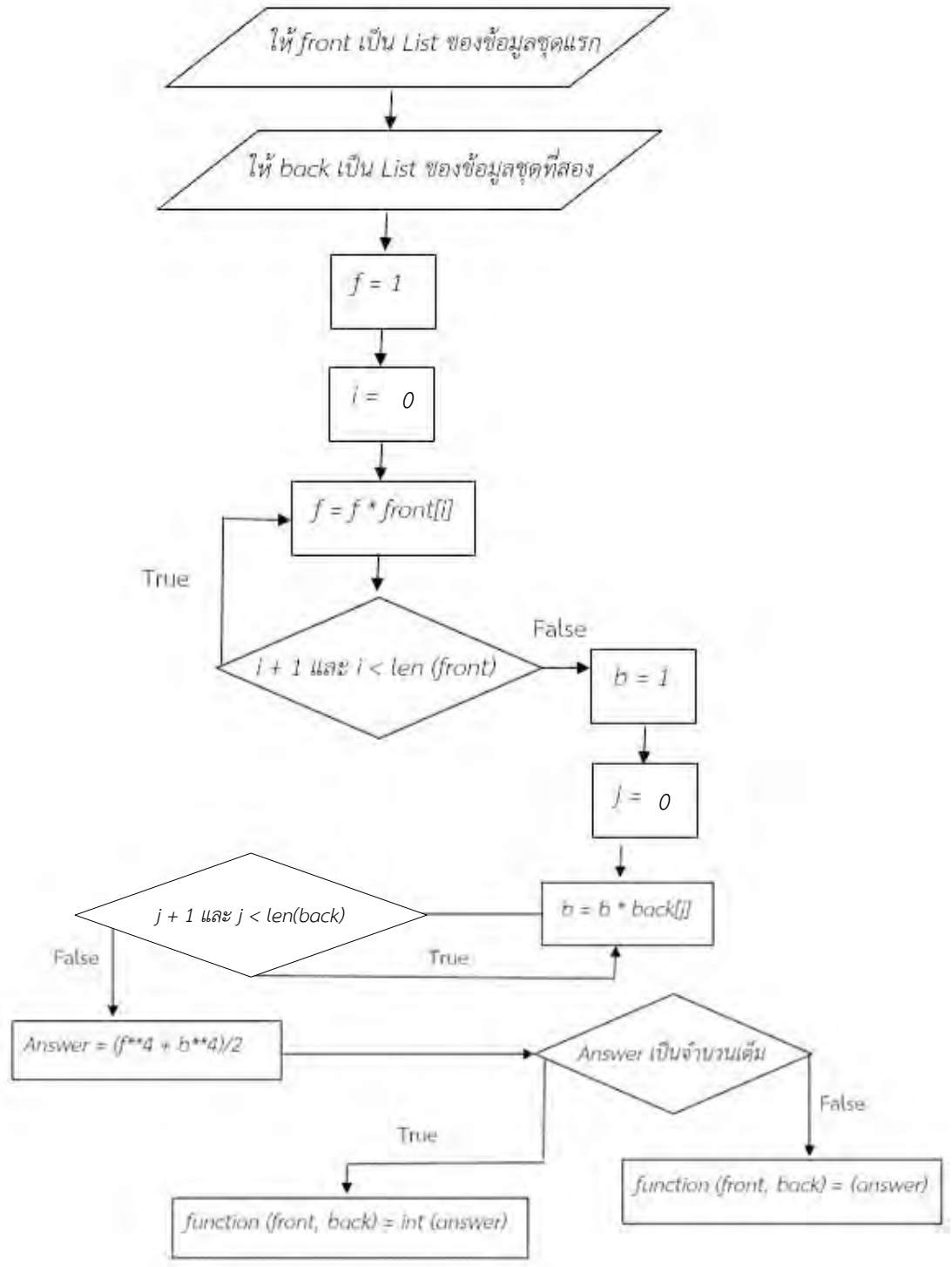
ภาพที่ 3.1 แผนผังแสดงการตรวจสอบจำนวนเฉพาะ

จากแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรมข้างต้นเรานำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

```
# check prime
def isPrime(num):
  for i in range(2,num):
    if num%i == 0:
      return False
  return True
```

ขั้นตอนที่ 2 *การคำนวนหาผลเฉลย*

แนวคิดในการสร้างสมการเพื่อใช้ในการคำนวนหาผลเฉลยสามารถนำมาเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังภาพที่ 3.2



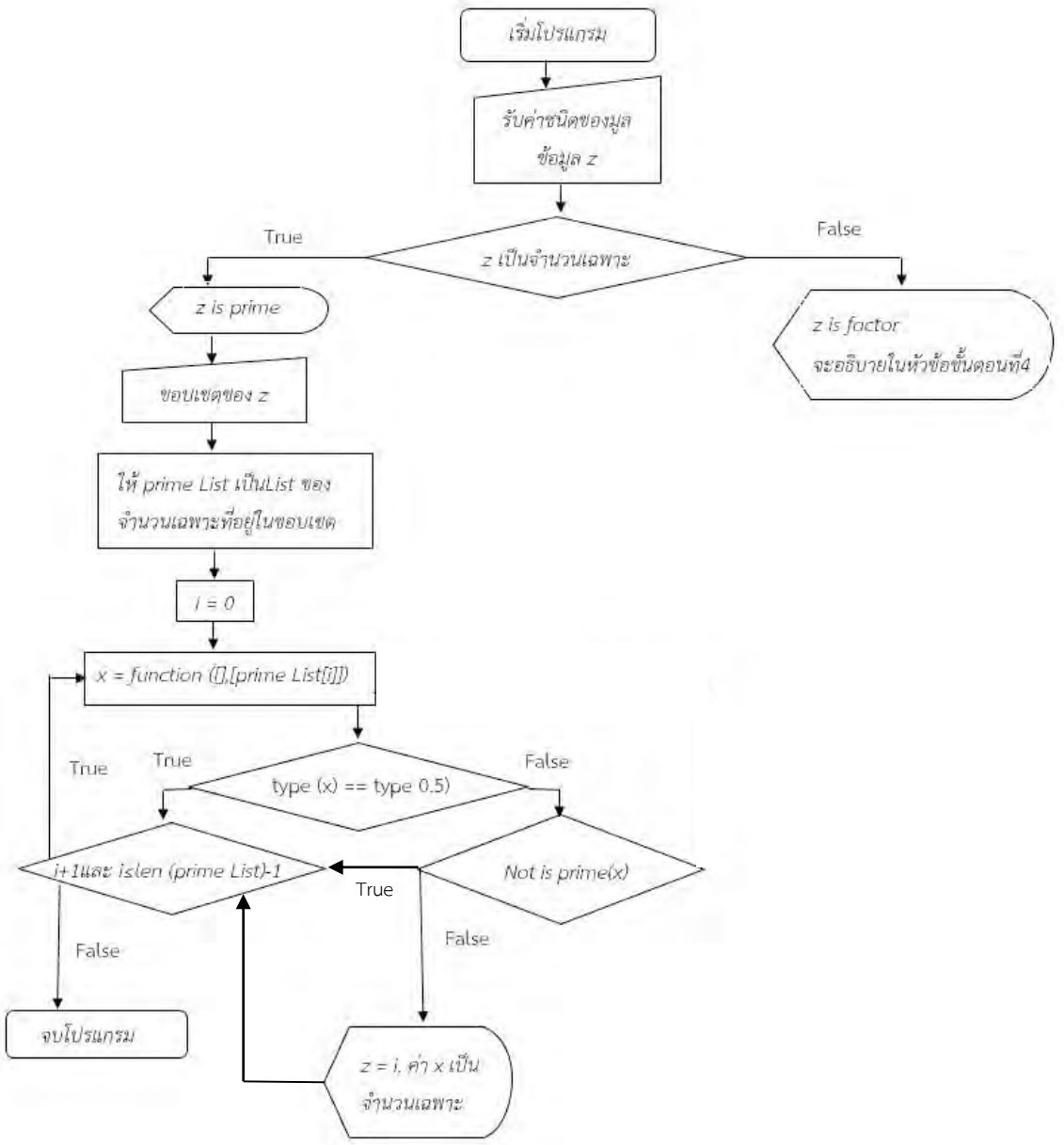
ภาพที่ 3.2 แผนผังแสดงการสร้างสมการ

จากแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรมข้างต้นเรานำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

```
# function equation
    def function(front,back):
    f = 1
    for i in front:
    f *= i
    b = 1
    for j in back:
    b *= j
    answer = (f**4 + b**4)/2
    if answer.is_integer():
    return int(answer)
    else:
    return answer
```

ขั้นตอนที่ 3 *การหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนเฉพาะ*

แนวคิดในการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนเฉพาะสามารถนำมาเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังภาพที่ 3.3



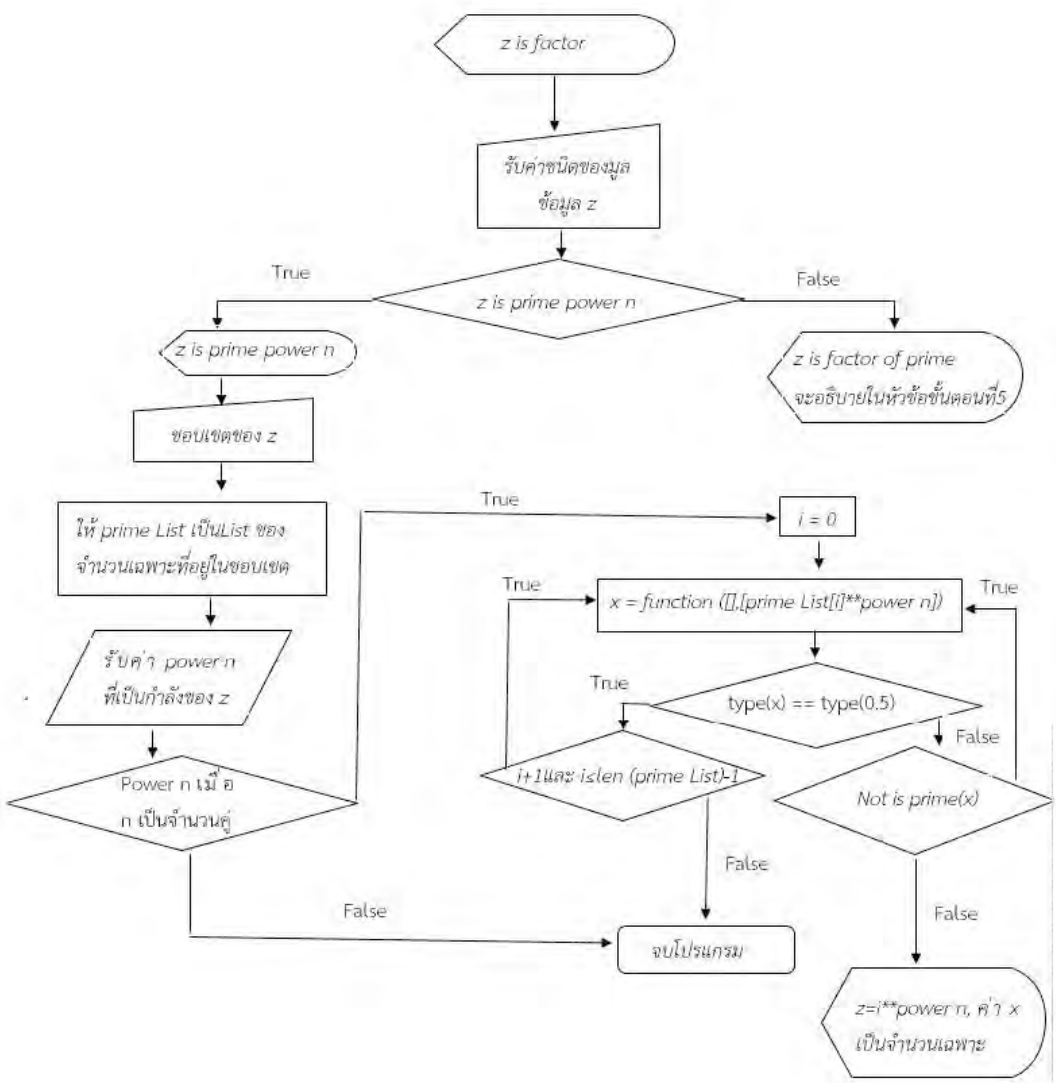
ภาพที่ 3.3 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนเฉพาะ

จากแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรมข้างต้นเรานำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

```
def startProgram():
  print('Press 1 : Z is Prime')
  print('Press 2 : Z is Factor')
  selectType = int(input('Please select type of Z : '))

  if selectType == 1:
    print('------- Z is Prime -------')
    print('Please select range of Prime Z')
    start,end = int(input('Start Range : ')),int(input('End Range : '))
    primeList = createPrimeList(start,end)
    print('Prime List in Range',primeList)
    for i in primeList:
      x = function([],[i])
      if type(x) == type(0.5):
        continue
      elif not isPrime(x):
        continue
      else: print('Z = ',i,' ---> X = ',x,' is Prime.')
```

ขั้นตอนที่ 4 *การหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูป $z = p^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $n \geq 2$*

แนวคิดในการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูป $z = p^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $n \geq 2$ สามารถนำมาเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังภาพที่ 3.4



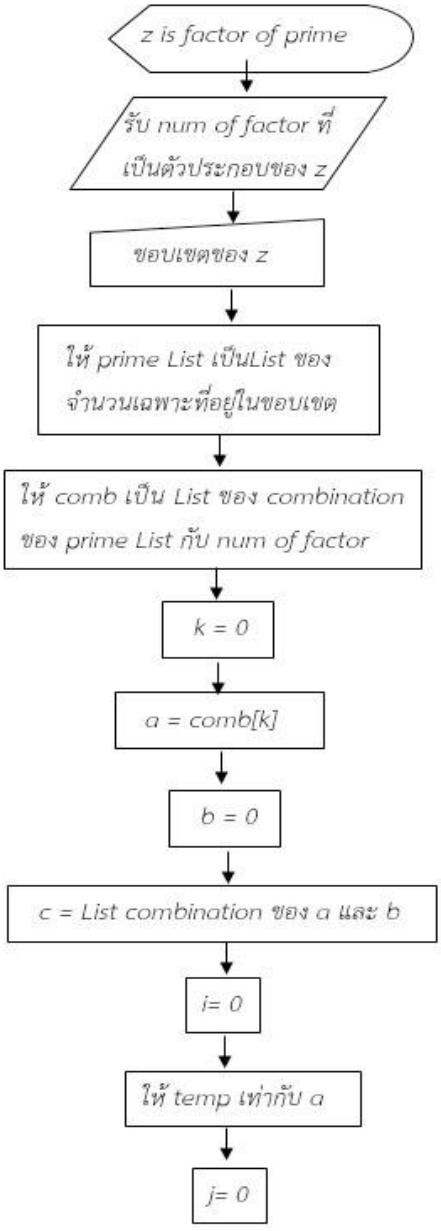
ภาพที่ 3.4 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูป $z = p^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $n \geq 2$

จากแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรมข้างต้นเรานำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

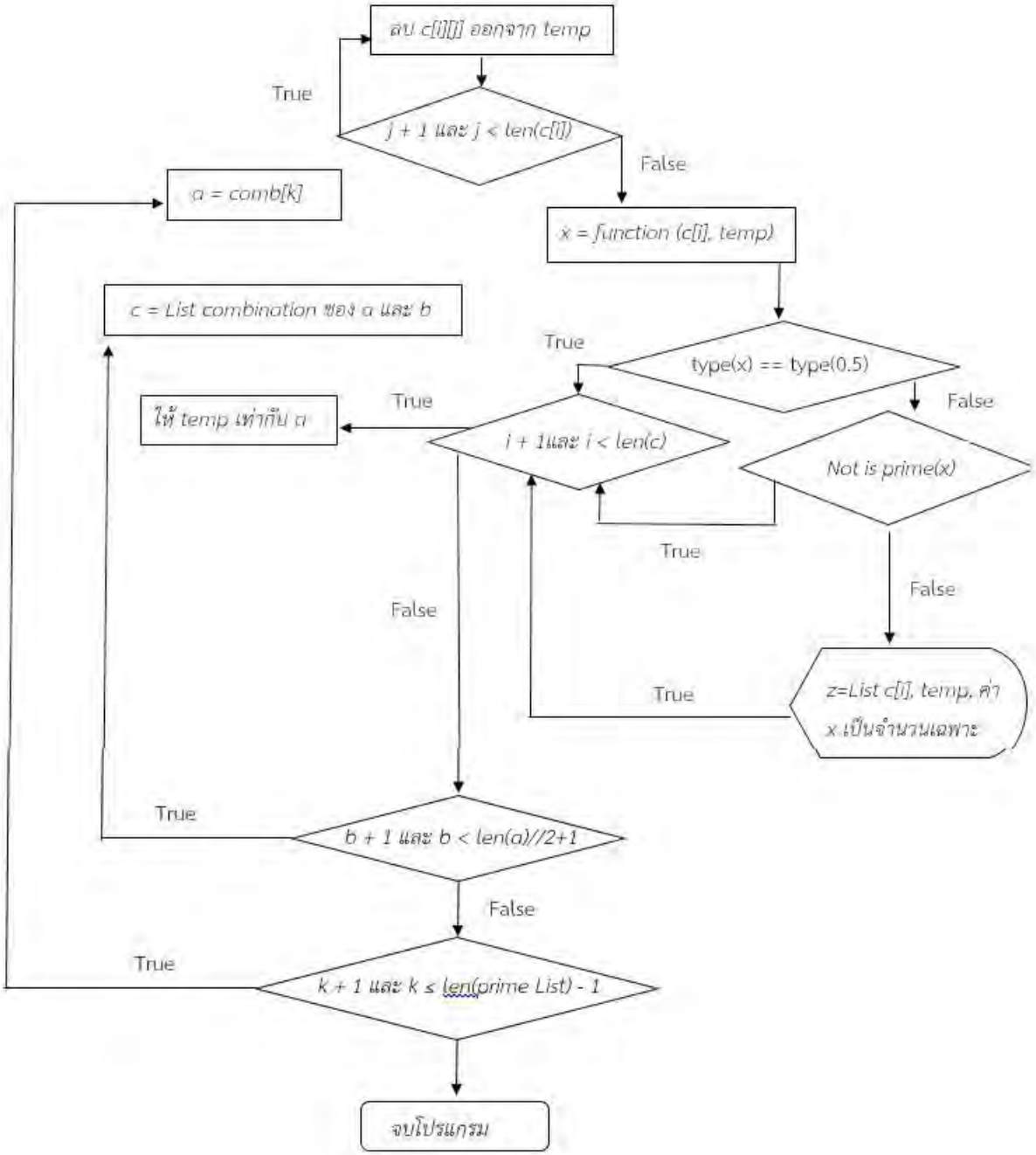
```
elif selectType == 2:
    print('------- Z is Factor -------')
    print('\tPress 1 : Z is Prime power n')
    print('\tPress 2 : Z is Factor of Prime')
    typeFactor = int(input('\tPlease select type of Factor : '))

    if typeFactor == 1:
      print('\t...Z is Prime power n...')
      print('\tPlease select range of Prime Z')
      start,end = int(input('\tStart Range : ')),int(input('\tEnd Range : '))
      primeList = createPrimeList(start,end)
      powerN = int(input('\tSelect number of Power : '))
      print('\tPrime List in Range',primeList)
      if powerN % 2 != 0:
        print('\tCan not find value at power ',powerN)
      else:
        for i in primeList:
          x = function([],[i**powerN])
          if type(x) == type(0.5):
            continue
          elif not isPrime(x):
            continue
          else: print('\tZ = ',i,' power ',powerN,' ---> X = ',x,' is Prime.')
```

ขั้นตอนที่ 5 *การหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัว เมื่อ n ≥ 2*

แนวคิดในการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัว เมื่อ n ≥ 2 สามารถนำมาเขียนแผนผังการทำงานของโปรแกรมได้ดังภาพที่ 3.5 – 3.6



ภาพที่ 3.5 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัวเมื่อ n ≥ 2 (1)



ภาพที่ 3.6 แผนผังแสดงการหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน n ตัว เมื่อ n ≥ 2 (2)

จากแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรมข้างต้นเรานำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

```
elif typeFactor == 2:
    print('\t...Z is Factor of Prime...')
    numofFactor = int(input('\tPlease select number of Factor prime : '))
    print('\tPlease select range of Prime')
    start,end = int(input('\tStart Range : ')),int(input('\tEnd Range : '))
    primeList = createPrimeList(start,end)
    comb = list(combinations(primeList, numofFactor))
    print('\tPrime List in Range',primeList)
    for a in comb:
      for b in range(len(a)//2+1):
        c = list(combinations(a, b))
        for i in range(len(c)):
          temp = list(a)
          for j in range(len(c[i])):
            temp.remove(c[i][j])
          x = function(c[i],temp)
          if type(x) == type(0.5):
            continue
          elif not isPrime(x):
            continue
          else: print('\tZ = ',list(c[i]),temp,' ---> X = ',x,' is Prime.')
```

3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมเพื่อหาผลเฉลย

3.2.1 หาผลเฉลยในกรณีที่ z เป็นจำนวนเฉพาะ

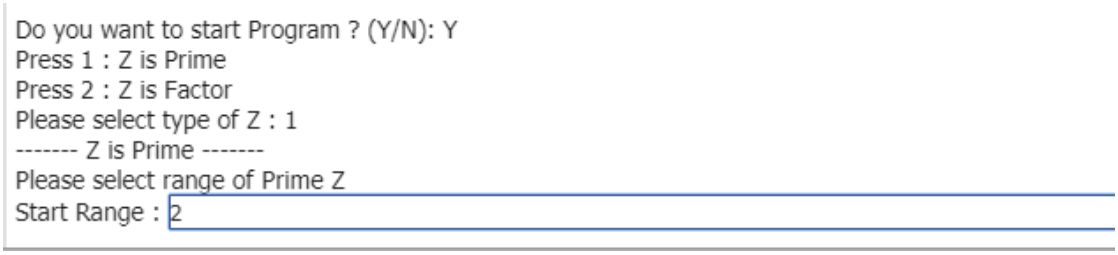
1. ถ้าต้องการเริ่มให้โปรแกรมทำงานเพื่อค้นหาผลเฉลย ให้พิมพ์ Y แต่ถ้าไม่ค้นหาผลเฉลยให้พิมพ์ N แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.7

ภาพที่ 3.7 การใช้งานส่วนเริ่มต้นโปรแกรม

2. ถ้าต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนเฉพาะ ให้พิมพ์ 1 แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.8

ภาพที่ 3.8 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนเฉพาะ

3. ต้องการเริ่มหาผลเฉลยจากจำนวนเต็มใด ให้พิมพ์จำนวนนั้น แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.9



ภาพที่ 3.9 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเริ่มต้น

4. ต้องการสิ้นสุดการหาผลเฉลยที่จำนวนใดให้พิมพ์จำนวนนั้น แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.10

ภาพที่ 3.10 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนสิ้นสุด

5. จะได้ผลเฉลยที่ต้องการ ดังภาพที่ 3.11 – 3.16

```
Z =  3  ---> X =  41  is Prime
Z =  5  ---> X =  313  is Prime
Z =  7  ---> X =  1201  is Prime
Z =  11  ---> X =  7321  is Prime
Z =  13  ---> X =  14281  is Prime
Z =  17  ---> X =  41761  is Prime
Z =  19  ---> X =  65161  is Prime
Z =  23  ---> X =  139921  is Prime
Z =  29  ---> X =  353641  is Prime
Z =  31  ---> X =  461761  is Prime
Z =  37  ---> X =  937081  is Prime
Z =  41  ---> X =  1412881  is Prime
Z =  43  ---> X =  1709401  is Prime
Z =  47  ---> X =  2439841  is Prime
Z =  53  ---> X =  3945241  is Prime
Z =  59  ---> X =  6058681  is Prime
Z =  61  ---> X =  6922921  is Prime
Z =  67  ---> X =  10075561  is Prime
Z =  71  ---> X =  12705841  is Prime
Z =  73  ---> X =  14199121  is Prime
Z =  79  ---> X =  19475041  is Prime
Z =  83  ---> X =  23729161  is Prime
Z =  89  ---> X =  31371121  is Prime
Z =  97  ---> X =  44264641  is Prime
Z =  101  ---> X =  52030201  is Prime
Z =  103  ---> X =  56275441  is Prime
Z =  107  ---> X =  65539801  is Prime
```

ภาพที่ 3.11 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 2 - 107

```
Z =  109  ---> X =  70579081  is Prime
Z =  113  ---> X =  81523681  is Prime
Z =  127  ---> X =  130072321  is Prime
Z =  131  ---> X =  147249961  is Prime
Z =  137  ---> X =  176137681  is Prime
Z =  139  ---> X =  186650521  is Prime
Z =  149  ---> X =  246442201  is Prime
Z =  151  ---> X =  259942801  is Prime
Z =  157  ---> X =  303786601  is Prime
Z =  163  ---> X =  352955881  is Prime
Z =  167  ---> X =  388898161  is Prime
Z =  173  ---> X =  447872521  is Prime
Z =  179  ---> X =  513312841  is Prime
Z =  181  ---> X =  536641561  is Prime
Z =  191  ---> X =  665431681  is Prime
Z =  193  ---> X =  693744001  is Prime
Z =  197  ---> X =  753069241  is Prime
Z =  199  ---> X =  784119601  is Prime
Z =  211  ---> X =  991059721  is Prime
Z =  223  ---> X =  1236486721  is Prime
Z =  227  ---> X =  1327618921  is Prime
Z =  229  ---> X =  1375029241  is Prime
Z =  233  ---> X =  1473647761  is Prime
Z =  239  ---> X =  1631404321  is Prime
Z =  241  ---> X =  1686701281  is Prime
Z =  251  ---> X =  1984563001  is Prime
Z =  257  ---> X =  2181235201  is Prime
```

ภาพที่ 3.12 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 109 - 107

```
Z =  263  ---> X =  2392175281  is Prime
Z =  269  ---> X =  2618057161  is Prime
Z =  271  ---> X =  2696790241  is Prime
Z =  277  ---> X =  2943669721  is Prime
Z =  281  ---> X =  3117419761  is Prime
Z =  283  ---> X =  3207123961  is Prime
Z =  293  ---> X =  3685025401  is Prime
Z =  307  ---> X =  4441437001  is Prime
Z =  311  ---> X =  4677475921  is Prime
Z =  313  ---> X =  4798962481  is Prime
Z =  317  ---> X =  5049019561  is Prime
Z =  331  ---> X =  6001806361  is Prime
Z =  337  ---> X =  6448958881  is Prime
Z =  347  ---> X =  7249163641  is Prime
Z =  349  ---> X =  7417741801  is Prime
Z =  353  ---> X =  7763701441  is Prime
Z =  359  ---> X =  8305156081  is Prime
Z =  367  ---> X =  9070563361  is Prime
Z =  373  ---> X =  9678439321  is Prime
Z =  379  ---> X =  10316368441  is Prime
Z =  383  ---> X =  10758831361  is Prime
Z =  389  ---> X =  11449022521  is Prime
Z =  397  ---> X =  12420298441  is Prime
Z =  401  ---> X =  12928480801  is Prime
Z =  409  ---> X =  13991466481  is Prime
Z =  419  ---> X =  15410832361  is Prime
Z =  421  ---> X =  15707186041  is Prime
Z =  431  ---> X =  17253574561  is Prime
```

ภาพที่ 3.13 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 263 - 431

```
Z =  433  ---> X =  17576062561  is Prime
Z =  439  ---> X =  18570691921  is Prime
Z =  443  ---> X =  19256835001  is Prime
Z =  449  ---> X =  20321481601  is Prime
Z =  457  ---> X =  21808952401  is Prime
Z =  461  ---> X =  22582587721  is Prime
Z =  463  ---> X =  22977034081  is Prime
Z =  467  ---> X =  23781405961  is Prime
Z =  479  ---> X =  26321586241  is Prime
Z =  487  ---> X =  28124567281  is Prime
Z =  491  ---> X =  29060024281  is Prime
Z =  499  ---> X =  31000749001  is Prime
Z =  503  ---> X =  32006777041  is Prime
Z =  509  ---> X =  33561482281  is Prime
Z =  521  ---> X =  36840108241  is Prime
Z =  523  ---> X =  37409056921  is Prime
Z =  541  ---> X =  42831083881  is Prime
Z =  547  ---> X =  44763012841  is Prime
Z =  557  ---> X =  48127221001  is Prime
Z =  563  ---> X =  50234673481  is Prime
Z =  569  ---> X =  52410592561  is Prime
Z =  571  ---> X =  53151366841  is Prime
Z =  577  ---> X =  55420859521  is Prime
Z =  587  ---> X =  59363897881  is Prime
Z =  593  ---> X =  61828509601  is Prime
Z =  599  ---> X =  64369078801  is Prime
```

ภาพที่ 3.14 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 433 - 599

```
Z =  601 ---> X =  65233081201  is Prime
Z =  607 ---> X =  67877332801  is Prime
Z =  613 ---> X =  70601170681  is Prime
Z =  617 ---> X =  72462057361  is Prime
Z =  619 ---> X =  73406175961  is Prime
Z =  631 ---> X =  79266090961  is Prime
Z =  641 ---> X =  84411598081  is Prime
Z =  643 ---> X =  85470037801  is Prime
Z =  647 ---> X =  87616747441  is Prime
Z =  653 ---> X =  90912317641  is Prime
Z =  659 ---> X =  94299993481  is Prime
Z =  661 ---> X =  95449980121  is Prime
Z =  673 ---> X =  102572339521  is Prime
Z =  677 ---> X =  105032736121  is Prime
Z =  683 ---> X =  108805993561  is Prime
Z =  691 ---> X =  113994052681  is Prime
Z =  701 ---> X =  120737471401  is Prime
Z =  709 ---> X =  126344093881  is Prime
Z =  719 ---> X =  133624337761  is Prime
Z =  727 ---> X =  139671451921  is Prime
Z =  733 ---> X =  144339734761  is Prime
Z =  739 ---> X =  149124073321  is Prime
Z =  743 ---> X =  152379049201  is Prime
Z =  751 ---> X =  159048564001  is Prime
Z =  757 ---> X =  164192578201  is Prime
Z =  761 ---> X =  167690566321  is Prime
Z =  769 ---> X =  174853916161  is Prime
Z =  773 ---> X =  178520452921  is Prime
```

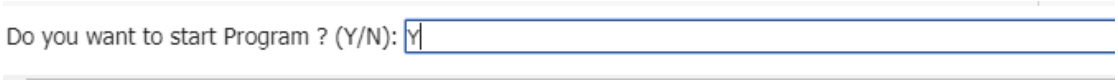
ภาพที่ 3.15 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 601 - 773

```
Z =  787 ---> X =  191808979081  is Prime
Z =  797 ---> X =  201745236841  is Prime
Z =  809 ---> X =  214172689681  is Prime
Z =  811 ---> X =  216298456921  is Prime
Z =  821 ---> X =  227165634841  is Prime
Z =  823 ---> X =  229387287121  is Prime
Z =  827 ---> X =  233879438521  is Prime
Z =  829 ---> X =  236150096041  is Prime
Z =  839 ---> X =  247752387121  is Prime
Z =  853 ---> X =  264707428441  is Prime
Z =  857 ---> X =  269707666801  is Prime
Z =  859 ---> X =  272234185081  is Prime
Z =  863 ---> X =  277340431681  is Prime
Z =  877 ---> X =  295779709321  is Prime
Z =  881 ---> X =  301212948961  is Prime
Z =  883 ---> X =  303957468361  is Prime
Z =  887 ---> X =  309502729681  is Prime
Z =  907 ---> X =  338375688601  is Prime
Z =  911 ---> X =  344384433121  is Prime
Z =  919 ---> X =  356641641361  is Prime
Z =  929 ---> X =  372419883841  is Prime
Z =  937 ---> X =  385414782481  is Prime
Z =  941 ---> X =  392038300681  is Prime
Z =  947 ---> X =  402133191241  is Prime
Z =  953 ---> X =  412421793841  is Prime
Z =  967 ---> X =  437195718961  is Prime
Z =  971 ---> X =  444474575641  is Prime
Z =  977 ---> X =  455562805921  is Prime
Z =  983 ---> X =  466857215761  is Prime
Z =  991 ---> X =  482241545281  is Prime
Z =  997 ---> X =  494026946041  is Prime
```

ภาพที่ 3.16 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะตั้งแต่ 787 - 997

3.2.2 หาผลเฉลยในกรณีที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะตัวเดียวกัน n ตัว

1 ถ้าต้องการเริ่มให้โปรแกรมทำงานเพื่อค้นหาผลเฉลย ให้พิมพ์ Y แต่ถ้าไม่ค้นหาผลเฉลยให้พิมพ์ N แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.17



ภาพที่ 3.17 การใช้งานส่วนเริ่มต้นโปรแกรม

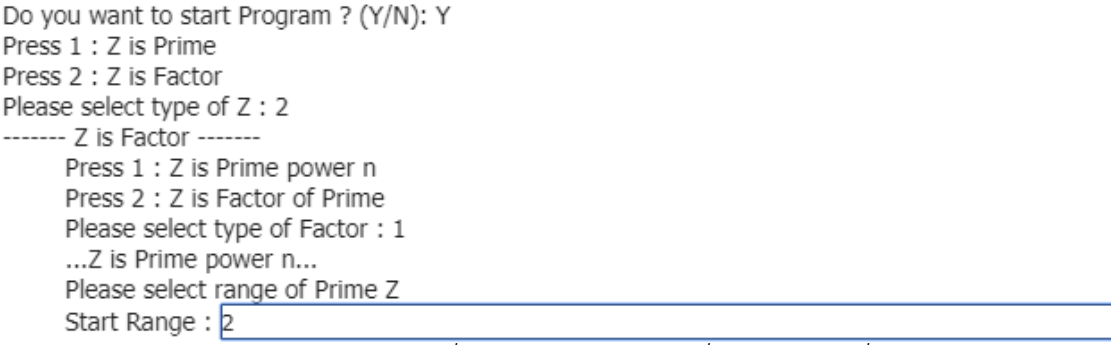
2. ถ้าต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบให้พิมพ์ 2 แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.18

ภาพที่ 3.18 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนประกอบ

3. ถ้าต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะตัวเดียวกัน n ตัว ให้พิมพ์ 1 แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.19

ภาพที่ 3.19 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะตัวเดียวกัน n ตัว

4. ต้องการเริ่มหาผลเฉลยจากจำนวนเต็มใด ให้พิมพ์จำนวนนั้น แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.20



ภาพที่ 3.20 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเริ่มต้น

5. ต้องการสิ้นสุดการหาผลเฉลยที่จำนวนใด ให้พิมพ์จำนวนนั้น แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.21

```
Do you want to start Program ? (Y/N): Y
Press 1 : Z is Prime
Press 2 : Z is Factor
Please select type of Z : 2
------- Z is Factor -------
        Press 1 : Z is Prime power n
        Press 2 : Z is Factor of Prime
        Please select type of Factor : 1
        ...Z is Prime power n...
        Please select range of Prime Z
        Start Range : 2
        End Range : 100
```

ภาพที่ 3.21 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนสิ้นสุด

6. ต้องการหาผลเฉลยในกรณีนี้เมื่อ n เท่ากับเท่าใด ให้พิมพ์จำนวน n ที่ต้องการ ดังภาพที่ 3.22

```
Do you want to start Program ? (Y/N): Y
Press 1 : Z is Prime
Press 2 : Z is Factor
Please select type of Z : 2
------- Z is Factor -------
        Press 1 : Z is Prime power n
        Press 2 : Z is Factor of Prime
        Please select type of Factor : 1
        ...Z is Prime power n...
        Please select range of Prime Z
        Start Range : 2
        End Range : 100
        Select number of Power : 2
```

ภาพที่ 3.22 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนยกกำลัง 2

3.2.7 จะได้ผลเฉลยตามต้องการ ดังภาพที่ 3.23

```
Z =  13  ---> X =  407865361  is Prime.
Z =  43  ---> X =  5844100138801  is Prime.
Z =  53  ---> X =  31129845205681  is Prime.
```

ภาพที่ 3.23 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะยกกำลัง 2 ตั้งแต่ 13 - 53

3.2.3 หาผลเฉลยในกรณีที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว

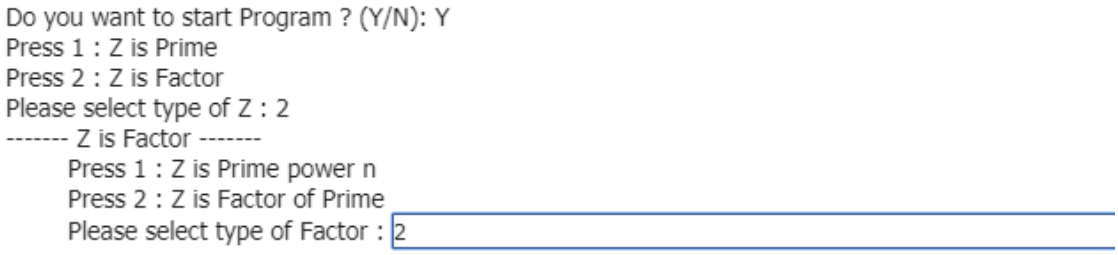
1. ถ้าต้องการเริ่มให้โปรแกรมทำงานเพื่อค้นหาผลเฉลย ให้พิมพ์ Y แต่ถ้าไม่ค้นหาผลเฉลยให้พิมพ์ N แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.24

ภาพที่ 3.24 การใช้งานส่วนเริ่มต้นโปรแกรม

2. ถ้าต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบ ให้พิมพ์ 2 แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.25

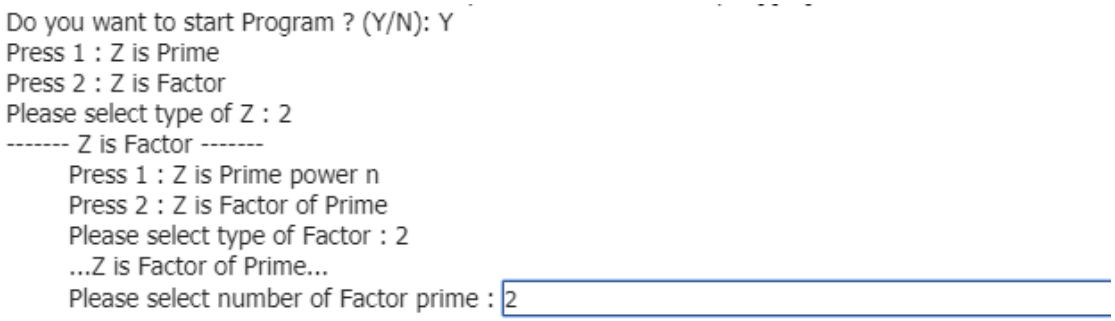
ภาพที่ 3.25 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นจำนวนประกอบ

3. ถ้าต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว ให้พิมพ์ 2 แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.26



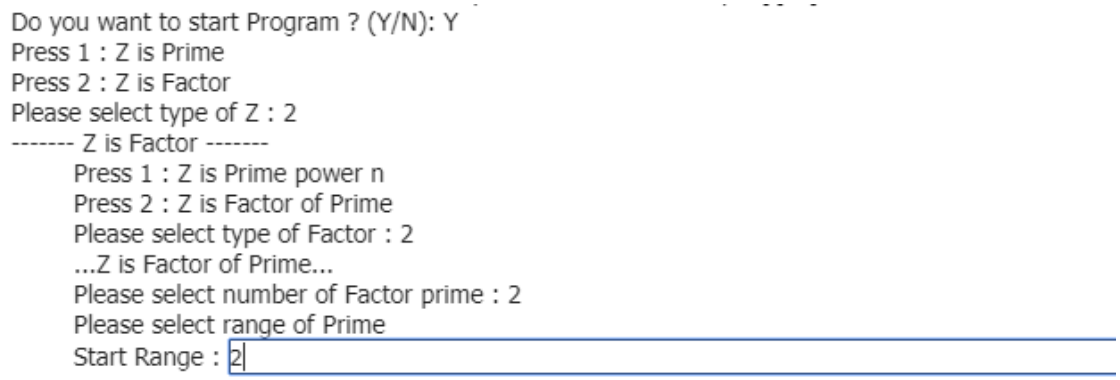
ภาพที่ 3.26 การใช้งานส่วนที่เลือก z เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัว

4. ถ้าต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด n ตัวให้พิมพ์จำนวนเต็ม n ที่ต้องการ แล้วกด Enter (ในตัวอย่างภาพต้องการค้นหาผลเฉลยโดยที่ z เป็นจำนวนประกอบที่เกิดจากจำนวนเฉพาะคูณกัน 2 ตัว) ดังภาพที่ 3.27



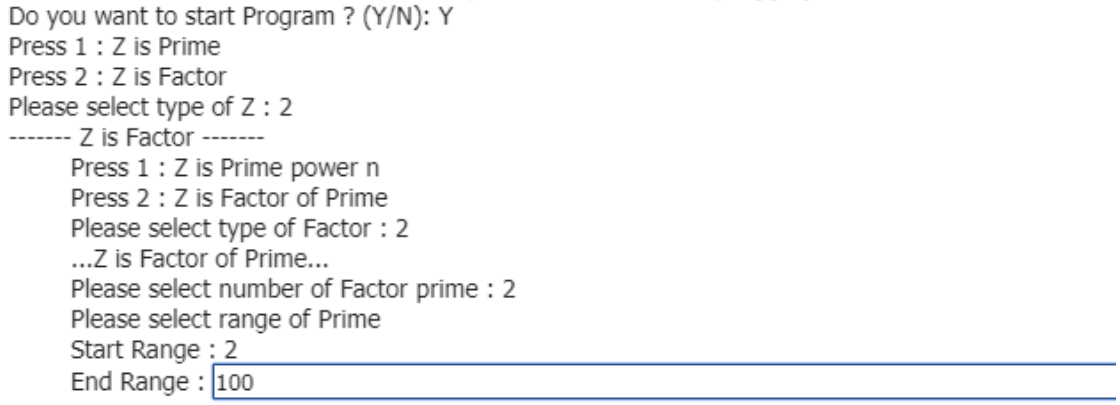
ภาพที่ 3.27 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเฉพาะคูณกัน 2 ตัว

5. ต้องการเริ่มหาผลเฉลยจากจำนวนเต็มใดให้พิมพ์จำนวนนั้น แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.28



ภาพที่ 3.28 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนเริ่มต้น

6. ต้องการสิ้นสุดการหาผลเฉลยที่จำนวนใดให้พิมพ์จำนวนนั้น แล้วกด Enter ดังภาพที่ 3.29



ภาพที่ 3.29 การใช้งานส่วนที่เลือกจำนวนสิ้นสุด

7.จะได้ผลเฉลยตามต้องการ ดังภาพที่ 3.30 – 3.32

```
Z =  [3] [5]  ---> X =  353  is Prime.
Z =  [5] [3]  ---> X =  353  is Prime.
Z =  [] [3, 7]  ---> X =  97241  is Prime.
Z =  [] [3, 13]  ---> X =  1156721  is Prime.
Z =  [3] [13]  ---> X =  14321  is Prime.
Z =  [13] [3]  ---> X =  14321  is Prime.
Z =  [3] [17]  ---> X =  41801  is Prime.
Z =  [17] [3]  ---> X =  41801  is Prime.
Z =  [] [3, 19]  ---> X =  5278001  is Prime.
Z =  [3] [29]  ---> X =  353681  is Prime.
Z =  [29] [3]  ---> X =  353681  is Prime.
Z =  [3] [31]  ---> X =  461801  is Prime.
Z =  [31] [3]  ---> X =  461801  is Prime.
Z =  [3] [37]  ---> X =  937121  is Prime.
Z =  [37] [3]  ---> X =  937121  is Prime.
Z =  [] [3, 43]  ---> X =  138461441  is Prime.
Z =  [3] [47]  ---> X =  2439881  is Prime.
Z =  [47] [3]  ---> X =  2439881  is Prime.
Z =  [] [3, 89]  ---> X =  2541060761  is Prime.
Z =  [] [5, 7]  ---> X =  750313  is Prime.
Z =  [] [5, 13]  ---> X =  8925313  is Prime.
Z =  [5] [13]  ---> X =  14593  is Prime.
Z =  [13] [5]  ---> X =  14593  is Prime.
Z =  [5] [17]  ---> X =  42073  is Prime.
Z =  [17] [5]  ---> X =  42073  is Prime.
```

ภาพที่ 3.30 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวคูณกัน (1)

```
Z =  [] [5, 23]  ---> X =  87450313  is Prime.
Z =  [5] [31]  ---> X =  462073  is Prime.
Z =  [31] [5]  ---> X =  462073  is Prime.
Z =  [] [5, 41]  ---> X =  883050313  is Prime.
Z =  [5] [43]  ---> X =  1709713  is Prime.
Z =  [43] [5]  ---> X =  1709713  is Prime.
Z =  [5] [47]  ---> X =  2440153  is Prime.
Z =  [47] [5]  ---> X =  2440153  is Prime.
Z =  [5] [59]  ---> X =  6058993  is Prime.
Z =  [59] [5]  ---> X =  6058993  is Prime.
Z =  [5] [71]  ---> X =  12706153  is Prime.
Z =  [71] [5]  ---> X =  12706153  is Prime.
Z =  [] [5, 83]  ---> X =  14830725313  is Prime.
Z =  [] [5, 89]  ---> X =  19606950313  is Prime.
Z =  [7] [11]  ---> X =  8521  is Prime.
Z =  [11] [7]  ---> X =  8521  is Prime.
Z =  [] [7, 17]  ---> X =  100266961  is Prime.
Z =  [7] [17]  ---> X =  42961  is Prime.
Z =  [17] [7]  ---> X =  42961  is Prime.
Z =  [7] [19]  ---> X =  66361  is Prime.
Z =  [19] [7]  ---> X =  66361  is Prime.
Z =  [7] [23]  ---> X =  141121  is Prime.
Z =  [23] [7]  ---> X =  141121  is Prime.
Z =  [] [7, 29]  ---> X =  849090841  is Prime.
Z =  [] [7, 37]  ---> X =  2249930281  is Prime.
Z =  [7] [41]  ---> X =  1414081  is Prime.
Z =  [41] [7]  ---> X =  1414081  is Prime.
```

ภาพที่ 3.31 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวคูณกัน (2)

```
Z =  [7] [43]  ---> X =  1710601  is Prime.
Z =  [43] [7]  ---> X =  1710601  is Prime.
Z =  [7] [47]  ---> X =  2441041  is Prime.
Z =  [47] [7]  ---> X =  2441041  is Prime.
Z =  [] [7, 89]  ---> X =  75322060321  is Prime.
Z =  [11] [13]  ---> X =  21601  is Prime.
Z =  [13] [11]  ---> X =  21601  is Prime.
Z =  [11] [17]  ---> X =  49081  is Prime.
Z =  [17] [11]  ---> X =  49081  is Prime.
Z =  [11] [19]  ---> X =  72481  is Prime.
Z =  [19] [11]  ---> X =  72481  is Prime.
Z =  [11] [41]  ---> X =  1420201  is Prime.
Z =  [41] [11]  ---> X =  1420201  is Prime.
Z =  [] [11, 47]  ---> X =  35721704761  is Prime.
Z =  [11] [47]  ---> X =  2447161  is Prime.
Z =  [47] [11]  ---> X =  2447161  is Prime.
Z =  [11] [53]  ---> X =  3952561  is Prime.
Z =  [53] [11]  ---> X =  3952561  is Prime.
Z =  [] [11, 59]  ---> X =  88705141201  is Prime.
Z =  [11] [61]  ---> X =  6930241  is Prime.
Z =  [61] [11]  ---> X =  6930241  is Prime.
```

ภาพที่ 3.32 ผลเฉลยของ z เป็นจำนวนเฉพาะ 2 ตัวคูณกัน (3)

บทที่ 4
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานฉบับนี้ได้พิจารณามีอยู่ของผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะและ y เป็นจำนวนประกอบ โดยพิจารณาจาก z แล้วเขียนโปรแกรมด้วยภาษาไพธอนเพื่อหาผลเฉลยเหล่านั้นในบางกรณี ดังต่อไปนี้

1. z เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งจะสามารถหาผลเฉลยที่ต้องการได้เพียงกรณีเดียวเท่านั่นคือ (x, y, z) = $((1 + z^4)/2, ((1 + z^4)/2) - 1 , z)$ เมื่อ $(1 + z^4)/2$ เป็นจำนวนเฉพาะ เท่านั้น โดยหาผลเฉลยในกรณีนี้ในช่วง $2 \le z \le 1{,}000$ ด้วยโปรแกรมภาษาไพธอน

2. z เป็นจำนวนประกอบในรูป $z = p^n$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $n \ge 2$ ซึ่งจะสามารถหาผลเฉลยได้กรณีเดียวเท่านั้น คือ ถ้ามีจำนวนนับ m ที่ $n = 2m$ แล้ว (x, y, z) = $((1 + p^{8m})/2, ((1 + p^{8m})/2) - 1, p^n)$ เมื่อ $(1 + p^{8m})/2$ เป็นจำนวนเฉพาะ เท่านั้น โดยหาผลเฉลยในกรณีนี้ เมื่อ $n = 2$ ในช่วง $2 \le z \le 60$ ด้วยโปรแกรมภาษาไพธอน

3. z เป็นจำนวนประกอบในรูป $z = p_1p_2p_3\cdots p_n$ เมื่อ $n \ge 2$ และ p_n แตกต่างกันทั้งหมด จะสามารถหาผลเฉลยได้กรณีเดียวเท่านั้น คือ

(x, y, z) = $\left(\left(p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{4-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n}\right)/2,\right.$
$\left.\sqrt{\left(p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{4-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n}\right)/2)^2 - (p_1p_2p_3\ldots p_n)^4}\right.$,
$p_1p_2p_3\cdots p_n\Big)$ *โดยที่* $\left(p_1^{t_1}p_2^{t_2}p_3^{t_3}\ldots p_n^{t_n} + p_1^{4-t_1}p_2^{4-t_2}p_3^{4-t_3}\ldots p_n^{4-t_n}\right)/2$ *เป็นจำนวนเฉพาะ และ $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ เท่ากับ 0 หรือ 4 เท่านั้น โดยหาผลเฉลยในกรณีนี้เมื่อ $n = 2$ ในช่วง $2 \le z \le 100$ ด้วยโปรแกรมภาษาไพธอน*

สำหรับผู้ที่สนใจอาจวิเคราะห์เพิ่มเติมในกรณีที่ z เป็นจำนวนประกอบในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ n ตัวคูณกัน และจำนวนเฉพาะบางตัวในบรรดา n ตัวนั้นซ้ำกัน หรืออาจวิเคราะห์ว่าจำนวนเฉพาะ p รูปแบบใด ที่จะทำให้ $(1 + p^4)/2$ หรือ $(1 + p^{8m})/2$ เป็นจำนวนเฉพาะ ในส่วนของโปรแกรมผู้ที่สนใจอาจพัฒนาการคำนวณแบบคู่ขนาน หรือพัฒนาขั้นตอนวิธีการตรวจสอบความเป็นจำนวนเฉพาะของจำนวนเต็ม เพื่อทำให้การหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์นี้ในกรณีที่สนใจได้รวดเร็วมากยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

[1] N. Burshtein.(2019). On Solutions of the Diophantine equation $A^2 - B^2 = Z^4$ when A, B, Z are Positive Integers. Annals of Pure and Applied Mathematics, p.121-125.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	*ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะและ y เป็นจำนวนประกอบ*
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	*Solutions of Diophantine equation $x^2 - y^2 = z^4$ where x is a prime number and y is a composite number*
อาจารย์ที่ปรึกษา	*อาจารย์ ดร.ทรรปณ์ ปณิธานะรักษ์* *รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ*
ผู้ดำเนินการ	*นายทรงกริช ดาพวรรณ เลขประจำตัวนิสิต 5933517923* *สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์* *คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*

หลักการและเหตุผล

ในปี ค.ศ. 2019 Burshtein [1] ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ในรูป $A^2 - B^2 = Z^4$ และได้ข้อสรุปว่า

(1) ถ้า A และ B เป็นจำนวนเฉพาะคี่ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว คือ (A, B, Z) = (5, 3, 2)

(2) ถ้า B เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4N + 3$ เมื่อ $N > 0$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวไม่มีผลเฉลย

(3) ถ้า B เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4N + 1$ และ N สอดคล้องเงื่อนไข (i) $N = L^2$ และ (ii) $2N + 1 = M^2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยเป็น $(A, B, Z) = (4L^2M^2 + 1, 4L^2 + 1, 2LM)$ และ

(4) ถ้า B เป็นจำนวนประกอบที่อยู่ในรูป $4N + 3$ โดยที่ $N = 3a$ $(a > 0)$ และ N สอดคล้องเงื่อนไข (i) $N + 1 = 3a + 1 = Q^2$ (ii) $2N + 1 = 6a + 1 = R^2$ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ดังกล่าวมีผลเฉลยเป็น $(A, B, Z) = (4(6a + 1)(3a + 1) + 1, 3(4a + 1), (4(6a + 1)(3a + 1))^{1/2})$

โดยในตอนท้ายของงานวิจัยนี้ ได้มีคำถามท้าทายว่า ถ้า A เป็นจำนวนเฉพาะ และ B เป็นจำนวนประกอบ แล้วสมการไดโอแฟนไทน์ $A^2 - B^2 = Z^4$ จะมีผลเฉลยหรือไม่ โครงงานนี้ จึงมุ่งศึกษาและหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบ โดยอาศัยความรู้ในการให้เหตุผลแบบนิรนัยร่วมกับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยคำนวณ

วัตถุประสงค์

ศึกษาและหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบ

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษาเฉพาะสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ และ y เป็นจำนวนประกอบเท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์

2. ศึกษาภาษา Python ในการเขียนชุดคำสั่งเพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

3. เขียนขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะและ y เป็นจำนวนประกอบ

4. สรุปผลและเขียนรายงาน

ขั้นตอนการดำเนินการ	เดือน / ปีการศึกษา 2562										
	มิ.ย	ก.ค	ส.ค	ก.ย	ต.ค	พ.ย	ธ.ค	ม.ค	ก.พ	มี.ค	เม.ย
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์											
2. ศึกษาภาษา Python และโปรแกรม Wolfram Mathematica ในการเขียนชุดคำสั่งเพื่อหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์											
3. เขียนขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $x^2 - y^2 = z^4$ เมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะและ y เป็นจำนวนประกอบ											
4. สรุปผลและเขียนรายงาน											

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับต่อผู้ดำเนินงาน

1. มีความรู้เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์

2. มีความรู้เกี่ยวกับภาษา Python

3. มีความรู้ในการเขียนบทพิสูจน์เกี่ยวกับทฤษฎีจำนวน

ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่พัฒนาขึ้น

1. เพื่อใช้เป็นความรู้ต่อยอดในงานวิจัยเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์ หรือต่อยอดไปหาผลเฉลยของสมการในรูปแบบเดียวกันได้

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

ฮาร์ดแวร์

1. *คอมพิวเตอร์*
2. *เครื่องพิมพ์*

ซอร์ฟแวร์

1. *โปรแกรมงานเอกสาร Microsoft World*
2. *โปรแกรมงานเอกสาร Microsoft Excel*
3. *โปรแกรม Adobe PDF*

เอกสารอ้างอิง

[1] N. Burshtein.(2019). On Solutions of the Diophantine equation $A^2 - B^2 = Z^4$ *when A, B, Z are Positive Integers. Annals of Pure and Applied Mathematics, p.121-125.*

โปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณ

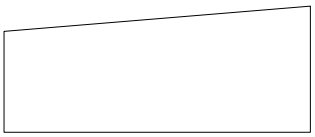
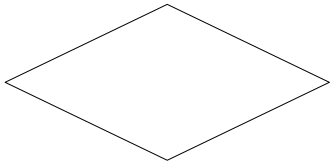
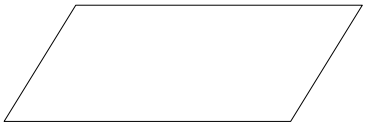
```
import numpy
from itertools import combinations

"""---------- help function ----------"""

# function equation
def function(front,back):
  f = 1
  for i in front:
    f *= i
  b = 1
  for j in back:
    b *= j
  answer = (f**4 + b**4)/2
  if answer.is_integer():
      return int(answer)
  else:
      return answer

# check prime
def isPrime(num):
  for i in range(2,num):
    if num%i == 0:
      return False
  return True

# generate check prime sentence
def isPrimeWord(num):
  if isPrime(num):
    return ' is Prime'
  else:
```

```
    return ' is not Prime'

# create prime list from range1 to range2
def createPrimeList(range1,range2):
    primeArr = numpy.zeros(range2+1)
    primeArr[0] = 1
    primeArr[1] = 1
    for i in range(2, range2+1):
        if primeArr[i] == 0:
            for j in range(i * 2, range2+1, i):
                primeArr[j] = 1
    prime = []
    for i in range(range1, range2+1):
        if primeArr[i] == 0:
            prime.append(i)
    return prime

"""---------- main program ----------"""

def startProgram():
  print('Press 1 : Z is Prime')
  print('Press 2 : Z is Factor')
  selectType = int(input('Please select type of Z : '))

  if selectType == 1:
    print('------- Z is Prime -------')
    print('Please select range of Prime Z')
    start,end = int(input('Start Range : ')),int(input('End Range : '))
    primeList = createPrimeList(start,end)
    print('Prime List in Range',primeList)
    for i in primeList:
      x = function([],[i])
      if type(x) == type(0.5):
```

```
      continue
    elif not isPrime(x):
      continue
    else: print('Z = ',i,' ---> X = ',x,' is Prime.')

elif selectType == 2:
  print('------- Z is Factor -------')
  print('\tPress 1 : Z is Prime power n')
  print('\tPress 2 : Z is Factor of Prime')
  typeFactor = int(input('\tPlease select type of Factor : '))

  if typeFactor == 1:
    print('\t...Z is Prime power n...')
    print('\tPlease select range of Prime Z')
    start,end = int(input('\tStart Range : ')),int(input('\tEnd Range : '))
    primeList = createPrimeList(start,end)
    powerN = int(input('\tSelect number of Power : '))
    print('\tPrime List in Range',primeList)
    if powerN % 2 != 0:
      print('\tCan not find value at power ',powerN)
    else:
      for i in primeList:
        x = function([],[i**powerN])
        if type(x) == type(0.5):
          continue
        elif not isPrime(x):
          continue
        else: print('\tZ = ',i,' power ',powerN,' ---> X = ',x,' is Prime.')

  elif typeFactor == 2:
    print('\t...Z is Factor of Prime...')
    numofFactor = int(input('\tPlease select number of Factor prime : '))
    print('\tPlease select range of Prime')
```

```
    start,end = int(input('\tStart Range : ')),int(input('\tEnd Range : '))
    primeList = createPrimeList(start,end)
    comb = list(combinations(primeList, numofFactor))
    print('\tPrime List in Range',primeList)
    for a in comb:
      for b in range(len(a)//2+1):
        c = list(combinations(a, b))
        for i in range(len(c)):
          temp = list(a)
          for j in range(len(c[i])):
            temp.remove(c[i][j])
          x = function(c[i],temp)
          if type(x) == type(0.5):
            continue
          elif not isPrime(x):
            continue
          else: print('\tZ = ',list(c[i]),temp,' ---> X = ',x,' is Prime.')


"""---------- program use ----------"""

start = input('Do you want to start Program ? (Y/N): ')
while start.upper() == 'Y':
  startProgram()
  print()
  start = input('Do you want to start Program ? (Y/N): ')
```

ความหมายของรูปเรขาคณิตในแผนผังต่างๆ

รูปเรขาคณิต	*ความหมาย*
	สัญลักษณ์การกระทำ แสดงการประมวลการทำงานของโปรแกรม
	*สัญลักษณ์การนำเข้าข้อมูลด้วยมือ แสดงการรับข้อมูลเข้าโดยมนุษย์ เช่น แป้นพิมพ์*
	*สัญลักษณ์การตัดสินใจ แสดงการตัดสินใจหรือการเปรียบเทียบ*
	*สัญลักษณ์การแสดงผล แสดงการรับเข้าหรือแสดงผลลัพธ์*
	สัญลักษณ์เอกสาร แสดงการแสดงผลลัพธ์ทางหน้าจอ
	สัญลักษณ์การเทอร์มินัล แสดงจุดเริ่มต้นและจุดจบการทำงาน
	สัญลักษณ์ลูกษร แสดงลำดับการทำงานของแผนผัง

ประวัติผู้เขียน

นายทรงกริช ดาพวรรณ

ID 5933517923

สาขา คณิตศาสตร์

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย