

ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2565
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Hypermap Grammar for Planar K-Tree Maps



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Computer Engineering

Department of Computer Engineering

FACULTY OF ENGINEERING

Chulalongkorn University

Academic Year 2022

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิง ระนาบ
โดย	นายวรวุฒิ โคเมฆรัตน์
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

.....	คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)	
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	
.....	ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.โชติรัตน์ รัตนามหัทธนะ)	
.....	อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(รองศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)	
.....	กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัครา ประโยชน์)	

CHULALONGKORN UNIVERSITY

วรวิทย์ โคเมฆารัตน์ : ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ. (Hypermap Grammar for Planar K-Tree Maps) อ.ที่ปรึกษาหลัก : รศ. ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

วิศวกรและนักวิทยาศาสตร์ต่างเผชิญกับปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อนมากยิ่งขึ้น และต้องการเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพื่ออธิบายปัญหาเหล่านี้ แม้กราฟจะเป็นเครื่องมือที่นิยมใช้แสดงระบบที่ซับซ้อน แต่ก็ยังขาดส่วนประกอบบางอย่างที่สำคัญต่อการรับรู้ความซับซ้อนของวัตถุทางเรขาคณิต ซึ่งสามารถแสดงแทนได้ด้วยแมพและไฮเพอร์แมพ เนื่องจากมีองค์ประกอบหลักที่เรียกว่า หน้า เพิ่มเติมจากส่วนประกอบพื้นฐานอื่น ๆ ในกราฟ จึงเป็นเครื่องมือที่ครอบคลุมและยืดหยุ่นยิ่งขึ้นในการแสดงและวิเคราะห์โครงสร้างเชิงเรขาคณิต งานวิจัยนี้จะเสนอแนวทางใหม่ในการผลิตแมพโดยใช้ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ โดยปรับการดำเนินการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับไฮเพอร์แมพให้นิยามบนจุดยอดและหน้า แทนวิธีการเดิมซึ่งนิยามบนจุดยอดและเส้นเชื่อม เพื่อให้มีความยืดหยุ่นในการควบคุมและจัดการเกี่ยวกับหน้าของไฮเพอร์แมพ เนื่องจากหน้ามีบทบาทสำคัญในการนิยามไฮเพอร์แมพ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของแมพเชิงระนาบ ไวยากรณ์ที่นำเสนอในงานนี้แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการทำความเข้าใจและตรวจนับโครงสร้างย่อยของไฮเพอร์แมพ โดยยกตัวอย่างการสร้างแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค (เมื่อเคเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกินสาม) โดยใช้ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่มีเพียงกฎการผลิตเดียว ผลการวิจัยแสดงให้เห็นถึงศักยภาพในการนำไวยากรณ์ที่นำเสนอในงานนี้ไปใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาคุณสมบัติและโครงสร้างของแมพเชิงระนาบ รวมถึงการนำไปประยุกต์ใช้ในสายงานต่าง ๆ เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ ทอพอโลยี และทฤษฎีกราฟ

สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2565

ลายมือชื่อนิสิต

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก

5970454021 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEYWORD: Hypermap Grammar, Planar Maps, Planar K-Trees

Worawut Komekarat : Hypermap Grammar for Planar K-Tree Maps. Advisor:
Assoc. Prof. ATHASIT SURARERKS, Ph.D.

Engineers and scientists are constantly dealing with increasingly complex models that require suitable mathematical frameworks to describe them. While graphs are commonly used to represent complex systems, maps and hypermaps are more general structures useful for representing and analyzing geometric objects, thanks to additional basic elements that graphs lack, such as faces. In this research, a novel method for constructing maps using hypermap grammar is proposed. Unlike traditional approaches that rely on vertices and edges to define submaps, this method utilizes vertices and faces to identify and manipulate structures with greater flexibility, since faces play a crucial role in defining maps, especially when they are planar. Our grammar is shown to be effective in both understanding and detecting the structure of the generated maps. By employing a single production rule, the new hypermap grammar generates planar k-tree maps (where $k = 1, 2, \text{ or } 3$). The findings suggest that the new hypermap grammar presented in this research has the potential to be a valuable tool for examining the properties and structure of planar maps, with potential applications in diverse fields such as computer science, topology, and graph theory.

Field of Study: Computer Engineering

Student's Signature

Academic Year: 2022

Advisor's Signature

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้แนะนำแนวทาง ให้คำปรึกษา และให้ความช่วยเหลือในการทำวิจัย อย่างถึงที่สุด จนทำให้วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จ ลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.โชติรัตน์ รัตนามัทธนะ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัครา ประโยชน์ ที่ได้สละเวลามาเป็นคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และได้กรุณาให้คำแนะนำต่าง ๆ เพื่อให้วิทยานิพนธ์นี้มีคุณภาพมากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่สนับสนุนทุนอุดหนุนการศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาสำหรับนิสิตเก่าวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และสุดท้ายขอกราบขอบพระคุณ คณาจารย์และเจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัว บรรดาเพื่อน รุ่นพี่ รุ่นน้อง และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ แพทย์หญิงกมลพร วรรณฤทธิ์ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ให้คำแนะนำ และให้กำลังใจตลอดระยะเวลาในการทำวิทยานิพนธ์นี้

วรวิมล โคมะขารัตน์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

สารบัญ

	หน้า
.....	ค
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ค
.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ง
กิตติกรรมประกาศ.....	จ
สารบัญ.....	ฉ
สารบัญภาพ	ช
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	3
1.3 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย	3
1.4 ขอบเขตของงาน	3
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย	4
1.6 ผลงานวิจัยที่ได้รับการเผยแพร่	4
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 พื้นฐานคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง	5
2.2 การเรียงสับเปลี่ยน	8
2.3 ไฮเพอร์แมพและแมพ	13
2.4 กราฟและคุณสมบัติเชิงระนาบ	17
2.5 กราฟเชิงต้นไม้อันดับเค	19
บทที่ 3 ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพและแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ	22

3.1	ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ	22
3.2	แมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ	27
3.3	ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ	31
บทที่ 4	สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	41
4.1	การเปรียบเทียบไวยากรณ์ที่นำเสนอ	41
4.2	ข้อเสนอแนะและแนวทางต่อยอด	43
	บรรณานุกรม.....	44
	ประวัติผู้เขียน.....	46



สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่ 1 การแสดงการเรียงสับเปลี่ยนในรูปของวัฏจักร.....	9
ภาพที่ 2 ตัวอย่างการเรียงสับเปลี่ยนย่อย	11
ภาพที่ 3 ตัวอย่างการแสดงไฮเพอร์แมพบนระนาบ.....	14
ภาพที่ 4 ตัวอย่างไฮเพอร์แมพที่สมสัณฐานกัน.....	15
ภาพที่ 5 ตัวอย่างไฮเพอร์แมพย่อยที่มีสามดาร์ทมาจากหน้าเดียวกันแต่คนละจุดยอด	16
ภาพที่ 6 ตัวอย่างกฎการผลิตและการแปลงด้วยกฎการผลิต	23
ภาพที่ 7 ตัวอย่างไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพสำหรับภาษาแมพวัฏจักร.....	25
ภาพที่ 8 การใส่จุดยอดเพิ่มในแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ.....	29
ภาพที่ 9 กฎการผลิตสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ	34
ภาพที่ 10 การแปลงด้วยกฎการผลิตสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบ	37
ภาพที่ 11 ตัวอย่างกฎการผลิตในการหมุนไฮเพอร์แมพย่อย.....	42

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ทุกวันนี้วิศวกรและนักวิทยาศาสตร์ต่างเผชิญกับปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อนมากยิ่งขึ้น และต้องการเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพื่ออธิบายและวิเคราะห์ปัญหาเหล่านี้อย่างแม่นยำ การแสดงระบบที่ซับซ้อนโดยใช้กราฟนั้นเป็นที่พึงประสงค์ในหลายสาขา เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ การวิเคราะห์เครือข่าย และสังคมศาสตร์ เป็นต้น บางกรณีอาจใช้เครื่องมือที่ซับซ้อนขึ้นอย่าง ไฮเพอร์กราฟ ซึ่งจะขยายนิยามเดิมของเส้นเชื่อมในกราฟเพื่อให้สามารถแสดงการเชื่อมโยงของจุดยอดมากกว่าสองจุดพร้อมกันได้ อย่างไรก็ตาม กราฟและไฮเพอร์กราฟยังขาดส่วนประกอบบางอย่างซึ่งสำคัญต่อการรับรู้ความซับซ้อนของวัตถุทางเรขาคณิต ทางเลือกหนึ่งคือการใช้ แมพและไฮเพอร์แมพ อันเป็นเครื่องมือที่ครอบคลุมและยืดหยุ่นยิ่งขึ้นในการแสดงและวิเคราะห์โครงสร้างเชิงเรขาคณิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อต้องการพิจารณาคุณสมบัติเกี่ยวกับพื้นผิวที่ใช้บรรยายโครงสร้างนั้น โดยแมพและไฮเพอร์แมพจะมีองค์ประกอบที่เรียกว่า หน้า เป็นส่วนประกอบหลักเพิ่มเติมจากจุดยอดและเส้นเชื่อมซึ่งเป็นส่วนประกอบที่มีอยู่เดิมในกราฟและไฮเพอร์กราฟ

ในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงการสร้างแมพเชิงระนาบโดยใช้ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ โดยไวยากรณ์เป็นวิธีการหนึ่งเพื่ออธิบายรูปแบบของชุดข้อมูล โดยการสกัดคุณลักษณะร่วมบางอย่างออกมาเป็นกฎเกณฑ์ที่จะใช้อธิบายข้อมูล โดยมองว่าสามารถแต่งเติมข้อมูลที่มีขนาดเล็กผ่านกฎเกณฑ์เหล่านั้นจนได้เป็นข้อมูลที่มีขนาดใหญ่ขึ้นและมีโครงสร้างซับซ้อนยิ่งขึ้น โดยทั่วไปนั้น ไวยากรณ์เกี่ยวกับกราฟและไฮเพอร์กราฟจะมีลักษณะของกฎการผลิตอยู่สองแบบหลัก ๆ คือ ไวยากรณ์กราฟโดยการแทนที่จุดยอด และไวยากรณ์กราฟโดยการแทนที่เส้นเชื่อม ซึ่งตัวแปรของไวยากรณ์จะถูกกำกับไว้กับจุดยอดและเส้นเชื่อม ตามลำดับ อย่างไรก็ตามด้วยความซับซ้อนของโครงสร้างกราฟ ทำให้การแจกกราฟด้วยไวยากรณ์ กลายเป็นปัญหาเอ็นพีสมบูรณ์ (NP-Complete) [1] เนื่องจากต้องอาศัย การค้นหากราฟย่อย และตรวจสอบความสัมพันธ์พื้นฐานของกราฟ ซึ่งล้วนเป็นปัญหายาก

ไฮเกรา (Higuera) และคณะ [2] ได้ออกแบบระบบกราฟบนระนาบ โดยนำเสนอหน้าของกราฟในลักษณะของสายอักขระวน และแสดงให้เห็นว่าปัญหาที่เคยเป็นปัญหายากในกรณีของกราฟทั่วไป เช่น ความสัมพันธ์ของกราฟ นั้นสามารถแก้ได้ในขอบเขตเวลาพหุนามสำหรับกราฟบนระนาบ ดังนั้นกราฟบนระนาบจึงเป็นคลาสของกราฟที่น่าสนใจ เนื่องจากสามารถลดความซับซ้อนของโครงสร้างกราฟโดยทั่วไป เอรอดต์ (Eyraud) และคณะ [3] ได้เสนอไวยากรณ์สำหรับกราฟบนระนาบ โดยมีเป้าหมายเพื่อให้นำไปใช้กับอัลกอริทึมการอนุมานไวยากรณ์ซึ่งนำเสนอไว้ในงานนั้น

เช่นกัน โดยไวยากรณ์ในงานของ เฮอร์ด เป็นไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท มีลักษณะเหมือนเป็นไวยากรณ์กราฟโดยการแทนที่หน้า กล่าวคือแต่ละหน้าของกราฟจะถูกกำกับด้วยตัวแปรหนึ่งตัวที่มีค่าอันดับตรงกับขนาดของหน้านั้น ซึ่งหน้าแต่ละหน้าจะมีลักษณะเป็นวัฏจักรของจุดยอดที่ไม่ใช้จุดยอดซ้ำ ดังนั้นกราฟบนระนาบที่ผลิตได้จากไวยากรณ์นี้จะไม่สามารถมีจุดยอดตัดได้ โซพินา (Sopena) [4] ได้เสนอไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ และคลาสย่อยของไวยากรณ์ที่มีคุณสมบัติไม่พึ่งบริบท อย่างไรก็ตามไวยากรณ์ของ โซพินา มีการนิยามไฮเพอร์แมพย่อยโดยอิงจากจุดยอดและเส้นเชื่อม และใช้การดำเนินการบนไฮเพอร์แมพโดยอิงจากจุดยอดและเส้นเชื่อมเช่นกัน หนึ่งในข้อจำกัดของการนิยามด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมคือไม่ได้ใช้ประโยชน์จากหน้าของไฮเพอร์แมพในการระบุโครงสร้างย่อยของไฮเพอร์แมพ ซึ่งจะยิ่งส่งผลชัดเมื่อใช้ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพในการสร้างแมพเชิงระนาบ เนื่องจากเส้นเชื่อมของแมพมีลักษณะตายตัวคือมีจุดปลายสองจุดเสมอ ซึ่งเป็นการจำกัดความเป็นไปได้ของรูปแบบย่อยของเส้นเชื่อม

แมพและไฮเพอร์แมพ เป็นวิธีการแสดงเชิงการจัด (Combinatorial Representation) ของกราฟและไฮเพอร์กราฟบนพื้นผิว โดยใช้การเรียงสับเปลี่ยนเป็นเครื่องมือพื้นฐานในการบรรยายการจัดเรียงองค์ประกอบต่าง ๆ อันได้แก่ จุดยอด เส้นเชื่อม และหน้า งานวิจัยนี้จะนำเสนอไฮเพอร์แมพโดยอิงจากจุดยอดและหน้าเป็นหลัก และอ้างอิงนิยามและวิธีเขียนบางส่วนจากงานของ เซปส์ (Zeps) [5] ซึ่งรวมไปถึงวิธีการนิยามแมพย่อยและไฮเพอร์แมพย่อยโดยใช้จุดยอดและหน้า นอกจากนี้ยังได้นิยามการดำเนินการคูณของไฮเพอร์แมพขึ้นมาใหม่โดยใช้จุดยอดและหน้า เพื่อแทนที่นิยามเดิมในงานของ โซพินา ซึ่งนิยามการคูณของไฮเพอร์แมพจากจุดยอดและเส้นเชื่อม จากนั้นงานวิจัยนี้จะเสนอไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่มีโครงสร้างในภาพรวมอ้างอิงจากงานของ โซพินา แต่มีการปรับเปลี่ยนรายละเอียดการดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับไฮเพอร์แมพตามที่ได้กล่าวข้างต้น โดยคาดหวังว่าจะได้ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่มีความยืดหยุ่นมากขึ้นในการระบุโครงสร้างย่อยของไฮเพอร์แมพ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของแมพเชิงระนาบ

ในงานนี้จะนำเสนอตัวอย่างการใช้ไวยากรณ์สำหรับการผลิตคลาสย่อยของแมพเชิงระนาบ ได้แก่ แมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค ซึ่งเป็นกราฟที่มีความน่าสนใจในเชิงโครงสร้างและคุณสมบัติ พร้อมด้วยบทพิสูจน์ถึงความถูกต้องและครบถ้วนของไวยากรณ์ที่นำเสนอ โดยจะอภิปรายถึงข้อดีและข้อจำกัดของไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพรูปแบบใหม่นี้ และเสนอแนะแนวทางในการต่อยอดจากงานวิจัยนี้ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์

1) เพื่อนำเสนอวิธีการใหม่ในการสร้างแมพเชิงระนาบจากไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ โดยพุ่งเป้าไปที่การปรับนิยามที่มีอยู่เดิม โดยเปลี่ยนจากการนิยามบนองค์ประกอบอย่างจุดยอดและเส้นเชื่อม เป็นการนิยามบนองค์ประกอบอย่างจุดยอดและหน้า เพื่อให้สามารถจัดการและวิเคราะห์แมพเชิงระนาบได้ยืดหยุ่นและแม่นยำมากขึ้น

2) เพื่อแสดงถึงความสามารถในการบรรยายแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ (เมื่อเคเป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าไม่เกินสาม) ด้วยไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพใหม่ที่น่าสนใจ

1.3 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง อันได้แก่ การเรียงสับเปลี่ยน ไฮเพอร์แมพ ไวยากรณ์สำหรับไฮเพอร์แมพ กราฟและสมบัติเชิงระนาบ กราฟเชิงต้นไม้อันดับเค เป็นต้น

2) ออกแบบวิธีการปรับนิยามเดิมของไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ โดยเสนอนิยามใหม่สำหรับการคูณไฮเพอร์แมพ และเลือกวิธีนิยามของไฮเพอร์แมพย่อย โดยให้นิยามจากหน้าแทนเส้นเชื่อม

3) จากนิยามไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่ปรับปรุงแล้ว ออกแบบไวยากรณ์สำหรับสร้างคลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ โดยอิงจากนิยามเวียนเกิดของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค

4) พิสูจน์ความถูกต้องและครบถ้วนของไวยากรณ์ที่น่าสนใจในขั้นตอนก่อนหน้า

5) สรุปผลการวิจัย ข้อดี และข้อจำกัดของไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่น่าสนใจ รวมถึงเสนอแนะแนวทางการนำงานวิจัยนี้ไปต่อยอด

1.4 ขอบเขตของงาน

1) ไฮเพอร์แมพที่พิจารณาในงานวิจัยนี้จะเป็นไฮเพอร์แมพแบบไม่ระบุชื่อ กล่าวคือไม่มีการระบุสัญลักษณ์หรืออักขระกำกับให้แต่ละดาร์ทในไฮเพอร์แมพ ซึ่งจะเทียบเท่ากับไฮเพอร์แมพแบบระบุชื่อบนชุดอักขระที่ประกอบด้วยอักขระเดียว

2) ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่น่าสนใจในงานวิจัยนี้ จะแปลงไฮเพอร์แมพโดยอิงจากโครงสร้างการเรียงสับเปลี่ยนของดาร์ทภายในไฮเพอร์แมพเท่านั้น โดยจะไม่มีกระบวนการระบุตัวแปรกำกับในแต่ละดาร์ท

3) ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพที่น่าสนใจในงานวิจัยนี้ จะไม่รองรับการลบดาร์ทด้วยกฎการผลิต ดังนั้นไฮเพอร์แมพที่ถูกแปลงด้วยกฎการผลิต จะมีจำนวนดาร์ทเพิ่มขึ้นหรือเท่าเดิมเสมอ

4) งานวิจัยนี้จะนำเสนอตัวอย่างไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ สำหรับคลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบเท่านั้น พร้อมด้วยบทพิสูจน์

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากงานวิจัย

1) งานวิจัยนี้เสนอวิธีการสร้างแมพจากไวยากรณ์ โดยปรับปรุงจากนิยามและแนวคิดที่มีอยู่เดิม ซึ่งเป็นการนำเสนอมุมมองและวิธีการใหม่ในการแสดงและวิเคราะห์โครงสร้างเชิงเรขาคณิตที่ซับซ้อน นับเป็นการขยายกรอบเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ ให้แก่ วิศวกร นักวิทยาศาสตร์ และนักวิจัยที่ทำงานกับแบบจำลองที่มีความซับซ้อน

2) โครงสร้างไวยากรณ์ใหม่ที่นำเสนอ จะช่วยเพิ่มความเข้าใจและความสามารถในการพิจารณา และจัดการวัตถุทางเรขาคณิตที่แสดงด้วยไฮเปอร์แมพ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของแมพเชิงระนาบ เนื่องจากการเน้นความสำคัญขององค์ประกอบที่เรียกว่า หน้า จึงทำให้สามารถวิเคราะห์และจัดการแมพเชิงระนาบได้แม่นยำและยืดหยุ่นมากขึ้น

3) ความเข้าใจและความสามารถในการจัดการไฮเปอร์แมพที่มากขึ้น จะช่วยเพิ่มศักยภาพในการนำไปประยุกต์ใช้ในสายความรู้ต่าง ๆ เช่น ในด้านของวิทยาการคอมพิวเตอร์ ไวยากรณ์ที่นำเสนอใหม่นี้อาจช่วยในการออกแบบและวิเคราะห์อัลกอริทึมในการประมวลผลข้อมูลเชิงพื้นที่ หรือในด้านของทฤษฎีกราฟและทอพอโลยี ผลวิจัยที่ได้จะช่วยส่งเสริมและต่อยอดการศึกษาเกี่ยวกับกราฟเชิงระนาบและคุณสมบัติของมัน

1.6 ผลงานวิจัยที่ได้รับการเผยแพร่

บทความชื่อ “Hypermap Grammar for Planar K-Tree Maps” ตีพิมพ์และนำเสนอในการประชุมวิชาการระดับนานาชาติ ชื่อ “The 26th International Annual Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE26)” ซึ่งจัดขึ้น ณ จังหวัดชลบุรี พัทยา ระหว่างวันที่ 20-22 กรกฎาคม 2566

Komekarat, W. and A. Surarerks (2023). Hypermap Grammar for Planar K-Tree Maps. The 26th International Annual Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE26).

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 พื้นฐานคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

เนื่องจากพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญอันเป็นรากฐานของงานวิจัยนี้เกี่ยวข้องกับโดยตรงกับ ฟังก์ชันและการประกอบฟังก์ชัน อนึ่งทางผู้วิจัยคาดหวังว่าผู้ที่อ่านงานวิจัยนี้จะมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับคำสำคัญต่อไปนี้ ฟังก์ชัน (Function), โดเมน (Domain), โดเมนร่วมเกี่ยว (Codomain), เรนจ์ (Range), ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (Injection), ฟังก์ชันทั่วถึง (Surjection), ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijection), ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function), การประกอบฟังก์ชัน (Composition of Functions) เป็นต้น จากนั้นจะนำเสนอนิยามและสัญลักษณ์เพิ่มเติมอื่น ๆ ที่ควรรู้เกี่ยวกับฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.1.1 (ภาพของเซต; Images)

กำหนดฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ และกำหนดเซตย่อย $S \subseteq A$ จะได้ว่า ภาพ (Images) ของเซต S ภายใต้ฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $f[S]$ โดยมีนิยามว่า $f[S] = \{f(x) \in B \mid x \in S\}$ และจะได้ว่า เรนจ์ (Range) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $f[A]$

บทนิยาม 2.1.2 (ฟังก์ชันจำกัด; Restriction Function)

กำหนดฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ และกำหนดเซตย่อย $S \subseteq A$ และ $f[A] \subseteq T \subseteq B$ จะได้ว่า ฟังก์ชันจำกัด (Restriction Function) ของ f สู่เซตย่อย $S \times T$ เขียนแทนด้วย $f|_{S \times T}$ คือฟังก์ชัน $f|_{S \times T} : S \rightarrow T$ นิยามว่า $f|_{S \times T} = f \cap (S \times T)$ และจะเขียนแทนเพียง $f|_S$ หากโดเมนร่วมเกี่ยวไม่ถูกจำกัด นั่นคือ $T = B$

เพื่อคลายความสับสนและข้อสงสัยสำหรับผู้อ่าน คำว่า *จำกัด* เป็นศัพท์บัญญัติของคำว่า *Restriction* มีความหมายว่า จำกัดให้แคบเข้า โดยอ้างอิงจากสำนักราชบัณฑิตยสภา

สำหรับฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f : A \rightarrow B$ จะได้ว่าฟังก์ชันจำกัดของ f จะยังคงมีคุณสมบัติหนึ่งต่อหนึ่งเสมอ และหากโดเมนร่วมเกี่ยวถูกจำกัดสู่เรนจ์ ฟังก์ชันจำกัดของ f ที่ได้ก็จะมีคุณสมบัติทั่วถึงด้วย ดังนั้นฟังก์ชันจำกัด $f|_{S \times f[S]}$ เมื่อ $S \subseteq A$ จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงเสมอ เพื่อความสะดวกในการเขียนงานวิจัยต่อจากนี้ เมื่อใดก็ตามที่ต้องการใช้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f ภายใต้บริบทของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จะถือว่า f ถูกแปลงโดยนัยเป็นฟังก์ชันจำกัด $f|_{A \times f[A]}$ เช่น ฟังก์ชันผกผันของ f จะหมายถึงฟังก์ชันผกผันของ $f|_{A \times f[A]}$ กล่าวคือ $f^{-1} = (f|_{A \times f[A]})^{-1}$ เป็น

ต้น และหากภายใต้บริบทนั้นจำเป็นต้องจำกัดโดเมนจากเซต A เหลือเพียงเซตย่อย S จะถือว่า f ถูกแปลงโดยนัยเป็นฟังก์ชันจำกัด $f|_{S \times f[S]}$

การประกอบฟังก์ชันเป็นอีกหนึ่งส่วนประกอบสำคัญที่จะต้องใช้อย่างระมัดระวังในการดำเนินการของโครงสร้างอื่น ๆ ที่ใหญ่ขึ้นอย่างเช่น การคูณของการเรียงสับเปลี่ยน และ การคูณของไฮเพอร์แมทซ์ ในงานนี้จะใช้วิธีการเขียนแบบใหม่เพื่อสลับลำดับการดำเนินการ จากเดิมที่เป็นการประกอบฟังก์ชันจากขวาไปซ้าย โดยจะเปลี่ยนเป็นการคูณฟังก์ชันจากซ้ายไปขวา โดยนิยามใหม่นี้มิได้ส่งผลใดต่องานวิจัยหลัก แต่เป็นเพียงการกำหนดวิธีเขียนใหม่ เพียงเพื่อให้สะดวกในการเขียนงานวิจัยนี้เท่านั้น

บทนิยาม 2.1.3 (การคูณจากซ้ายไปขวา; Left-to-Right Multiplication of Functions)

กำหนดสองฟังก์ชัน f และ g ที่สามารถประกอบกันได้ การประกอบฟังก์ชัน $g \circ f$ ซึ่งดำเนินการจากขวาไปซ้าย จะถูกเขียนแทนด้วย การคูณฟังก์ชัน $f \cdot g$ หรือ fg ซึ่งดำเนินการจากซ้ายไปขวา

วิธีการเขียนแบบการคูณจากซ้ายไปขวานี้ เป็นที่นิยมในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียงสับเปลี่ยนซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญที่จะกล่าวถึงในบทย่อยถัดไป นอกจากนี้จะมีการใช้สัญกรณ์ยกกำลังเพื่อให้สอดคล้องกับวิธีการเขียนจากซ้ายไปขวา เช่น จะเขียนแทน $f(x)$ ด้วยสัญกรณ์ยกกำลัง x^f เมื่อ x เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน f ดังนั้น $(g \circ f)(x)$ จะเขียนแทนด้วย $x^{fg} = (x^f)^g$ ซึ่งเป็นการดำเนินการจากซ้ายไปขวาตามที่ได้นิยามไว้ นอกจากนี้สำหรับฟังก์ชัน $f : A \rightarrow A$ จะกำหนดให้ f^n เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ หมายถึงการคูณฟังก์ชัน f กับตัวเอง n ครั้ง กล่าวแบบเวียนเกิดได้ว่า f^0 คือฟังก์ชันเอกลักษณ์ และ $f^n = f \cdot f^{n-1}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}^+$ และสำหรับฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $g : A \rightarrow B$ จะกำหนดให้การยกกำลัง f^g หมายถึงฟังก์ชัน $f^g : B \rightarrow B$ นิยามว่า $f^g = g^{-1}fg$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ลอกเลียนการส่งสมาชิกของ f บนเซต A โดยเปลี่ยนโดเมนเป็นเซต B และอาศัยฟังก์ชัน g ในการจับคู่ส่งสมาชิกระหว่าง A กับ B

ตัวอย่าง 2.1.4 วิธีการเขียนเกี่ยวกับฟังก์ชัน

กำหนดเซต $S = \{1, 2, 3, 4\}$ และกำหนดฟังก์ชัน $f : S \rightarrow S$ ที่มีรายละเอียดการส่งสมาชิกคือ $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบอื่น ๆ ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} 1 \mapsto_f 3 & 1^f = 3 \\ 2 \mapsto_f 4 & 2^f = 4 \\ 3 \mapsto_f 3 & 3^f = 3 \\ 4 \mapsto_f 1 & 4^f = 1 \end{array} \quad \text{หรือ}$$

และจะได้ว่า f^2 เป็นฟังก์ชันจาก S ไป S ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll} 1 \mapsto_f 3 \mapsto_f 3 & 1^{f^2} = (1^f)^f = 3^f = 3 \\ 2 \mapsto_f 4 \mapsto_f 1 & 2^{f^2} = (2^f)^f = 4^f = 1 \\ 3 \mapsto_f 3 \mapsto_f 3 & 3^{f^2} = (3^f)^f = 3^f = 3 \\ 4 \mapsto_f 1 \mapsto_f 3 & 4^{f^2} = (4^f)^f = 1^f = 3 \end{array} \quad \text{หรือ}$$

จากนั้นกำหนดเซต $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และเซต $B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$ และกำหนดฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $g : A \rightarrow B$ โดยที่

$$1^g = a \quad 2^g = b \quad 3^g = c \quad 4^g = d \quad 5^g = e$$

เนื่องจาก $S \subset A$ หากกำหนดให้ T เป็นภาพของ S ภายใต้ g จะได้ว่า

$$T = g[S] = \{1^g, 2^g, 3^g, 4^g\} = \{a, b, c, d\}$$

หากให้ $\hat{g} = g|_{S \times T}$ จะได้ว่า \hat{g} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก S ไป T ดังนี้

$$1^{\hat{g}} = a \quad 2^{\hat{g}} = b \quad 3^{\hat{g}} = c \quad 4^{\hat{g}} = d$$

และหากกำหนดฟังก์ชัน $h = f^g$ จะพบว่าโดยนิยามต้องการให้ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งทั่วถึงที่มีโดเมนเป็น S ดังนั้นจะใช้ฟังก์ชันจำกัด $\hat{g} = g|_{S \times T}$ แทน g โดยปริยาย กล่าวคือ $h = f^g = \hat{g}^{-1} f \hat{g}$ ซึ่งจะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันจาก T ไป T โดยคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{array}{ll} a^h = a^{\hat{g}^{-1} f \hat{g}} = 1^{\hat{g}} = 3^{\hat{g}} = c & a^h = c \\ b^h = b^{\hat{g}^{-1} f \hat{g}} = 2^{\hat{g}} = 4^{\hat{g}} = d & b^h = d \\ c^h = c^{\hat{g}^{-1} f \hat{g}} = 3^{\hat{g}} = 3^{\hat{g}} = c & c^h = c \\ d^h = d^{\hat{g}^{-1} f \hat{g}} = 4^{\hat{g}} = 1^{\hat{g}} = a & d^h = a \end{array} \quad \text{นั่นคือ}$$

จากการจับคู่สมาชิกระหว่าง S และ T ด้วยฟังก์ชัน g จะสังเกตได้ว่า f มีรูปแบบการส่งสมาชิกบนเซต S เหมือนกันกับรูปแบบการส่งสมาชิกของ h บนเซต T

ต่อจากนี้จะกล่าวถึงเซตของจำนวนเต็มเป็นหลัก กำหนดให้ \mathbb{Z} แทน เซตของจำนวนเต็มทั้งหมด ให้ \mathbb{Z}^+ แทน เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และให้ \mathbb{N} แทน เซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบทั้งหมด กล่าวคือ $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ และเพื่อความสะดวก จะเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดตั้งแต่ a ไปจนถึง b ด้วยสัญลักษณ์ $[a..b]$ กล่าวคือ $[a..b] = \{i \in \mathbb{Z} \mid a \leq i \leq b\}$ ซึ่งจะเป็นเซตว่างหาก a มีค่ามากกว่า b

2.2 การเรียงสับเปลี่ยน

การเรียงสับเปลี่ยนมีบทบาทสำคัญในการเป็นหน่วยย่อยพื้นฐานในการแสดงแทนโครงสร้างเชิงการจัด (Combinatorial Structures) ในบทอยู่นี้จะกล่าวถึงนิยามโดยทั่วไปเกี่ยวกับการเรียงสับเปลี่ยน รวมไปถึงวิธีการเขียนบรรยายการเรียงสับเปลี่ยนที่จะใช้ตลอดงานวิจัยนี้

บทนิยาม 2.2.1 (การเรียงสับเปลี่ยน; Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) σ บนเซตจำกัด S ที่ไม่ใช่เซตว่าง หมายถึงฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\sigma : S \rightarrow S$ และเขียนแทนโดเมนเซต S ด้วย $\text{dom}(\sigma)$

ในงานวิจัยนี้ จะบรรยายการเรียงสับเปลี่ยนในรูปของ วัฏจักร (Cycle) เพื่อให้มีความกระชับและเข้าใจโครงสร้างการส่งสมาชิกภายใต้การเรียงสับเปลี่ยนได้ง่าย ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.2 (สัญกรณ์วัฏจักร; Cycle Notation)

สัญกรณ์วัฏจักร (Cycle Notation) คือรูปแบบของการเขียนบรรยายการเรียงสับเปลี่ยนอย่างหนึ่ง โดยเขียนในรูปผลคูณของวัฏจักรซึ่งไร้สมาชิกร่วม (Product of Disjoint Cycles) สัญกรณ์วัฏจักรสำหรับการเรียงสับเปลี่ยน σ จะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

- แต่ละวัฏจักร c จะอยู่ในรูปแบบ $(s_0 s_1 \dots s_{m-1})$ โดยที่ $s_i = s_{i-1}^\sigma \in \text{dom}(\sigma)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $i \in [1..m]$ เมื่อ m คือจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $s_m = s_0$ เรียกว่า ความยาวของวัฏจักร (Length of Cycle) เขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย $|c| = m$
- สัญกรณ์วัฏจักรของ σ จะอยู่ในรูป $\sigma = c_1 c_2 \dots c_n = \prod_{i=1}^n c_i$ เมื่อ c_1, c_2, \dots, c_n คือวัฏจักรที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย และ $\bigcup_{i=1}^n c_i = \text{dom}(\sigma)$ โดยจะเรียกจำนวนเต็ม n ว่า จำนวนวัฏจักรซึ่งไร้สมาชิกร่วมของ σ และเขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย $\|\sigma\| = n$

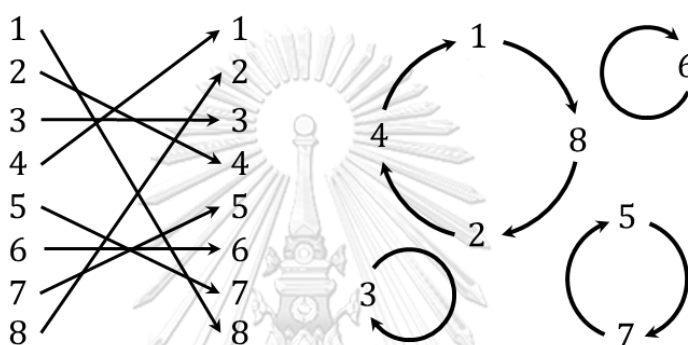
ตัวอย่าง 2.2.3 การเรียงสับเปลี่ยนและสัญกรณ์วัฏจักร

กำหนด π เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง โดยมีรายละเอียดการส่งสมาชิกดังนี้

$$\begin{array}{ll} 1 \mapsto_{\pi} 8 & 1^{\pi} = 8 \\ 2 \mapsto_{\pi} 4 & 2^{\pi} = 4 \\ 3 \mapsto_{\pi} 3 & 3^{\pi} = 3 \\ 4 \mapsto_{\pi} 1 & 4^{\pi} = 1 \\ 5 \mapsto_{\pi} 7 & 5^{\pi} = 7 \\ 6 \mapsto_{\pi} 6 & 6^{\pi} = 6 \\ 7 \mapsto_{\pi} 5 & 7^{\pi} = 5 \\ 8 \mapsto_{\pi} 2 & 8^{\pi} = 2 \end{array} \quad \text{หรือ}$$

จะได้ว่า π เป็นการเรียงสับเปลี่ยนบนเซต $[1..8]$ นั่นคือ $\text{dom}(\pi) = [1..8]$ ซึ่งสามารถบรรยายการส่งต่อสมาชิกในรูปของวัฏจักรได้ดังภาพที่ 1 ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า π ประกอบด้วยวัฏจักรการส่งสมาชิก นั่นคือ $\|\pi\| = 4$ ได้แก่ วัฏจักร $1 \mapsto_{\pi} 8 \mapsto_{\pi} 2 \mapsto_{\pi} 4 \mapsto_{\pi} 1$ ซึ่งมีความยาวของวัฏจักรเท่ากับ $|(1\ 8\ 2\ 4)| = 4$, วัฏจักร $3 \mapsto_{\pi} 3$ ซึ่งมีความยาวของวัฏจักรเท่ากับ $|(3)| = 1$, วัฏจักร $5 \mapsto_{\pi} 7 \mapsto_{\pi} 5$ ซึ่งมีความยาวของวัฏจักรเท่ากับ $|(5\ 7)| = 2$, และวัฏจักร $6 \mapsto_{\pi} 6$ ซึ่งมีความยาวของวัฏจักรเท่ากับ $|(6)| = 1$ โดยหนึ่งในสัญกรณ์วัฏจักรที่เป็นไปได้ของ π คือ

$$\pi = (1\ 8\ 2\ 4)(3)(5\ 7)(6)$$



ภาพที่ 1 การแสดงการเรียงสับเปลี่ยนในรูปของวัฏจักร

เหล่าวัฏจักรในสัญกรณ์วัฏจักรของการเรียงสับเปลี่ยนจะเป็นวัฏจักรซึ่งไร้สมาชิกร่วม ดังนั้นจึงมี สมบัติการสลับที่ (Commutative) ระหว่างวัฏจักร เช่น $(1\ 2)(3\ 4\ 5) = (3\ 4\ 5)(1\ 2)$ และในแต่ละวัฏจักรนั้นสามารถเลือกสมาชิกใดก็ได้ในวัฏจักรนั้นให้เป็น จุดเริ่มต้น (Starting Point) เช่น $(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$ ดังนั้นจากตัวอย่าง 2.2.3 สัญกรณ์วัฏจักรอื่น ๆ ของ π ที่เป็นไปได้คือ $\pi = (7\ 5)(3)(2\ 4\ 1\ 8)(6) = (3)(6)(7\ 5)(8\ 2\ 4\ 1)$ เป็นต้น นอกจากนี้การสัญกรณ์วัฏจักรแบบผกผัน (Reverse) จะได้ผลลัพธ์เป็น การเรียงสับเปลี่ยนผกผัน (Inverse Permutation) เช่น $\pi^{-1} = (1\ 8\ 2\ 4)^{-1}(3)^{-1}(5\ 7)^{-1}(6)^{-1} = (4\ 2\ 8\ 1)(3)(7\ 5)(6)$

จากนี้จะเรียกวัฏจักรที่มีความยาวหนึ่งว่า จุดตรึง (Fixed Point) ของการเรียงสับเปลี่ยน เรียกวัฏจักรที่มีความยาวสองว่า คู่สลับ (Transposition) เรียกการเรียงสับเปลี่ยนที่ประกอบด้วยเฉพาะจุดตรึงว่า การเรียงสับเปลี่ยนเอกลักษณ์ (Identity Permutation) เรียกการเรียงสับเปลี่ยนที่ประกอบด้วยเฉพาะคู่สลับว่า การเรียงสับเปลี่ยนแบบ จับคู่ (Matching) และเรียกการเรียงสับเปลี่ยนที่ประกอบด้วยเฉพาะจุดตรึงและคู่สลับว่า การเรียงสับเปลี่ยนแบบ อาวัตนาการ (Involution) ซึ่งหมายถึงการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นการเรียงสับเปลี่ยนผกผันของตัวเอง

บทนิยาม 2.2.4 (ภาคขยายโดยธรรมชาติ; Natural Extension of Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยน τ เป็น ภาคขยายโดยธรรมชาติ (Natural Extension) ของการเรียงสับเปลี่ยน σ ถ้าหาก $\text{dom}(\sigma)$ เป็นเซตย่อยของ $\text{dom}(\tau)$ และนิยาม τ สำหรับแต่ละสมาชิก $x \in \text{dom}(\tau)$ ได้ว่า $x^\tau = x^\sigma$ เมื่อ $x \in \text{dom}(\sigma)$ และได้ว่า $x^\tau = x$ เมื่อ $x \notin \text{dom}(\sigma)$

ภาคขยายโดยธรรมชาตินั้นจะปฏิบัติต่อสมาชิกที่อยู่นอกเหนือจากโดเมนเดิมเสมือนเป็นจุดตรึง โดยหากอิงตัวแปรจากบทนิยาม 2.2.4 จะสามารถเขียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง τ และ σ ด้วยสัญกรณ์วัฏจักรได้ว่า $\tau = \sigma \cdot \prod_{x \in S} (x)$ เมื่อ $S = \text{dom}(\tau) - \text{dom}(\sigma)$ ภายในงานเขียนนี้จะใช้ภาคขยายโดยธรรมชาติโดยปริยาย สำหรับการคูณสองการเรียงสับเปลี่ยนที่มีโดเมนต่างกัน โดยจะขยายทั้งสองการเรียงสับเปลี่ยนจนได้โดเมนเหมือนกัน ซึ่งคือ ยูเนียน (Union) ของสองโดเมนเดิม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.5 ภาคขยายโดยธรรมชาติ สำหรับการคูณสองการเรียงสับเปลี่ยนที่มีโดเมนต่างกัน

กำหนด $\pi = (1\ 2\ 4)(3)$ และ $\sigma = (3\ 4\ 6)(5\ 7)$ เป็นสองการเรียงสับเปลี่ยนที่มีโดเมนต่างกัน ได้แก่ $[1..4]$ และ $[3..7]$ ตามลำดับ ผลคูณ $\pi\sigma$ จะได้มาจากผลคูณ $\hat{\pi}\hat{\sigma}$ เมื่อ

- $\hat{\pi} = (1\ 2\ 4)(3)(5)(6)(7)$ เป็นภาคขยายโดยธรรมชาติของ π สู่เซต $[1..7]$ และ
- $\hat{\sigma} = (3\ 4\ 6)(5\ 7)(1)(2)$ เป็นภาคขยายโดยธรรมชาติของ σ สู่เซต $[1..7]$

โดยโดเมนของทั้งสองการเรียงสับเปลี่ยนคือ $[1..7]$ ซึ่งมาจากยูเนียนของ $[1..4]$ และ $[3..7]$ ดังนั้นจะได้ว่า $\pi\sigma = \hat{\pi}\hat{\sigma} = (1\ 2\ 4)(3)(5)(6)(7) \cdot (3\ 4\ 6)(5\ 7)(1)(2) = (1\ 2\ 6\ 3\ 4)(5\ 7)$ ซึ่งอธิบายวิธีการคูณได้ดังนี้

- $1^{\pi\sigma} = 1^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (1^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 2^{\hat{\sigma}} = 2$ นั่นคือจะได้ว่า $1 \mapsto_{\pi\sigma} 2$
- $2^{\pi\sigma} = 2^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (2^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 4^{\hat{\sigma}} = 6$ นั่นคือจะได้ว่า $2 \mapsto_{\pi\sigma} 6$
- $3^{\pi\sigma} = 3^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (3^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 3^{\hat{\sigma}} = 4$ นั่นคือจะได้ว่า $3 \mapsto_{\pi\sigma} 4$
- $4^{\pi\sigma} = 4^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (4^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 1^{\hat{\sigma}} = 1$ นั่นคือจะได้ว่า $4 \mapsto_{\pi\sigma} 1$
- $5^{\pi\sigma} = 5^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (5^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 5^{\hat{\sigma}} = 7$ นั่นคือจะได้ว่า $5 \mapsto_{\pi\sigma} 7$
- $6^{\pi\sigma} = 6^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (6^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 6^{\hat{\sigma}} = 3$ นั่นคือจะได้ว่า $6 \mapsto_{\pi\sigma} 3$
- $7^{\pi\sigma} = 7^{\hat{\pi}\hat{\sigma}} = (7^{\hat{\pi}})^{\hat{\sigma}} = 7^{\hat{\sigma}} = 5$ นั่นคือจะได้ว่า $7 \mapsto_{\pi\sigma} 5$

ซึ่งผลคูณ $\pi\sigma$ นี้ ประกอบด้วยสองวัฏจักรคือ $1 \mapsto_{\pi\sigma} 2 \mapsto_{\pi\sigma} 6 \mapsto_{\pi\sigma} 3 \mapsto_{\pi\sigma} 4 \mapsto_{\pi\sigma} 1$ และ $7 \mapsto_{\pi\sigma} 5 \mapsto_{\pi\sigma} 7$ จึงได้เป็นสัญกรณ์วัฏจักร $\pi\sigma = (1\ 2\ 6\ 3\ 4)(5\ 7)$

บทนิยาม 2.2.6 (การเรียงสับเปลี่ยนย่อย; Sub-Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยน τ เป็น การเรียงสับเปลี่ยนย่อย (Sub-Permutation) ของการเรียงสับเปลี่ยน σ เขียนแทนด้วย $\tau \sqsubseteq \sigma$ ถ้าหาก $\text{dom}(\tau)$ เป็นเซตย่อยของ $\text{dom}(\sigma)$ และนิยาม τ สำหรับแต่ละสมาชิก $x \in \text{dom}(\tau)$ ได้ว่า $x^\tau = x^{\sigma^n}$ เมื่อ n คือจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ $x^{\sigma^n} \in \text{dom}(\tau)$

ตัวอย่าง 2.2.7 การเรียงสับเปลี่ยนย่อย

กำหนดสองการเรียงสับเปลี่ยน π และ σ โดยที่ $\pi \sqsubseteq \sigma = (0)(3\ 9\ 6)(5\ 7\ 4\ 1\ 8\ 2)$

หากโดเมนของ π คือเซต $[1..4]$ จะสามารถคำนวณ π ได้โดยพิจารณาแต่ละสมาชิกใน $[1..4]$ ดังนี้

จำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $1^{\sigma^n} \in [1..4]$ คือ $n = 2$ ดังนั้น $1^\pi = 1^{\sigma^2} = 2$

จำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $2^{\sigma^n} \in [1..4]$ คือ $n = 3$ ดังนั้น $2^\pi = 2^{\sigma^3} = 4$

จำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $3^{\sigma^n} \in [1..4]$ คือ $n = 3$ ดังนั้น $3^\pi = 3^{\sigma^3} = 3$

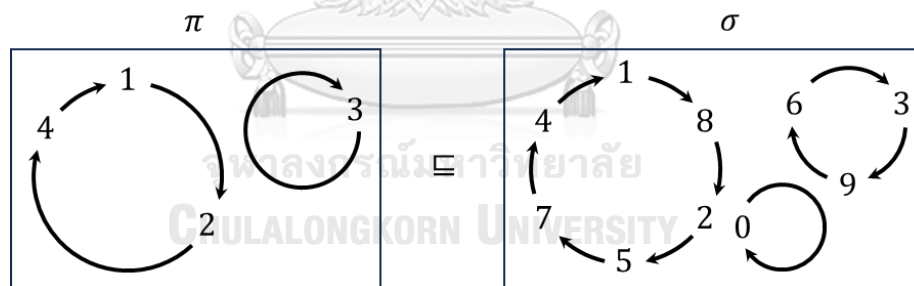
จำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $4^{\sigma^n} \in [1..4]$ คือ $n = 1$ ดังนั้น $4^\pi = 4^{\sigma^1} = 1$

ดังนั้นจะได้ว่า $\pi = (1\ 2\ 4)(3)$ ซึ่งสามารถมองอีกมุมได้ว่าเกิดจากการนำสมาชิกที่ไม่อยู่ใน $[1..4]$

ออกจากวัฏจักรของ σ โดยไม่กระทบกับตำแหน่งในวัฏจักรของสมาชิกตัวที่เหลือ นั่นคือ

$$\pi = (0)(3\ 9\ 6)(5\ 4\ 7\ 1\ 8\ 2) = (3)(4\ 1\ 2) = (1\ 2\ 4)(3)$$

ซึ่งสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 ตัวอย่างการเรียงสับเปลี่ยนย่อย

กล่าวคือ การเรียงสับเปลี่ยนย่อย จะเกิดจากการนำสมาชิกส่วนเกินออกจากวัฏจักรของการเรียงสับเปลี่ยนเดิม โดยที่ยังคงลำดับในวัฏจักรของสมาชิกที่เหลืออยู่ ซึ่งหากอิงตัวแปรจากบทนิยาม 2.2.6 จะสามารถทราบโครงสร้างโดยคร่าวของการเรียงสับเปลี่ยน σ ได้ ถ้าหากทราบสัญกรณ์วัฏจักรของการเรียงสับเปลี่ยนย่อย τ เช่น สมมติให้สัญกรณ์วัฏจักรของ τ คือ $\tau = \prod_{i=1}^n (x_{i,1} \dots x_{i,m_i})$ นั่นคือ τ ประกอบด้วย n วัฏจักร โดยที่วัฏจักรที่ i จะมีความยาว m_i จะกล่าวได้ว่าสัญกรณ์วัฏจักรของ σ คือ $\sigma = \sigma' \cdot \prod_{i=1}^n (A_{i,1} x_{i,1} \dots A_{i,m_i} x_{i,m_i})$ โดยที่แต่ละ $A_{i,j}$ คือลำดับจำกัดของสมาชิกใน $\text{dom}(\sigma)$ ที่ไม่อยู่ใน $\text{dom}(\tau)$ และ σ' จะประกอบไปด้วยวัฏจักรของ σ ที่ไม่มีสมาชิกอยู่ใน

$\text{dom}(\tau)$ เลย ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า σ มีอย่างน้อย n วัฏจักร และในวัฏจักรที่มีสมาชิก $x_{i,j}$ จะมีความยาวอย่างน้อย m_i และหากพิจารณาจากตัวอย่าง 2.2.7 จะได้ว่า

$$\pi = (1\ 2\ 4)(3) \subseteq \sigma = \sigma' \cdot (A_1\ 1\ A_2\ 2\ A_3\ 4)(A_4\ 3)$$

ซึ่งกรณีนี้จะได้ $A_1 = \langle \rangle$ คือลำดับว่าง, $A_2 = \langle 8 \rangle$ คือลำดับความยาวหนึ่ง, $A_3 = \langle 5\ 7 \rangle$ คือลำดับความยาวสอง, $A_4 = \langle 9\ 6 \rangle$ คือลำดับความยาวสอง และได้ว่า $\sigma' = (0)$

บทนิยาม 2.2.8 (การเรียงสับเปลี่ยนที่สมมูลฐานกัน; Isomorphic Permutations)

กำหนดให้ σ และ τ เป็นสองการเรียงสับเปลี่ยนที่สมมูลฐานกัน (Isomorphic) เขียนแทนด้วย $\sigma \simeq \tau$ หากมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\mu : \text{dom}(\sigma) \rightarrow \text{dom}(\tau)$ ที่ทำให้ $\sigma^\mu = \tau$

ตัวอย่าง 2.2.9 การเรียงสับเปลี่ยนสมมูลฐาน

กำหนดสองการเรียงสับเปลี่ยน $\pi = (1\ 2\ 4)(3)$ และ $\sigma = (3\ 4\ 6)(5)$ จะได้ว่า $\pi \simeq \sigma$ เนื่องจากมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\mu : [1..4] \rightarrow [3..6]$ ที่ทำให้ $\pi^\mu = \sigma$ โดยอาจมีหลายฟังก์ชัน μ ที่เป็นไปได้ เช่น

$$\mu = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\pi^\mu = (1^\mu\ 2^\mu\ 4^\mu)(3^\mu) = (3\ 4\ 6)(5) = \sigma$ หรืออีกค่าที่เป็นไปได้คือ

$$\mu = \{(1, 6), (2, 3), (3, 5), (4, 4)\}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\pi^\mu = (1^\mu\ 2^\mu\ 4^\mu)(3^\mu) = (6\ 3\ 4)(5) = (3\ 4\ 6)(5) = \sigma$

จากนี้อาจมีการใช้ฟังก์ชันที่ไม่ตรงกับบริบทของบทนิยาม โดยจะถือว่าให้ใช้ฟังก์ชันจำกัดไปโดยปริยาย เช่น ให้ π เป็นการเรียงสับเปลี่ยนบนเซต S และให้ $\mu : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่ $S \subseteq A$ จะถือว่า π^μ หมายถึง $\nu^{-1}\pi\nu$ เมื่อ $\nu = \mu|_{S \times \mu[S]}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ท้ายที่สุดนี้จะกล่าวถึงสมบัติเบื้องต้น เช่น $(\pi^{-1})^\mu = (\pi^\mu)^{-1}$ โดยอธิบายโดยคร่าวได้ว่า

$$(\pi^{-1})^\mu = \nu^{-1}\pi^{-1}\nu = (\nu^{-1}\pi\nu)^{-1} = (\pi^\mu)^{-1}$$

ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\pi^{-\mu}$ เพื่อความสะดวก และหาก σ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนบนเซต T โดยที่ $T \subseteq A$ จะได้สมบัติการกระจายคือ $(\pi\sigma)^\mu = \pi^\mu\sigma^\mu$ โดยอธิบายโดยคร่าวได้ว่า

$$(\pi\sigma)^\mu = \chi^{-1}(\pi\sigma)\chi = (\chi^{-1}\pi\chi)(\chi^{-1}\sigma\chi) = (\nu^{-1}\pi\nu)(\gamma^{-1}\sigma\gamma) = \pi^\mu\sigma^\mu$$

โดยที่ $\chi = \mu|_{R \times \mu[R]}$ เมื่อ $R = \text{dom}(\pi\sigma) = S \cup T$ และจะได้ว่า $\nu = \chi|_{S \times \chi[S]} = \mu|_{S \times \mu[S]}$ และ $\gamma = \chi|_{T \times \chi[T]} = \mu|_{T \times \mu[T]}$

2.3 ไฮเปอร์แมพและแมพ

ไฮเปอร์แมพเป็นการแสดงเชิงการจัด (Combinatorial Representation) ของไฮเปอร์กราฟลงบนพื้นผิว ซึ่งจะทำให้ไฮเปอร์แมพมีองค์ประกอบที่เรียกว่า หน้า เพิ่มขึ้นมานอกเหนือจากจุดยอดและเส้นเชื่อมไฮเปอร์ ซึ่งโครงสร้างหน่วยย่อยเหล่านี้จะแสดงอยู่ในรูปของการเรียงสับเปลี่ยน และเนื่องจากไฮเปอร์กราฟหนึ่งสามารถจัดลงบนพื้นผิวได้หลายวิธี ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่ ไฮเปอร์แมพที่แตกต่างกันจะแสดงถึงไฮเปอร์กราฟเบื้องหลังเดียวกัน ในบทย่อยนี้จะแนะนำทฤษฎีเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องกับไฮเปอร์แมพ

บทนิยาม 2.3.1 (ไฮเปอร์แมพ; Hypermap)

ไฮเปอร์แมพ (Hypermap) คือ สามสิ่งอันดับ (Triple) ของการเรียงสับเปลี่ยน $h = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ ที่มีโดเมนร่วมกันคือเซต D และสอดคล้องกับเงื่อนไข $\mathcal{V}\mathcal{E} = \mathcal{F}$ โดยจะเรียกองค์ประกอบต่าง ๆ ดังนี้

- เรียกสมาชิกของเซต D ว่า ดาร์ท (Dart)
- เรียก \mathcal{V} ว่า การเรียงสับเปลี่ยนจุดยอด และเรียกวัฏจักรของ \mathcal{V} ว่า จุดยอด (Vertex)
- เรียก \mathcal{E} ว่า การเรียงสับเปลี่ยนเส้นเชื่อมไฮเปอร์ และเรียกวัฏจักรของ \mathcal{E} ว่า เส้นเชื่อมไฮเปอร์ (Hyperedge)
- เรียก \mathcal{F} ว่า การเรียงสับเปลี่ยนหน้า และเรียกวัฏจักรของ \mathcal{F} ว่า หน้า (Face)

และกำหนดให้ \mathbb{H} แทนเซตของไฮเปอร์แมพทั้งหมด และจะเรียกเซตย่อยใด ๆ ของ \mathbb{H} ว่า ภาษาไฮเปอร์แมพ (Hypermap Language)

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงถึง ต่อจากนี้จะใช้ตัวแปรที่เขียนด้วยตัวเขียนภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแบบตัวเส้นหนา (Bold Script Lowercase) เพื่อแทนไฮเปอร์แมพ เช่น h, m, a, b, ℓ, r, z เป็นต้น และจะสงวนตัวอักษร $D, \mathcal{V}, \mathcal{E}$, และ \mathcal{F} สำหรับหมายถึง เซตของดาร์ท, การเรียงสับเปลี่ยนจุดยอด, การเรียงสับเปลี่ยนเส้นเชื่อมไฮเปอร์, และการเรียงสับเปลี่ยนหน้า ตามลำดับ โดยจะใช้ตัวห้อยเพื่อระบุถึงไฮเปอร์แมพที่เป็นเจ้าของโครงสร้างเหล่านี้ เช่น D_h หมายถึง เซตของดาร์ทของไฮเปอร์แมพ h และ \mathcal{F}_z หมายถึง การเรียงสับเปลี่ยนหน้าของไฮเปอร์แมพ z เป็นต้น

งานเขียนอื่น ๆ โดยทั่วไป มักเขียนแทนไฮเปอร์แมพด้วยเพียงสองการเรียงสับเปลี่ยนเท่านั้น เพื่อความกระชับ เนื่องจากสามารถคำนวณย้อนกลับหาค่าการเรียงสับเปลี่ยนที่เหลือได้เสมอ เช่น งานของ โซพินา [4] จะเขียนแทนไฮเปอร์แมพด้วยจุดยอดกับเส้นเชื่อมไฮเปอร์ หรือ ในงานของ เซฟส์ [5] ซึ่งเขียนแทนแมพด้วยจุดยอดกับหน้า ซึ่งการเขียนแทนแต่ละแบบนี้มีข้อดีข้อเสียต่างกัน เช่น

$\mathcal{h} = (\mathcal{V}_{\mathcal{h}}, \mathcal{E}_{\mathcal{h}})$ จะแสดงองค์ประกอบของไฮเพอร์กราฟเบื้องหลังได้ครบถ้วน นั่นคือจุดยอดและเส้นเชื่อมไฮเพอร์ ในขณะ $\mathcal{h} = (\mathcal{V}_{\mathcal{h}}, \mathcal{F}_{\mathcal{h}})$ จะเน้นแสดงให้เห็นถึงหน้าของไฮเพอร์แมพ ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญที่ไม่มีอยู่ในของไฮเพอร์กราฟเบื้องหลัง โดยในงานวิจัยนี้จะเน้นความสนใจไปที่หน้าของไฮเพอร์แมพมากกว่าเส้นเชื่อมไฮเพอร์ จึงเลือกใช้การเขียนแทนแบบ $\mathcal{h} = (\mathcal{V}_{\mathcal{h}}, \mathcal{F}_{\mathcal{h}})$ โดยจะสามารถคำนวณกลับหาเส้นเชื่อมไฮเพอร์ได้จาก $\mathcal{E}_{\mathcal{h}} = \mathcal{V}_{\mathcal{h}}^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{h}}$

ตัวอย่าง 2.3.2 ไฮเพอร์แมพและการแสดงภาพของไฮเพอร์แมพบนระนาบ

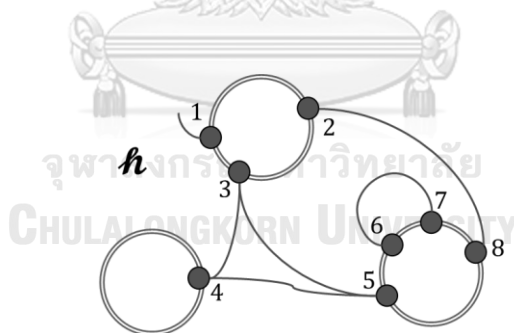
กำหนดไฮเพอร์แมพ \mathcal{h} โดยที่ $\mathcal{V}_{\mathcal{h}} = (1\ 2\ 3)(4)(5\ 6\ 7\ 8)$ และ $\mathcal{F}_{\mathcal{h}} = (2\ 5\ 7)(6)(8\ 4\ 3\ 1)$ โดยจะเขียนบรรยาย \mathcal{h} ด้วย $\mathcal{V}_{\mathcal{h}}$ และ $\mathcal{F}_{\mathcal{h}}$ พร้อมกันเพื่อความกระชับดังนี้

$$\mathcal{h} = \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : (1\ 2\ 3)(4)(5\ 6\ 7\ 8) \\ \mathcal{F} : (2\ 5\ 7)(6)(8\ 4\ 3\ 1) \end{array} \right]$$

ซึ่งจะได้ว่า $\mathcal{E}_{\mathcal{h}} = \mathcal{V}_{\mathcal{h}}^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{h}} = (1)(2\ 8)(3\ 5\ 4)(6\ 7)$ และ

$$D_{\mathcal{h}} = \text{dom}(\mathcal{V}_{\mathcal{h}}) = \text{dom}(\mathcal{E}_{\mathcal{h}}) = \text{dom}(\mathcal{F}_{\mathcal{h}}) = [1..8]$$

โดยจะแสดงภาพไฮเพอร์แมพ \mathcal{h} บนระนาบได้ดังภาพที่ 3 ซึ่งดาร์ทในวัฏจักรของ $\mathcal{V}_{\mathcal{h}}$ และ $\mathcal{E}_{\mathcal{h}}$ จะแสดงแบบวนตามเข็มนาฬิกา ในขณะที่ดาร์ทในวัฏจักรของ $\mathcal{F}_{\mathcal{h}}$ นั้นแสดงแบบวนทวนเข็มนาฬิกา (ยกเว้นหน้าที่อยู่ภายนอกสุด) โดยในภาพจะแสดงดาร์ทอยู่ในอาณาบริเวณของ หน้า ที่ดาร์ทนั้นปรากฏอยู่ในวัฏจักร



ภาพที่ 3 ตัวอย่างการแสดงไฮเพอร์แมพบนระนาบ

หนึ่งในความสนใจหลักของงานนี้คือการสร้างไฮเพอร์แมพแบบเฉพาะที่เรียกว่า แมพ ซึ่งเป็น การแสดงเชิงการจัดของกราฟลงบนพื้นผิว โดยมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3.3 (แมพ; Map)

แมพ (Map) คือ ไฮเพอร์แมพที่มีการเรียงสับเปลี่ยน \mathcal{E} เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ โดยเรียก \mathcal{E} และวัฏจักรของ \mathcal{E} ว่า การเรียงสับเปลี่ยนเส้นเชื่อม (Edge Permutation) และ เส้นเชื่อม (Edge)

ตามลำดับ และกำหนดให้ คลาสของแมพ (Class of Maps) หมายถึง เซตของแมพทั้งหมด โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \mathbb{M} ซึ่งถือเป็นคลาสย่อยของ \mathbb{H} นั่นคือ $\mathbb{M} \subset \mathbb{H}$

บทนิยาม 2.3.4 (ไฮเพอร์แมพที่สมมูลฐานกัน; Isomorphic Hypermaps)

กำหนดให้ \mathbf{a} และ \mathbf{b} เป็นสองไฮเพอร์แมพที่ สมมูลฐานกัน (Isomorphic) เขียนแทนด้วย $\mathbf{a} \simeq \mathbf{b}$ หากมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\mu : D_{\mathbf{a}} \rightarrow D_{\mathbf{b}}$ ที่ทำให้ $\mathcal{V}_{\mathbf{a}}^{\mu} = \mathcal{V}_{\mathbf{b}}$, $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}^{\mu} = \mathcal{E}_{\mathbf{b}}$, และ $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}^{\mu} = \mathcal{F}_{\mathbf{b}}$ โดยจะเขียนแทนด้วย $\mathbf{a}^{\mu} = \mathbf{b}$ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{a}^{\mu} = (\mathcal{V}_{\mathbf{a}}^{\mu}, \mathcal{F}_{\mathbf{a}}^{\mu})$



ภาพที่ 4 ตัวอย่างไฮเพอร์แมพที่สมมูลฐานกัน

ตัวอย่าง 2.3.5 ไฮเพอร์แมพสมมูลฐาน

กำหนดสองไฮเพอร์แมพที่สมมูลฐานกัน โดยแสดงได้ดังภาพที่ 4

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (1\ 2\ 4)(3) \\ \mathcal{F} : (3\ 2)(1\ 4) \end{bmatrix} \simeq \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (3\ 4\ 6)(5) \\ \mathcal{F} : (3\ 5)(6\ 4) \end{bmatrix}$$

จะได้ว่ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\mu : D_{\mathbf{a}} \rightarrow D_{\mathbf{b}}$ ที่ทำให้

$$\mathcal{V}_{\mathbf{a}}^{\mu} = (1^{\mu}\ 2^{\mu}\ 4^{\mu})(3^{\mu}) = (3\ 4\ 6)(5) = \mathcal{V}_{\mathbf{b}}$$

และ

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}}^{\mu} = (3^{\mu}\ 2^{\mu})(1^{\mu}\ 4^{\mu}) = (3\ 5)(6\ 4) = \mathcal{F}_{\mathbf{b}}$$

(ซึ่งทำให้ $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}^{\mu} = \mathcal{E}_{\mathbf{b}}$ ด้วยโดยปริยาย เนื่องจาก $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}^{\mu} = (\mathcal{V}_{\mathbf{a}}^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{a}})^{\mu} = \mathcal{V}_{\mathbf{a}}^{-\mu}\mathcal{F}_{\mathbf{a}}^{\mu} = \mathcal{V}_{\mathbf{b}}^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{b}} = \mathcal{E}_{\mathbf{b}}$)

โดยในกรณีทั่วไปอาจจะมีฟังก์ชัน μ ที่เป็นไปได้หลายค่า ซึ่งในตัวอย่างนี้จะได้ว่า

$$\mu = \{(1, 6), (2, 3), (3, 5), (4, 4)\}$$

จากนี้อาจมีการใช้ฟังก์ชันที่ไม่ตรงกับบริบทของบทนิยาม เช่นเดียวกันกับกรณีของการเรียงสับเปลี่ยน โดยจะถือว่าให้ใช้ฟังก์ชันจำกัดโดยปริยาย เช่น ให้ $\mu : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และให้ \mathbf{h} เป็นไฮเพอร์แมพ โดยที่ $D_{\mathbf{h}} \subseteq A$ จะถือว่า \mathbf{h}^{μ} หมายถึงไฮเพอร์แมพ $(\mathcal{V}_{\mathbf{h}}^{\mu}, \mathcal{F}_{\mathbf{h}}^{\mu}) = (\mathcal{V}^{-1}\mathcal{V}_{\mathbf{h}}\mathcal{V}, \mathcal{V}^{-1}\mathcal{F}_{\mathbf{h}}\mathcal{V})$ เมื่อ $\mathcal{V} = \mu|_{D_{\mathbf{h}} \times \mu[D_{\mathbf{h}}]}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

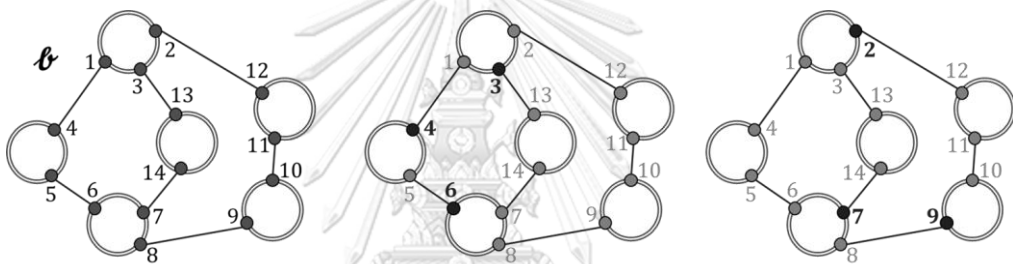
บทนิยามต่อไปจะกล่าวถึงโครงสร้างย่อยของแมพและไฮเพอร์แมพ โดยอ้างอิงจากงานเขียนของ เซพส์ [5] และนำมาปรับนิยามชื่อและวิธีการเขียนให้สอดคล้องกับนิยามอื่น ๆ ในงานนี้

บทนิยาม 2.3.6 (ไฮเพอร์แมพย่อย; Subhypermap)

กำหนดให้ไฮเพอร์แมพ \mathcal{a} เป็น ไฮเพอร์แมพย่อย (Subhypermap) ของไฮเพอร์แมพ \mathcal{b} เขียนแทนด้วย $\mathcal{a} \subseteq \mathcal{b}$ ถ้าหาก $\mathcal{V}_{\mathcal{a}}$ และ $\mathcal{F}_{\mathcal{a}}$ เป็นการเรียงลำดับเปลี่ยนย่อยของ $\mathcal{V}_{\mathcal{b}}$ และ $\mathcal{F}_{\mathcal{b}}$ ตามลำดับ กล่าวคือ $\mathcal{a} \subseteq \mathcal{b}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{V}_{\mathcal{a}} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{b}}$ และ $\mathcal{F}_{\mathcal{a}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{b}}$ โดยในกรณีที่ \mathcal{a} เป็นแมพ จะกล่าวว่า \mathcal{a} เป็น แมพย่อย (Submap) ของ \mathcal{b}

บทนิยาม 2.3.7 (ไฮเพอร์แมพย่อยสมสัณฐาน; Isomorphic Subhypermap)

กำหนดให้ไฮเพอร์แมพ \mathcal{a} เป็น ไฮเพอร์แมพย่อยสมสัณฐาน (Isomorphic Subhypermap) ของไฮเพอร์แมพ \mathcal{b} หากมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{\mathcal{a}} \rightarrow D_{\mathcal{b}}$ ที่ทำให้ $\mathcal{a}^{\mu} \subseteq \mathcal{b}$ โดยในกรณีที่ \mathcal{a} เป็นแมพ จะกล่าวว่า \mathcal{a} เป็น แมพย่อยสมสัณฐาน (Isomorphic Submap) ของ \mathcal{b}



ภาพที่ 5 ตัวอย่างไฮเพอร์แมพย่อยที่มีสามคาร์ทมาจกหน้าเดียวกันแต่คนละจุดยอด

ตัวอย่าง 2.3.8 ไฮเพอร์แมพย่อยสมสัณฐาน

กำหนดไฮเพอร์แมพ $\mathcal{a} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a)(b)(c) \\ \mathcal{F} : (a b c) \end{bmatrix}$ และไฮเพอร์แมพ \mathcal{b} ดังแสดงในภาพที่ 5 ด้านซ้ายสุด จะได้ว่า \mathcal{a} เป็นไฮเพอร์แมพย่อยสมสัณฐานของ \mathcal{b} เนื่องจากมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{\mathcal{a}} \rightarrow D_{\mathcal{b}}$ ที่ทำให้ \mathcal{a}^{μ} เป็นไฮเพอร์แมพย่อยของ \mathcal{b} ซึ่งโดยทั่วไปอาจจะมีฟังก์ชัน μ ที่เป็นไปได้หลายค่า เช่น

- $\mu = \{(a, 3), (b, 4), (c, 6)\}$ จะได้ว่า $\mathcal{a}^{\mu} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (3)(4)(6) \\ \mathcal{F} : (3 4 6) \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{b}$
- $\mu = \{(a, 2), (b, 7), (c, 9)\}$ จะได้ว่า $\mathcal{a}^{\mu} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (2)(7)(9) \\ \mathcal{F} : (2 7 9) \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{b}$

ในสองกรณีข้างต้นจะแสดงได้ดังภาพที่ 5 รูปกลางและรูปขวาสุดตามลำดับ โดยกล่าวได้ว่า \mathcal{a} เป็นไฮเพอร์แมพย่อยสมสัณฐานของไฮเพอร์แมพใดก็ตามที่มีอย่างน้อยสามคาร์ทปรากฏอยู่ในหน้าเดียวกัน แต่ทั้งสามคาร์ทนั้นมาจากจุดยอดที่ต่างกันทั้งหมด

2.4 กราฟและคุณสมบัติเชิงระนาบ

กราฟถือเป็นโครงสร้างข้อมูลที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในหลากหลายสาขา ในบทย่อนี้ จะกล่าวถึงบทนิยามโดยทั่วไปของกราฟ ซึ่งจะถูกใช้ในบทต่อ ๆ ไป

บทนิยาม 2.4.1 (กราฟ; Graph)

กราฟ (Graph) คือ สามสิ่งอันดับ $G = (V, E, \phi)$ เมื่อ V เป็นเซตจำกัดของ จุดยอด (Vertex), E เป็นเซตจำกัดของ เส้นเชื่อม (Edge), และ ϕ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\phi : E \rightarrow 2^V$ โดยที่ทุกเซต $S \in \phi[E]$ จะเป็นเซตย่อยของ V ที่มีขนาดเป็นสอง นั่นคือ $|S| = 2$ และเพื่อความกระชับ จะนิยมเขียนแทนกราฟด้วยคู่อันดับ $G = (V, \phi[E])$ โดยรวบ E และ ϕ เข้าด้วยกัน และให้ $\phi[E]$ เป็นเซตจำกัดของเส้นเชื่อมแทน

กราฟทั้งหมดในงานวิจัยนี้จะอิงตามบทนิยามที่ 2.4.1 โดยกราฟตามบทนิยามนี้จะเป็น *กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)* กล่าวคือจะไม่มีเส้นเชื่อมสองเส้นใด ๆ ที่เชื่อมต่อคู่จุดยอดเดียวกัน และจะไม่มีเส้นเชื่อมใดที่เชื่อมต่อจุดยอดหนึ่งกับตัวเอง และกล่าวได้ว่ากราฟตามบทนิยามนี้จะเป็น *กราฟไม่ระบุทิศทาง (Undirected Graph)* เนื่องจากนิยามเส้นเชื่อมเป็นเซตของสองจุดยอดที่ไม่มีอันดับ โดยทั่วไปจะนิยมเขียนแทนเส้นเชื่อม $e = \{u, v\}$ ด้วย uv หรือ vu เพื่อความกระชับ

บทนิยาม 2.4.2 (กราฟย่อย; Subgraph)

กำหนดสองกราฟ $G = (V, E)$ และ $G' = (V', E')$ จะกล่าวว่า G เป็น กราฟย่อย (Subgraph) ของ G' ถ้า $V \subseteq V'$ และ $E \subseteq E'$ และกล่าวว่า G เป็น กราฟย่อยเหนียวนำ (Induced Subgraph) ของ G' ด้วยเซต V เขียนแทนด้วย $G = G'[V]$ ถ้า $V \subseteq V'$ และ $E = \{e \in E' \mid e \subseteq V\}$

กำหนดกราฟ $G = (V, E)$ การลบจุดยอด (Vertex Deletion) $v \in V$ ออกจากกราฟ G จะได้ผลลัพธ์เป็นกราฟย่อยเหนียวนำ $G[V - \{v\}]$ การลบเส้นเชื่อม (Edge Deletion) $e \in E$ ออกจากกราฟ G จะได้ผลลัพธ์เป็นกราฟย่อย $(V, E - \{e\})$ การหดเส้นเชื่อม (Edge Contraction) $e = uv \in E$ ของกราฟ G เป็นการนำ u และ v มารวมเป็นจุดยอดเดียวกัน โดยจะได้ผลลัพธ์เป็นกราฟ $(V' \cup \{w\}, E' \cup \{wx \mid ux \in E \vee vx \in E\})$ เมื่อ $(V', E') = G[V - e]$

บทนิยาม 2.4.3 (กราฟไมเนอร์; Minor)

กราฟไมเนอร์ (Minor) ของกราฟ G มีนิยามแบบเวียนเกิดดังต่อไปนี้

- G เป็นกราฟไมเนอร์ของตัวเอง

- ให้ G' เป็นกราฟไมเนอร์ของ G แล้วกราฟที่ได้มาจาก G' ด้วยการลบจุดยอด หรือการลบเส้นเชื่อม หรือ การหดเส้นเชื่อม จะเป็นกราฟไมเนอร์ของ G ด้วย

บทนิยาม 2.4.4 (จุดยอดประชิด; Adjacent Vertices)

กำหนดกราฟ $G = (V, E)$ จะเรียกสองจุดยอด u และ v ที่ต่างกันของ G ว่าเป็น จุดยอดประชิด (Adjacent Vertices) ถ้า $uv \in E$ และจะเรียกจุดยอดทั้งหมดที่ประชิดกับจุดยอด v ว่า จุดยอดเพื่อนบ้าน (Neighborhood) ของ v และเรียกจำนวนจุดยอดเพื่อนบ้านของจุดยอด v ว่า ระดับชั้น (Degree) ของ v เขียนแทนด้วย $\deg_G(v)$

กำหนดกราฟ $G = (V, E)$ จะเรียก G ว่า กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph) ถ้าจุดยอดของ G นั้นประชิดซึ่งกันและกันทั้งหมด โดยจะเขียนแทนกราฟบริบูรณ์บนจุดยอด n จุดด้วย K_n และสำหรับเซตย่อย $S \subseteq V$ จะเรียก S ว่า กลุ่มพรรคพวก (Clique) ถ้ากราฟย่อยเหนี่ยวนำ $G[S]$ นั้นเป็นกราฟบริบูรณ์ และจะเรียก S ว่า กลุ่มพรรคพวกอันดับ k (k -Clique) ถ้า $G[S] = K_k$ นอกจากนี้จะเรียก G ว่า กราฟสองส่วน (Bipartite Graph) ถ้าสามารถแบ่งจุดยอดใน V ออกเป็นสองส่วนที่ไร้สมาชิกร่วม กล่าวคือ $V = V_1 \cup V_2$ โดยที่ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ โดยที่จุดยอดในแต่ละเซตย่อย V_i จะไม่ประชิดกันเองเลย และหากทุกจุดยอดใน V_1 นั้นประชิดกับทุกจุดยอดใน V_2 จะเรียก G ว่า กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) และเขียนแทนด้วย $K_{n,m}$ เมื่อ n และ m คือขนาดของแต่ละเซตย่อย

นอกจากนี้ยังสามารถขยายนิยามความเชื่อมต่อของคู่จุดยอด โดยสำหรับสองจุดยอด u และ v จะเรียกลำดับจำกัด $\langle v_0 v_1 \dots v_n \rangle$ ของจุดยอดที่ต่างกันทั้งหมดเมื่อ $v_0 = u$ และ $v_n = v$ ว่า วิธี (Path) จาก u ไปยัง v หรือเรียกโดยสั้นว่า วิธี uv (uv -Path) ถ้าหาก v_{i-1} และ v_i เป็นจุดยอดประชิดสำหรับทุกค่า $i \in [1..n]$ โดยจะเรียก n ว่า ความยาววิธี (Path Length) และเรียกจุดยอดในลำดับที่ไม่ใช่ v_0 กับ v_n ว่า จุดยอดภายใน (Interval Vertices) ของวิธี ทั้งนี้หากกำหนดให้ $v_0 = v_n$ จะเรียกว่า วัฏจักร (Cycle) และเขียนแทนด้วย $(v_1 \dots v_n)$ และหากให้ e คือเส้นเชื่อมระหว่างสองจุดในลำดับ $e = v_i v_j$ โดยที่ $i + 1 < j$ จะเรียก e ว่า คอร์ด (Chord) ของวิธีหรือวัฏจักร

บทนิยาม 2.4.5 (ความเชื่อมต่อของกราฟ; Graph Connectivity)

กราฟ $G = (V, E)$ จะเป็น กราฟเชื่อมต่ออันดับ k (k -Connected Graph) ถ้าสำหรับทุกคู่จุดยอด u และ v ที่ต่างกันของ G นั้นมีวิธี uv อย่างน้อย k วิธี ที่มีจุดยอดภายในไม่ซ้ำหรือซ้อนทับกันเลย สำหรับกรณี $k = 1$ จะเรียกโดยสั้นว่า G เป็น กราฟเชื่อมต่อ (Connected Graph) และสำหรับเซตย่อย $V' \subseteq V$ จะเรียกกราฟย่อยเหนี่ยวนำ $G[V']$ ที่เป็นกราฟเชื่อมต่อว่าเป็น ส่วนประกอบเชื่อมต่อ

(Connected Component) ของ G ถ้าหากการเพิ่มจุดยอดใดก็ตามให้กับ V' จะส่งผลให้ $G[V']$ กลายเป็นกราฟไม่เชื่อมต่อ

บทนิยามข้างต้นเกี่ยวกับกราฟจะถูกนำไปใช้กับแมพด้วย โดยหากให้ $h \in M$ มีกราฟเบื้องหลังคือ $G = (V, E)$ ซึ่งนิยามไว้ตามบทนิยามที่ 2.4.1 เขียนแทนด้วย $G(h) = G$ จะกล่าวได้ว่า h เป็น แมพเชิงเดียว (Simple Map) โดยที่ $|V| = \|\mathcal{V}_h\|$ และ $|E| = \|\mathcal{E}_h\|$ ซึ่งจะสามารถหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ψ จากเซตจุดยอด V ไปยังเซตวัฏจักรของ \mathcal{V}_h โดยนิยามได้ว่า $uv \in E$ ก็ต่อเมื่อมีคาร์ท d_u ใน $\psi(u)$ และคาร์ท d_v ใน $\psi(v)$ ที่ทำให้ (d_u, d_v) เป็นวัฏจักรของ \mathcal{E}_h โดยหาก $\psi(v) = v$ จะกล่าวว่าจุดยอด v ของ G สอดคล้องกับจุดยอด v ของ h ซึ่งจะสังเกตได้ว่า $\deg_G(v) = |v|$ นอกจากนี้จะกล่าวว่า h เป็น แมพเชื่อมต่ออันดับ k (k -Connected Map) ถ้าหาก G เป็นกราฟเชื่อมต่ออันดับ k ถ้าจุดยอด v ของ h มีอย่างน้อยสองคาร์ทที่มาจากหน้าเดียวกัน จะเรียก v (และ v) ว่า จุดยอดตัด (Cut Vertex) ซึ่งหมายถึงจุดยอดที่เมื่อถูกลบออกไปแล้ว จะทำให้แมพ h (และกราฟ G) นั้นถูกแยกออกจากกัน หรือกล่าวคือมีส่วนประกอบเชื่อมต่อเพิ่มขึ้น จากนิยามความเชื่อมต่อของกราฟ จะสามารถสรุปได้ว่ากราฟเชื่อมต่ออันดับสองจะไม่มีจุดยอดตัด

บทนิยาม 2.4.6 (กราฟเชิงระนาบ; Planar Graph)

กราฟ G จะเป็น กราฟเชิงระนาบ (Planar Graph) ถ้า G สามารถถูกวาดหรือแสดงบนพื้นผิวระนาบ (Plane) ได้โดยไม่มีเส้นเชื่อมใดไขว้ข้ามกัน

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ กราฟ $G = (V, E)$ (ที่มีอย่างน้อยหนึ่งเส้นเชื่อม) จะเป็นกราฟเชิงระนาบ ถ้าสามารถหาแมพสำหรับ G ที่เมื่อแสดงบนระนาบแล้วจะไม่มีเส้นเชื่อมตัดผ่านกันเลย ซึ่งแมพที่มีคุณสมบัติดังกล่าวจะเรียกว่า แมพเชิงระนาบ (Planar Map) โดยสูตรของออยเลอร์ (Euler's Formula) ได้ระบุไว้ว่า h จะเป็นแมพเชื่อมต่อเชิงระนาบ ก็ต่อเมื่อ

$$\|\mathcal{V}_h\| - \|\mathcal{E}_h\| + \|\mathcal{F}_h\| = 2$$

นอกจากนี้ทฤษฎีบทของวากเนอร์ (Wagner's Theorem) ยังระบุไว้ว่ากราฟ G จะเป็นกราฟเชิงระนาบก็ต่อเมื่อ G ไม่มีกราฟไมเนอร์ที่เป็น K_5 หรือ $K_{3,3}$

2.5 กราฟเชิงต้นไม้อันดับ k

ในบทย่อๆนี้จะกล่าวถึงคลาสย่อยของกราฟที่เรียกว่ากราฟเชิงต้นไม้ พร้อมทั้งผลลัพธ์บางส่วนเกี่ยวกับกราฟประเภทนี้

บทนิยาม 2.5.1 (กราฟเชิงต้นไม้อันดับ k ; k -Tree)

กำหนด k เป็นจำนวนเต็มบวก กราฟเชิงต้นไม้อันดับ k (k -Tree) คือกราฟเชื่อมต่อเชิงเดียวไม่ระบุทิศทาง ที่มีนิยามแบบเวียนเกิดดังต่อไปนี้

- กราฟเชิงต้นไม้อันดับ k ที่เล็กที่สุด คือ กราฟบริบูรณ์บนจุดยอด $k + 1$ จุด (K_{k+1})
- กำหนด G เป็นกราฟเชิงต้นไม้อันดับ k ที่มีจุดยอด n จุด กราฟใดก็ตามที่เกิดจากการเพิ่มจุดยอด v ที่มีระดับชั้น k ให้กับกราฟ G โดยที่จุดยอดเพื่อนบ้านของ v เป็นกลุ่มพรรคพวกอันดับ k ใน G กราฟที่ได้นี้จะเป็กราฟเชิงต้นไม้อันดับ k ที่มีจุดยอด $n + 1$ จุด

กราฟเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งจะสามารถเรียกโดยสั้นว่า *กราฟต้นไม้ (Tree)* ซึ่งเป็นกราฟเชื่อมต่อที่ปราศจากวัฏจักร ทุกกราฟเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งและกราฟเชิงต้นไม้อันดับสองจะเป็นกราฟเชิงระนาบ ในขณะที่กราฟเชิงต้นไม้อันดับสามอาจไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ เนื่องจากสามารถมีกราฟย่อยเป็น $K_{3,3}$ ได้จากการเพิ่มจุดยอดให้กับกลุ่มพรรคพวก K_3 เดิมซ้ำ ๆ นอกจากนี้จากงานของ Zeng [6] จะได้ว่าผลสำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5.2 กำหนดให้ G เป็นกราฟที่มีจุดยอดอย่างน้อย $k + 1$ จุด เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า G เป็นกราฟเชิงระนาบอันดับ k ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งหมดต่อไปนี้เป็จริง

- 1) G ไม่มีกราฟไมเนอร์ที่เป็น K_{k+2}
- 2) G ไม่มีวัฏจักรความยาวอย่างน้อยสี่ที่ปราศจากเส้นเชื่อมคอร์ด
- 3) G เป็นกราฟเชื่อมต่ออันดับ k (k -Connected)

กราฟเชิงต้นไม้อันดับสามที่เป็นกราฟเชิงระนาบนั้น เป็นที่รู้กันว่ามีควมเทียบเท่ากับ โครงข่ายอพอลโลเนียน (Apollonian Network) ซึ่งเป็นการแสดงกราฟเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบโดยวาดลงบนพื้นผิวระนาบ โดยมีนิยามเวียนเกิดดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.5.3 (โครงข่ายอพอลโลเนียน; Apollonian Network)

โครงข่ายอพอลโลเนียน (Apollonian Network) คือกราฟบนระนาบที่มีนิยามแบบเวียนเกิดดังนี้

- โครงข่ายอพอลโลเนียนที่เล็กที่สุด คือ กราฟสามเหลี่ยม (ซึ่งก็คือ K_3) ที่อยู่บนระนาบ
- กำหนด G เป็นโครงข่ายอพอลโลเนียนที่มีจุดยอด n จุด เลือกหน้า f ที่เป็นสามเหลี่ยมใน G มาหนึ่งหน้า เพื่อใส่จุดยอด v ลงไป และเชื่อมต่อ v กับทั้งสามจุดยอดที่ล้อมรอบหน้า f กราฟผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นโครงข่ายอพอลโลเนียนที่มีจุดยอด $n + 1$ จุด โดยหน้า f เดิมนั้นจะถูกแบ่งเป็นสามหน้าย่อยซึ่งล้วนเป็นหน้าสามเหลี่ยม

สังเกตว่านิยามพื้นฐานในบทนิยามที่ 2.5.3 นั้นเริ่มต้นด้วยกราฟ K_3 ซึ่งไม่ตรงกับพื้นฐานในบทนิยามที่ 2.5.1 ของกราฟเชิงต้นไม้อันดับสาม ซึ่งเริ่มต้นกราฟ K_4 เนื่องจากนิยามในบทนิยามที่ 2.5.1 จงใจเพิ่มขนาดเริ่มต้นของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเคมาหนึ่งระดับ เพื่อให้มีความสอดคล้องพอดีกันกับผลลัพธ์ที่ได้ในทฤษฎีบทที่ 2.5.2 อย่างไรก็ตามก็ตราบนี้หากกล่าวถึงกราฟเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบ จะให้ยึดนิยามพื้นฐานจากบทนิยามที่ 2.5.1 และยึดนิยามเวียนเกิดจากบทนิยามที่ 2.5.3

ท้ายที่สุดนี้จะกล่าวถึงผลลัพธ์เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงข่ายฮอปโลเนียน ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายจากการอุปนัยบนนิยามเวียนเกิด โดยจะถูกกล่าวอ้างถึงเพื่อความสะดวกในการพิสูจน์อื่น ๆ

ทฤษฎีบท 2.5.4 ทุกหน้าของโครงข่ายฮอปโลเนียนจะเป็นวัฏจักรความยาวสาม

ในบทต่อไปจะนำเสนองานวิจัยหลัก โดยกล่าวถึงบทนิยามเกี่ยวกับไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ และแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ จากนั้นจะแสดงให้เห็นว่ามีไวยากรณ์ที่สามารถสร้างแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบทั้งหมดได้



บทที่ 3

ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพและแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ

3.1 ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ

ในบทย่อนี้นำเสนอขบวนการที่เกี่ยวข้องกับไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ ซึ่งมีพื้นฐานโดยภาพรวมมาจากงานของ โซพินา [4] โดยปรับแก้รายละเอียดปลีกย่อยจากเดิมที่นิยามบนจุดยอดและเส้นเชื่อมไฮเปอร์ของไฮเปอร์แมพ มาเป็นนิยามบนจุดยอดและหน้าของไฮเปอร์แมพ โดยจะกล่าวเริ่มต้นตั้งแต่การนิยามการคูณของไฮเปอร์แมพ

บทนิยาม 3.1.1 (ผลคูณไฮเปอร์แมพ; Product of Hypermaps)

ผลคูณ (Product) ของสองไฮเปอร์แมพ \mathbf{a} และ \mathbf{b} เขียนแทนด้วย $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$ จะได้ผลลัพธ์เป็นไฮเปอร์แมพ \mathbf{h} โดยที่ $\mathcal{V}_{\mathbf{h}} = \mathcal{V}_{\mathbf{a}} \mathcal{V}_{\mathbf{b}}$ และ $\mathcal{F}_{\mathbf{h}} = \mathcal{F}_{\mathbf{a}} \mathcal{F}_{\mathbf{b}}$

จากบทนิยามที่ 3.1.1 ให้ \mathbf{h} เป็นไฮเปอร์แมพใด ๆ จะสามารถกำหนดไฮเปอร์แมพเฉพาะที่มีคาร์ทเหมือนกับ \mathbf{h} เรียกว่า ไฮเปอร์แมพผกผัน (Inverse Hypermap) เขียนแทนด้วย \mathbf{h}^{-1} โดยนิยามว่า $\mathbf{h}^{-1} = (\mathcal{V}_{\mathbf{h}}^{-1}, \mathcal{F}_{\mathbf{h}}^{-1})$ ซึ่งจะทำให้ผลคูณของ \mathbf{h} และ \mathbf{h}^{-1} เป็นไฮเปอร์แมพที่ประกอบด้วยการเรียงสับเปลี่ยนเอกลักษณ์ เรียกว่า ไฮเปอร์แมพเอกลักษณ์ (Identity Hypermap) เขียนแทนด้วย id นั่นคือ $\mathbf{h} \odot \mathbf{h}^{-1} = id = \mathbf{h}^{-1} \odot \mathbf{h}$ และเนื่องจากผลคูณไฮเปอร์แมพนี้นิยามบนผลคูณของการเรียงสับเปลี่ยน จึงสืบทอดสมบัติเบื้องต้น ได้แก่ $(\mathbf{a} \odot \mathbf{b})^{\mu} = \mathbf{a}^{\mu} \odot \mathbf{b}^{\mu}$ และ $(\mathbf{h}^{-1})^{\mu} = (\mathbf{h}^{\mu})^{-1}$ ซึ่งจะเขียนแทนโดยง่ายว่า $\mathbf{h}^{-\mu}$

บทนิยาม 3.1.2 (กฎการผลิต; Production Rule)

กฎการผลิต (Production Rule) คือคู่อันดับของไฮเปอร์แมพ $\mathbf{p} = (\mathbf{l}, \mathbf{r})$ ที่กำหนดว่า $D_{\mathbf{l}} \subseteq D_{\mathbf{r}}$ นิยามเขียนแทนในรูปตัวดำเนินการลูกศรคือ $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}$ โดยจะเรียกไฮเปอร์แมพ \mathbf{l} และ \mathbf{r} ว่า ด้านซ้ายมือ (Left-Hand Side) และ ด้านขวามือ (Right-Hand Side) ของ \mathbf{p} ตามลำดับ

บทนิยาม 3.1.3 (การนำมาใช้ได้ของกฎการผลิต; Applicable)

กฎการผลิต $\mathbf{p} = (\mathbf{l}, \mathbf{r})$ สามารถนำมาใช้ (Applicable) กับไฮเปอร์แมพ \mathbf{h} ถ้าหากด้านซ้ายมือ \mathbf{l} เป็นไฮเปอร์แมพย่อยสมมูลฐานของ \mathbf{h} และหากระบุฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{\mathbf{l}} \rightarrow D_{\mathbf{h}}$ ที่ทำให้ $\mathbf{l}^{\mu} \subseteq \mathbf{h}$ จะกล่าวได้ว่ากฎ \mathbf{p} สามารถนำมาใช้ด้วยฟังก์ชัน μ (μ -Applicable) กับไฮเปอร์แมพ \mathbf{h}

บทนิยาม 3.1.4 (การถูกแปลงได้ด้วยกฎการผลิต; Derivable)

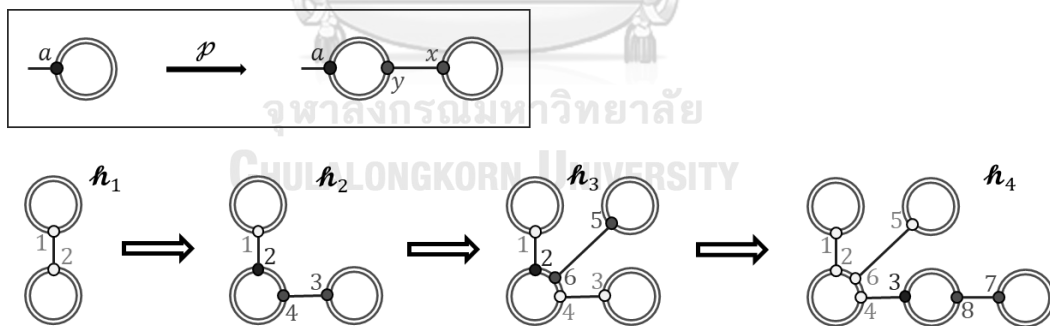
ไฮเพอร์แมพ \mathbf{h}' สามารถถูกแปลง (Derivable) จากไฮเพอร์แมพ \mathbf{h} ด้วยกฎการผลิต $\mathcal{p} = (\ell, \mathbf{r})$ เขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย $\mathbf{h} \Rightarrow_{\mathcal{p}} \mathbf{h}'$ ถ้าหากมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{\mathbf{r}} \rightarrow D_{\mathbf{h}'}$ ที่สอดคล้องกับสามเงื่อนไขต่อไปนี้ (กำหนดให้ $\nu = \mu|_{D_{\ell} \times D_{\mathbf{h}}}$)

- \mathcal{p} สามารถนำมาใช้ด้วยฟังก์ชัน ν กับ \mathbf{h} กล่าวคือ $\ell^\mu = \ell^\nu \subseteq \mathbf{h}$
- $\mu[D_{\mathbf{r}} - D_{\ell}] = \mu[D_{\mathbf{r}}] - \nu[D_{\ell}] = D_{\mathbf{h}'} - D_{\mathbf{h}}$
- $\mathbf{h}' = \mathbf{r}^\mu \odot \ell^{-\nu} \odot \mathbf{h} = (\mathbf{r} \odot \ell^{-1})^\mu \odot \mathbf{h}$

โดยจะเขียนแทนด้วย $\mathbf{h} \Rightarrow_{\mathcal{p}^\mu} \mathbf{h}'$ หากต้องการระบุฟังก์ชัน μ ที่ใช้ในการแปลง

นอกจากนี้สำหรับเซตจำกัด \mathcal{P} ของกฎการผลิต จะกล่าวว่า \mathbf{h}' สามารถถูกแปลงในจำนวนขั้นตอนจำกัด (Derivable in Finite Steps) จาก \mathbf{h} ด้วยกฎการผลิตใน \mathcal{P} เขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย $\mathbf{h} \Rightarrow_{\mathcal{P}}^* \mathbf{h}'$ เมื่อมีลำดับจำกัดของไฮเพอร์แมพ $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ โดยที่ $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}$ และ $\mathbf{h}_n = \mathbf{h}'$ และสำหรับทุกจำนวนเต็ม $i \in [1..n]$ จะมีบางกฎการผลิต \mathcal{p} ใน \mathcal{P} ที่ทำให้ $\mathbf{h}_{i-1} \Rightarrow_{\mathcal{p}} \mathbf{h}_i$ ซึ่งกล่าวได้ว่า n คือ จำนวนขั้นตอนในการแปลง และสามารถเขียนแทนแบบเจาะจงได้ว่า $\mathbf{h} \Rightarrow_{\mathcal{P}}^n \mathbf{h}'$

โดยในงานนี้จะเขียนคาร์ทของกฎการผลิตในรูปของตัวแปร เพื่อลดความสับสนเมื่อนำไปใช้แปลงไฮเพอร์แมพและเพื่อความสะดวกในการเขียนพิสูจน์ ในบทต่อ ๆ ไป



ภาพที่ 6 ตัวอย่างกฎการผลิตและการแปลงด้วยกฎการผลิต

ตัวอย่าง 3.1.5 กฎการผลิตและการแปลงด้วยกฎการผลิต

กำหนดกฎการผลิต $\mathcal{p} = (\ell, \mathbf{r})$ ดังต่อไปนี้ (แสดงได้ดังภาพที่ 6)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a) \\ \mathcal{F} : (a) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a y)(x) \\ \mathcal{F} : (a x y) \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า \mathcal{p} สามารถนำไปใช้ได้กับทุกไฮเพอร์แมพ เนื่องจาก ℓ มีคาร์ทเดียว ℓ จึงเป็นไฮเพอร์แมพย่อยสมมูลฐานของทุกไฮเพอร์แมพ และยังได้ว่า ℓ เป็นไฮเพอร์แมพเอกลักษณ์

กำหนดให้ $\mathfrak{h}_1 = \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (1)(2) \\ \mathcal{F} : (1\ 2) \end{array} \right]$ และ $\mu_1 = \{(a, 2), (x, 3), (y, 4)\}$ หาก $\mathfrak{h}_1 \Rightarrow_{p^{\mu_1}} \mathfrak{h}_2$ จะได้

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_2 &= \mathbf{r}^{\mu_1} \odot \mathbf{l}^{-\mu_1} \odot \mathfrak{h}_1 \\ &= \mathbf{r}^{\mu_1} \odot \mathfrak{h}_1 \\ &= \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (2\ 4)(3) \\ \mathcal{F} : (2\ 3\ 4) \end{array} \right] \odot \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (1)(2) \\ \mathcal{F} : (1\ 2) \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (1)(2\ 4)(3) \\ \mathcal{F} : (1\ 2\ 3\ 4) \end{array} \right] \end{aligned}$$

กำหนดให้ $\mu_2 = \{(a, 2), (x, 5), (y, 6)\}$ และให้ $\mathfrak{h}_2 \Rightarrow_{p^{\mu_2}} \mathfrak{h}_3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3 &= \mathbf{r}^{\mu_2} \odot \mathbf{l}^{-\mu_2} \odot \mathfrak{h}_2 \\ &= \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (2\ 6)(5) \\ \mathcal{F} : (2\ 5\ 6) \end{array} \right] \odot \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (1)(2\ 4)(3) \\ \mathcal{F} : (1\ 2\ 3\ 4) \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (1)(2\ 6\ 4)(3)(5) \\ \mathcal{F} : (1\ 2\ 5\ 6\ 3\ 4) \end{array} \right] \end{aligned}$$

กำหนดให้ $\mathfrak{h}_3 \Rightarrow_{p^{\mu_3}} \mathfrak{h}_4 = \left[\begin{array}{c} \mathcal{V} : (1)(2\ 6\ 4)(3\ 8)(5)(7) \\ \mathcal{F} : (1\ 2\ 5\ 6\ 3\ 7\ 8\ 4) \end{array} \right]$ จะได้ว่า

$$\mu_3 = \{(a, 3), (x, 7), (y, 8)\}$$

ซึ่งการแปลงไฮเพอร์แมพทั้งหมดข้างต้นสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 6

บทตั้ง 3.1.6 กำหนดไฮเพอร์แมพ $\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, และ \mathfrak{b} โดยที่ $\mathfrak{h} \Rightarrow_{p^n} \mathfrak{a}' \simeq \mathfrak{a} \Rightarrow_p \mathfrak{b}$ จะได้ว่ามีไฮเพอร์แมพ \mathfrak{b}' ที่ทำให้ $\mathfrak{h} \Rightarrow_{p^{n+1}} \mathfrak{b}' \simeq \mathfrak{b}$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, และ \mathfrak{b} เป็นไฮเพอร์แมพ โดยที่ $\mathfrak{h} \Rightarrow_{p^n} \mathfrak{a}' \simeq \mathfrak{a} \Rightarrow_p \mathfrak{b}$

จาก $\mathfrak{a} \Rightarrow_p \mathfrak{b}$ จะได้ว่ามีกฎ $p = (\mathbf{l}, \mathbf{r}) \in \mathcal{P}$ และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{\mathbf{r}} \rightarrow D_{\mathbf{b}}$ โดยที่ $\mu[D_{\mathbf{r}}] - \mu[D_{\mathbf{l}}] = D_{\mathbf{b}} - D_{\mathbf{a}}$ ที่ทำให้ $\mathbf{l}^v \subseteq \mathfrak{a}$ และ $\mathfrak{b} = \mathbf{r}^\mu \odot \mathbf{l}^{-v} \odot \mathfrak{a}$ เมื่อ $v = \mu|_{D_{\mathbf{l}} \times D_{\mathbf{a}}}$

จาก $\mathfrak{a}' \simeq \mathfrak{a}$ จะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\xi : D_{\mathbf{a}} \rightarrow D_{\mathbf{a}'}$ ที่ทำให้ $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}^\xi$ ซึ่งจาก $\mathbf{l}^v \subseteq \mathfrak{a}$ จะได้ว่า $\mathbf{l}^{v\xi} \subseteq \mathfrak{a}^\xi = \mathfrak{a}'$ ดังนั้นกฎ p สามารถนำมาใช้กับ \mathfrak{a}' ด้วยฟังก์ชัน $\phi : D_{\mathbf{r}} \rightarrow D_{\mathbf{a}'}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่นิยามว่า $\phi = v\xi$

กำหนดให้ S เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $D_{\mathbf{b}}$ และ $D_{\mathbf{a}'} \subseteq S$ และกำหนดให้ $\psi : D_{\mathbf{r}} \rightarrow S$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- $d^\psi = d^\phi$ สำหรับทุก $d \in D_{\mathbf{r}}$ กล่าวคือ ϕ เป็นฟังก์ชันจำกัดของ ψ
- $d^\psi \notin D_{\mathbf{a}'}$ สำหรับทุก $d \notin D_{\mathbf{r}}$ กล่าวคือ $\psi[D_{\mathbf{r}} - D_{\mathbf{r}}] = S - D_{\mathbf{a}'}$

และหากให้ $\mathfrak{b}' = \mathbf{r}^\psi \odot \mathbf{l}^{-\phi} \odot \mathfrak{a}'$ จะได้ $D_{\mathbf{b}'} = S$ และสรุปได้ว่า $\mathfrak{a}' \Rightarrow_p \mathfrak{b}'$ ตามบทนิยามที่

3.1.4 ดังนั้นจาก $\mathfrak{h} \Rightarrow_{p^n} \mathfrak{a}'$ จะได้ว่า $\mathfrak{h} \Rightarrow_{p^{n+1}} \mathfrak{b}'$

กำหนดให้ $\chi : D_{\mathfrak{b}} \rightarrow D_{\mathfrak{b}'}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- $d^x = d^\xi$ สำหรับทุก $d \in D_a$ กล่าวคือ ξ เป็นฟังก์ชันจำกัดของ χ
- $d^\psi = d^{\mu x}$ สำหรับทุก $d \in D_r$ กล่าวคือ $\psi = \mu\chi$

ซึ่งสอดคล้องกับ $\phi = v\xi$ เนื่องจาก $\phi = \psi|_{D_e \times D_a} = (\mu|_{D_e \times D_a})(\chi|_{D_a \times D_a}) = v\xi$ จะได้ว่า

$$\mathfrak{b}' = r^\psi \odot \ell^{-\phi} \odot a' = r^{\mu x} \odot \ell^{-v\xi} \odot a^\xi = (r^\mu \odot \ell^{-v} \odot a)^x = \mathfrak{b}^x$$

กล่าวคือ $\mathfrak{b}' \simeq \mathfrak{b}$ ดังนั้นจะมีแมพ \mathfrak{b}' ที่ซึ่ง $\mathfrak{h} \Rightarrow_p^{n+1} \mathfrak{b}' \simeq \mathfrak{b}$ ■

บทนิยาม 3.1.7 (ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ; Hypermap Grammar)

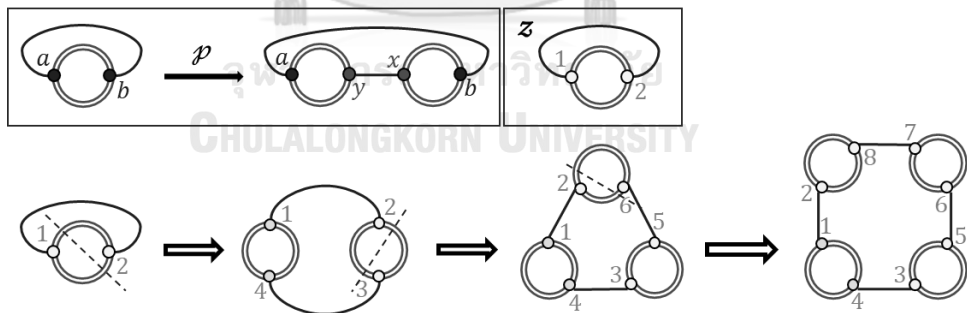
กำหนดให้ G เป็น ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ (Hypermap Grammar) จะได้ว่า $G = \langle P, z \rangle$ โดยที่ P คือเซตจำกัดของกฎการผลิต และ $z \in \mathbb{H}$ เรียกว่า ไฮเปอร์แมพเริ่มต้น (Starting Hypermap)

บทนิยาม 3.1.8 (ภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ; Generated Language)

ภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ $G = \langle P, z \rangle$ เขียนแทนด้วย $L(G)$ หมายถึง ภาษาไฮเปอร์แมพที่ประกอบด้วยไฮเปอร์แมพทั้งหมด ที่มีไฮเปอร์แมพที่สมมูลฐานกันถูกแปลงมาจากไฮเปอร์แมพเริ่มต้น z ในจำนวนขั้นตอนจำกัดด้วยกฎการผลิตใน P กล่าวคือ

$$L(G) = \{ \mathfrak{h} \in \mathbb{H} \mid z \Rightarrow_p^* \mathfrak{h}' \simeq \mathfrak{h} \}$$

เรียกไฮเปอร์แมพที่อยู่ในภาษานี้ว่า ไฮเปอร์แมพที่กำเนิดจาก G หรือ ไฮเปอร์แมพที่สร้างมาจาก G



ภาพที่ 7 ตัวอย่างไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพสำหรับภาษาแมพวัฏจักร

ตัวอย่าง 3.1.9 ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพและภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ

กำหนดไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ $G = \langle P, z \rangle$ เมื่อ P ประกอบด้วยหนึ่งกฎการผลิตคือ $p = (\ell, r)$ โดย p และ z จะแสดงในภาพที่ 7 โดยเขียนบรรยายออกมาได้ดังนี้

$$p = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a \ b) \\ \mathcal{F} : (a)(b) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a \ y)(b \ x) \\ \mathcal{F} : (a \ x)(b \ y) \end{bmatrix} \right) \text{ และ } z = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (1 \ 2) \\ \mathcal{F} : (1)(2) \end{bmatrix}$$

เมื่อสังเกตจากไฮเพอร์แมพด้านซ้ายมือ ℓ ของกฎ p จะกล่าวได้ว่า การนำ p ไปใช้กับไฮเพอร์แมพ \mathbf{h} ใดก็ตาม p จะมองหาไฮเพอร์แมพย่อยใน \mathbf{h} ที่มีลักษณะคือ ประกอบด้วยสองดาร์ทอยู่ในจุดยอดเดียวแต่ปรากฏอยู่คนละหน้ากัน

ดังนั้นหาก p สามารถนำไปใช้กับ \mathbf{h} ได้ด้วยฟังก์ชัน μ แสดงว่า \mathbf{h} จะสามารถเขียนบรรยายได้ว่า

$$\mathbf{h} = \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (A a^\mu B b^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (S a^\mu)(T b^\mu) \end{array} \right]$$

เมื่อ A, B, S, T คือลำดับจำกัดของดาร์ท (ซึ่งอาจเป็นลำดับว่างได้) ในขณะที่ $\hat{\mathcal{V}}$ และ $\hat{\mathcal{F}}$ คือจุดยอดและหน้าอื่น ๆ ที่เหลือของ \mathbf{h} ตามลำดับ

หาก $\mathbf{h} \Rightarrow_{p^\mu} \mathbf{h}'$ จะได้ว่า $\mathbf{h}' = \mathbf{r}^\mu \circ \ell^{-\mu} \circ \mathbf{h}$ ซึ่งสามารถคำนวณและเขียนบรรยายได้ดังนี้

$$\mathbf{h}' = \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (A a^\mu y^\mu)(B b^\mu x^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (S a^\mu x^\mu)(T b^\mu y^\mu) \end{array} \right]$$

และสามารถคำนวณย้อนหา $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}$ ได้ว่า

$$\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{V}_{\mathbf{h}'}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (x^\mu y^\mu)$$

ซึ่งสังเกตว่าไฮเพอร์แมพผลลัพธ์ \mathbf{h}' จะมีจำนวนหน้าเท่าเดิม และมีจุดยอดเพิ่มขึ้นมาหนึ่งจุด โดยเกิดจากการแบ่งจุดยอด $(A a^\mu B b^\mu)$ ออกเป็นสองจุดยอดคือ $(A a^\mu y^\mu)$ และ $(B b^\mu x^\mu)$ ซึ่งจะถูกเชื่อมด้วยเส้นเชื่อม $(x^\mu y^\mu)$ ซึ่งถูกเพิ่มเข้ามาใหม่เช่นกัน

เมื่อพิจารณาไฮเพอร์แมพตั้งต้น \mathbf{z} จะพบว่า \mathbf{z} สามารถใช้กฎการผลิต p ได้ เนื่องจากมีโครงสร้างตามที่ระบุไว้ใน \mathbf{h} ข้างต้น โดยจะได้ว่า A, B, S, T เป็นลำดับว่าง และไม่มีส่วนของ $\hat{\mathcal{V}}$ และ $\hat{\mathcal{F}}$ เลย

ผู้อ่านสามารถตรวจสอบด้วยการทำอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า ไฮเพอร์แมพที่แปลงมาจาก \mathbf{z} ด้วยกฎ p ในจำนวนขั้นตอนจำกัด จะประกอบด้วยสองหน้าเสมอ และทุกจุดยอดจะประกอบด้วยสองดาร์ทซึ่งมาจากคนละหน้ากันเสมอ โดยเขียนบรรยายได้ดังนี้

$$\mathbf{z} \Rightarrow_p^n \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (a^\mu b^\mu) \\ \mathcal{F} : (S a^\mu)(T b^\mu) \end{array} \right] \Rightarrow_{p^\mu} \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (a^\mu y^\mu)(b^\mu x^\mu) \\ \mathcal{F} : (S a^\mu x^\mu)(T b^\mu y^\mu) \end{array} \right]$$

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผู้อ่านสามารถตรวจสอบเพิ่มเติมถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนขั้นตอนการแปลง n และขนาดของ $\hat{\mathcal{V}}, S, T$ ได้ว่า

$$n = \|\hat{\mathcal{V}}\| = |S| = |T|$$

และสุดท้ายนี้ จะกล่าวได้ว่าไฮเพอร์แมพที่กำเนิดจากไวยากรณ์ G เป็นแมพของกราฟวัฏจักร ดังนั้น $L(G)$ คือภาษาของแมพวัฏจักรทั้งหมดที่เป็นไปได้ (ขอละบทพิสูจน์ไว้เพื่อความกระชับ)

3.2 แมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ

บทย่อนี้จะกล่าวถึงแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเคและผลลัพธ์ที่ได้เบื้องต้น ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในบทพิสูจน์ในบทย่อถัดไป

บทนิยาม 3.2.1 (แมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ; Planar k -Tree Map)

กำหนด k เป็นจำนวนเต็มบวก แมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ (Planar k -Tree Map) หมายถึงแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค มีนิยามแบบเวียนเกิดดังต่อไปนี้

- แมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบที่เล็กที่สุด คือ แมพเชิงระนาบของกราฟบริบูรณ์ K_{k+1}
- กำหนด \mathcal{h} เป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบที่มีจุดยอด n จุด แมพใดก็ตามที่เกิดจากการเพิ่มจุดยอด v ที่มีระดับชั้น k ให้กับแมพ \mathcal{h} โดยที่คงสภาพเชิงระนาบของแมพเอาไว้ และจุดยอดเพื่อนบ้านของ v เป็นกลุ่มพรรคพวกอันดับเคใน \mathcal{h} แมพที่ได้นี้จะเป็แมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบที่มีจุดยอด $n + 1$ จุด

โดยจะเรียกเซตของแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบทั้งหมดที่เป็นไปได้ว่า คลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ (Class of Planar k -Tree Maps) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ PT_k

สังเกตว่า PT_k จะเป็นเซตว่างเมื่อ $k > 3$ ซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากนิยามของกราฟเชิงระนาบ กล่าวคือสำหรับ G ที่เป็นกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค จะมีแมพเชิงระนาบสำหรับ G ก็ต่อเมื่อ $k \leq 3$ โดยอธิบายได้จากการที่ G มีกราฟบริบูรณ์ K_{k+1} เป็นกราฟย่อยเสมอ เนื่องจาก G เกิดจากการวนซ้ำเพิ่มจุดยอด โดยเริ่มต้นจากกราฟ K_{k+1} และเมื่อ $k > 3$ จะทำให้ $k + 1 \geq 5$ และได้ว่า K_{k+1} นั้นจะมี K_5 เป็นกราฟย่อยด้วย สรุปได้ว่า G จะมีกราฟ K_5 เป็นกราฟย่อยเสมอ ซึ่งตามทฤษฎีบทของวากเนอร์ จะได้ว่า G ไม่เป็นกราฟเชิงระนาบ จึงไม่มีแมพเชิงระนาบสำหรับ G ดังนั้นต่อจากนี้เมื่อกล่าวถึง PT_k จะหมายถึงกรณีที่ $k \in \{1, 2, 3\}$ โดยปริยาย

จากนี้จะกล่าวถึงผลลัพธ์เบื้องต้น สำหรับบางกรณีของแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ โดยเพื่อให้ง่ายต่อการเขียนพิสูจน์ต่อไป จะนิยามสัญลักษณ์เพิ่มเติมสำหรับไฮเพอร์แมพดังนี้

บทนิยาม 3.2.2 (เซตจุดยอด เซตเส้นเชื่อมไฮเพอร์ และเซตหน้า)

กำหนดไฮเพอร์แมพ \mathcal{h} เซตจุดยอด (Vertex Set), เซตเส้นเชื่อมไฮเพอร์ (Hyperedge Set), และเซตหน้า (Face Set) ของ \mathcal{h} จะเขียนแทนด้วย $\{\mathcal{V}\}_{\mathcal{h}}$, $\{\mathcal{E}\}_{\mathcal{h}}$, และ $\{\mathcal{F}\}_{\mathcal{h}}$ โดยหมายถึงเซตของวัฏจักรทั้งหมดของ $\mathcal{V}_{\mathcal{h}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{h}}$, และ $\mathcal{F}_{\mathcal{h}}$ ตามลำดับ

บทนิยาม 3.2.3 (จุดยอดของดาร์ท เส้นเชื่อมไฮเพอร์ของดาร์ท และหน้าของดาร์ท)

กำหนดไฮเพอร์แมพ \mathcal{h} จะกล่าวว่า

- $V_{\mathcal{h}} : D_{\mathcal{h}} \rightarrow \{\mathcal{V}\}_{\mathcal{h}}$ เป็น ฟังก์ชันจุดยอดของดาร์ท โดยนิยาม $V_{\mathcal{h}}(d) = v$ เมื่อดาร์ท d ปรากฏอยู่ในวัฏจักร v ซึ่งหมายความว่า v คือ จุดยอดของดาร์ท d (หรือ d มาจาก v)
- $E_{\mathcal{h}} : D_{\mathcal{h}} \rightarrow \{\mathcal{E}\}_{\mathcal{h}}$ เป็น ฟังก์ชันเส้นเชื่อมไฮเพอร์ของดาร์ท โดยนิยาม $E_{\mathcal{h}}(d) = e$ เมื่อดาร์ท d ปรากฏอยู่ในวัฏจักร e ซึ่งหมายความว่า e คือ เส้นเชื่อมไฮเพอร์ของดาร์ท d
- และ $F_{\mathcal{h}} : D_{\mathcal{h}} \rightarrow \{\mathcal{F}\}_{\mathcal{h}}$ เป็น ฟังก์ชันหน้าของดาร์ท โดยนิยาม $F_{\mathcal{h}}(d) = f$ เมื่อดาร์ท d ปรากฏอยู่ในวัฏจักร f ซึ่งหมายความว่า f คือ หน้าของดาร์ท d

บทตั้ง 3.2.4 กำหนดให้ $\mathcal{h} \in \text{PT}_k$ เมื่อ $k \geq 2$ หากให้ $v \in \{\mathcal{V}\}_{\mathcal{h}}$ จะได้ว่าดาร์ทที่อยู่ในจุดยอด v จะมาจากหน้าที่แตกต่างกันทั้งหมด และหากให้ $f \in \{\mathcal{F}\}_{\mathcal{h}}$ จะได้ว่าดาร์ทที่อยู่ในหน้า f จะมาจากจุดยอดที่แตกต่างกันทั้งหมด

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 2.5.2 จะได้ว่ากราฟของแมพ $\mathcal{h} \in \text{PT}_k$ นั้นเป็นกราฟเชื่อมต่อกันอันดับ k และเนื่องจาก $k \geq 2$ จึงได้ว่า \mathcal{h} ไม่มีจุดยอดตัด ซึ่งหมายถึงจุดยอดที่มีอย่างน้อยสองดาร์ทปรากฏอยู่ในหน้าเดียวกัน จึงเป็นไปได้ที่จะมีสองดาร์ท ที่ปรากฏอยู่ในจุดยอดและหน้าเดียวกัน ดังนั้นดาร์ทที่อยู่ในจุดยอด v ใดก็ตามของ \mathcal{h} จะมาจากหน้าที่แตกต่างกันทั้งหมด และดาร์ทที่อยู่ในหน้า f ใดก็ตามของ \mathcal{h} จะมาจากจุดยอดที่แตกต่างกันทั้งหมด ■

จากเดิมที่จุดยอดและหน้าของไฮเพอร์แมพนั้นคือวัฏจักรของดาร์ท จากผลของบทตั้งที่ 3.2.4 เมื่อ $\mathcal{h} \in \text{PT}_k$ โดยที่ $k \geq 2$ จะกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันจำกัด $F_{\mathcal{h}}|_{\text{dom}(v)}$ ซึ่งจำกัดโดเมนจาก $D_{\mathcal{h}}$ เหลือเพียงดาร์ทของจุดยอด v จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเสมอสำหรับทุก $v \in \{\mathcal{V}\}_{\mathcal{h}}$ จึงสามารถเขียนบรรยายจุดยอดของ \mathcal{h} ในรูปวัฏจักรของหน้าที่ไม่ซ้ำกันเลย เช่น สมมติให้ $v = (d_1 \dots d_n)$ เป็นจุดยอดของ \mathcal{h} จะได้ว่า $v^{F_{\mathcal{h}}} = (f_1 \dots f_n)$ โดยที่ $F_{\mathcal{h}}(d_i) = f_i$ สำหรับทุกค่า $i \in [1..n]$

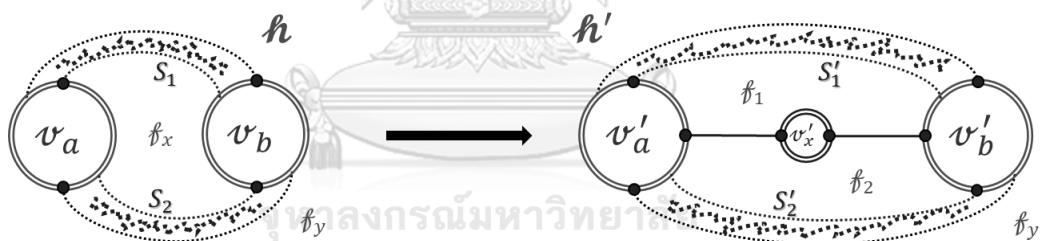
ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันจำกัด $V_{\mathcal{h}}|_{\text{dom}(f)}$ ซึ่งจำกัดโดเมนจาก $D_{\mathcal{h}}$ เหลือเพียงดาร์ทของหน้า f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเสมอสำหรับทุก $f \in \{\mathcal{F}\}_{\mathcal{h}}$ จึงสามารถเขียนบรรยายหน้าของ \mathcal{h} ในรูปวัฏจักรของจุดยอดที่ไม่ซ้ำกันเลย เช่น สมมติให้ $f = (d_1 \dots d_n)$ เป็นหน้าของ \mathcal{h} จะได้ว่า $f^{V_{\mathcal{h}}} = (v_1 \dots v_n)$ โดยที่ $V_{\mathcal{h}}(d_i) = v_i$ สำหรับทุกค่า $i \in [1..n]$

บทตั้ง 3.2.5 กำหนดให้ $\mathcal{h} \in \text{PT}_2$ และ $\mathcal{f} \in \{\mathcal{F}\}_{\mathcal{h}}$ โดยที่ $\mathcal{f}^{V_{\mathcal{h}}} = (v_1 \dots v_n)$ เมื่อ $n \geq 4$ จะได้ว่า จะไม่มีจำนวนเต็ม $i_1, i_2, i_3,$ และ i_4 ที่ซึ่ง $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ และได้ว่า v_{i_1} และ v_{i_3} เป็นจุดยอดประชิด พร้อมกับได้ว่า v_{i_2} และ v_{i_4} เป็นจุดยอดประชิด

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง โดยสมมติว่ามีจำนวนเต็ม $i_1, i_2, i_3,$ และ i_4 ที่ซึ่ง $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ และได้ว่ามีเส้นเชื่อม e_{13} ระหว่างจุดยอด v_{i_1} และ v_{i_3} พร้อมกับได้ว่า มีเส้นเชื่อม e_{24} ระหว่างจุดยอด v_{i_2} และ v_{i_4}

กำหนดให้ G' เป็นกราฟไมเนอร์ของ $G(\mathcal{h})$ ที่เกิดจากการลบจุดยอดทั้งหมดที่ไม่ใช่ v_1, \dots, v_n ตามด้วยการลบเส้นเชื่อมคอร์ดทั้งหมดของวัฏจักร $\mathcal{f}^{V_{\mathcal{h}}}$ ที่ไม่ใช่ e_{13} และ e_{24} และสุดท้ายคือการหذفเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด v_{i-1} และ v_i ใด ๆ (เมื่อ $i \in [1..n]$ และ $v_0 = v_n$) โดยยุบรวมจุดยอดจนเหลือเพียง $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4}$ จะได้ว่า G' คือกราฟบริบูรณ์ K_4 ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 2.5.2 ซึ่งกล่าวไว้ว่ากราฟเชิงต้นไม้อันดับสอง จะต้องไม่มีกราฟบริบูรณ์ K_4 เป็นกราฟไมเนอร์

ดังนั้นสรุปได้ว่า จะไม่มีจำนวนเต็ม $i_1, i_2, i_3,$ และ i_4 ที่ซึ่ง $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ และได้ว่า v_{i_1} และ v_{i_3} เป็นจุดยอดประชิด พร้อมกับได้ว่า v_{i_2} และ v_{i_4} เป็นจุดยอดประชิด ■



ภาพที่ 8 การใส่จุดยอดเพิ่มในแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ

บทตั้ง 3.2.6 กำหนดให้ $\mathcal{h} \in \text{PT}_2$ สองจุดยอด v_1 และ v_2 ใดก็ตามที่ต่างกันของ \mathcal{h} จะเป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ $|F_{\mathcal{h}}(v_1) \cap F_{\mathcal{h}}(v_2)| \geq 2$

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงโครงสร้างบนนิยามเวียนเกิดจากบทนิยามที่ 3.2.1

ขั้นฐาน แมพที่เล็กที่สุดใน PT_2 คือแมพเชิงระนาบของกราฟ K_3 ซึ่งประกอบด้วยสามจุดยอดซึ่งเป็นจุดยอดประชิดของกันและกัน และประกอบด้วยสองหน้าซึ่งเป็นหน้าที่มีร่วมกันของทั้งสามจุดยอด

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ $\mathcal{h} \in \text{PT}_2$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัยให้สองจุดยอด v_1 และ v_2 ใดก็ตามที่ต่างกันของ \mathcal{h} เป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ $|F_{\mathcal{h}}(v_1) \cap F_{\mathcal{h}}(v_2)| \geq 2$ โดยเพื่อความสะดวกจากนี้จะกำหนดให้ $F_{\mathcal{h}}(v_1, v_2) = F_{\mathcal{h}}(v_1) \cap F_{\mathcal{h}}(v_2)$

พิจารณาให้ $\mathbf{h}' \in \mathbb{P}T_2$ โดยสร้างจาก \mathbf{h} ตามนิยามแบบเวียนเกิด โดยการเพิ่มจุดยอด v'_x ให้กับ \mathbf{h} เมื่อ $|v'_x| = 2$ และจุดยอดเพื่อนบ้านของ v'_x คือสองจุดยอดประชิด v'_a และ v'_b ของแมพ \mathbf{h} ซึ่งจะกลายเป็นจุดยอด v'_a และ v'_b ของแมพ \mathbf{h}' โดยมีระดับชั้นเพิ่มขึ้นจุดยอดละหนึ่งตามลำดับ ซึ่งสังเกตว่า $\mathbf{h}' - v'_x = \mathbf{h}$ นั่นแปลว่าคุณสมบัติการประชิดกันของจุดยอดใน \mathbf{h} นั้นจะถูกส่งต่อไปยัง \mathbf{h}' ด้วย เพื่อความสะดวกในการเขียนบทพิสูจน์ จากนั้นจุดยอด v ใด ๆ ของ \mathbf{h} จะถูกเขียนแทนด้วย v' เพื่อระบุถึงจุดยอดเดียวกันที่อยู่ใน \mathbf{h}' และในทำนองกลับกัน จุดยอด v' ของ \mathbf{h}' จะถูกเขียนแทนด้วย v เพื่อระบุถึงจุดยอดเดียวกันที่อยู่ใน \mathbf{h}

เพื่อให้คงสถานะเชิงระนาบ สมมติให้จุดยอด v'_x ถูกใส่ลงในหน้า f_x ของแมพ \mathbf{h} ซึ่งจากบทตั้งที่ 3.2.4 จะได้ว่าดาร์ทใน f_x จะมาจากจุดยอดที่ต่างกันทั้งหมด โดยสมมติให้ $f_x^{V\mathbf{h}} = (S_1 v'_a S_2 v'_b)$ เมื่อ S_1 กับ S_2 เป็นลำดับจำกัดของจุดยอด โดย f_x จะถูกแบ่งออกกลายเป็นสองหน้า f_1 และ f_2 ของแมพ \mathbf{h}' โดยจะได้ว่า $f_1^{V\mathbf{h}'} = (S'_1 v'_a v'_x v'_b)$ และ $f_2^{V\mathbf{h}'} = (v'_x v'_a S'_2 v'_b)$ โดยแสดงได้ดังภาพที่ 8 กำหนดให้ $V' = \{V\}_{\mathbf{h}'} - \cup_{i=1}^2 V_{\mathbf{h}'}(f_i)$ คือเซตจุดยอดของ \mathbf{h}' ที่ไม่เกี่ยวข้องกับหน้า f_1 กับ f_2 จะสามารถพิจารณาเซตหน้าของจุดยอด v' ของ \mathbf{h}' โดยแบ่งกรณีได้ดังนี้

- กรณี $v' = v'_x$: จะได้ว่า $F_{\mathbf{h}'}(v') = \{f_1, f_2\}$,
- กรณี $v' \in \{v'_a, v'_b\}$: จะได้ว่า $F_{\mathbf{h}'}(v') = (F_{\mathbf{h}}(v) - \{f_x\}) \cup \{f_1, f_2\}$
- กรณี $v' \in S'_i$: จะได้ว่า $F_{\mathbf{h}'}(v') = (F_{\mathbf{h}}(v) - \{f_x\}) \cup \{f_i\}$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$
- กรณี $v' \in V'$: จะได้ว่า $F_{\mathbf{h}'}(v') = F_{\mathbf{h}}(v)$

จากนี้จะพิจารณาคู่จุดยอด v'_1 และ v'_2 ที่ต่างกันของ \mathbf{h}' โดยแบ่งเป็นกรณีดังต่อไปนี้

- กรณี $v'_1 = v'_x$ และ $v'_2 \in \{v'_a, v'_b\}$
จะได้ว่า v'_1 กับ v'_2 เป็นจุดยอดประชิด
และมีหน้าร่วมกันสองหน้า คือ $F_{\mathbf{h}'}(v'_1, v'_2) = \{f_1, f_2\}$
- กรณี $v'_1 = v'_x$ และ $v'_2 \in S'_i$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$
 v'_1 และ v'_2 ไม่เป็นจุดยอดประชิด
และมีหน้าร่วมกันเพียงหน้าเดียว คือ $F_{\mathbf{h}'}(v'_1, v'_2) = \{f_i\}$
- กรณี $v'_1 = v'_x$ และ $v'_2 \in V'$
จะได้ว่า v'_1 และ v'_2 ไม่เป็นจุดยอดประชิด
และไม่มีหน้าร่วมกันเลย นั่นคือ $F_{\mathbf{h}'}(v'_1, v'_2) = \emptyset$

- กรณี $v'_1 = v'_a$ และ $v'_2 = v'_b$
 จะได้ว่า v'_1 และ v'_2 เป็นจุดยอดประชิด (เช่นเดียวกับ v_1 และ v_2)
 และได้ว่า $F_{h'}(v'_1, v'_2) = (F_h(v_1, v_2) - \{f_x\}) \cup \{f_1, f_2\}$
 ดังนั้นจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้ว่า $|F_{h'}(v'_1, v'_2)| > |F_h(v_1, v_2)| \geq 2$
- กรณี $v'_1 \in \{v'_a, v'_b\} \cup S'_i$ และ $v'_2 \in S'_i$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$
 เนื่องจาก v'_1 และ v'_2 จะเป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ v_1 และ v_2 เป็นจุดยอดประชิด
 และเนื่องจาก $F_{h'}(v'_1, v'_2) = (F_h(v_1, v_2) - \{f_x\}) \cup \{f_i\}$
 ซึ่งได้ว่า $|F_{h'}(v'_1, v'_2)| = |F_h(v_1, v_2)|$ ดังนั้นจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้ว่า v'_1
 และ v'_2 จะเป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ $|F_{h'}(v'_1, v'_2)| \geq 2$
- กรณี $v'_1 \in S'_1$ และ $v'_2 \in S'_2$
 จากบทตั้งที่ 3.2.5 จะได้ว่า v'_1 และ v'_2 ไม่เป็นจุดยอดประชิด (เช่นเดียวกับ v_1 และ v_2)
 และมีหน้าร่วมกัน คือ $F_{h'}(v'_1, v'_2) = F_h(v_1, v_2) - \{f_x\}$
 ดังนั้นจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้ว่า $|F_{h'}(v'_1, v'_2)| < |F_h(v_1, v_2)| < 2$
- กรณี $v'_1 \in \bar{V}$ และ $v'_2 \in \{V\}_{h'} - \{v'_x\}$
 เนื่องจาก v'_1 และ v'_2 จะเป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ v_1 และ v_2 เป็นจุดยอดประชิด
 และเนื่องจาก $F_{h'}(v'_1, v'_2) = F_h(v_1, v_2)$ ดังนั้นจากสมมติฐานเชิงอุปนัย จะได้ว่า v'_1
 และ v'_2 จะเป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ $|F_{h'}(v'_1, v'_2)| \geq 2$

จากทุกกรณีที่กล่าวมาข้างต้น จึงสรุปได้ว่าสองจุดยอด v'_1 และ v'_2 ใดก็ตามที่ต่างกันของ h' เป็นจุดยอดประชิด ก็ต่อเมื่อ $|F_{h'}(v'_1, v'_2)| \geq 2$ ■

3.3 ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ

ในบทย่อนี้จะแสดงให้เห็นว่าคลาสของแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค สำหรับแต่ละค่า $k \in [1..3]$ สามารถกำเนิดได้จากไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ โดยแต่ละไวยากรณ์ที่นำเสนอจะประกอบด้วยเพียงหนึ่งกฎการผลิตเท่านั้น ซึ่งสะท้อนให้เห็นว่าคลาสของแมพเชิงระนาบของกราฟเชิงต้นไม้อันดับเค มีความซับซ้อนไม่มากนักภายใต้การนำเสนอด้วยไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ

เพื่อความสะดวกในการอธิบายและทำความเข้าใจ จะใช้สัญลักษณ์ p_k แทนกฎการผลิตที่ใช้ก่อกำเนิดคลาส PT_k สำหรับแต่ละค่า $k \in [1..3]$ ดังต่อไปนี้

1) ให้ $p_1 = (\ell_1, r_1)$ คือกฎการผลิต

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a) \\ \mathcal{F} : (a) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a y)(x) \\ \mathcal{F} : (a x y) \end{bmatrix}$$

2) ให้ $p_2 = (\ell_2, r_2)$ คือกฎการผลิต

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a_1 b_1)(a_2 b_2) \\ \mathcal{F} : (a_1 a_2)(b_1 b_2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a_1 y_1 b_1)(a_2 y_2 b_2)(x_2 x_1) \\ \mathcal{F} : (a_1 x_1 y_2)(a_2 x_2 y_1)(b_1 b_2) \end{bmatrix}$$

3) ให้ $p_3 = (\ell_3, r_3)$ คือกฎการผลิต

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a_1)(a_2)(a_3) \\ \mathcal{F} : (a_1 a_2 a_3) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{V} : (a_1 y_1)(a_2 y_2)(a_3 y_3)(x_3 x_2 x_1) \\ \mathcal{F} : (a_1 x_1 y_3)(a_2 x_2 y_1)(a_3 x_3 y_2) \end{bmatrix}$$

และจะกำหนดไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ $G_k = \langle \{p_k\}, z_k \rangle$ เมื่อ z_k คือแมพเชิงระนาบของกราฟบริบูรณ์ K_{k+1} โดยจากนี้จะแสดงบทพิสูจน์สำหรับแต่ละค่า k ว่า G_k ก่อกำเนิดคลาส PT_k

สำหรับกรณี $k = 1$ การใช้กฎการผลิต p_1 โดยเริ่มจากไฮเพอร์แมพ z_1 ได้แสดงไว้เป็นตัวอย่างในภาพที่ 6 ซึ่งสามารถเห็นแนวโน้มได้ว่าไฮเพอร์แมพที่ได้จะเป็นแมพของกราฟต้นไม้ เนื่องจากการเพิ่มจุดยอดระดับชั้นหนึ่ง ณ ตำแหน่งใด ๆ โดยมีรายละเอียดการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1 ภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ G_1 จะเป็นเซตเดียวกันกับ คลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่ง กล่าวคือ $L(G_1) = \text{PT}_1$

บทพิสูจน์ จะแบ่งบทพิสูจน์ออกเป็นสองส่วน โดยในส่วนแรกจะแสดง $L(G_1) \subseteq \text{PT}_1$ นั่นคือทุกไฮเพอร์แมพที่กำเนิดจาก G_1 จะเป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งเชิงระนาบ และในส่วนที่สองจะแสดง $L(G_1) \supseteq \text{PT}_1$ นั่นคือ ทุกแมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งเชิงระนาบจะสามารถสร้างมาจาก G_1

1) ส่วนแรกจะแสดง $L(G_1) \subseteq \text{PT}_1$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนขั้นตอนในการแปลง เพื่อแสดงสำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ ว่าหาก h เป็นไฮเพอร์แมพที่ $z_1 \Rightarrow_{p_1}^n h$ แล้วจะได้ว่า $h \in \text{PT}_1$ ซึ่งชัดเจนว่าไฮเพอร์แมพที่สมมูลฐานกับ h ย่อมเป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งเชิงระนาบด้วย ขั้นฐาน ไฮเพอร์แมพเดียวที่แปลงจาก z_1 ในศูนย์ขั้นตอนก็คือ z_1 เอง ซึ่งเป็นแมพเชิงระนาบของกราฟ K_2 ดังนั้น z_1 คือแมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งเชิงระนาบที่เล็กที่สุดตามบทนิยามที่ 3.2.1

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ h เป็นไฮเพอร์แมพที่ $z_1 \Rightarrow_{p_1}^n h$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัย (Inductive Hypothesis) ให้ $h \in \text{PT}_1$ จากนี้จะพิจารณาไฮเพอร์แมพ h' ที่เกิดจาก $h \Rightarrow_{p_1} h'$ จะได้ว่า $z_1 \Rightarrow_{p_1}^{n+1} h'$ และจากบทนิยามที่ 3.1.4 จะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{r_1} \rightarrow D_{h'}$ ที่ซึ่ง

$\mu[D_{r_1}] - \mu[D_{\ell_1}] = D_{h'} - D_h$ และ $\ell_1^\mu \subseteq h$ และได้ว่า $h' = r_1^\mu \odot \ell_1^{-\mu} \odot h$ ดังนั้นจึงสามารถเขียนบรรยาย h และ h' ได้ว่า

$$h = \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (S a^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (T a^\mu) \end{array} \right], h' = \left[\begin{array}{l} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (S a^\mu y^\mu)(x^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (T a^\mu x^\mu y^\mu) \end{array} \right]$$

เมื่อ S กับ T คือลำดับจำกัดของคาร์ทใน D_h และ $\hat{\mathcal{V}}$ กับ $\hat{\mathcal{F}}$ ประกอบด้วยวัฏจักรทั้งหมดของ \mathcal{V}_h กับ \mathcal{F}_h ที่ไม่มีคาร์ทของ ℓ_1^μ เป็นสมาชิกตามลำดับ โดยสามารถคำนวณการเรียงสับเปลี่ยน $\mathcal{E}_{h'}$ ได้ว่า $\mathcal{E}_{h'} = \mathcal{V}_{h'}^{-1} \mathcal{F}_{h'} = \mathcal{E}_h \cdot (x^\mu y^\mu)$ ซึ่งจากสมมติฐานเชิงอุปนัยจะได้ว่า h เป็นแมพเชิงระนาบ นั่นคือ $\|\mathcal{V}_h\| - \|\mathcal{E}_h\| + \|\mathcal{F}_h\| = 2$ และ \mathcal{E}_h เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ ซึ่งจาก $\mathcal{E}_{h'} = \mathcal{E}_h \cdot (x^\mu y^\mu)$ จะได้ว่า $\mathcal{E}_{h'}$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ด้วย และจากการเขียนบรรยายของ h และ h' จะเห็นได้ว่า $\|\mathcal{V}_{h'}\| = \|\mathcal{V}_h\| + 1$, $\|\mathcal{E}_{h'}\| = \|\mathcal{E}_h\| + 1$, และ $\|\mathcal{F}_{h'}\| = \|\mathcal{F}_h\|$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\|\mathcal{V}_{h'}\| - \|\mathcal{E}_{h'}\| + \|\mathcal{F}_{h'}\| = (\|\mathcal{V}_h\| + 1) - (\|\mathcal{E}_h\| + 1) + \|\mathcal{F}_h\| = 2$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า h' เป็นแมพเชิงระนาบ นอกจากนี้ยังกล่าวได้ว่า h' เกิดจากการเพิ่มจุดยอดระดับชั้นหนึ่ง (x^μ) ให้กับ h โดยเชื่อมต่อด้วยเส้นเชื่อม $(x^\mu y^\mu)$ กับจุดยอดของ h ที่มี a^μ เป็นสมาชิก นั่นคือจุดยอด $(S a^\mu)$ จึงกล่าวได้ว่าจุดยอดเพื่อนบ้านของ (x^μ) มีเพียงจุดยอดเดียว ซึ่งถือเป็นกลุ่มพรรคพวกอันดับหนึ่งใน h ดังนั้นจากนิยามเวียนเกิดในบทนิยามที่ 3.2.1 จะได้ว่า $h' \in \text{PT}_1$

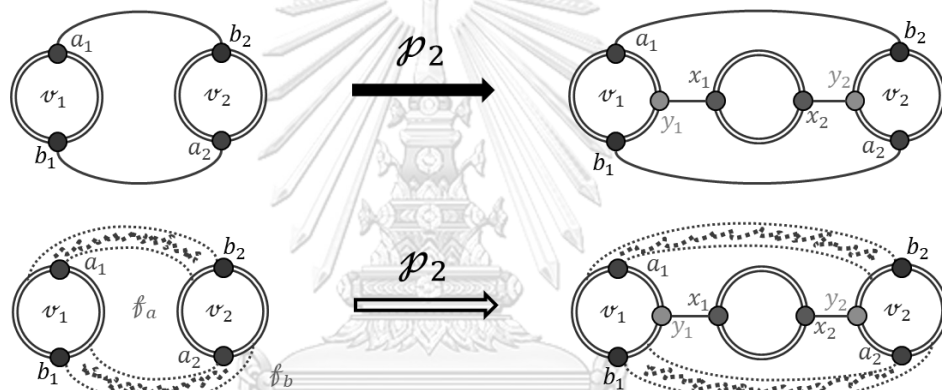
2) ส่วนที่สองจะแสดง $L(G_1) \supseteq \text{PT}_1$ โดยใช้อุปนัยเชิงโครงสร้างบนนิยามแบบเวียนเกิดของแมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งเชิงระนาบในบทนิยามที่ 3.2.1 เพื่อแสดงว่าทุกแมพ $h \in \text{PT}_1$ จะมีแมพ \tilde{h} ที่สมลัณฐานกัน $\tilde{h} \simeq h$ ที่ทำให้ $z_1 \Rightarrow_{p_1}^n \tilde{h}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}$

ขั้นฐาน แมพเชิงต้นไม้อันดับหนึ่งเชิงระนาบที่เล็กที่สุดตามบทนิยามที่ 3.2.1 คือแมพเชิงระนาบของกราฟ K_2 ซึ่งหมายถึงแมพ h ใดก็ตามที่สมลัณฐานกับ z_1 ซึ่งจะได้ว่า $z_1 \Rightarrow_{p_1}^0 z_1 \simeq h$

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ $h \in \text{PT}_1$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัย (Inductive Hypothesis) ให้มีแมพ \tilde{h} ที่ทำให้ $z_1 \Rightarrow_{p_1}^n \tilde{h} \simeq h$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จากนี้จะพิจารณาแมพ $h' \in \text{PT}_1$ ที่สร้างตามนิยามเวียนเกิดในบทนิยามที่ 3.2.1 ด้วยการเพิ่มจุดยอดระดับชั้นหนึ่ง $v = (\hat{x})$ ให้กับ h เมื่อ $\hat{x} \notin D_h$ โดยจุดยอดเพื่อนบ้านของ v จะเป็นกลุ่มพรรคพวกอันดับหนึ่งใน h ดังนั้นจุดยอดเพื่อนบ้านของ v มีเพียงจุดยอดเดียวสมมติว่าคือ $u \in \{V\}_h$ เนื่องจากทุกจุดยอดใน h จะมีระดับขึ้นอย่างน้อยหนึ่ง จึงจะเขียนแทน u ว่า $u = (S \hat{a})$ เมื่อ S คือลำดับจำกัดของคาร์ทใน D_h และ $\hat{a} \in D_h$ ซึ่งหลังจากการเพิ่มจุดยอด v เข้ามาเชื่อมต่อกับ u ด้วยเส้นเชื่อม $(\hat{x} \hat{y})$ เมื่อ $\hat{y} \notin D_h$ โดยเชื่อมเข้า

หลังคาร์ท \hat{a} จะได้ว่า u จะกลายเป็นจุดยอด $u' = (S \hat{a} \hat{y}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{h}'}$ ดังนั้นหากเขียนด้วยสัญกรณ์
 วัฏจักรได้ว่า $\mathcal{V}_{\mathbf{h}} = \mathcal{V} \cdot u = \mathcal{V} \cdot (S \hat{a})$ เมื่อ \mathcal{V} ประกอบด้วยจุดยอดอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ u ก็จะสามารถ
 เขียนได้ว่า $\mathcal{V}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{V} \cdot u' \cdot \nu = \mathcal{V} \cdot (S \hat{a} \hat{y})(\hat{x})$ และได้ $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (\hat{x} \hat{y})$ ดังนั้นหาก $\mathcal{F}_{\mathbf{h}} =$
 $\mathcal{F} \cdot (T \hat{a})$ เมื่อ T คือลำดับจำกัดของคาร์ทใน $D_{\mathbf{h}}$ และ $(T \hat{a})$ คือหน้าที่มีคาร์ท \hat{a} อยู่ จากการ
 คำนวณ $\mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{V}_{\mathbf{h}'} \mathcal{E}_{\mathbf{h}'}$ จะได้ว่า $\mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{F} \cdot (T \hat{a} \hat{x} \hat{y})$ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ว่า $\mathbf{h}' = \mathbf{r}_1^\mu \odot$
 $\mathbf{e}_1^{-\mu} \odot \mathbf{h}$ โดยที่ $\mu = \{(a, \hat{a}), (x, \hat{x}), (y, \hat{y})\}$ และได้ว่า $\mathbf{e}_1^\mu \subseteq \mathbf{h}$ และ $\mu[D_{\mathbf{r}_1}] - \mu[D_{\mathbf{e}_1}] =$
 $\{\hat{x}, \hat{y}\} = D_{\mathbf{h}'} - D_{\mathbf{h}}$ จึงกล่าวตามบทนิยามที่ 3.1.4 ได้ว่า $\mathbf{h} \Rightarrow_{p_1} \mathbf{h}'$ และสรุปจากบทตั้งที่ 3.1.6
 ได้ว่ามี $\tilde{\mathbf{h}}'$ ที่ทำให้ $\mathbf{z}_1 \Rightarrow_{p_1}^{n+1} \tilde{\mathbf{h}}' \simeq \mathbf{h}'$

ดังนั้นจากการพิสูจน์ทั้งสองส่วน จะสรุปได้ว่า $L(G_1) = \text{PT}_1$ ■



ภาพที่ 9 กฎการผลิตสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ

สำหรับกรณี $k = 2$ กฎการผลิต p_2 สามารถแสดงได้ดังรูปบนของภาพที่ 9 ซึ่งแสดงถึงการ
 เพิ่มจุดยอดใหม่โดยเชื่อมต่อกับจุดยอด v_1 และ v_2 ซึ่งหากยึดตามนิยามเวียนเกิดของแมพเชิงต้นไม้
 อันดับสอง จะได้ว่า v_1 และ v_2 จะต้องเป็นจุดยอดประชิด อย่างไรก็ตามกฎ p_2 สามารถนำมาใช้กับไฮ
 เพอร์แมพใดก็ตามที่มีสองจุดยอดซึ่งมีหน้าร่วมกันอย่างน้อยสองหน้า ดังที่แสดงในรูปล่างของภาพที่ 9
 ที่ด้านซ้ายมือมีจุดยอด v_1 และ v_2 มีหน้าร่วมกันอย่างน้อยสองหน้าคือ f_a และ f_b โดยสังเกตว่า
 จุดยอด v_1 และ v_2 อาจไม่มีเส้นเชื่อมโดยตรงหากันเลย จึงจำเป็นต้องอาศัยข้อเท็จจริงเพิ่มเติมที่ว่า
 จุดยอดสองจุดในแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบจะประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ สองจุดยอดนั้นมีหน้า
 ร่วมกันอย่างน้อยสองหน้า ซึ่งได้พิสูจน์ไว้แล้วในบทตั้งที่ 3.2.6 จึงจะเห็นได้ว่ากฎ p_2 สามารถ
 ก่อกำเนิดแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบได้ครบถ้วนพอดี โดยมีรายละเอียดการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.2 ภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ G_2 จะเป็นเซตเดียวกันกับ คลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ กล่าวคือ $L(G_2) = \text{PT}_2$

บทพิสูจน์ จะแบ่งบทพิสูจน์ออกเป็นสองส่วน โดยในส่วนแรกจะแสดง $L(G_2) \subseteq \text{PT}_2$ นั่นคือทุกไฮเพอร์แมพที่กำเนิดจาก G_2 จะเป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ และในส่วนที่สองจะแสดง $L(G_2) \supseteq \text{PT}_2$ นั่นคือ ทุกแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบจะสามารถสร้างมาจาก G_2

1) ส่วนแรกจะแสดง $L(G_2) \subseteq \text{PT}_2$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนขั้นตอนในการแปลง เพื่อแสดงสำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ ว่าหาก \mathbf{h} เป็นไฮเพอร์แมพที่ $\mathbf{z}_2 \Rightarrow_{p_2}^n \mathbf{h}$ แล้วจะได้ว่า $\mathbf{h} \in \text{PT}_2$ ซึ่งชัดเจนว่าไฮเพอร์แมพที่สมมูลฐานกับ \mathbf{h} ย่อมเป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบด้วย ขั้นฐาน ไฮเพอร์แมพเดียวที่แปลงจาก \mathbf{z}_2 ในศูนย์ขั้นตอนก็คือ \mathbf{z}_2 เอง ซึ่งเป็นแมพเชิงระนาบของกราฟ K_3 ดังนั้น \mathbf{z}_2 คือแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบที่เล็กที่สุดตามบทนิยามที่ 3.2.1

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ \mathbf{h} เป็นไฮเพอร์แมพที่ $\mathbf{z}_2 \Rightarrow_{p_2}^n \mathbf{h}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัย (Inductive Hypothesis) ให้ $\mathbf{h} \in \text{PT}_2$ จากนั้นจะพิจารณาไฮเพอร์แมพ \mathbf{h}' ที่เกิดจาก $\mathbf{h} \Rightarrow_{p_2} \mathbf{h}'$ จะได้ว่า $\mathbf{z}_2 \Rightarrow_{p_2}^{n+1} \mathbf{h}'$ และจากบทนิยามที่ 3.1.4 จะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{r_2} \rightarrow D_{\mathbf{h}'}$ ที่ซึ่ง $\mu[D_{r_2}] - \mu = D_{\mathbf{h}'} - D_{\mathbf{h}}$ และ $\mathbf{l}_2^\mu \subseteq \mathbf{h}$ และได้ว่า $\mathbf{h}' = \mathbf{r}_2^\mu \odot \mathbf{l}_2^{-\mu} \odot \mathbf{h}$ ดังนั้นจะสามารถเขียนบรรยาย \mathbf{h} ได้ว่า

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 a_1^\mu S_1' b_1^\mu)(S_2 a_2^\mu S_2' b_2^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (T_1 a_1^\mu T_2 a_2^\mu)(T_1' b_1^\mu T_2' b_2^\mu) \end{bmatrix}$$

เมื่อ S_i, S_i', T_i, T_i' คือลำดับจำกัดของคาร์ทใน $D_{\mathbf{h}}$ และ $\hat{\mathcal{V}}$ กับ $\hat{\mathcal{F}}$ ประกอบด้วยวัฏจักรทั้งหมดของ $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$ กับ $\mathcal{F}_{\mathbf{h}}$ ที่ไม่มีคาร์ทของ \mathbf{l}_2^μ เป็นสมาชิก และจากผลคูณไฮเพอร์แมพจะเขียนบรรยาย \mathbf{h}' ได้ว่า

$$\mathbf{h}' = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 a_1^\mu y_1^\mu S_1' b_1^\mu)(S_2 a_2^\mu y_2^\mu S_2' b_2^\mu)(x_2^\mu x_1^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (T_1 a_1^\mu x_1^\mu y_2^\mu)(T_2 a_2^\mu x_2^\mu y_1^\mu)(T_1' b_1^\mu T_2' b_2^\mu) \end{bmatrix}$$

โดยสามารถคำนวณการเรียงสับเปลี่ยน $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}$ ได้ว่า $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{V}_{\mathbf{h}'}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (x_1^\mu y_1^\mu)(x_2^\mu y_2^\mu)$ ซึ่งจากสมมติฐานเชิงอุปนัยจะได้ว่า \mathbf{h} เป็นแมพเชิงระนาบ นั่นคือ $\|\mathcal{V}_{\mathbf{h}}\| - \|\mathcal{E}_{\mathbf{h}}\| + \|\mathcal{F}_{\mathbf{h}}\| = 2$ และ $\mathcal{E}_{\mathbf{h}}$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ ซึ่งจาก $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (x_1^\mu y_1^\mu)(x_2^\mu y_2^\mu)$ จะได้ว่า $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ด้วย อีกทั้งจากการเขียนบรรยายของ \mathbf{h} และ \mathbf{h}' จะเห็นได้ว่า $\|\mathcal{V}_{\mathbf{h}'}\| = \|\mathcal{V}_{\mathbf{h}}\| + 1$, $\|\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}\| = \|\mathcal{E}_{\mathbf{h}}\| + 2$, และ $\|\mathcal{F}_{\mathbf{h}'}\| = \|\mathcal{F}_{\mathbf{h}}\| + 1$ ซึ่งได้ว่า

$$\|\mathcal{V}_{\mathbf{h}'}\| - \|\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}\| + \|\mathcal{F}_{\mathbf{h}'}\| = (\|\mathcal{V}_{\mathbf{h}}\| + 1) - (\|\mathcal{E}_{\mathbf{h}}\| + 2) + (\|\mathcal{F}_{\mathbf{h}}\| + 1) = 2$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า \mathcal{H}' เป็นแมพเชิงระนาบ นอกจากนี้ยังกล่าวได้ว่า \mathcal{H}' เกิดจากการเพิ่มจุดยอดระดับชั้นสอง $\nu = (x_2^\mu \ x_1^\mu)$ ให้กับ \mathcal{H} โดยเชื่อมต่อ ν ด้วยเส้นเชื่อม $(x_i^\mu \ y_i^\mu)$ กับจุดยอดของ \mathcal{H} ที่มี a_i^μ เป็นสมาชิก นั่นคือ $u_i = (S_i \ a_i^\mu \ S_i' \ b_i^\mu)$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$ จึงกล่าวได้ว่าจุดยอดเพื่อนบ้านของ ν มีสองจุดคือ u_1 และ u_2 ซึ่งสองจุดยอดนี้มีหน้าร่วมกันอย่างน้อยสองหน้า นั่นคือ

$$F_{\mathcal{H}}(u_1) \cap F_{\mathcal{H}}(u_2) = \{(T_1 \ a_1^\mu \ T_2 \ a_2^\mu), (T_1' \ b_1^\mu \ T_2' \ b_2^\mu), \dots\}$$

ซึ่งสรุปได้จากบทตั้งที่ 3.2.6 ว่า u_1 และ u_2 นั้นประชิดกัน ซึ่งถือเป็นกลุ่มพรรคพวกอันดับสองใน \mathcal{H} ดังนั้นจากนิยามเวียนเกิดในบทนิยามที่ 3.2.1 จะได้ว่า $\mathcal{H}' \in \text{PT}_2$

2) ส่วนที่สองจะแสดง $L(\mathcal{G}_2) \supseteq \text{PT}_2$ โดยใช้อุปนัยเชิงโครงสร้างบนนิยามแบบเวียนเกิดของแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบในบทนิยามที่ 3.2.1 เพื่อแสดงว่าทุกแมพ $\mathcal{H} \in \text{PT}_2$ จะมีแมพ $\tilde{\mathcal{H}}$ ที่สมมูลฐานกับ $\tilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}$ ที่ทำให้ $\mathcal{Z}_2 \Rightarrow_{\mathcal{P}_2}^n \tilde{\mathcal{H}}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}$

ขั้นฐาน แมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบที่เล็กที่สุดตามบทนิยามที่ 3.2.1 คือแมพเชิงระนาบของกราฟ K_3 ซึ่งหมายถึงแมพ \mathcal{H} ใดก็ตามที่สมมูลฐานกับ \mathcal{Z}_2 ซึ่งจะได้ว่า $\mathcal{Z}_2 \Rightarrow_{\mathcal{P}_2}^0 \mathcal{Z}_2 \simeq \mathcal{H}$

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ $\mathcal{H} \in \text{PT}_2$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัย (Inductive Hypothesis) ให้มีแมพ $\tilde{\mathcal{H}}$ ที่ทำให้ $\mathcal{Z}_2 \Rightarrow_{\mathcal{P}_2}^n \tilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จากนี้จะพิจารณาแมพ $\mathcal{H}' \in \text{PT}_2$ ที่สร้างตามนิยามเวียนเกิดในบทนิยามที่ 3.2.1 โดยการเพิ่มจุดยอดระดับชั้นสอง $\nu = (\hat{x}_2 \ \hat{x}_1)$ ให้กับ \mathcal{H} เมื่อ $\hat{x}_i \notin D_{\mathcal{H}}$ โดยจุดยอดเพื่อนบ้านของ ν จะเป็นกลุ่มพรรคพวกอันดับสองใน \mathcal{H} ซึ่งคือสองจุดยอดที่ประชิดกัน โดยสมมติว่าคือจุดยอด u_1 และ u_2 ของ \mathcal{H} ซึ่งสรุปได้จากบทตั้งที่ 3.2.6 ว่า u_1 และ u_2 มีหน้าร่วมกันอย่างน้อยสองหน้า สมมติว่าคือหน้า \mathcal{F}_a และ \mathcal{F}_b ดังนั้นจะได้ว่า

- จุดยอด u_1 จะมีสองดาร์ท \hat{a}_1, \hat{b}_1 โดยที่ \hat{a}_1 ปรากฏในหน้า \mathcal{F}_a และ \hat{b}_1 ปรากฏในหน้า \mathcal{F}_b
- จุดยอด u_2 จะมีสองดาร์ท \hat{a}_2, \hat{b}_2 โดยที่ \hat{a}_2 ปรากฏในหน้า \mathcal{F}_a และ \hat{b}_2 ปรากฏในหน้า \mathcal{F}_b

ดังนั้นจะสามารถเขียนบรรยายได้ว่าจุดยอด $u_i = (S_i \ \hat{a}_i \ S_i' \ \hat{b}_i)$ เมื่อ $i \in \{1, 2\}$ และได้ว่าหน้า $\mathcal{F}_x = (T_x \ \hat{x}_1 \ T_x' \ \hat{x}_2)$ เมื่อ $x \in \{a, b\}$ โดยที่ S_i, S_i', T_x, T_x' เป็นลำดับจำกัดของดาร์ทใน $D_{\mathcal{H}}$

การใส่จุดยอด ν เพื่อเชื่อมต่อกับ u_1 และ u_2 โดยคงสถานะเชิงระนาบนั้น จะต้องใส่ ν และเส้นเชื่อมของมันลงในหน้าใดหน้าหนึ่ง และต้องเป็นหน้าที่มีร่วมกันของ u_1 และ u_2 โดยจะสมมติให้ใส่จุดยอด ν ลงในหน้า \mathcal{F}_a และเชื่อมต่อกับ u_i ด้วยเส้นเชื่อม $(\hat{x}_i \ \hat{y}_i)$ เมื่อ $\hat{y}_i \notin D_{\mathcal{H}}$ โดยเชื่อมเข้าหลังดาร์ท \hat{a}_i จะได้ว่า u_i จะกลายเป็นจุดยอด $u_i' = (S_i \ \hat{a}_i \ \hat{y}_i \ S_i' \ \hat{b}_i)$ ของ \mathcal{H}' และหากเขียน

ด้วยสัญกรณ์วัฏจักรได้ว่า $\mathcal{V}_{\mathbf{h}} = \hat{\mathcal{V}} \cdot u_1 \cdot u_2 = \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 \hat{a}_1 S_1' \hat{b}_1)(S_2 \hat{a}_2 S_2' \hat{b}_2)$ โดยที่ $\hat{\mathcal{V}}$ แทนจุดยอดอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ u_1 กับ u_2 ก็จะสามารถเขียนบรรยาย $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$ ได้ว่า

$$\mathcal{V}_{\mathbf{h}'} = \hat{\mathcal{V}} \cdot u_1' u_2' v = \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 \hat{a}_1 \hat{y}_1 S_1' \hat{b}_1)(S_2 \hat{a}_2 \hat{y}_2 S_2' \hat{b}_2)(\hat{x}_2 \hat{x}_1)$$

และจะได้ $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (\hat{x}_1 \hat{y}_1)(\hat{x}_2 \hat{y}_2)$ ดังนั้นหาก $\mathcal{F}_{\mathbf{h}} = \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F}_a \cdot \mathcal{F}_b$ เมื่อ $\hat{\mathcal{F}}$ ประกอบด้วยหน้าอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ \mathcal{F}_a และ \mathcal{F}_b จากการคำนวณ $\mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{V}_{\mathbf{h}'} \mathcal{E}_{\mathbf{h}'}$ จะได้ว่า

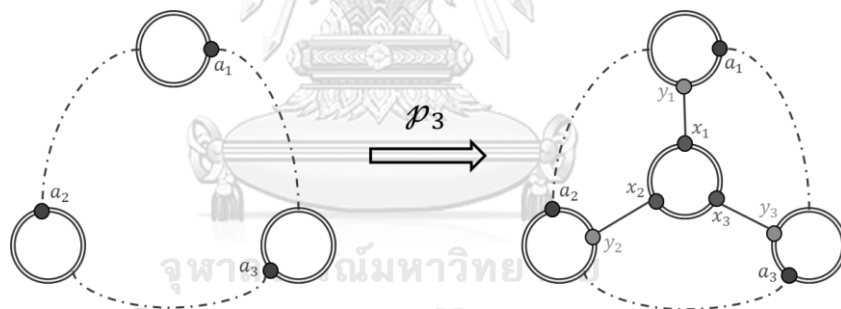
$$\mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \hat{\mathcal{F}} \cdot (T_a \hat{a}_1 \hat{x}_1 \hat{y}_2)(T_a' \hat{a}_2 \hat{x}_2 \hat{y}_1) \cdot \mathcal{F}_b$$

นั่นคือ \mathcal{F}_a จะถูกแบ่งออกเป็นสองหน้าย่อย ได้แก่ $(T_a \hat{a}_1 \hat{x}_1 \hat{y}_2)$ และ $(T_a' \hat{a}_2 \hat{x}_2 \hat{y}_1)$ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ว่า $\mathbf{h}' = r_2^\mu \odot \ell_2^{-\mu} \odot \mathbf{h}$ เมื่อ

$$\mu = \{(a_1, \hat{a}_1), (a_2, \hat{a}_2), (b_1, \hat{b}_1), (b_2, \hat{b}_2), (x_1, \hat{x}_1), (x_2, \hat{x}_2), (y_1, \hat{y}_1), (y_2, \hat{y}_2)\}$$

และได้ว่า $\ell_2^\mu \subseteq \mathbf{h}$ และ $\mu[D_{r_2}] - \mu[D_{\ell_2}] = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1, \hat{y}_2\} = D_{\mathbf{h}'} - D_{\mathbf{h}}$ จากบทนิยามที่ 3.1.4 กล่าวได้ว่า $\mathbf{h} \Rightarrow_{p_2} \mathbf{h}'$ และสรุปจากบทตั้งที่ 3.1.6 ได้ว่ามี $\tilde{\mathbf{h}}'$ ที่ทำให้ $\mathbf{z}_2 \Rightarrow_{p_2}^{n+1} \tilde{\mathbf{h}}' \simeq \mathbf{h}'$

ดังนั้นจากการพิสูจน์ทั้งสองส่วน จะสรุปได้ว่า $L(\mathcal{G}_2) = \text{PT}_2$ ■



ภาพที่ 10 การแปลงด้วยกฎการผลิตสำหรับแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบ

สำหรับกรณี $k = 3$ เนื่องจากแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบ นั้นเทียบเท่าได้กับโครงข่ายอพลโลเนียน ดังนั้นจะสามารถใช้นิยามชั้นเวียนเกิดจากบทนิยามที่ 2.5.3 (ซึ่งเข้าใจได้ง่ายกว่า) ชั้นเวียนเกิดจากบทนิยามที่ 3.2.1) ซึ่งกล่าวไว้ว่าให้เพิ่มจุดยอดลงในหน้าใดหน้าหนึ่ง ซึ่งจะมีขนาดเป็นสามเสมอ และให้เชื่อมจุดยอดใหม่นี้กับจุดยอดทั้งสามที่ล้อมรอบหน้านั้น

ในขณะที่กฎการผลิต p_3 จะหาไฮเพอร์แมพย่อยที่มีหน้าใดหน้าหนึ่งมีจุดยอดล้อมรอบอย่างน้อยสามจุด และใส่จุดยอดใหม่ลงไปในหน้านั้น โดยเลือกเชื่อมต่อกับจุดยอดสามจุดที่ล้อมรอบหน้านั้น โดยแสดงได้ดังภาพที่ 10 และเนื่องจากทุกหน้าของโครงข่ายอพลโลเนียนจะมีขนาดเป็นสามเสมอ ดังนั้นจะเห็นว่ากฎ p_3 สามารถใช้สร้างโครงข่ายอพลโลเนียนได้ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.3 ภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพ G_3 จะเป็นเซตเดียวกันกับ คลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบ กล่าวคือ $L(G_3) = \text{PT}_3$

บทพิสูจน์ จะแบ่งบทพิสูจน์ออกเป็นสองส่วน โดยในส่วนแรกจะแสดง $L(G_3) \subseteq \text{PT}_3$ นั่นคือทุกไฮเปอร์แมพที่กำเนิดจาก G_3 จะเป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบ และในส่วนที่สองจะแสดง $L(G_3) \supseteq \text{PT}_3$ นั่นคือ ทุกแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบจะสามารถสร้างมาจาก G_3

1) ส่วนแรกจะแสดง $L(G_3) \subseteq \text{PT}_3$ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนขั้นตอนในการแปลง เพื่อแสดงสำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ ว่าหาก \mathbf{h} เป็นไฮเปอร์แมพที่ $\mathbf{z}_3 \Rightarrow_{p_3}^n \mathbf{h}$ แล้วจะได้ว่า $\mathbf{h} \in \text{PT}_3$ ซึ่งชัดเจนว่าไฮเปอร์แมพที่สมมูลฐานกับ \mathbf{h} ย่อมเป็นแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบด้วย ขั้นฐาน ไฮเปอร์แมพเดียวที่แปลงจาก \mathbf{z}_3 ในศูนย์ขั้นตอนก็คือ \mathbf{z}_3 เอง ซึ่งเป็นแมพเชิงระนาบของกราฟ K_4 ดังนั้น \mathbf{z}_3 คือแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบที่เล็กที่สุดตามบทนิยามที่ 3.2.1

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ \mathbf{h} เป็นไฮเปอร์แมพที่ $\mathbf{z}_3 \Rightarrow_{p_3}^n \mathbf{h}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัย (Inductive Hypothesis) ให้ $\mathbf{h} \in \text{PT}_3$ ซึ่งสามารถกล่าวได้ว่า \mathbf{h} เป็นโครงข่ายอพอลโลเนียน จากนี้จะพิจารณาไฮเปอร์แมพ \mathbf{h}' ที่เกิดจาก $\mathbf{h} \Rightarrow_{p_3} \mathbf{h}'$ จะได้ว่า $\mathbf{z}_3 \Rightarrow_{p_3}^{n+1} \mathbf{h}'$ และจากบทนิยามที่ 3.1.4 จะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\mu : D_{r_3} \rightarrow D_{\mathbf{h}'}$ ที่ซึ่ง $\mu[D_{r_3} - D_{\ell_3}] = D_{\mathbf{h}'} - D_{\mathbf{h}}$ และ $\ell_3^\mu \subseteq \mathbf{h}$ ได้ว่า $\mathbf{h}' = r_3^\mu \odot \ell_3^{-\mu} \odot \mathbf{h}$ นอกจากนี้ยังทราบจากทฤษฎีบทที่ 2.5.4 ว่าทุกหน้าของ \mathbf{h} เป็นวัฏจักรความยาวสาม ดังนั้นจะเขียนบรรยาย \mathbf{h} ได้ว่า

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 a_1^\mu)(S_2 a_2^\mu)(S_3 a_3^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (a_1^\mu a_2^\mu a_3^\mu) \end{bmatrix}$$

เมื่อ S_i คือลำดับจำกัดของดาร์ทใน $D_{\mathbf{h}}$ และ $\hat{\mathcal{V}}$ กับ $\hat{\mathcal{F}}$ ประกอบด้วยวัฏจักรทั้งหมดของ $\mathcal{V}_{\mathbf{h}}$ กับ $\mathcal{F}_{\mathbf{h}}$ ที่ไม่มีดาร์ทของ ℓ_3^μ เป็นสมาชิกตามลำดับ และจากผลคูณไฮเปอร์แมพจะเขียนบรรยาย \mathbf{h}' ได้ว่า

$$\mathbf{h}' = \begin{bmatrix} \mathcal{V} : \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 a_1^\mu y_1^\mu)(S_2 a_2^\mu y_2^\mu)(S_3 a_3^\mu y_3^\mu)(x_3^\mu x_2^\mu x_1^\mu) \\ \mathcal{F} : \hat{\mathcal{F}} \cdot (a_1^\mu x_1^\mu y_3^\mu)(a_2^\mu x_2^\mu y_1^\mu)(a_3^\mu x_3^\mu y_2^\mu) \end{bmatrix}$$

และสามารถคำนวณได้ว่า $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{V}_{\mathbf{h}'}^{-1} \mathcal{F}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (x_1^\mu y_1^\mu)(x_2^\mu y_2^\mu)(x_3^\mu y_3^\mu)$ ซึ่งจากสมมติฐานเชิงอุปนัยจะได้ว่า \mathbf{h} เป็นแมพเชิงระนาบ นั่นคือ $\|\mathcal{V}_{\mathbf{h}}\| - \|\mathcal{E}_{\mathbf{h}}\| + \|\mathcal{F}_{\mathbf{h}}\| = 2$ และ $\mathcal{E}_{\mathbf{h}}$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ ซึ่งจาก $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'} = \mathcal{E}_{\mathbf{h}} \cdot (x_1^\mu y_1^\mu)(x_2^\mu y_2^\mu)(x_3^\mu y_3^\mu)$ จะได้ว่า $\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบจับคู่ด้วยเช่นกัน อีกทั้งจากการเขียนบรรยายของ \mathbf{h} และ \mathbf{h}' จะเห็นได้ว่า $\|\mathcal{V}_{\mathbf{h}'}\| = \|\mathcal{V}_{\mathbf{h}}\| + 1$, $\|\mathcal{E}_{\mathbf{h}'}\| = \|\mathcal{E}_{\mathbf{h}}\| + 3$, และ $\|\mathcal{F}_{\mathbf{h}'}\| = \|\mathcal{F}_{\mathbf{h}}\| + 2$ ซึ่งได้ว่า

$$\|\mathcal{V}_{\mathcal{H}'}\| - \|\mathcal{E}_{\mathcal{H}'}\| + \|\mathcal{F}_{\mathcal{H}'}\| = (\|\mathcal{V}_{\mathcal{H}}\| + 1) - (\|\mathcal{E}_{\mathcal{H}}\| + 3) + (\|\mathcal{F}_{\mathcal{H}}\| + 2) = 2$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า \mathcal{H}' เป็นแมพเชิงระนาบ นอกจากนี้ยังกล่าวได้ว่า \mathcal{H}' เกิดจากการเพิ่มจุดยอดระดับชั้นสาม $\nu = (x_3^\mu \ x_2^\mu \ x_1^\mu)$ ให้กับ \mathcal{H} โดยใส่ลงในหน้า $\mathcal{F} = (a_1^\mu \ a_2^\mu \ a_3^\mu)$ และเชื่อมต่อ ν ด้วยเส้นเชื่อม $(x_i^\mu \ y_i^\mu)$ กับจุดยอดที่อยู่ล้อมรอบหน้า \mathcal{F} ซึ่งก็คือจุดยอดที่มี a_i^μ เป็นสมาชิกคือ $(S_i \ a_i^\mu)$ เมื่อ $i \in [1..3]$ ซึ่งสรุปได้จากนิยามเวียนเกิดในบทนิยามที่ 2.5.3 ว่า \mathcal{H}' เป็นโครงข่ายฮอปโลเนียนและกล่าวได้ว่า $\mathcal{H}' \in \text{PT}_3$

2) ส่วนที่สองจะแสดง $L(\mathcal{G}_3) \supseteq \text{PT}_3$ โดยใช้อุปนัยเชิงโครงสร้างบนนิยามแบบเวียนเกิดของแมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบในบทนิยามที่ 3.2.1 ผสานกับนิยามเวียนเกิดของโครงข่ายฮอปโลเนียนในบทนิยามที่ 2.5.3 เพื่อแสดงว่าทุกแมพ $\mathcal{H} \in \text{PT}_3$ จะมีแมพ $\tilde{\mathcal{H}}$ ที่สมมูลฐานกับ $\mathcal{H} \simeq \tilde{\mathcal{H}}$ ที่ทำให้ $\mathcal{Z}_3 \Rightarrow_{p_3}^n \tilde{\mathcal{H}}$ สำหรับบางจำนวนเต็ม $n \in \mathbb{N}$

ขั้นฐาน แมพเชิงต้นไม้อันดับสามเชิงระนาบที่เล็กที่สุดตามบทนิยามที่ 3.2.1 คือแมพเชิงระนาบของกราฟ K_4 ซึ่งหมายถึงแมพ \mathcal{H} ใดก็ตามที่สมมูลฐานกับ \mathcal{Z}_3 ซึ่งจะได้ว่า $\mathcal{Z}_3 \Rightarrow_{p_3}^0 \mathcal{Z}_3 \simeq \mathcal{H}$

ขั้นอุปนัย กำหนดให้ $\mathcal{H} \in \text{PT}_3$ และกำหนดสมมติฐานเชิงอุปนัย (Inductive Hypothesis) ให้มีแมพ $\tilde{\mathcal{H}}$ ที่ทำให้ $\mathcal{Z}_3 \Rightarrow_{p_3}^n \tilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งจะกล่าวได้ว่า \mathcal{H} เป็นโครงข่ายฮอปโลเนียนจากนี้จะพิจารณาแมพ $\mathcal{H}' \in \text{PT}_3$ ที่สร้างตามนิยามเวียนเกิดของโครงข่ายฮอปโลเนียนในบทนิยามที่ 2.5.3 โดยการเพิ่มจุดยอด ν โดยใส่ลงในหน้า \mathcal{F} ของ \mathcal{H} ซึ่งจากทฤษฎีบทที่ 2.5.4 จะได้ว่า \mathcal{F} เป็นวัฏจักรความยาวสามเสมอ จึงสมมติให้ $\mathcal{F} = (\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \hat{a}_3)$ เมื่อ $\hat{a}_i \in D_{\mathcal{H}}$ และสมมติให้จุดยอดที่อยู่ล้อมรอบ \mathcal{F} คือ $u_i = (S_i \ \hat{a}_i)$ เมื่อ $i \in [1..3]$ จากนั้นจะเชื่อมจุดยอด ν กับแต่ละจุดยอด u_i ด้วยเส้นเชื่อม $(\hat{x}_i \ \hat{y}_i)$ โดยให้ \hat{x}_i เป็นดาร์ทที่อยู่ใน ν และ \hat{y}_i เป็นดาร์ทที่จะถูกเพิ่มเข้ามาใน u_i จนกลายเป็นจุดยอด u'_i ของ \mathcal{H}' โดยดาร์ท \hat{y}_i จะแทรกมาอยู่หลัง \hat{a}_i จึงได้ว่า $u'_i = (S_i \ \hat{a}_i \ \hat{y}_i)$ และเนื่องจากวัฏจักรของจุดยอดเมื่อแสดงบนระนาบจะวนทวนทางกับวัฏจักรของหน้า ดังนั้นเมื่อ $\mathcal{F} = (\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \hat{a}_3)$ ก็จะได้ว่า $\nu = (\hat{x}_3 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_1)$

ดังนั้นหากเขียนด้วยสัญกรณ์วัฏจักรได้ว่า $\mathcal{V}_{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{V}} \cdot u_1 u_2 u_3 = \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 \ \hat{a}_1)(S_2 \ \hat{a}_2)(S_3 \ \hat{a}_3)$ เมื่อ $\hat{\mathcal{V}}$ ประกอบด้วยจุดยอดอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ $u_1, u_2,$ และ u_3 ก็จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}'} = \hat{\mathcal{V}} \cdot u'_1 u'_2 u'_3 \nu = \hat{\mathcal{V}} \cdot (S_1 \ \hat{a}_1 \ \hat{y}_1)(S_2 \ \hat{a}_2 \ \hat{y}_2)(S_3 \ \hat{a}_3 \ \hat{y}_3)(\hat{x}_3 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_1)$$

และจะได้ $\mathcal{E}_{\mathcal{H}'} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cdot (\hat{x}_1 \ \hat{y}_1)(\hat{x}_2 \ \hat{y}_2)(\hat{x}_3 \ \hat{y}_3)$ ดังนั้นหาก $\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}} \cdot (\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \hat{a}_3)$ เมื่อ $\hat{\mathcal{F}}$ ประกอบด้วยหน้าอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ \mathcal{F} จากการคำนวณ $\mathcal{F}_{\mathcal{H}'} = \mathcal{V}_{\mathcal{H}'} \mathcal{E}_{\mathcal{H}'}$ จะได้ว่า

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{h}'} = \hat{\mathcal{F}} \cdot (\hat{a}_1 \hat{x}_1 \hat{y}_3)(\hat{a}_2 \hat{x}_2 \hat{y}_1)(\hat{a}_3 \hat{x}_3 \hat{y}_2)$$

นั่นคือ \mathcal{F} จะถูกแบ่งออกเป็นสามหน้าย่อยที่เป็นวัฏจักรความยาวสามทั้งหมด ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ว่า $\mathfrak{h}' = \mathfrak{r}_3^\mu \odot \mathfrak{l}_3^{-\mu} \odot \mathfrak{h}$ โดยที่ $\mu = \cup_{i=1}^3 \{(a_i, \hat{a}_i), (x_i, \hat{x}_i), (y_i, \hat{y}_i)\}$ และได้ว่า $\mathfrak{l}_3^\mu \sqsubseteq \mathfrak{h}$ และ $\mu[D_{\mathfrak{r}_3}] - \mu[D_{\mathfrak{l}_3}] = \cup_{i=1}^3 \{\hat{x}_i, \hat{y}_i\} = D_{\mathfrak{h}'} - D_{\mathfrak{h}}$ จึงกล่าวสรุปจากบทนิยามที่ 3.1.4 ได้ว่า $\mathfrak{h} \Rightarrow_{p_3} \mathfrak{h}'$ และจากบทตั้งที่ 3.1.6 จะได้ว่ามี $\tilde{\mathfrak{h}}'$ ที่ทำให้ $\mathfrak{z}_3 \Rightarrow_{p_3}^{n+1} \tilde{\mathfrak{h}}' \simeq \mathfrak{h}'$

ดังนั้นจากการพิสูจน์ทั้งสองส่วน จะสรุปได้ว่า $L(G_3) = \text{PT}_3$ ■



บทที่ 4

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 การเปรียบเทียบไวยากรณ์ที่นำเสนอ

งานวิจัยนี้นำเสนอแนวทางใหม่ในการผลิตไฮเพอร์แมพโดยใช้ไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ โดยปรับการดำเนินการต่าง ๆ ของไฮเพอร์แมพให้นิยามด้วยจุดยอดและหน้า แทนการนิยามด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อม นับเป็นการใช้ประโยชน์ของหน้า ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญในแมพและไฮเพอร์แมพที่ไม่มีในกราฟและไฮเพอร์กราฟ ช่วยเพิ่มความสามารถในการจัดการไฮเพอร์แมพ โดยเฉพาะการจัดการเกี่ยวกับหน้า ผ่านการระบุความสัมพันธ์ระหว่างหน้าและจุดยอด และช่วยเพิ่มความยืดหยุ่นในการระบุโครงสร้างย่อยของไฮเพอร์แมพ ทำให้สามารถเลือกไฮเพอร์ย่อยที่จุดยอดไม่จำเป็นต้องประชิดกันได้ หรือเลือกกลุ่มจุดยอดใด ๆ ก็ตามที่ปรากฏอยู่ในหน้าหนึ่ง โดยไม่จำเป็นต้องระบุโครงสร้างทั้งหมดของหน้านั้น เช่น

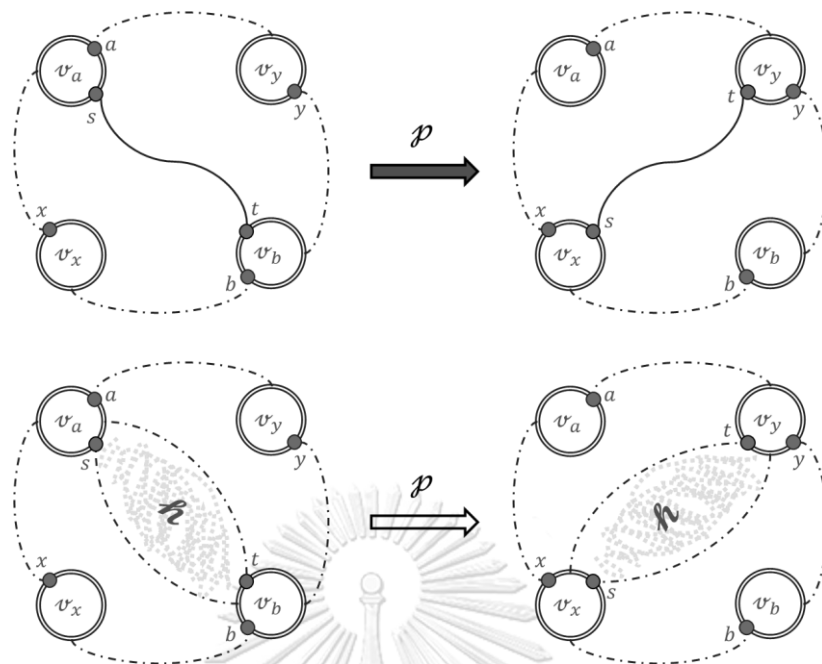
- กฎการผลิต p_3 ที่แสดงในภาพที่ 10 ซึ่งสามารถเลือกสามจุดยอดใดก็ได้ที่ปรากฏอยู่ในหน้าเดียวกัน โดยหน้านั้นอาจล้อมรอบด้วยจุดยอดมากกว่าสามจุดยอดเป็นจำนวนเท่าใดก็ได้ และสามจุดยอดนั้นไม่จำเป็นต้องอยู่ประชิดกันในวัฏจักรของหน้านั้น
- กฎการผลิต p ดังแสดงในภาพที่ 11

$$p = \left(\begin{array}{l} \mathcal{V} : (a\ s)(b\ t)(x)(y) \\ \mathcal{F} : (a\ t\ y)(b\ s\ x) \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \mathcal{V} : (a)(b)(x\ s)(y\ t) \\ \mathcal{F} : (x\ t\ a)(y\ s\ b) \end{array} \right)$$

จะเห็นว่าในด้านซ้ายมือของกฎมีเส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่าง v_a และ v_b โดยเส้นเชื่อมนี้จะย้ายไปเชื่อมระหว่าง v_x และ v_y แทนในด้านขวามือของกฎ อย่างไรก็ตามในการนำไปใช้จริงเส้นเชื่อมนี้จะแสดงแทนไฮเพอร์แมพย่อยบริเวณตรงกลาง โดยจะเรียกว่า h ซึ่งจากเดิมที่เชื่อมต่อกับจุดยอด v_a และ v_b จะถูกเปลี่ยนไปเชื่อมต่อกับจุดยอด v_x และ v_y แทน โดยสามารถมองได้ว่าหากลบ h ออกไป จะได้ว่า v_a, v_b, v_x, v_y ล้วนปรากฏอยู่ในหน้าเดียวกัน แต่อาจจะประชิดกันหรือไม่ก็ได้

ซึ่งกฎการผลิตลักษณะเช่นนี้ ไม่สามารถเป็นไปได้ในงานของ โซพินา เนื่องจากมีการนิยามไฮเพอร์แมพย่อยด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อม ทำให้การเลือกไฮเพอร์แมพย่อยต้องระบุผ่านความประชิดกันด้วยเส้นเชื่อมเสมอ ดังนั้นงานของ โซพินา จะสามารถกล่าวโดยสรุปได้ว่า

- ไม่สามารถเลือกกลุ่มจุดยอดจากตำแหน่งใดก็ได้ในหน้าเดียวกัน
- ไม่สามารถใช้เส้นเชื่อมเพื่อแทนก่อนไฮเพอร์แมพย่อยได้แบบในภาพที่ 11
- ไม่สามารถกำหนดได้ว่าจะให้ดาร์ทใดมาจากหน้าเดียวกันหรือต่างกันบ้าง



ภาพที่ 11 ตัวอย่างกฎการผลิตในการหมุนไฮเปอร์แมพย่อย

ลักษณะของไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพที่นำเสนอ ทำให้เกิดความยืดหยุ่นในการสร้างสรรค์ภาษาของแมพและไฮเปอร์แมพ โดยเฉพาะแมพเชิงระนาบ โดยจากตัวอย่างในงานวิจัยนี้ จะพบว่าสามารถใช้ไวยากรณ์ที่ประกอบด้วยกฎการผลิตเดียวในการก่อกำเนิดคลาสของแมพเชิงต้นไม้อันดับเคเชิงระนาบ ทั้งที่ไวยากรณ์ที่เสนอนี้ไม่มีการใช้ชุดอักขระในการช่วยแปลงไฮเปอร์แมพเลยก็ตาม

ในทางกลับกัน ไวยากรณ์ไฮเปอร์แมพที่นำเสนอในงานนี้กลับมีข้อจำกัดรูปแบบใหม่ กล่าวคือมีความยุ่งยากในการเลือกไฮเปอร์แมพย่อยที่เป็นจุดยอดประชิดกัน กล่าวได้ว่านิยามใหม่ที่นำเสนอในงานนี้ได้แลกความสามารถในการควบคุมเกี่ยวกับเส้นเชื่อม ด้วยความสามารถในการควบคุมเกี่ยวกับหน้านั้นเอง ดังจะเห็นได้จากกฎการผลิตที่ใช้สร้างแมพเชิงต้นไม้อันดับสองเชิงระนาบ ซึ่งจำเป็นต้องเลือกสองจุดยอดประชิดที่ปรากฏอยู่ในหน้าเดียวกัน กล่าวคือสองจุดยอดนั้นต้องมีเส้นเชื่อมหากัน แต่ไม่จำเป็นต้องอยู่ติดกันในวัฏจักรของหน้านั้น ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นต้องมีการเพิ่มบริบทให้กับกฎการผลิตพร้อมกับพิสูจน์ข้อเท็จจริงบางอย่างเพื่อให้ได้มาซึ่งจุดยอดที่มีเส้นเชื่อมหากัน อย่างไรก็ตามจากข้อดีของไวยากรณ์ที่นำเสนอ ก็ทำให้สามารถเลือกจุดยอดที่ไม่จำเป็นต้องอยู่ติดกันในวัฏจักรของหน้าได้ โดยจะสรุปสิ่งที่ไวยากรณ์ในงานนี้ทำไม่ได้ แต่สามารถทำได้ในงานของ โซพินา ได้ดังนี้

- ไม่สามารถเลือกกลุ่มจุดยอดจากตำแหน่งใดก็ได้ในเส้นเชื่อม(ไฮเปอร์)เดียวกัน
- ไม่สามารถใช้หน้าเพื่อแทนก้อนไฮเปอร์แมพย่อยได้
- ไม่สามารถกำหนดได้ว่าจะให้คาร์ทใดมาจากเส้นเชื่อม(ไฮเปอร์)เดียวกันหรือต่างกันบ้าง

โปรดสังเกตว่า ข้อต่อที่หนึ่งและสามนั้นจะแทบไม่มีผลหากพิจารณาเฉพาะการสร้างแมพ เนื่องจากเส้นเชื่อมธรรมดานั้นมีจุดปลายเพียงสองจุดเท่านั้น ต่างกับเส้นเชื่อมไฮเพอร์ที่อาจมีจุดปลายได้หลายจุด ดังนั้นการนิยามด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมนั้นจะไม่สามารถใช้ประโยชน์ได้เต็มที่ในกรณีนี้

4.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางต่อยอด

งานวิจัยนี้ยังมีช่องว่างอีกมากที่สามารถเติมเต็มให้สมบูรณ์ได้ อาทิ นำเสนอไวยากรณ์ในการสร้างคลาสของแมพหรือไฮเพอร์แมพอื่น ๆ ที่น่าสนใจ การพิจารณาไฮเพอร์แมพแบบระบุชื่อ และการใช้ชุดอักขระสำหรับการผลิตไฮเพอร์แมพด้วยไวยากรณ์ ซึ่งจะเพิ่มขีดความสามารถในการก่อกำเนิดภาษาของไวยากรณ์ได้อีกมาก การนำเสนอกฎการผลิตที่สามารถทำการลบดาร์ทได้ พร้อมพิจารณาขอบเขตความสามารถของไวยากรณ์ที่ถือว่าสามารถสร้างภาษาที่นอกเหนือจากเดิมได้หรือไม่ การวิเคราะห์ผลทางทฤษฎี เช่น ความสามารถในการตัดสินใจของปัญหาต่าง ๆ เกี่ยวกับไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ การพิจารณาคลัสย่อยของไวยากรณ์พร้อมแบ่งระดับขั้นตามความซับซ้อนของกฎการผลิต เป็นต้น การนำเสนอวิธีการที่มีประสิทธิภาพ เพื่อตรวจสอบความเป็นสมาชิกของภาษาที่กำเนิดจากไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ

นอกจากนี้งานวิจัยที่ได้สามารถนำไปใช้ต่อยอดในหลากหลายสาขาวิชา เนื่องจากมีหลายปัญหาที่สามารถแปลงเป็นปัญหาเกี่ยวกับแมพเชิงระนาบได้ เช่น ปัญหาการออกแบบวงจรไฟฟ้า (Electrical Circuit Design) ปัญหาคอมพิวเตอร์วิทัศน์ (Computer Vision) ปัญหาการประมวลผลภาพ (Image Processing) [7] และหากสามารถหาอัลกอริทึมในการอนุมานไวยากรณ์ไฮเพอร์แมพ ก็จะสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้อง เช่น การจำแนกภาพ (Image Classification) เป็นต้น

บรรณานุกรม

- [1] M. R. Garey and D. S. Johnson, "Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness," 1979.
- [2] C. De La Higuera, J.-C. Janodet, É. Samuel, G. Damiand, and C. Solnon, "Polynomial algorithms for open plane graph and subgraph isomorphisms," *Theoretical Computer Science*, vol. 498, pp. 76-99, 2013.
- [3] R. Eyraud, J.-C. Janodet, T. Oates, and F. Papadopoulos, "Designing and Learning Substitutable Plane Graph Grammars," *Fundamenta Informaticae*, vol. 146, no. 4, pp. 403-430, 2016.
- [4] E. Sopena, "Combinatorial hypermap rewriting," in *Rewriting Techniques and Applications*, Berlin, Heidelberg, P. Lescanne, Ed., 1987// 1987: Springer Berlin Heidelberg, pp. 62-73.
- [5] D. Zeps, "The theory of combinatorial maps and its use in the graph-topological computations," Institute of Mathematics and Computer Science. University of Latvia, 1998. [Online]. Available: <https://theses.hal.science/tel-00417773>
- [6] D.-Y. Zeng and J.-H. Yin, "On a characterization of k-trees," *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 65, no. 2, pp. 361-365, 2015/06/01 2015, doi: 10.1007/s10587-015-0180-7.
- [7] É. Samuel, C. De La Higuera, and J.-C. Janodet, "Extracting plane graphs from images," in *Joint IAPR International Workshops on Statistical Techniques in Pattern Recognition (SPR) and Structural and Syntactic Pattern Recognition (SSPR)*, 2010: Springer, pp. 233-243.



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	วรวุฒิ โคเมฆารัตน์
วัน เดือน ปี เกิด	29 กรกฎาคม 2536
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
วุฒิการศึกษา	สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมจากโรงเรียนอัสสัมชัญ
ที่อยู่ปัจจุบัน	263/6 หมู่บ้านกักต๊อ ถนนพระรามที่ 3 แขวงบางค้อเขตบางคอแหลม กรุงเทพมหานคร 10120



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY